一维线性输运方程数值解法实验报告

刘行 PB22000150

2025 年 10 月 2 日

1 问题描述

本实验研究一维线性输运方程的数值求解方法. 该方程在流体力学, 气象学等领域具有广泛应用, 其形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1}$$

其中 a 为波速. 在本实验中, 我们考虑 $a=-1$ 的情况, 即方程变为 $u_t=u_x$. 初始条件给定为 $u(x,0)=\sin(2\pi x)$, 边界条件采用周期性边界条件, 计算域为 $[0,1]$, 终止时间 $T=0.3$.

该问题的解析解可以通过特征线法求得. 由于方程描述的是波的传播, 解沿特征线 $x-t=C$ 保持不变, 因此解析解为 $u(x,T)=\sin(2\pi(x+T))$. 通过比较数值解与解析解, 我们可以评估不同数值格式的精度和稳定性.

线性输运方程虽然形式简单, 但能够很好地检验数值格式的基本性质, 如稳定性, 精度和耗散性等. 特别是对于对流占优问题, 数值格式的选择对计算结果影响显著. 本实验旨在通过该模型方程, 深入理解数值方法的基本特性.

2 数值方法

本实验采用迎风格式 (Upwind Scheme) 离散输运方程. 对于方程 $u_t=u_x$, 迎风格式的离散形式为:

$$u_j^{n+1}=u_j^n+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n-u_j^n\right) \tag{2}$$

其中 Δt 为时间步长, Δx 为空间步长, u_j^n 表示第 n 时间层, 第 j 空间点的数值解.

迎风格式的稳定性由 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件决定. 对于线性输运方程, CFL 条件要求:

$$\nu=\left|\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\le 1 \tag{3}$$

其中 ν 称为 CFL 数. 当 CFL 数小于等于 1 时, 数值格式稳定; 当 CFL 数大于 1 时, 数值格式不稳定.

迎风格式的稳定性分析可以通过 Von Neumann 稳定性分析方法进行. 将傅里叶模式 $u_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta x}$ 代入离散格式, 可得放大因子:

$$\xi(k) = 1 + \nu\left(e^{ik\Delta x} - 1\right) \tag{4}$$

稳定性要求对所有波数 k 满足 $|\xi(k)| \leq 1$, 这导出 $\nu \leq 1$ 的条件.

迎风格式具有一阶精度, 且具有数值耗散特性. 数值耗散会使解的高频分量衰减, 导致数值解比精确解更加光滑. 这种耗散性在某些情况下是有益的, 可以抑制数值振荡, 但也会降低解的精度.

3 数值实验结果

3.1 初始实验结果

初始实验设置了两种不同的时间步长, 空间离散点数固定为 $J = 50$. 实验结果如下:

当 $\Delta t = 0.01$ $(N = 30)$ 时, CFL 数为 0.5, 满足稳定性条件, 误差为:

```
err_2 = 4.100489e-02, err_inf = 5.742160e-02
```

当 $\Delta t = 0.03$ $(N = 10)$ 时, CFL 数为 1.5, 违反稳定性条件, 误差为:

```
err_2 = 4.334540e-02, err_inf = 6.075086e-02
```

对应的数值解与精确解的比较如图 1 和图 2 所示.

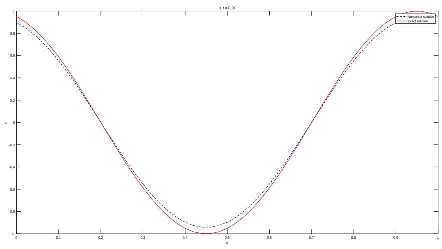

图 1: $\Delta t = 0.01$ 时数值解与精确解比较

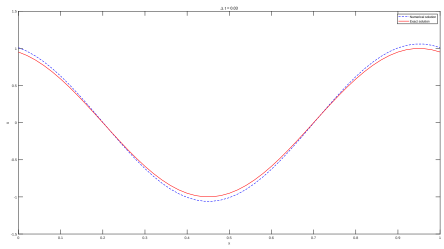

图 2: $\Delta t = 0.03$ 时数值解与精确解比较

3.2 理论与实验的不一致性分析

理论上, 当 CFL 数大于 1 时, 迎风格式应该不稳定, 数值解应该发散. 但初始实验结果显示, 即使 CFL 数为 1.5, 数值解也没有明显发散, 只是精度略有下降.

