四阶 B 样条曲线的绘制与交互控制实验报告

15 刘行

2025 年 10 月 28 日

1 实验背景

在计算机图形学, CAD/CAM 系统, 动画制作, 工业设计以及 Office 办公软件中, 平滑曲线的生成是图形编辑的重要基础. 常见的曲线表示方法包括贝塞尔曲线, 样条插值曲线以及 B 样条 (B-Spline) 曲线等. B 样条曲线因其局部可控性, 良好的平滑性和较高的数值稳定性, 被广泛应用于曲线建模, 字体设计, 路径平滑, 数据可视化和用户界面控件绘制等领域.

在本实验中, 我们实现了一个 **交互式 B 样条插值曲线编辑器**, 用户可以通过鼠标点击定义控制点, 生成对应的 B 样条控制点, 并实时观察 B 样条曲线的变化. 该程序完全使用 MATLAB 自编函数实现 B 样条的基函数与曲线生成过程, 未依赖内置样条函数.

2 实验原理

2.1 B 样条曲线的定义

设有一组控制点

$$P_0, P_1, \ldots, P_{n-1} \in \mathbb{R}^2,$$

以及结点向量 (knot vector)

$$t = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n+k}\}, \quad t_i \le t_{i+1},$$

则 k 阶 (即次数为 $k-1$) B 样条曲线定义为

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,k}(u)\, P_i, \quad u \in [t_k,\, t_n].$$

其中 $N_{i,k}(u)$ 为 k 阶 B 样条基函数, 满足分段多项式形式且局部支撑 (每个基函数只在 $[t_i, t_{i+k}]$ 上非零).

2.2 Cox-de Boor 递推公式

基函数 $N_{i,k}(u)$ 可由 Cox-de Boor 递推关系定义:

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, & t_i \le u < t_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{t_{i+k} - u}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u).$$

这种递归定义保证了 B 样条曲线的以下性质:

- 基函数非负: $N_{i,k}(u) \ge 0$;
- 分片定义且局部支撑;
- 满足归一性: $\sum_i N_{i,k}(u) = 1$;
- 在结点向量边界处具有连续性 C^{k-2}.

2.3 四阶 (即三次) B 样条

在本实验中取 $k = 4$, 即曲线为三次 (cubic) B 样条. 对应的结点向量构造为:

$$t = [\underbrace{0, 0, 0, 0}_{k}, 1, 2, \dots, n-k, \underbrace{n-k+1, \dots, n-k+1}_{k}],$$

并归一化到 $[0, 1]$ 区间:

$$t \leftarrow \frac{t}{n-k+1}.$$

对于任意参数 $u \in [0, 1]$, 可通过递归计算得到各基函数值, 再由线性组合公式求得曲线点:

$$C(u) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,4}(u) P_i.$$

2.4 局部性与平滑性

每个基函数 $N_{i,4}(u)$ 仅在 $[t_i, t_{i+4}]$ 内非零, 因此移动某个控制点 P_i 只会影响相邻 4 个区段上的曲线形状. 此外, 三次 B 样条具有 C^2 连续性, 即曲线在连接处一阶, 二阶导数连续.

2.5 B 样条插值的原理

在前述定义中, B 样条曲线通常仅由控制点决定, 其轨迹一般不经过这些控制点. 若希望曲线严格通过给定的数据点

$$P_0, P_1, \ldots, P_{n-1},$$

则需进行 **B 样条插值** (B-spline interpolation).

设参数节点为

$$u_0, u_1, \ldots, u_{n-1},$$

插值条件为

$$C(u_j) = P_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

由 B 样条定义式;

$$C(u_j) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,k}(u_j)\, Q_i,$$

其中 Q_i 为待求控制点. 由此可得线性方程组;

$$AQ = P, \quad \text{其中} A_{ji} = N_{i,k}(u_j).$$

解得控制点向量;

$$Q = A^{-1}P.$$

将 Q_i 代入标准 B 样条公式, 即可得到通过所有数据点的插值曲线.

与传统的三次样条插值 (Cubic spline interpolation) 相比, B 样条插值具有如下优点:

- 系数矩阵 A 具有带状结构, 数值稳定;
- 对局部数据变化响应平滑;
- 可自然推广至高维情形 (如曲面插值).

2.6 参数化与结点向量的选择

插值结果的形状依赖于参数化方式与结点向量的分布.

