NPDE 作业 10

刘行　PB22000150

题目 1 （HW 4.4.11）

证明三维 Peaceman–Rachford 格式

$$\left(1-\frac{r_x}{3}\delta_x^2\right)u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}}=\left(1+\frac{r_y}{3}\delta_y^2+\frac{r_z}{3}\delta_z^2\right)u_{jkl}^n,$$

$$\left(1-\frac{r_y}{3}\delta_y^2\right)u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}}=\left(1+\frac{r_x}{3}\delta_x^2+\frac{r_z}{3}\delta_z^2\right)u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}},$$

$$\left(1-\frac{r_z}{3}\delta_z^2\right)u_{jkl}^{n+1}=\left(1+\frac{r_x}{3}\delta_x^2+\frac{r_y}{3}\delta_y^2\right)u_{jkl}^{n+\frac{2}{3}},$$

对三维热方程

$$u_t=a(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

是条件稳定的，并且截断误差阶为

$$O(\Delta t)+O(\Delta x^2)+O(\Delta y^2)+O(\Delta z^2).$$

(1) 截断误差与相容性

记空间步长分别为 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$，时间步长为 Δt，

$$r_x=\frac{a\Delta t}{\Delta x^2},\quad r_y=\frac{a\Delta t}{\Delta y^2},\quad r_z=\frac{a\Delta t}{\Delta z^2},$$

三点中心差分算子

$$\delta_x^2u_{jkl}^n=\frac{u_{j+1,kl}^n-2u_{jkl}^n+u_{j-1,kl}^n}{\Delta x^2},$$

δ_y^2,δ_z^2 类似。

把恰解 $u(x,y,z,t)$ 代入第一步格式，在网格点 (x_j,y_k,z_l,t_n) 处展开 Taylor 公式：

$$u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}}=u_{jkl}(t_n+\tfrac{1}{3}\Delta t)=u_{jkl}^n+\tfrac{1}{3}\Delta t\,u_t+O(\Delta t^2),$$

$\delta_x^2u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}}=u_{xx}(t_n+\frac{1}{3}\Delta t)+O(\Delta x^2)$, $\delta_y^2u_{jkl}^n=u_{yy}(t_n)+O(\Delta y^2)$, $\delta_z^2u_{jkl}^n=u_{zz}(t_n)+O(\Delta z^2)$.

代入第一式左、右两边：

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \left(1-\frac{r_x}{3}\delta_x^2\right)u_{jkl}^{n+\frac{1}{3}} \\
&= u_{jkl}^n + \tfrac{1}{3}\Delta t\, u_t - \frac{a\Delta t}{3}\,u_{xx} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2), \\
\text{RHS} &= \left(1+\frac{r_y}{3}\delta_y^2+\frac{r_z}{3}\delta_z^2\right)u_{jkl}^n \\
&= u_{jkl}^n + \frac{a\Delta t}{3}(u_{yy}+u_{zz}) + O(\Delta y^2) + O(\Delta z^2).
\end{aligned}
$$

利用 PDE 本身

$$u_t = a(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),$$

在 t_n 处有

$$\tfrac{1}{3}\Delta t\, u_t - \frac{a\Delta t}{3}u_{xx} - \frac{a\Delta t}{3}(u_{yy}+u_{zz}) = 0.$$

于是第一步方程的局部截断误差为

$$\tau_{jkl}^{(1)} = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta z^2).$$

第二、三步完全类似，只是时间层分别为 $t_n+\frac{1}{3}\Delta t$ 与 $t_n+\frac{2}{3}\Delta t$，对这两个时刻同样有 PDE 成立，因此三步的局部截断误差均为

$$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta z^2).$$

由分步格式组合得到整体格式的一步时间推进，其主导误差项仍为 $O(\Delta t)$，空间为二阶。因此该三维 Peaceman–Rachford 格式是

$$\text{一阶时间、二阶空间的相容格式：} O(\Delta t) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta z^2).$$

