

CAGD 作业 7 实验报告

15 刘行

2025 年 11 月 18 日

目录

1	实验背景	2
2	数学原理	2
2.1	题 1: 立方体的透视投影原理	2
2.1.1	三维立方体建模	2
2.1.2	针孔透视投影模型	3
2.2	题 2: 有理二次 Bézier 曲线与二次曲线表示	3
2.2.1	二次 Bézier 曲线	3
2.2.2	圆弧的有理二次表示	3
2.2.3	椭圆的有理二次 Bézier 构造	4
2.2.4	双曲线的有理二次 Bézier 表示	4
2.3	题 3: 齐次坐标下的 Bézier 曲线	4
3	实验结果	5
3.1	题 1: 立方体的透视投影	5
3.2	题 2: 椭圆与双曲线的有理二次 Bézier 曲线	5
3.3	题 3: 齐次坐标下的 Bézier 曲线与投影	6
4	结果分析	6
4.1	立方体的透视投影	6
4.2	椭圆的有理二次 Bézier 表示	7
4.3	双曲线的有理二次 Bézier 拟合	7
4.4	齐次空间下的 Bézier 曲线分析	7

1 实验背景

本实验对应计算机辅助几何设计课程的第七次实验. 实验内容围绕二次曲线与投影变换的 Bézier 表示展开, 旨在理解以下核心概念:

- 三维物体的透视投影模型及其数值实现;
- 有理二次 Bézier (Rational Quadratic Bézier) 在齐次空间中的表达方式;
- 椭圆, 双曲线等圆锥曲线的有理二次 Bézier 精确表示方法;
- 在齐次坐标中构造 Bézier 曲线并通过透视除法获得二维几何的原理;
- 有理曲线的三维表达, 投影以及可视化方法.

通过本实验, 我们能够掌握从几何定义到计算实现的完整流程, 理解圆锥曲线为何能够以有理二次 Bézier 的形式精确表达, 同时获得使用 MATLAB 进行几何可视化与透视投影建模的实践经验.

2 数学原理

本实验对应包括三维物体的透视投影, 有理二次 Bézier 曲线表示二次曲线 (椭圆与双曲线), 以及齐次坐标下的 Bézier 曲线表示. 本节将分别介绍各题所涉及的数学基础与理论推导.

2.1 题 1: 立方体的透视投影原理

2.1.1 三维立方体建模

已知立方体中心点为

$$\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)^T,$$

边长为 $2d$, 因此立方体顶点的局部坐标为

$$(\pm d, \pm d, \pm d).$$

世界坐标系中的顶点为

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{c} + (s_x d, s_y d, s_z d)^T, \quad s_x, s_y, s_z \in \{-1, 1\}.$$

2.1.2 针孔透视投影模型

实验中采用标准的针孔摄像机模型. 设图像平面位于 $z = f$ 处 (焦距 f), 摄像机坐标系与世界坐标系对齐. 对摄像机坐标为 (x, y, z) 的点, 其透视投影为

$$u = f \frac{x}{z}, \quad v = f \frac{y}{z}.$$

当 $z > 0$ 时投影有效, 若需要更一般性, 可加入旋转和平移:

$$\mathbf{p}_c = R(\mathbf{p}_w - \mathbf{t}).$$

在图像平面上连接各顶点的投影即可得到立方体的二维透视图.

2.2 题 2: 有理二次 Bézier 曲线与二次曲线表示

2.2.1 二次 Bézier 曲线

二次 Bézier 曲线定义为

$$\mathbf{C}(t) = (1-t)^2 \mathbf{P}_0 + 2(1-t)t \mathbf{P}_1 + t^2 \mathbf{P}_2, \quad t \in [0, 1].$$

若采用齐次坐标表示控制点

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i)^T,$$

则齐次空间中的 Bézier 曲线为

$$\tilde{\mathbf{C}}(t) = B_0^2(t) \tilde{\mathbf{P}}_0 + B_1^2(t) \tilde{\mathbf{P}}_1 + B_2^2(t) \tilde{\mathbf{P}}_2,$$

