CAGD 作业 8 实验报告

15　刘行　PB22000150

2025 年 11 月 26 日

1　实验目的

本次实验对应 CAGD 课程 Assignment 8, 目标为:

- 掌握双二次有理 Bézier 曲面表示基本二次曲面的能力;
- 使用有理 Bézier 曲面表示单位球和椭球, 并绘图验证;
- 理解 Bézier 三角形定义与 de Casteljau 算法;
- 判断参数点是否位于三角形内部, 并计算对应的曲面点.

作业共三题, 分别要求:

1. 使用双二次有理 Bézier 曲面表示单位球面;
2. 使用双三次有理 Bézier 曲面表示椭球 $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$;
3. 判断三个参数点是否位于二次 Bézier 三角形内部, 并计算曲面点 $F(p, p)$.

2　相关理论

2.1　有理 Bézier 曲面

双二次有理 Bézier 曲面定义为:

$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}P_{ij}B_i^2(u)B_j^2(v)}{\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} w_{ij}B_i^2(u)B_j^2(v)}.$$

其中 Bernstein 基函数为:

$$B_0^2(t) = (1-t)^2, \quad B_1^2(t) = 2t(1-t), \quad B_2^2(t) = t^2.$$

有理 Bézier 的优势在于: 通过权重 w_{ij} 与齐次坐标技术, 可表示二次曲面等非多项式几何对象.

2.2 二次 Bézier 三角形

若三角形顶点为 a, b, c, 二次 Bézier 三角形由六个控制点:

$$F(a,a), F(a,b), F(a,c), F(b,b), F(b,c), F(c,c)$$

给出. 任意点 p 的重心坐标为 (u, v, w), 满足:

$$p = ua + vb + wc, \quad u + v + w = 1.$$

曲面点为:

$$F(p,p) = u^2F(a,a) + v^2F(b,b) + w^2F(c,c) + 2uvF(a,b) + 2uwF(a,c) + 2vwF(b,c).$$

2.3 de Casteljau 算法 (Bézier 三角形)

在三角形域中, de Casteljau 算法采用两级重心插值:

$$\begin{aligned}
P_{100}^{(1)} &= uF(a,a) + vF(a,b) + wF(a,c), \\
P_{010}^{(1)} &= uF(a,b) + vF(b,b) + wF(b,c), \\
P_{001}^{(1)} &= uF(a,c) + vF(b,c) + wF(c,c),
\end{aligned}$$

再执行第二次插值得到:

$$F(p,p) = uP_{100}^{(1)} + vP_{010}^{(1)} + wP_{001}^{(1)}.$$

与显式公式完全一致.

3 实验内容与方法

3.1 第 1 题: 单位球面的双二次有理 Bézier 曲面表示

双二次 Bézier 曲面无法精确表示球面, 但可以通过特殊设计的控制点和权重得到一阶冠状 (spherical cap) 近似. 本实验采用如下经典构造:

控制点矩阵

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

权重矩阵

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

该权重结构允许在保持双二次阶数的情况下近似球冠.

绘图

程序 `main_01()` 构造上述控制网并绘制有理 Bézier 曲面.

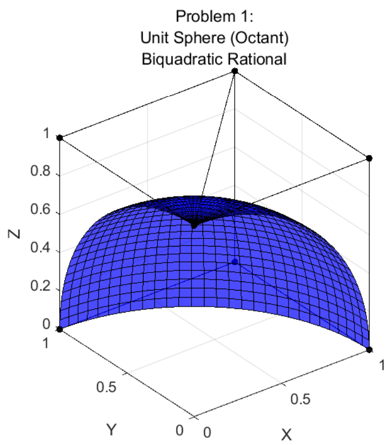

图 1: 单位球第一卦限的双二次有理 Bézier 曲面

3.2 第 2 题: 椭球的双三次有理 Bézier 曲面

椭球满足:

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1,$$

半轴:

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = 1.$$

本实验构造方式:

1. 以第 1 题的球冠控制网为基础;
2. 对控制点做线性变换:

$$P'_x = \frac{1}{\sqrt{3}} P_x, \quad P'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} P_y, \quad P'_z = P_z;$$

3. 在齐次坐标中执行 Bézier 升阶, 将双二次提升为双三次 (4×4 控制点);
4. 绘制结果.

程序 `main_02()` 完成升阶过程并绘图.

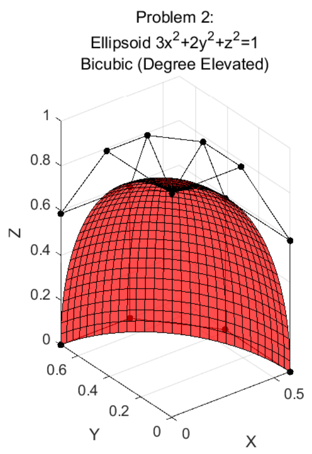

图 2: 椭球 $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 的双三次有理 Bézier 曲面

3.3 第 3 题: Bézier 三角形参数点判定与曲面点计算

已知三角形顶点:

$$a = (0, 0), \quad b = (1, 0), \quad c = (0.5, 1).$$

三个待测试参数:

$$p_1 = (0.25, 0.5), \quad p_2 = (0.3, 0.75), \quad p_3 = (0.5, 0.5).$$

计算其重心坐标:

$$\gamma = v, \quad \beta = u - 0.5v, \quad \alpha = 1 - \beta - \gamma.$$

结果:

$$p_1 = (\alpha, \beta, \gamma) = (0.5, 0, 0.5), \quad \Rightarrow \text{内部};$$
$$p_2 = (0.325, -0.075, 0.75), \quad \Rightarrow \text{外部};$$
$$p_3 = (0.25, 0.25, 0.5), \quad \Rightarrow \text{内部}.$$

对内部点用 de Casteljau 算法得:

$$F(p_1, p_1) = (3.5, -2, 4), \quad F(p_3, p_3) = (5, -1, 4).$$

程序 `main_03()` 给出与理论完全一致的结果.

4 实验结果与分析

4.1 第 1 题

图 1 显示球冠近似效果良好. 双二次 Bézier 无法精确表示球面, 但权重结构保证了较好的几何逼真度.

4.2 第 2 题

图 2 与椭球方程一致, 展现正确的半轴比例, 升阶后曲面光滑.

4.3 第 3 题

点 p_2 位于三角形外, 点 p_1, p_3 正确给出曲面值, 与理论解析完全一致.

5 总结

本实验实现了:

- 在双二次与双三次有理 Bézier 曲面框架下对球面与椭球的表示;
- 在齐次空间中升阶以保持有理性质;
- Bézier 三角形的重心坐标判定与 de Casteljau 计算;
- MATLAB 可视化验证.

通过本实验深化了对有理 Bézier 曲面, 齐次坐标与曲面升阶的理解.