计算机辅助几何设计—作业 4
题目 1（证明）

2025 年 10 月 13 日

题目：设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 为任意插值函数，$S(x)$ 为自然三次样条插值函数（两端点处二阶导数为零），证明

$$\int_a^b \big(S''(x)\big)^2\,dx \le \int_a^b \big(f''(x)\big)^2\,dx,$$

并且当且仅当 $f(x) \equiv S(x)$ 时取等号。

证明：
设插值节点为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

并且规定 $f(x_i) = S(x_i) = y_i$，对任意满足相同插值条件的 C^2 函数 f 定义误差函数

$$\eta(x) = f(x) - S(x).$$

由插值条件有 $\eta(x_i) = 0$，$i = 0, 1, \ldots, n$。

考察积分

$$\int_a^b \big(f''(x)\big)^2\,dx = \int_a^b \big(S''(x)+\eta''(x)\big)^2\,dx = \int_a^b \big(S''(x)\big)^2\,dx + 2\int_a^b S''(x)\eta''(x)\,dx + \int_a^b \big(\eta''(x)\big)^2\,dx.$$

我们的关键目标是证明交叉项为零，即

$$\int_a^b S''(x)\eta''(x)\,dx = 0.$$

由自然三次样条的边界条件知 $S''(a) = S''(b) = 0$。对区间 $[a,b]$ 分段积分（在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上分别处理）并利用样条在每一小区间上为三次多项式的事实，可以得到交叉项为零。下面给出一个较为直接的分部积分证明。

首先分部积分一次：

$$\int_a^b S''(x)\eta''(x)\,dx = \big[S''(x)\eta'(x)\big]_a^b - \int_a^b S'''(x)\eta'(x)\,dx.$$

由于 $S''(a) = S''(b) = 0$，第一项为零，因此

$$\int_a^b S''(x)\eta''(x)\,dx = -\int_a^b S'''(x)\eta'(x)\,dx.$$

接下来在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上再分部积分一次（注意 $S'''(x)$ 在每个子区间内为常数，因为 S 在每段上是三次多项式）：

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S'''(x)\eta'(x)\,dx = \big[S'''(x)\eta(x)\big]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} S^{(4)}(x)\eta(x)\,dx.$$

但对三次多项式有 $S^{(4)}(x) = 0$，于是

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S'''(x)\eta'(x)\,dx = S'''(x)\big(\eta(x_{i+1}) - \eta(x_i)\big).$$

由于对所有节点 $\eta(x_i) = 0$，右端为零。对所有区间求和得到

$$\int_a^b S'''(x)\eta'(x)\,dx = 0.$$

因此有

$$\int_a^b S''(x)\eta''(x)\,dx = 0.$$

将该结果代回前式，可得

$$\int_a^b \big(f''(x)\big)^2\,dx = \int_a^b \big(S''(x)\big)^2\,dx + \int_a^b \big(\eta''(x)\big)^2\,dx \geq \int_a^b \big(S''(x)\big)^2\,dx.$$

由此得到所需不等式。并且等号成立当且仅当 $\int_a^b (\eta''(x))^2\,dx = 0$，即当且仅当 $\eta''(x) \equiv 0$。因为 η 在所有节点处为 0，且 $\eta'' \equiv 0$ 意味着 η 在每段上为一次多项式，但若一个一次多项式在至少两个不同点为零，则该多项式恒为零，于是 $\eta \equiv 0$，即 $f \equiv S$。

$\square$