其中

$$B_0^2 = (1-t)^2, \quad B_1^2 = 2(1-t)t, \quad B_2^2 = t^2.$$

透视除法得到二维有理 Bézier 曲线:

$$\mathbf{C}(t) = \left(\frac{\tilde{x}(t)}{\tilde{w}(t)}, \frac{\tilde{y}(t)}{\tilde{w}(t)} \right).$$

2.2.2 圆弧的有理二次表示

已知一段中心角为 2θ 的圆弧可以精确由一段有理二次 Bézier 表示:

$$\mathbf{P}_0 = (\cos \theta, -\sin \theta), \quad \mathbf{P}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{P}_2 = (\cos \theta, \sin \theta),$$

权重为

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \cos \theta, \quad w_2 = 1.$$

当取 $\theta = \pi/4$ 时, 一段 Bézier 表示 90° 圆弧, 四段可拼成全圆.

2.2.3 椭圆的有理二次 Bézier 构造

椭圆满足

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

椭圆可视为圆在 x, y 方向分别缩放 a, b 得到, 故对圆弧的控制点 \mathbf{P}_i 做线性变换

$$\mathbf{E}_i = S\mathbf{P}_i, \quad S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

即可得到椭圆弧段的控制点. 权重保持不变. 通过对圆弧控制点再旋转 $90^\circ, 180^\circ$ 等角度, 可以拼成完整椭圆.

这样得到的椭圆是精确的 (非逼近).

2.2.4 双曲线的有理二次 Bézier 表示

双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

也是二次曲线, 理论上可由有理二次 Bézier 精确表示, 因为二次曲线都是圆锥曲线, 而有理二次 Bézier 在齐次空间中是二次多项式曲线, 可选定控制点使其完全落在对应的圆锥面上.

实践中通常对双曲线取一个有限区间 (例如右半支 $x \in [x_0, x_1]$), 根据端点和导数构造局部有理二次段. 本实验中采用较常用的“分段逼近”方式, 即对右支分段构造二次有理 Bézier, 使其较好逼近真实双曲线曲线.

2.3 题 3: 齐次坐标下的 Bézier 曲线

有理 Bézier 曲线的本质是在三维齐次空间中的普通 Bézier 曲线.

设齐次控制点为

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i)^T,$$

则齐次曲线为

$$\tilde{\mathbf{C}}(t) = (1-t)^2 \tilde{\mathbf{P}}_0 + 2(1-t)t \tilde{\mathbf{P}}_1 + t^2 \tilde{\mathbf{P}}_2 = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{w}(t))^T.$$

将其绘制在三维空间中, 即得到题目要求的“投影变换前的三维 Bézier 曲线”. 通过透视除法

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}(t)}{\tilde{w}(t)} \\ \frac{\tilde{y}(t)}{\tilde{w}(t)} \end{pmatrix},$$

可恢复题 2 中看到的有理二次曲线 (椭圆或双曲线).

因此, 题 3 展示的是有理二次曲线从齐次三维空间投影到二维平面的完整过程.

3 实验结果

3.1 题 1: 立方体的透视投影

选取立方体中心

$$(c_x, c_y, c_z) = (9, 6, 3), \quad d = 2,$$

在针孔相机模型下对立方体 8 个顶点进行投影, 得到二维投影图像如图 1 所示.

