偏微分方程数值解作业

PB22000150 刘行

2025 年 11 月 18 日

3.1.2

考虑偏微分方程

$$v_t + a v_x = \nu v_{xx},$$

令

$$R = \frac{a\,\Delta t}{\Delta x}, \qquad r = \frac{\nu\,\Delta t}{\Delta x^2},$$

并采用中心差分算子

$$\delta_0 v_k^n = v_{k+1}^n - v_{k-1}^n, \qquad \delta^2 v_k^n = v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n.$$

在 von Neumann 意义下，令

$$v_k^n = G^n e^{ik\theta}, \qquad \theta = \frac{2\pi m}{M},$$

则

$$\delta_0 v_k^n = 2i\sin\theta\, v_k^n, \qquad \delta^2 v_k^n = -4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) v_k^n.$$

(1) 格式一的稳定性

格式为

$$v_k^{n+1} + \frac{R}{2}\delta_0 v_k^{n+1} - r\,\delta^2 v_k^{n+1} = v_k^n.$$

代入 $v_k^{n+1} = G v_k^n$，并使用上面的差分作用结果，得到

$$\left[1 + \frac{R}{2}\cdot 2i\sin\theta - r\big(-4\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big)\right] G v_k^n = v_k^n.$$

约去 $v_k^n \neq 0$，得

$$\big(1 + iR\sin\theta + 4r\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big)G = 1,$$

即放大因子

$$G(\theta) = \frac{1}{1 + 4r\sin^2(\frac{\theta}{2}) + iR\sin\theta}.$$

于是

$$|G(\theta)|^2 = \frac{1}{\big(1 + 4r\sin^2(\frac{\theta}{2})\big)^2 + R^2\sin^2\theta}.$$

注意到 $r \geq 0$，$\sin^2(\frac{\theta}{2}) \geq 0$，故

$$\big(1 + 4r\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big)^2 \geq 1,$$

再加上非负项 $R^2\sin^2\theta$ 得

$$\big(1 + 4r\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big)^2 + R^2\sin^2\theta \geq 1.$$

因此

$$|G(\theta)|^2 \leq 1, \qquad \forall\,\theta,\ \forall\, r \geq 0,\ R \in \mathbb{R},$$

说明该格式无条件稳定。

(2) 格式二的稳定性

格式为

$$v_k^{n+1} + \frac{R}{4}\delta_0 v_k^{n+1} - \frac{r}{2}\delta^2 v_k^{n+1} = v_k^n - \frac{R}{4}\delta_0 v_k^n + \frac{r}{2}\delta^2 v_k^n.$$

同样代入

$$v_k^{n+1} = G v_k^n, \qquad \delta_0 v_k^n = 2i\sin\theta\, v_k^n, \qquad \delta^2 v_k^n = -4\sin^2(\tfrac{\theta}{2}) v_k^n,$$

得到左端为

$$\left[1 + \frac{R}{4}\cdot 2i\sin\theta - \frac{r}{2}\big(-4\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big)\right] G v_k^n = \big(1 + i\frac{R}{2}\sin\theta + 2r\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big) G v_k^n,$$

右端为

$$\left[1 - \frac{R}{4}\cdot 2i\sin\theta + \frac{r}{2}\big(-4\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big)\right] v_k^n = \big(1 - i\frac{R}{2}\sin\theta - 2r\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big) v_k^n.$$

约去 v_k^n，得到

$$\big(1 + i\frac{R}{2}\sin\theta + 2r\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\big) G = 1 - i\frac{R}{2}\sin\theta - 2r\sin^2(\tfrac{\theta}{2}).$$

记

$$s = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad B = \frac{R}{2}\sin\theta, \qquad A = 2rs^2,$$

则

$$G(\theta) = \frac{1 - A - iB}{1 + A + iB}.$$

于是

$$|G(\theta)|^2 = \frac{(1-A)^2+B^2}{(1+A)^2+B^2}.$$

因为 $A = 2rs^2 \geq 0$，故

$$(1-A)^2 \leq (1+A)^2,$$

于是

$$(1-A)^2+B^2 \leq (1+A)^2+B^2,$$

从而

$$|G(\theta)|^2 \leq 1, \qquad \forall\,\theta,\ \forall\,r \geq 0,\ R \in \mathbb{R}.$$

