计算机辅助几何设计作业三

姓名: 刘行　　学号: PB22000150

第 1 题: 证明 Bézier 曲线的弧长不大于控制多边形的周长

设 Bézier 曲线为

$$\mathbf{B}(t)=\sum_{i=0}^{n}B_i\,b_{i,n}(t)\,,\quad t\in[0,1],\quad b_{i,n}(t)=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$$

弧长公式为:

$$L=\int_0^1|\mathbf{B}'(t)|\ \mathrm{d}t.$$

而 Bézier 曲线的导数为:

$$\mathbf{B}'(t)=n\sum_{i=0}^{n-1}(B_{i+1}-B_i)\,b_{i,n-1}(t)\,.$$

由三角不等式:

$$|\mathbf{B}'(t)|\le n\sum_{i=0}^{n-1}|B_{i+1}-B_i|\ b_{i,n-1}(t)\,.$$

两边对 t 从 0 到 1 积分:

$$L\le n\sum_{i=0}^{n-1}|B_{i+1}-B_i|\int_0^1 b_{i,n-1}(t)\ \mathrm{d}t.$$

由 $\int_0^1 b_{i,n-1}(t)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{n}$, 得:

$$L\le\sum_{i=0}^{n-1}|B_{i+1}-B_i|\,.$$

右边即控制多边形的周长, 故证得:

$$L_{\text{Bézier}}\le L_{\text{control polygon}}.$$

第 2 题: 证明圆弧不能被 Bézier 曲线精确表示

若圆弧能被 Bézier 曲线精确表示, 则 Bézier 曲线应满足圆的方程:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

然而, $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是关于 t 的多项式, 因此 $x^2 + y^2$ 也是多项式, 且因为 x^2 与 y^2 最高次项系数均为正, 它们的和的最高次项系数也为正. 于是 x^2 与 y^2 最高次项均为零次. 曲线退化为点. 矛盾.

第 3 题: 求平面 n 次 Bézier 曲线与原点及首末控制点围成区域的面积

设 Bézier 曲线为:

$$\mathbf{B}(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} (x_i, y_i)\ b_{i,n}(t).$$

由格林公式, 曲线与两直线 (连接原点与端点) 围成区域的有向面积为:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t))\ \mathrm{d}t.$$

代入 Bézier 形式:

$$x'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) b_{i,n-1}(t), \quad y'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) b_{i,n-1}(t).$$

于是:

$$A = \frac{n}{2} \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} [x_i (y_{j+1} - y_j) - y_i (x_{j+1} - x_j)]\ b_{i,n}(t)\ b_{j,n-1}(t)\ \mathrm{d}t.$$

由 Bernstein 基函数的积积分恒等式:

$$\int_0^1 b_{i,n}(t)\, b_{j,n-1}(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{(n+i)!\ (n-j-1)!}{i!\, j!}.$$

因此:

$$A = \frac{n}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} [x_i (y_{j+1} - y_j) - y_i (x_{j+1} - x_j)] \int_0^1 b_{i,n}(t)\ b_{j,n-1}(t)\, \mathrm{d}t.$$

这就是面积的显式公式, 它完全由控制点 (x_i, y_i) 表达.