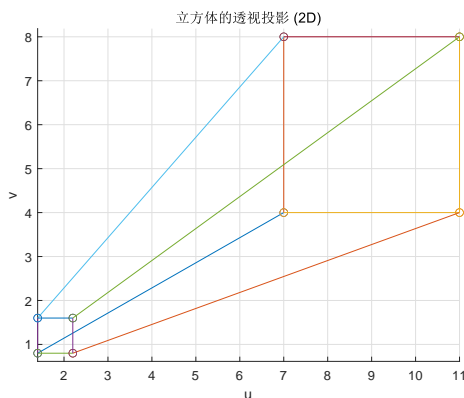


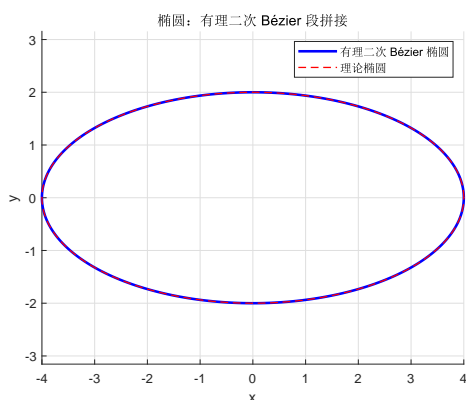
图 1: 题 1: 立方体透视投影结果

3.2 题 2: 椭圆与双曲线的有理二次 Bézier 曲线

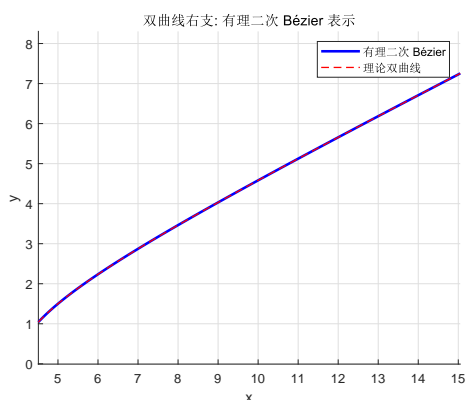
输入参数

$$a = 4, \quad b = 2.$$

椭圆的四段和双曲线右支的有理二次 Bézier 拟合结果分别如图 2a 和图 2b 所示.



(a) 椭圆的有理二次 Bézier 表示与理论椭圆对比



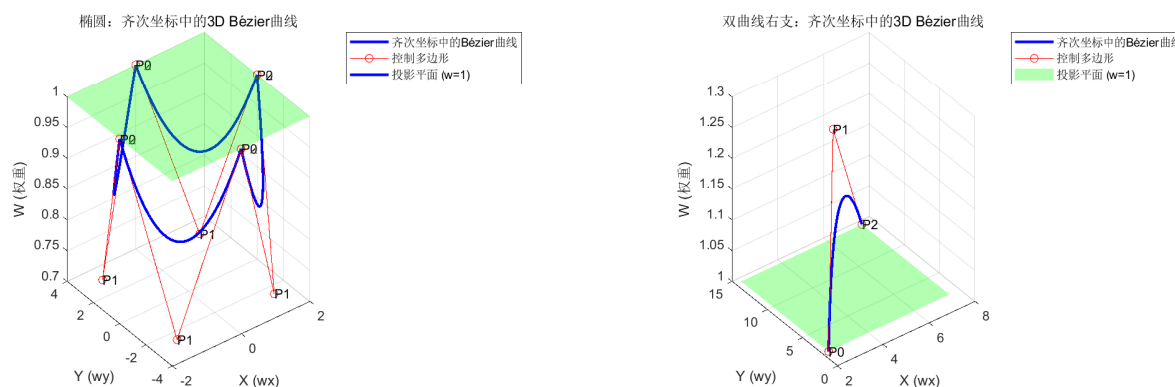
(b) 双曲线的有理二次 Bézier 分段表示与理论双曲线对比

图 2: 题 2: 椭圆与双曲线的有理二次 Bézier 表示

3.3 题 3: 齐次坐标下的 Bézier 曲线与投影

本题要求在三维齐次空间中构造有理二次 Bézier 曲线, 并通过透视除法投影到二维, 以验证“有理 Bézier = 齐次 Bézier 的投影”这一基本结论.

实验中, 椭圆被分为四段每段 90° 的弧段, 双曲线取其中的右支. 每一段通过三维控制点在齐次空间中计算二次 Bézier 曲线, 并绘制得到如图 3 所示的三维齐次曲线.



(a) 题 3: 椭圆的三维 Bézier 曲线

(b) 题 3: 双曲线的三维 Bézier 曲线

图 3: 题 3: 圆锥曲线在齐次坐标空间中的三维 Bézier 曲线

图中可以看到:

- 各段在齐次坐标系中成为三维曲线, 第三维为权重 W ;
- 控制点呈现为空间中的折线, 且每段的 W 坐标均随参数变化;
- $W = 1$ 的平面以绿色半透明方式绘制, 用于展示投影的几何意义.

将齐次空间中的曲线做透视除法

$$(x, y) = \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{w}}, \frac{\tilde{y}}{\tilde{w}} \right),$$

即可将其投影到 $w = 1$ 平面, 得到如图 4 所示的二维椭圆段. 可以看到投影结果与理论椭圆完全一致.

