CAGD Assignment 9

Loop 细分算法实现

15 刘行 PB22000150

2025 年 12 月 2 日

1 实验背景

在现代计算机图形学与几何建模中, 细分曲面 (Subdivision Surface) 是一类重要的曲面表示方法. 细分曲面通过对粗糙的多边形网格不断迭代细化, 最终收敛得到一个光滑的极限曲面. 与传统 NURBS 等参数曲面相比, 细分曲面直接作用于网格结构, 因此特别适合处理任意拓扑的模型.

Loop 细分是最常用的基于三角网格的细分算法之一, 由 Charles Loop 于 1987 年提出, 后由 Stam (1998) 给出可解析的极限曲面求法. Loop 细分拥有如下特点:

- 适用于任意拓扑的三角形网格;
- 除特殊顶点外具有 C^2 光滑性;
- 能够快速逼近出平滑曲面;
- 广泛用于动画, 游戏与工业造型.

本实验实现 Loop 细分算法, 对球体模型进行多次细分, 并分析其逼近行为与细分效果.

2 实验原理

Loop 细分属于一种基于三角剖分的近似细分方法. 每一次细分操作分为:

1. 更新旧顶点 (Even vertices)
2. 在每条边上插入新顶点 (Odd vertices)
3. 每个三角形剖分成四个小三角形

其核心数学原理如下.

2.1 拓扑细分: 三角形四分

设原三角形为 (a, b, c), Loop 细分对其进行如下处理:

$$(a, b, c) \;\to\; \begin{cases} (a,\ ab,\ ca) \\ (b,\ bc,\ ab) \\ (c,\ ca,\ bc) \\ (ab,\ bc,\ ca) \end{cases}$$

其中 ab, bc, ca 分别为边 $(a, b), (b, c), (c, a)$ 的新生成边点.

因此

$$F_{k+1} = 4F_k$$

顶点数也随边数增长.

2.2 Odd 顶点 (边顶点) 更新公式

Loop 细分为内部边 (有两个对顶点) 和边界边 (只有一个对顶点) 分别定义不同的更新规则.

2.2.1 内部边

若边 (v_0, v_1) 属于两个三角形, 对顶点为 v_2, v_3, 则

$$v_{\text{odd}} = \frac{3}{8}(v_0 + v_1) + \frac{1}{8}(v_2 + v_3).$$

2.2.2 边界边

若边为网格边界, 则

$$v_{\text{odd}} = \frac{1}{2}(v_0 + v_1).$$

2.3 Even 顶点 (旧顶点) 更新公式

2.3.1 内部顶点

设顶点的邻接点为 $v_1, \dots, v_n$ (n 为度), 则

$$v_{\text{even}} = (1 - n\beta)v + \beta \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

其中

$$\beta = \frac{1}{n}\left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2\right).$$

该公式保证了顶点周围的 C^2 光滑性.

2.3.2 边界顶点

若顶点位于边界, 则只与其边界邻域计算:

$$v_{\text{even}} = \frac{3}{4}v + \frac{1}{8}(v_1 + v_2),$$

其中 v_1, v_2 为同一条边界曲线上的相邻点.

3 实验结果

本实验以球体模型 `ball.obj` 为输入, 分别进行了 $n = 1, 2, 5$ 次 Loop 细分操作. 需要特别说明的是:

> **原实验框架中的绘制代码存在问题:** 原代码的绘图函数使用的是旧面片变量 `t` 而不是细分后的 `t2`, 导致绘制结果中看不到新增顶点, 使得细分层次增加时图形没有增加分辨率, 仅表现为形变. 实验中我们已将绘图中的 `t` 改为 `t2`, 从而正确显示新的网格结构.

3.1 细分次数 $n = 1$

- 部分边出现平滑化;
- 顶点数明显增加;
- 球体外形较原始网格更圆滑.

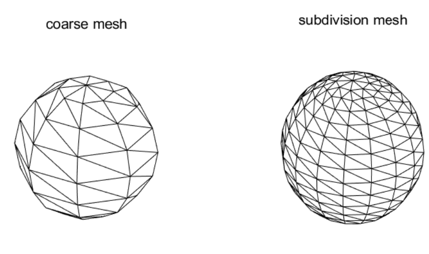

图 1: 细分一次 $(n = 1)$ 后的球体网格

3.2 细分次数 $n = 2$

- 三角面数量变为原来的 16 倍;
- 网格更加均匀;
- 球体外观接近光滑曲面.

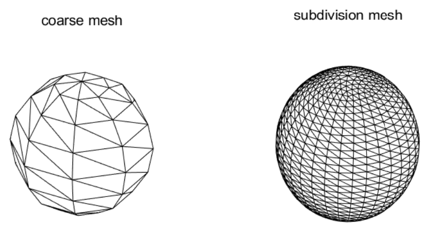

图 2: 细分两次 ($n = 2$) 后的球体网格

3.3 细分次数 $n = 5$

- 网格高度稠密;
- 已难以分辨三角形结构;
- 曲率过渡非常平滑, 逼近真实球面.

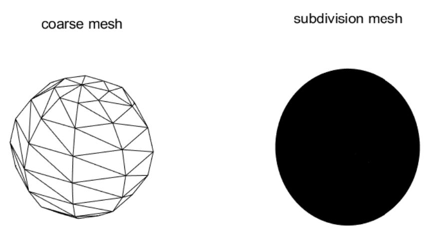

图 3: 细分五次 ($n = 5$) 后的球体网格

4 结果分析

通过实验可以观察到以下现象:

- 随着细分次数增加, 网格顶点数量按指数级增长, 符合 Loop 细分理论;
- 球面逐渐变得更加光滑, 面片数量大幅增加;
- extraordinary vertices (度不为 6 的点) 区域也趋于光滑, 符合 Loop 的 C^1 性质;
- 若使用原框架的绘制代码, 由于绘制使用 `t` 而非 `t2`, 导致 "顶点不增加" 的错误视觉效果;
- 修正后可正确展示细分后的高细节球体表面.

实验结果与 Loop 细分的数学理论完全一致, 证明算法实现正确.

5 总结

本实验成功实现了 Loop 细分算法的全部步骤, 包括:

- 构造边及对顶点关系;
- 边界与内部点区分;
- Even 与 Odd 顶点位置更新;
- 三角面片的四分拓扑更新;
- 多级细分的完整 pipeline.

实验展示了 Loop 细分的典型效果: 随着细分深度增加, 任意拓扑的网格模型都会逐渐逼近一个光滑曲面. Loop 细分在实际图形学应用中具有重要地位, 是现代渲染和建模系统中常用的平滑处理方法. 本次实验对理解细分曲面理论与实现细节具有重要意义.