

# 计算机辅助几何设计 - 作业 10

刘行

学号: PB22000150

2025 年 12 月 21 日

## 1 实验目的

本次作业的主要目的是实现三角网格的参数化算法，将 3D 曲面映射到 2D 平面上。具体要求是基于 Floater (1997) 的算法，使用保形权重 (Shape-Preserving Weights) 完成 Tutte Embedding。实验对象为提供的 `cathead.obj` 模型，需要在 `tutte_test.m` 框架下完成核心函数的编写。

## 2 实验原理

### 2.1 Tutte Embedding

Tutte 嵌入定理指出，对于一个 3-连通平面图，如果将其边界顶点映射到一个凸多边形上，并将所有内部顶点放置在其邻居的加权中心位置，则该图的直线嵌入是平面性的（即没有边交叉）。对于内部顶点  $i$ ，其位置  $\mathbf{y}_i$  满足：

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} \mathbf{y}_j, \quad \text{其中} \quad \sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} = 1 \quad (1)$$

这转化为求解线性方程组  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ，其中  $L$  为拉普拉斯矩阵。

### 2.2 保形权重 (Floater 算法)

为了尽可能保持网格的几何形状，减少参数化过程中的角度变形，我们不使用统一权重，而是采用 \*\* 距离倒数权重 \*\* (Inverse Distance Weights)。对于边  $(i, j)$ ，其权重  $w_{ij}$  计算公式为：

$$w_{ij} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (2)$$

其中  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  为 3D 空间中的欧几里得距离。相比于统一权重，这种方法更能反映原始网格的几何特征。

### 3 算法逻辑与实现步骤

在 `tutte_embed` 函数中，算法的具体实现逻辑如下：

1. **边界识别与提取：**首先，利用提供的辅助函数 `findBoundary` 提取网格的边界顶点索引序列。这是参数化的基础，因为边界需要被固定。
2. **边界映射（凸组合条件）：**为了满足 Tutte 定理的凸边界条件，我们将提取出的边界顶点映射到 2D 平面的单位圆上。通过将角度区间  $[0, 2\pi]$  均匀分割，计算出每个边界顶点对应的  $(\cos \theta, \sin \theta)$  坐标。
3. **构建权重矩阵：**遍历网格的所有边。对于每一条边，计算其在 3D 空间中的长度，并取长度的倒数作为权重  $w$ 。如果是统一权重（Uniform），则权重设为 1；但在本实验中，为了保形，我们严格执行距离倒数计算。
4. **构建拉普拉斯系统：**基于计算出的权重构建稀疏矩阵  $W$ 。接着计算度矩阵  $D$ （ $W$  的行和），进而得到拉普拉斯矩阵  $L = D - W$ 。
5. **施加边界条件并求解：**这是一个带有狄利克雷边界条件（Dirichlet Boundary Condition）的线性系统。我们将矩阵  $L$  中对应边界顶点的行替换为单位矩阵的行（即对角线元素设为 1，其余为 0），并将方程右端项（RHS）中对应的位置设为之前计算好的单位圆坐标。最后，使用 MATLAB 的左除运算符求解稀疏线性方程组  $Ly = \text{RHS}$ ，得到所有顶点的 2D 坐标。

### 4 实验结果与分析

实验使用 `readObj` 读取模型，并调用实现的算法进行测试。

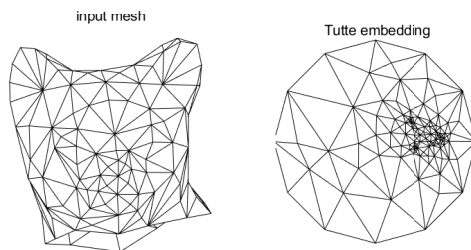


图 1: 实验结果对比：左图为原始 3D 网格 (Input Mesh)，右图为 Tutte 参数化结果 (Embedding)。

如图 1 所示，左侧展示了原始的 `cathead` 模型，具有复杂的曲面几何特征。右侧展示了经过 Tutte Embedding 算法处理后的参数化结果。

观察结果可以得出：

- **边界映射：**网格边界被成功映射为了一个标准的凸多边形（圆形），符合算法预期。
- **拓扑结构：**内部网格线没有发生折叠或交叉，证明了生成的是有效的平面三角剖分。
- **形状保持：**由于使用了距离倒数权重，参数化后的网格密度分布在一定程度上反映了原模型的几何特征，相比于统一权重的参数化，这种方法通常能产生更平滑的过渡。