(2) von Neumann 稳定性分析

做冻结系数与 Fourier 模分析。对每个空间方向取周期边界，令

$$u_{jkl}^n = g^n \exp\big(i(j\theta_x + k\theta_y + l\theta_z)\big),$$

记

$$\lambda_x = -4\sin^2\frac{\theta_x}{2}, \quad \lambda_y = -4\sin^2\frac{\theta_y}{2}, \quad \lambda_z = -4\sin^2\frac{\theta_z}{2},$$

则

$$\delta_x^2 u_{jkl}^n = \lambda_x u_{jkl}^n, \quad \delta_y^2 u_{jkl}^n = \lambda_y u_{jkl}^n, \quad \delta_z^2 u_{jkl}^n = \lambda_z u_{jkl}^n,$$

其中 $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z \le 0$。

记

$$a_x = \frac{r_x}{3}\lambda_x \le 0, \quad a_y = \frac{r_y}{3}\lambda_y \le 0, \quad a_z = \frac{r_z}{3}\lambda_z \le 0.$$

三步格式在该 Fourier 模上的标量形式为

$$\begin{aligned}(1-a_x)u^{n+\frac{1}{3}} &= (1+a_y+a_z)u^n,\\ (1-a_y)u^{n+\frac{2}{3}} &= (1+a_x+a_z)u^{n+\frac{1}{3}},\\ (1-a_z)u^{n+1} &= (1+a_x+a_y)u^{n+\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

消去中间层，得到增益因子

$$G := \frac{u^{n+1}}{u^n} = \frac{(1+a_y+a_z)(1+a_x+a_z)(1+a_x+a_y)}{(1-a_x)(1-a_y)(1-a_z)}.$$

注意 $a_x, a_y, a_z \le 0$，于是分母各因子均大于等于 1，分子中每个因子形如 1+（非正数）。当 $\Delta t \to 0$ 时，$r_x, r_y, r_z \to 0$，从而 $a_x, a_y, a_z \to 0$，展开得

$$G = 1 + O(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2).$$

因此在 Δt 足够小时，$|G| \le 1$，并且 G 关于 (r_x, r_y, r_z) 是连续函数，故存在常数 $C > 0$，当

$$r_x + r_y + r_z \le C \quad \Big(\text{即}\Delta t \le C_0(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)\Big)$$

时，对所有 Fourier 模都有 $|G| \le 1$。因此该格式在满足适当 CFL 条件（Δt 充分小）时稳定，即为 **条件稳定**。

题目 2 （HW 2.4.1）

证明当 $|R| \le 1$ 时，差分格式

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2}\big(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n\big) - \frac{R}{2}\,\delta_0 u_k^n$$

关于 $\|\cdot\|_\infty$ 范是稳定的。这里

$$\delta_0 u_k^n = u_{k+1}^n - u_{k-1}^n.$$

证明

先把格式写成显式凸组合形式。

$$\begin{aligned}u_k^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{R}{2}\right)u_{k+1}^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{2}\right)u_{k-1}^n.\end{aligned}$$

记

$$\alpha = \frac{1-R}{2}, \qquad \beta = \frac{1+R}{2},$$

则

$$u_k^{n+1} = \alpha\, u_{k+1}^n + \beta\, u_{k-1}^n.$$

当 $|R| \le 1$ 时，有

$$\alpha \ge 0, \quad \beta \ge 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

因此

$$\begin{aligned} |u_k^{n+1}| &= |\alpha\, u_{k+1}^n + \beta\, u_{k-1}^n| \le \alpha |u_{k+1}^n| + \beta |u_{k-1}^n| \le (\alpha+\beta) \max_j |u_j^n| \\ &= \max_j |u_j^n|. \end{aligned}$$

对所有 k 取最大值得

$$\|u^{n+1}\|_\infty \le \|u^n\|_\infty.$$

从而

$$\|u^n\|_\infty \le \|u^0\|_\infty, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

