CAGD 作业 6 实验报告

15 刘行

2025 年 11 月 11 日

目录

1 题目 1：三次多项式曲线 $P(u)$（区间 [2,4]）

1.1 题设

$$P(u) = A\,u^3 + B\,u^2 + C\,u + D, \qquad \begin{aligned} A &= -\begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}, \\ C &= -\begin{pmatrix} \frac{57}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 30 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.2 (1) 极坐标形式与 Bézier 控制点

标量三次多项式的极坐标形式为：

$$p[u_1, u_2, u_3] = a\,u_1u_2u_3 + \frac{b}{3}(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) + \frac{c}{3}(u_1 + u_2 + u_3) + d.$$

因此向量形式为：

$$\boxed{P[u_1, u_2, u_3] = A\,u_1u_2u_3 + \tfrac{1}{3}B\sum_{\text{sym}} u_iu_j + \tfrac{1}{3}C(u_1 + u_2 + u_3) + D.}$$

将区间 $[2, 4]$ 线性重参到 $t \in [0, 1]$：

$$t = \frac{u-2}{2}.$$

三次多项式在任意区间 $[a, b]$ 上的 Bézier 控制点满足：

$$\boxed{\begin{aligned} &P_0 = P(a), && P_1 = P(a) + \frac{b-a}{3}P'(a), \\ &P_2 = P(b) - \frac{b-a}{3}P'(b), && P_3 = P(b). \end{aligned}}$$

其中 $a = 2,\ b = 4,\ \frac{b-a}{3} = \frac{2}{3}$。一阶导数为：

$$P'(u) = 3A\,u^2 + 2B\,u + C.$$

计算得：

$$P(2) = (2, 0), \quad P'(2) = (-3, 3);$$
$$P(4) = (4, 1), \quad P'(4) = \left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{9}{2}\right).$$

因此：

$$\boxed{\begin{aligned} P_0 &= (2, 0), \\ P_1 &= (0, 2), \\ P_2 &= (3, 4), \\ P_3 &= (4, 1). \end{aligned}}$$

控制多边形为 $(2, 0) \to (0, 2) \to (3, 4) \to (4, 1)$。

1.3 (2) 用 de Casteljau 算法求值

参数转换 $t = (u-2)/2$，当 $u = \{2.5, 3, 3.5\}$ 时，$t = \{1/4, 1/2, 3/4\}$。以控制点 $P_0 = (2,0), P_1 = (0,2), P_2 = (3,4), P_3 = (4,1)$ 运算。

计算结果：

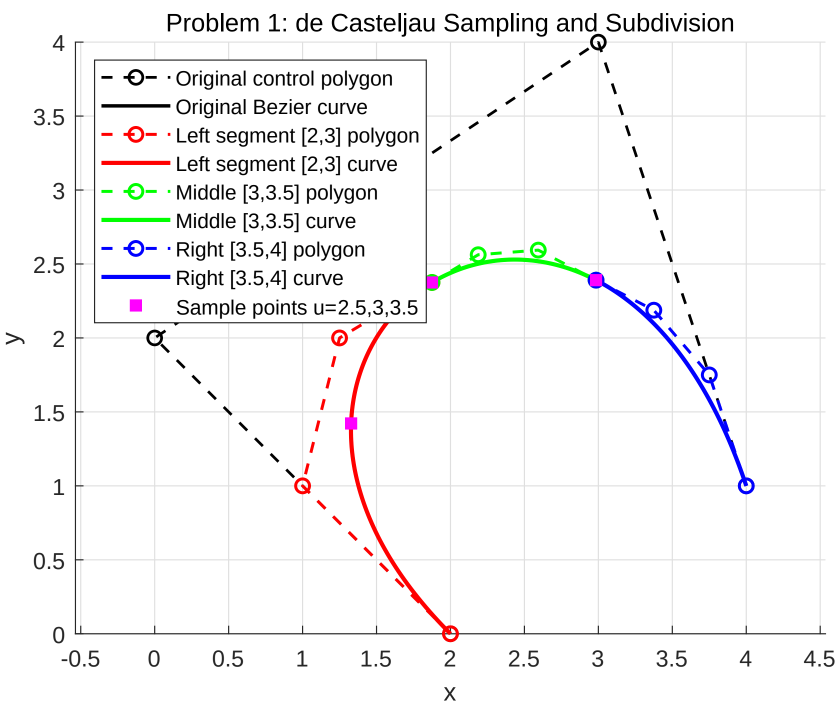
- $t = \frac{1}{4}(u = 2.5)$：$\boxed{(\frac{85}{64}, \frac{91}{64})}$
- $t = \frac{1}{2}(u = 3)$：$\boxed{(\frac{15}{8}, \frac{19}{8})}$
- $t = \frac{3}{4}(u = 3.5)$：$\boxed{(\frac{191}{64}, \frac{153}{64})}$

代码实现： 见 `src/main_1.m`

程序输出：

```
Sample points [x y] at u={2.5,3,3.5}:
    1.3281    1.4219
    1.8750    2.3750
    2.9844    2.3906
```

结果图像：



1.4 (3) 曲线分割

在 $u = 3$ 处分割，得到左右两段 Bézier 曲线；再将右半段在 $u = 3.5$ 处分割，得到三段曲线。

- 左段控制点：$(2,0),(1,1),(\frac{5}{4},2),(\frac{15}{8},\frac{19}{8})$
- 中段控制点：$(\frac{15}{8},\frac{19}{8}),(\frac{35}{16},\frac{41}{16}),(\frac{83}{32},\frac{83}{32}),(\frac{191}{64},\frac{153}{64})$
- 右段控制点：$(\frac{191}{64},\frac{153}{64}),(\frac{27}{8},\frac{35}{16}),(\frac{15}{4},\frac{7}{4}),(4,1)$