因此，题目中的两个差分格式均为无条件稳定。

补 1

考虑线性平流方程

$$u_t + au_x = 0, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Lax 格式写为

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}\big(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n\big) - \frac{1}{2}r\delta_0 v_j^n,$$

其中

$$r = \frac{a\Delta t}{\Delta x}, \qquad \delta_0 v_j^n = v_{j+1}^n - v_{j-1}^n.$$

(1) 将格式写成凸组合形式

把格式中的 $\delta_0 v_j^n$ 展开, 有

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) - \frac{1}{2}r(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = \alpha v_{j+1}^n + \beta v_{j-1}^n,$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{2}(1-r), \qquad \beta = \frac{1}{2}(1+r).$$

容易验证

$$\alpha + \beta = 1.$$

当

$$|r| = \left|\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$$

时, 有

$$1 - r \geq 0, \qquad 1 + r \geq 0,$$

于是

$$\alpha \geq 0, \qquad \beta \geq 0.$$

因此在 CFL 条件 $|r| \leq 1$ 下,

$$v_j^{n+1} = \alpha v_{j+1}^n + \beta v_{j-1}^n$$

是两个格点值的凸组合.

(2) 离散最大模原理与 L_∞ 稳定性

定义离散无穷范数

$$\|v^n\|_\infty = \max_j |v_j^n|.$$

有

$$|v_j^{n+1}| = |\alpha v_{j+1}^n + \beta v_{j-1}^n| \leq \alpha |v_{j+1}^n| + \beta |v_{j-1}^n|.$$

再利用 $\alpha, \beta \geq 0$ 以及

$$|v_{j+1}^n| \leq \|v^n\|_\infty, \qquad |v_{j-1}^n| \leq \|v^n\|_\infty,$$

得到

$$|v_j^{n+1}| \leq (\alpha + \beta) \|v^n\|_\infty = \|v^n\|_\infty.$$

对所有 j 取最大值得

$$\left\|v^{n+1}\right\|_\infty \leq \|v^n\|_\infty.$$

用数学归纳法可得, 对任意 $n \geq 0$,

$$\|v^n\|_\infty \leq \left\|v^0\right\|_\infty.$$

因此, 当 $|r| \leq 1$ 时, Lax 格式关于 L_∞ 范数是稳定的.

补 2

考虑热方程

$$u_t = u_{xx}.$$

其 FTCS 格式为

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \mu(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n),$$

其中

$$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

定义离散 L_2 范数

$$\|v^n\|_{2,\Delta x}^2 = \sum_j |v_j^n|^2 \Delta x.$$

(1) Fourier 模分析

设格点函数在无穷区间或周期区间上, 可写成 Fourier 模的线性组合. 只需对单一波数 k 的模

$$v_j^n = \hat{v}^n e^{ikx_j}, \qquad x_j = j\Delta x$$

进行分析. 代入格式, 有

$$\hat{v}^{n+1} e^{ikx_j} = \hat{v}^n e^{ikx_j} + \mu \hat{v}^n \left(e^{ikx_{j+1}} - 2e^{ikx_j} + e^{ikx_{j-1}} \right).$$

两边约去 e^{ikx_j}, 得到放大因子 $G(k)$:

$$\hat{v}^{n+1} = G(k)\, \hat{v}^n, \qquad G(k) = 1 + \mu \left(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x} \right).$$

利用

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta,$$

有

$$G(k) = 1 + \mu\big(2\cos(k\Delta x) - 2\big) = 1 + 2\mu\big(\cos(k\Delta x) - 1\big).$$

进一步利用

$$\cos(k\Delta x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right),$$

得到

$$G(k) = 1 - 4\mu \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right).$$

可见 $G(k)$ 为实数, 且满足

$$G(k) \le 1.$$

要保证稳定性, 需要对所有波数 k 有

$$|G(k)| \le 1.$$

因为

$$0 \le \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \le 1,$$

所以

$$G_{\min} = 1 - 4\mu.$$

因此

$$|G(k)| \le 1 \Longleftrightarrow -1 \le 1 - 4\mu \le 1,$$

化简得到

$$0 \le \mu \le \frac{1}{2}.$$

(2) $L_{2,\Delta x}$ 范数的稳定性

若 $0 \le \mu \le \frac{1}{2}$, 则对任意波数 k 有 $|G(k)| \le 1$. 离散 Fourier 变换是一个保持 L_2 范数的正交变换, 因此

$$\left\|v^{n+1}\right\|_{2,\Delta x}^2 = \sum_k |\hat{v}^{n+1}(k)|^2 = \sum_k |G(k)\hat{v}^n(k)|^2 \le \sum_k |\hat{v}^n(k)|^2 = \|v^n\|_{2,\Delta x}^2 .$$