该格式在 $|R| \le 1$ 时关于 sup 范是非增的，因此是稳定的。

题目 3 （补充题 1）

构造 $u_t + u_x + u_y = 0$ 的 ADI 格式，并分析其精度与稳定性。

考虑二维平流方程

$$u_t + u_x + u_y = 0,$$

假设平流速度为常数 1，取网格

$$x_j = j\Delta x, \quad y_k = k\Delta y, \quad t_n = n\Delta t.$$

为保证稳定性，在空间上采用迎风差分，因为速度为正，所以

$$D_x^- u_{j,k}^n = \frac{u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n}{\Delta x}, \qquad D_y^- u_{j,k}^n = \frac{u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n}{\Delta y}.$$

(1) ADI 分裂格式

采用分两步的 ADI 思想：

- 第一步：在 x 方向隐式、y 方向显式，

$$\frac{u_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,k}^n}{\Delta t/2} + D_x^- u_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + D_y^- u_{j,k}^n = 0.$$

- 第二步：在 y 方向隐式、x 方向显式，

$$\frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + D_x^- u_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + D_y^- u_{j,k}^{n+1} = 0.$$

这是一个典型的超抛物方程 ADI 迎风格式。由两步组合可知，该格式时间离散为一阶精度，空间上 D_x^-, D_y^- 为一阶迎风差分，因此总体精度为

$$O(\Delta t) + O(\Delta x) + O(\Delta y).$$

(2) von Neumann 稳定性分析

同样做 Fourier 模分析。令

$$u_{j,k}^n = G^n \exp\big(i(j\theta_x + k\theta_y)\big),$$

则

$$D_x^- u_{j,k}^n = a_x u_{j,k}^n, \qquad D_y^- u_{j,k}^n = a_y u_{j,k}^n,$$

其中

$$a_x = \frac{1 - e^{-i\theta_x}}{\Delta x}, \\ a_y = \frac{1 - e^{-i\theta_y}}{\Delta y}.$$

注意

$$\Re(a_x) = \frac{1 - \cos\theta_x}{\Delta x} \geq 0, \quad \Re(a_y) = \frac{1 - \cos\theta_y}{\Delta y} \geq 0.$$

设在第 n 步的 Fourier 系数为 g^n。第一步在该模上的标量形式为

$$\frac{g^{n+\frac{1}{2}} - g^n}{\Delta t/2} + a_x g^{n+\frac{1}{2}} + a_y g^n = 0,$$

整理得

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2} a_x\right) g^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} a_y\right) g^n.$$

第二步为

$$\frac{g^{n+1} - g^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + a_x g^{n+\frac{1}{2}} + a_y g^{n+1} = 0,$$

即

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2} a_y\right) g^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} a_x\right) g^{n+\frac{1}{2}}.$$

两式相乘得到一步增益因子

$$G := \frac{g^{n+1}}{g^n} = \frac{\left(1 - \frac{\Delta t}{2} a_x\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{2} a_y\right)}{\left(1 + \frac{\Delta t}{2} a_x\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2} a_y\right)}.$$

考虑复数 α 满足 $\Re(\alpha) \geq 0$，则

$$\left|\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right| \leq 1.$$

这里 a_x, a_y 的实部均非负，故

$$\left|\frac{1-\frac{\Delta t}{2}a_x}{1+\frac{\Delta t}{2}a_x}\right| \le 1, \qquad \left|\frac{1-\frac{\Delta t}{2}a_y}{1+\frac{\Delta t}{2}a_y}\right| \le 1,$$

于是

$$|G| \le 1.$$

这对任意 $\Delta t > 0$ 成立，说明本 ADI 迎风格式在 von Neumann 意义下是 **无条件稳定**的。

题目 4 （补充题 2）

已知非线性抛物方程

$$u_t = a(u)u_{xx},$$

其数值格式为（冻结系数法）

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{1}{2}\mu a\big(u_j^{n+\frac{1}{2}}\big)\Big(\delta_x^2 v_j^{n+1} + \delta_x^2 v_j^n\Big),$$

其中

$$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \qquad v_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}v_j^n - \frac{1}{2}v_j^{n-1},$$