最终绘制出三条子控制多边形与对应曲线（见上图）。

2 题目 2：三次多项式曲线 $F(u)$（区间 [0,1]）

$$F(u) = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix} u^3 + \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix} u^2 - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} u.$$

2.1 (1) 一、二阶导数

$$\boxed{\begin{aligned} F'(u) &= \begin{pmatrix} 45 \\ -18 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 54 \\ 20 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \\ F''(u) &= \begin{pmatrix} 90 \\ -36 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 54 \\ 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}}$$

2.2 (2) 极坐标形式与恒等式证明

设

$$F[u_1,u_2,u_3] = A\,u_1u_2u_3 + \tfrac{B}{3}\sum_{\text{sym}} u_iu_j + \tfrac{C}{3}(u_1+u_2+u_3) + D.$$

则

$$f(u_1,u_2,\hat{1}) = f(u_1,u_2,1) - f(u_1,u_2,0) = A\,u_1u_2 + \frac{B}{3}(u_1+u_2) + \frac{C}{3}.$$

因此：

$$\boxed{3f(u_1,u_2,\hat{1}) = 3A\,u_1u_2 + B(u_1+u_2) + C,}$$

这正是 $F'(u) = 3A\,u^2 + 2B\,u + C$ 的极坐标形式。

再求二阶差分：

$$f(u_1,\hat{1},\hat{1}) = A\,u_1 + \tfrac{B}{3}, \quad 6f(u_1,\hat{1},\hat{1}) = 6A\,u_1 + 2B,$$

正好对应 $F''(u) = 6A\,u + 2B$。证毕。

3 题目 3：均匀 B 样条（节点向量 [0,0,1,2,3,4,5,5]）

控制点：

$$P_0 = (-2, -10), \quad P_1 = (-4, 2), \quad P_2 = (6, 5), \quad P_3 = (4, -7).$$

3.1 (1) 用 de Boor 算法计算 $t = 2.5$ 处的位置

在 $[2, 3)$ 区间内（$k = 3$）：

$$\begin{aligned} r = 1 &: (-\tfrac{11}{3}, 0), (1, \tfrac{7}{2}), (\tfrac{17}{3}, 3), \\ r = 2 &: (-\tfrac{1}{6}, \tfrac{21}{8}), (\tfrac{13}{6}, \tfrac{27}{8}), \\ r = 3 &: \boxed{C(2.5) = (1, 3)}. \end{aligned}$$

该点由程序验证。

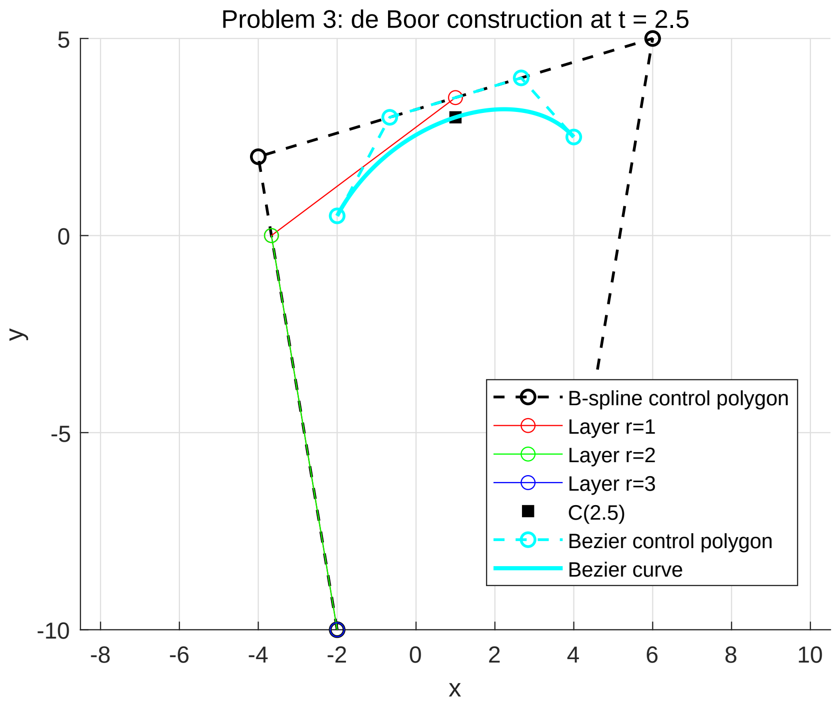
程序代码： 见 `src/main_3.m`

程序输出：

```
Curve point at t = 2.5:
     1     3

Equivalent cubic Bezier control points [x y]:
   -2.0000    0.5000
   -0.6667    3.0000
    2.6667    4.0000
    4.0000    2.5000
```

结果图像：



3.2 (2) 转换为 Bézier 形式

根据端点与导数：

$$\boxed{\begin{aligned} B_0 &= C(2), & B_1 &= C(2) + \frac{1}{3}C'(2), \\ B_2 &= C(3) - \frac{1}{3}C'(3), & B_3 &= C(3). \end{aligned}}$$

代入计算：

$$B_0 = (-2, 0.5), \quad B_1 = (-\tfrac{2}{3}, 3), \quad B_2 = (\tfrac{8}{3}, 4), \quad B_3 = (4, 2.5).$$

在该 Bézier 曲线取 $t = 0.5$ 得 $(1, 3)$，与 B 样条计算一致。