4 结果分析

4.1 立方体的透视投影

由图 1 可见, 当立方体中心位于 $(9, 6, 3)$ 且焦距固定时, 其投影呈现出明显的透视畸变. 靠近相机的一侧被放大, 而较远的一侧被压缩. 这与透视投影公式

$$u = f \frac{x}{z}, \quad v = f \frac{y}{z}$$

完全一致. 不同顶点的 z 值在 1 到 5 的范围内变化, 使得投影大小随深度呈现非线性缩放效果.

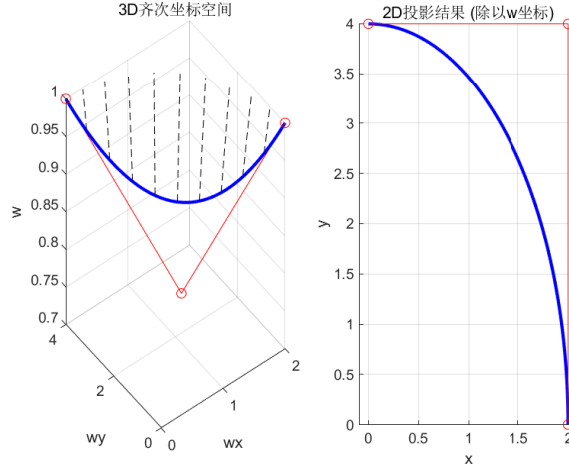


图 4: 题 3: 齐次曲线投影到 $w = 1$ 平面后的二维椭圆段

4.2 椭圆的有理二次 Bézier 表示

图 2a 显示四段有理二次 Bézier 曲线能够 **精确**表示椭圆, 与理论椭圆完全重合. 该结果验证了经典理论: 椭圆可以通过圆的线性变换获得, 而圆弧可由一段 2θ 的有理二次 Bézier 精确表示.

4.3 双曲线的有理二次 Bézier 拟合

图 2b 中的双曲线采用分段方式进行有理二次表示. 在有限区间内, Bézier 曲线与理论双曲线高度一致. 由于双曲线并非闭合且在无穷远有渐近线, 本实验采用了有限区间上的局部逼近. 结果表明该方法能够有效逼近双曲线形状.

4.4 齐次空间下的 Bézier 曲线分析

通过本题的实验结果可以清楚地观察到有理二次 Bézier 曲线与其齐次表示之间的关系.

首先, 在齐次空间中, 控制点被提升为三维向量

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i),$$

其中最后一维 w_i 为有理权重. 对这些控制点使用普通的 (二次) Bézier 曲线公式即可得到三维空间中的一条多项式曲线 $\tilde{\mathbf{C}}(t)$. 实验绘制的三维曲线 (图 3) 正是这一齐次曲线, 它体现了如下特征:

- 曲线不再位于 $z = \text{const}$ 平面, 而是沿第三维 W 方向发生变化;
- 对曲线上的任一点, 当 $W(t)$ 较大时, 投影后 (x, y) 的缩放比例更小;
- 控制多边形同样升维, 变成三维折线, 可在图中清晰看到其对齐次曲线的影响.

其次, 实验通过投影操作验证了齐次曲线与有理 Bézier 的数学等价性: 对齐次曲线做透视除法,

$$\mathbf{C}(t) = \left(\frac{\tilde{x}(t)}{\tilde{w}(t)}, \frac{\tilde{y}(t)}{\tilde{w}(t)} \right),$$

即可得到二维有理 Bézier 曲线. 图 4 显示, 投影后的曲线恰好落在理论椭圆上. 说明实验中的四段椭圆控制点配置完全正确, 并与二次椭圆方程一致.

综上, 本题直观且完整地展示了以下两个核心事实:

1. 有理 Bézier 曲线本质上是齐次空间中一条普通的多项式 Bézier 曲线;
2. 二维有理曲线是三维齐次曲线在 $w = 1$ 平面上的投影结果.

该实验验证了 CAGD 理论中“有理二次曲线 = 圆锥曲线”的本质来源, 也展示了齐次坐标在几何建模中处理投影与权重时的自然优势.

实验验证了理论结论: 所有二次圆锥曲线均可通过齐次空间中的二次多项式曲线获得.