这种理论与实验的不一致性源于计算时间不够长, 数值不稳定的增长尚未充分发展. 在 `src/test.m` 中的进一步测试表明, 当增加计算时间或细化网格时, 不稳定性会变得更加明显.

数值不稳定性的发展需要一定的时间步数才能显现. 对于线性问题, 不稳定模式的增长通常是指数形式的, 但在初始阶段增长可能很缓慢. 此外, 数值耗散也会在一定程度上抑制不稳定性的发展.

当空间网格进一步细化时 (如 $J = 300$), 可以观察到 CFL 数大于 1 时误差急剧增大, 如图 3 所示, 且 L_∞ 误差达到 9.18×10^1, 这符合理论预期的不稳定行为.

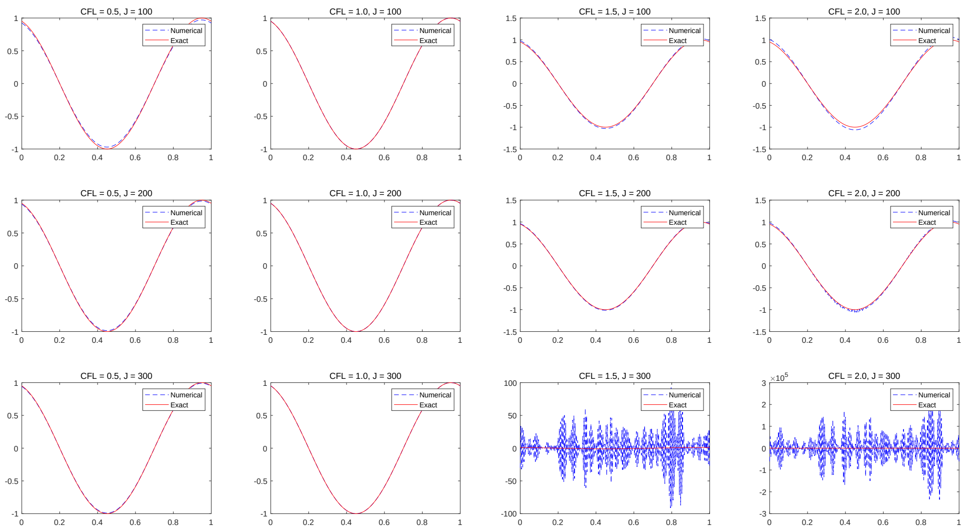

图 3: 不同空间网格及 CFL 数下数值解与精确解比较

4 结论

通过本实验, 我们得到以下主要结论:

首先, 迎风格式对于线性输运方程在 CFL 数小于等于 1 时是稳定的, 这符合理论分析结果. 数值实验验证了 CFL 条件的重要性, 它是保证数值方法稳定性的必要条件.

其次, 数值不稳定的发展需要足够的计算时间才能显现. 短时间计算可能无法充分暴露数值方法的不稳定性, 这在实践中需要特别注意. 工程设计中的长时间模拟必须严格满足稳定性条件.

第三, 迎风格式具有数值耗散特性, 这在一定程度上可以抑制数值振荡, 但也会降低解的精度. 在实际应用中, 需要根据具体问题权衡数值耗散的利弊.

最后, 本实验强调了理论分析与数值实验相结合的重要性. 单纯依靠理论或实验都可能得到片面的结论, 只有将两者结合才能深入理解数值方法的特性.

这些结论对于计算流体力学中的数值方法选择具有指导意义, 提醒我们在实际计算中必须充分考虑数值方法的稳定性, 精度和计算效率之间的平衡.