于是对任意 n,

$$\|v^n\|_{2,\Delta x} \le \left\|v^0\right\|_{2,\Delta x},$$

即在条件

$$0 \le \mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}$$

下, 热方程的 FTCS 格式关于 $L_{2,\Delta x}$ 是稳定的.

补 3

考虑线性常系数方程

$$u_t + u_x - \nu_2 u_{xx} + \mu_3 u_{xxx} = 0, \qquad \nu_2, \mu_3 \text{ 为常数.}$$

(1) Fourier 模分析

令

$$u(x,t) = \exp\big(i(kx - \omega t)\big),$$

其中 k 为波数, ω 为频率. 则

$$u_t = -i\omega u, \quad u_x = iku, \quad u_{xx} = (ik)^2 u = -k^2 u, \quad u_{xxx} = (ik)^3 u = -ik^3 u.$$

代回 PDE:

$$(-i\omega)u + (ik)u - \nu_2(-k^2 u) + \mu_3(-ik^3 u) = 0.$$

约去 $u \ne 0$ 得

$$-i\omega + ik + \nu_2 k^2 - i\mu_3 k^3 = 0.$$

把上述式子写成

$$-i\omega = -ik - \nu_2 k^2 + i\mu_3 k^3,$$

两边乘以 i, 得到色散关系

$$\omega = k - \mu_3 k^3 + i(-\nu_2 k^2).$$

记

$$\omega = \omega_R + i\omega_I,$$

则

$$\omega_R = k - \mu_3 k^3, \qquad \omega_I = -\nu_2 k^2.$$

(2) 耗散性分析

解的一般形式为

$$u(x,t) = \exp\big(-i\omega t\big)\exp(ikx) = \exp\big(-i\omega_R t\big)\exp\big(\omega_I t\big)\exp(ikx).$$

其中振幅因子为 $\exp(\omega_I t)$. 若对所有 k 有 $\omega_I \le 0$, 则振幅随时间衰减, 方程是耗散的.

这里

$$\omega_I = -\nu_2 k^2 \le 0 \quad (\nu_2 \ge 0),$$

且当 $k \ne 0$ 时严格小于 0. 因此当 $\nu_2 > 0$ 时, 该方程对非零波数表现为指数衰减, 是耗散的.

(3) 色散性分析

相速度为

$$c_p(k) = \frac{\omega_R}{k} = 1 - \mu_3 k^2.$$

可见 c_p 随波数 k 变化, 只要 $\mu_3 \ne 0$, 不同波数的信号传播速度不同, 这就是典型的色散现象. 因此:

- $\nu_2 > 0$ 决定耗散;
- $\mu_3 \ne 0$ 决定色散.

补 4

(1) PDE $u_t = u_{xx}$ 的耗散性与色散性

将方程写成

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

同样取 Fourier 模

$$u(x,t) = \exp\big(i(kx - \omega t)\big),$$

则

$$u_t = -i\omega u, \qquad u_{xx} = -k^2 u.$$

代入 PDE:

$$-i\omega u - (-k^2 u) = 0 \quad\Longrightarrow\quad -i\omega + k^2 = 0.$$

于是

$$\omega = -ik^2.$$

故

$$\omega_R = 0, \qquad \omega_I = -k^2 \le 0.$$

振幅因子为

$$\exp(\omega_I t) = \exp(-k^2 t),$$

对所有 $k \neq 0$ 均随时间指数衰减, 说明热方程是强耗散的.

另一方面, 相速度

$$c_p = \frac{\omega_R}{k} = 0,$$

与波数无关, 且没有传播, 只是纯衰减, 因此该 PDE 不具有色散性 (无相速度的波数依赖性).