δ_x^2 为三点中心差分。利用冻结系数法分析该格式的 L_2 模稳定性和最大模稳定性。

(1) 冻结系数与线性化

在冻结系数法中，把 $a(u_j^{n+\frac{1}{2}})$ 看成在某个固定值处的常数，记为 $\tilde{a} > 0$，则格式化为线性：

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \frac{\tilde{a}}{2}\Big(\delta_x^2 v_j^{n+1} + \delta_x^2 v_j^n\Big).$$

这正是常系数热方程

$$u_t = \tilde{a}u_{xx}$$

的 Crank–Nicolson 格式。因而可以直接套用 CN 格式的稳定性分析。

(2) L_2 模稳定性

记向量 $v^n = (\ldots, v_j^n, \ldots)^\top$，采用标准离散内积

$$(v, w) = \sum_j v_j w_j \,\Delta x, \qquad \|v\|_2^2 = (v, v).$$

离散 Laplace 算子

$$(\delta_x^2 v)_j = \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{\Delta x^2}$$

是对称负定的，即

$$(\delta_x^2 v, v) \le 0.$$

把格式写成向量形式：

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} = \frac{\tilde a}{2}\Big(Lv^{n+1} + Lv^n\Big),$$

其中 L 为离散 Laplace 矩阵。与 $v^{n+1}+v^n$ 取内积：

$$\left(\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t},\, v^{n+1}+v^n\right) = \frac{\tilde a}{2}\big(L(v^{n+1}+v^n),\, v^{n+1}+v^n\big).$$

左边化简为

$$\frac{1}{\Delta t}\Big(\|v^{n+1}\|_2^2 - \|v^n\|_2^2\Big),$$

右边利用 L 的对称性得

$$\frac{\tilde a}{2}\big(Lw, w\big) \le 0, \qquad w = v^{n+1}+v^n.$$

于是

$$\frac{1}{\Delta t}\Big(\|v^{n+1}\|_2^2 - \|v^n\|_2^2\Big) \le 0,$$

即

$$\|v^{n+1}\|_2 \le \|v^n\|_2.$$

因而在冻结系数意义下，该格式对任意 $\Delta t > 0$ 都是 L_2 **无条件稳定**的。

(3) 最大模稳定性

对一维周期网格做 Fourier 分析。设

$$v_j^n = g^n e^{ij\theta}, \qquad \theta \in [-\pi, \pi].$$

则

$$\delta_x^2 v_j^n = \lambda(\theta) v_j^n, \qquad \lambda(\theta) = \frac{e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}}{\Delta x^2} = \frac{-4\sin^2(\theta/2)}{\Delta x^2} \le 0.$$

代入线性化格式：

$$\frac{g^{n+1}-g^n}{\Delta t} = \frac{\tilde a}{2}\lambda(\theta)\big(g^{n+1}+g^n\big).$$

整理得

$$\left(1 - \frac{\tilde a\Delta t}{2}\lambda(\theta)\right)g^{n+1} = \left(1 + \frac{\tilde a\Delta t}{2}\lambda(\theta)\right)g^n.$$

记

$$\rho(\theta) := \frac{g^{n+1}}{g^n} = \frac{1+\frac{\tilde a\Delta t}{2}\lambda(\theta)}{1-\frac{\tilde a\Delta t}{2}\lambda(\theta)}.$$

由于 $\lambda(\theta)\le 0$，设

$$\alpha = -\frac{\tilde a\Delta t}{2}\lambda(\theta) \ge 0,$$

则

$$\rho(\theta)=\frac{1-\alpha}{1+\alpha},\qquad |\rho(\theta)|=\frac{|1-\alpha|}{1+\alpha}\le 1.$$

可见每个 Fourier 模的振幅不增。在周期情形下，数值解可以写成这些模的线性组合，因此系数的放大因子均不超过 1，从而 sup 范也不会增长：

$$\|v^{n+1}\|_\infty \le \|v^n\|_\infty.$$

因此在冻结系数意义下，该格式对最大模也是稳定的。