常见的参数化策略包括;

- **均匀参数化 (Uniform)**:

  $$u_j = \frac{j}{n-1},$$

  简单但对点间距不敏感, 易产生波动;

- **弦长参数化 (Chord length)**:

$$u_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} \|P_i - P_{i-1}\|}{\sum_{i=1}^{n-1} \|P_i - P_{i-1}\|},$$

能较好反映点间距离, 平滑且稳定;

- **中心偏差参数化 (Centripetal)**:

$$u_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} \|P_i - P_{i-1}\|^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n-1} \|P_i - P_{i-1}\|^{1/2}},$$

可有效抑制密集点处的过拟合.

本实验采用弦长参数化方式, 以在平滑性与精确性之间取得较佳平衡.
结点向量采用 **开放均匀结点** (open uniform knot vector):

$$t = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{k},\ t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{n-1},\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{k}],$$

该结构保证曲线首尾通过首尾数据点, 并具有连续性 C^{k-2}.

3 代码实现

程序由 MATLAB 实现, 核心部分包括以下几个函数:

- **drawpolyline**: 交互式绘制控制点序列, 用户点击鼠标添加锚点并按回车结束输入;
- **addlistener**: 为控制点的移动事件绑定监听器, 实现拖动控制点时曲线的实时更新;
- **bspline_basis(i, k, t, u)**: 递归计算 $N_{i,k}(u)$;
- **bspline_point(P, k, t, u)**: 计算给定参数 u 的曲线点;
- **plotBSpline(P)**: 遍历参数区间, 计算并绘制整条 B 样条曲线.

程序结构如下:

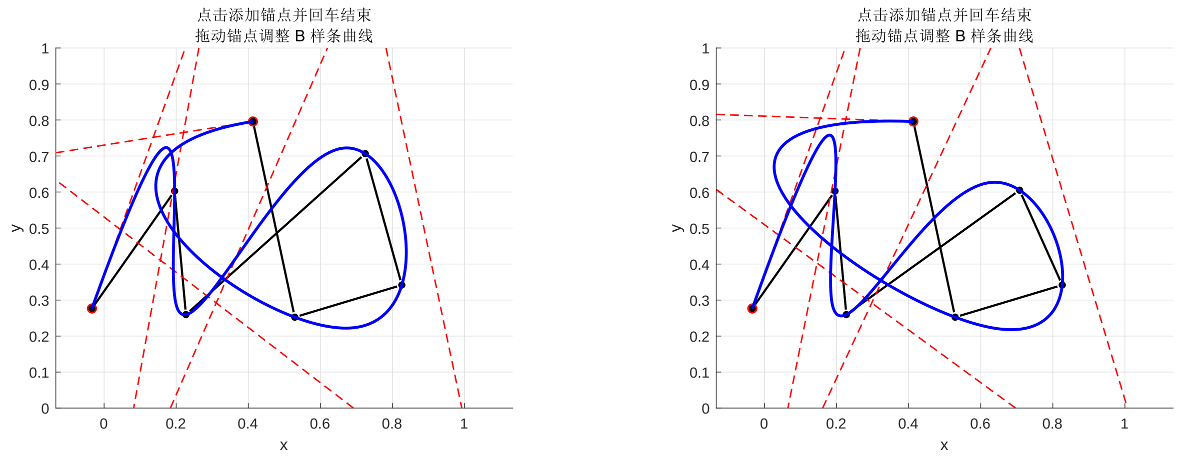
```
main
 |- plotBSpline
 |    |- bspline_point
 |    |    \- bspline_basis (递归)
 \- updateBSpline (事件回调)
```

4 使用方法

1. 运行主函数 `main`;
2. 在图形窗口中依次点击以添加锚点;
3. 按下回车键结束点的输入;
4. 系统自动绘制 B 样条曲线;
5. 拖动任意控制点, 曲线将实时更新.

5 实验结果与效果展示

程序运行后可获得如下效果: 黑色折线为控制多边形, 红色虚折线为对应 B 样条控制多边形, 蓝色曲线为对应的三次 B 样条. 用户拖动控制点时, 曲线平滑地变化, 验证了 B 样条插值的局部可控性和平滑性.



(a) 初始曲线　　(b) 调整后的曲线

图 1: 四阶 B 样条插值曲线交互绘制结果

6 结论

本实验手动实现了四阶 B 样条插值曲线的绘制与交互控制过程, 验证了 B 样条插值曲线的以下性质:

- 曲线在控制点附近平滑可控;

- 满足 C^2 连续性;
- 对控制点移动具有局部响应;
- 计算稳定, 实现简洁.

本程序可作为计算机图形学中曲线造型, 路径拟合及 CAD 编辑系统的基础模块, 具有较好的实用价值和扩展潜力.