(2) FTCS 格式的耗散性与色散性 (方法一: 模分析)

FTCS 格式表达式仍为

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \mu(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n), \qquad \mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

对 Fourier 模

$$v_j^n = \hat{v}^n e^{ikx_j}$$

进行分析, 之前已得到放大因子

$$G(k) = 1 - 4\mu \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right).$$

记

$$G(k) = |G(k)| e^{-i\theta(k)},$$

则数值解在一步时间上的变化为

$$\hat{v}^{n+1} = G(k)\,\hat{v}^n = |G(k)| e^{-i\theta(k)} \hat{v}^n.$$

其中

$$|G(k)| = \left|1 - 4\mu \sin^2(\tfrac{k\Delta x}{2})\right|$$

控制振幅变化, $\theta(k)$ 控制相位变化.

耗散性 当 $0 < \mu < \frac{1}{2}$ 时, 对非零波数有

$$0 < 1 - 4\mu \le G(k) < 1,$$

特别地, 当 $k \neq 0$ 且 $\sin^2(\frac{k\Delta x}{2}) > 0$ 时, 有

$$0 < G(k) < 1,$$

故

$$|G(k)| < 1.$$

这意味着每一步中所有非零波数的振幅都被衰减, 表现出数值耗散性, 而且高频 ($\sin^2$ 较大) 衰减更快.

色散性 由于 $G(k)$ 为实数且非负, 所以

$$\theta(k) = 0,$$

一步时间更新中没有额外的相位改动, 因此从严格意义上讲, 这个 FTCS 格式对热方程并不引入数值色散 (相速度始终为 0), 只表现为纯耗散.

(3) FTCS 格式的耗散性与色散性 (方法二: 修正方程)

另一种分析方法是通过求修正方程 (又称等效方程). 将数值格式展开到一定阶数, 寻找一个连续 PDE, 使其解在截断误差范围内逼近数值解.

对格式

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \mu(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

假设 v_j^n 近似于某个光滑函数 $u(x,t)$ 在 (x_j, t_n) 处的值:

$$v_j^n \approx u(x_j, t_n).$$

对时间方向作 Taylor 展开:

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \Delta t\, u_t + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + O(\Delta t^3).$$

空间方向同理:

$$u(x_{j\pm1}, t_n) = u(x_j, t_n) \pm \Delta x\, u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} \pm \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx} + O(\Delta x^5).$$

代入格式

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \mu\big(u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)\big),$$

左边用时间展开, 右边用空间展开, 得到

$$u + \Delta t\, u_t + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + O(\Delta t^3) = u + \mu\big(\Delta x^2 u_{xx} + \frac{\Delta x^4}{12} u_{xxxx} + O(\Delta x^5)\big).$$

约去 u, 得到

$$\Delta t\, u_t + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} = \mu \Delta x^2 u_{xx} + \mu \frac{\Delta x^4}{12} u_{xxxx} + O(\Delta t^3, \Delta x^5).$$

记 $\mu = \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$, 化简得

$$u_t + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} = u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} + O(\Delta t^2, \Delta x^4).$$

现用原 PDE $u_t = u_{xx}$ 代入 u_{tt} 的主阶:

$$u_{tt} = (u_{xx})_t \approx (u_t)_{xx} = (u_{xx})_{xx} = u_{xxxx}.$$

于是修正方程近似为

$$u_t = u_{xx} + \left(\frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\Delta t}{2} \right) u_{xxxx} + \cdots .$$

从修正方程看耗散性与色散性 对 Fourier 模 $u = e^{i(kx - \omega t)}$,

$$u_{xx} = -k^2 u, \qquad u_{xxxx} = k^4 u.$$

代入修正方程主阶:

$$-i\omega u = -k^2 u + \left(\frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\Delta t}{2} \right) k^4 u.$$

约去 u,

$$-i\omega = -k^2 + \left(\frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\Delta t}{2} \right) k^4.$$

从中可以看出:

- 右侧全为实数, 因此 ω 为纯虚数, 说明修正方程仍然没有相位项, 不产生色散;
- 若
  $$\frac{\Delta x^2}{12} - \frac{\Delta t}{2} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta t > \frac{\Delta x^2}{6},$$
  则高阶项的符号与主耗散项相同 (都是 $-k^2$ 型), 增强了高频耗散;
- 反之若 Δt 很小, 则高阶项可能减弱部分波数的耗散, 但在稳定条件 $\mu \le \frac{1}{2}$ 下, 总体仍表现为耗散.

从修正方程角度再次验证: FTCS 格式主要引入的是高阶耗散项而非色散项, 与模分析的结论一致.