

NPDE program 05 实验报告

刘行 PB22000150

2025 年 11 月 28 日

1 问题描述

考虑一维线性对流方程

$$u_t + u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

其初值条件为一个方波:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

本实验采用有限差分方法, 在区间 $[0, 1]$ 上施加周期边界条件。使用以下三种差分格式对该方程进行数值求解:

- FTBS (Forward Time Backward Space, 上风格式)
- FTCS (Forward Time Central Space, 中心格式)
- Lax–Wendroff 二阶格式

并分别在 CFL 数

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.2, 0.8$$

情况下, 对 $t = 0.05, 0.2, 0.8, 3.2$ 时刻的数值解进行比较。

此外, 根据作业 (2) 的要求, 对三种格式的耗散性与色散性进行分析, 并结合实验结果进行评价。

2 数值方法与稳定性分析

对流方程 $u_t + u_x = 0$ 的离散化形式统一写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(D_x u)_j^n, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

2.1 FTBS 格式 (上风格式)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(u_j^n - u_{j-1}^n).$$

Von Neumann 模分析可得其稳定条件为

$$0 < \lambda \leq 1.$$

FTBS 引入数值耗散, 使解的跳跃处变得平滑, 方波会被“涂抹”.

2.2 FTCS 格式 (中心格式)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

对 $u_t + u_x = 0$, FTCS 的放大因子满足

$$|G(\theta)| > 1, \quad \theta \neq 0.$$

因此该格式对本问题 无条件不稳定, 振荡会随时间指数增长.

2.3 Lax–Wendroff 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

Lax–Wendroff 为二阶格式, 具有较低数值耗散, 但会产生数值色散, 使得在间断附近出现振荡 (Gibbs 现象).

3 实验设置

取区间 $[0, 1]$, 周期边界条件. 空间步长

$$\Delta x = 0.05$$

对应 $J = 20$. 时间步长根据

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.2, 0.8$$

选择, 最终时间 $T = 3.2$. 对三种格式分别计算以下时刻的解:

$$t = 0.05, 0.2, 0.8, 3.2.$$

4 实验结果

4.1 CFL 数 $r = 0.2$ 的结果

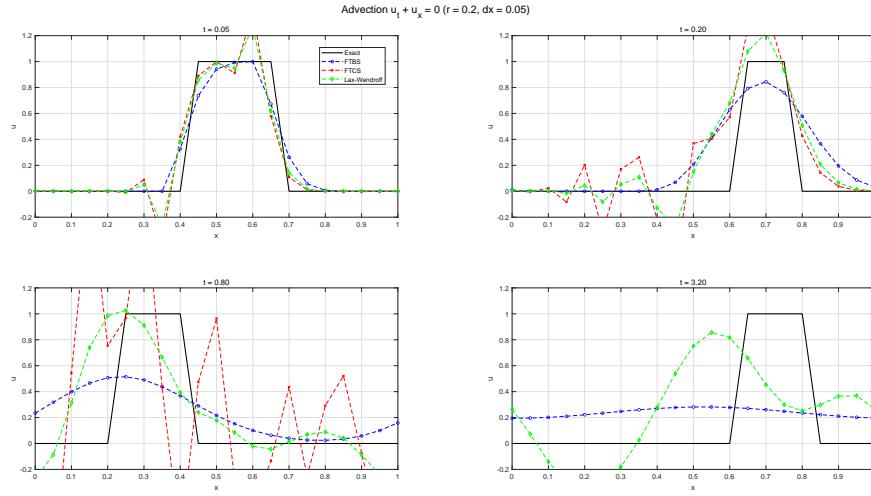


图 1: $r = 0.2$ 时三种格式的数值解比较.

注意: FTCS 在 $t = 3.20$ 时严重不稳定, 故未展示 (unstable/omitted).

4.2 CFL 数 $r = 0.8$ 的结果

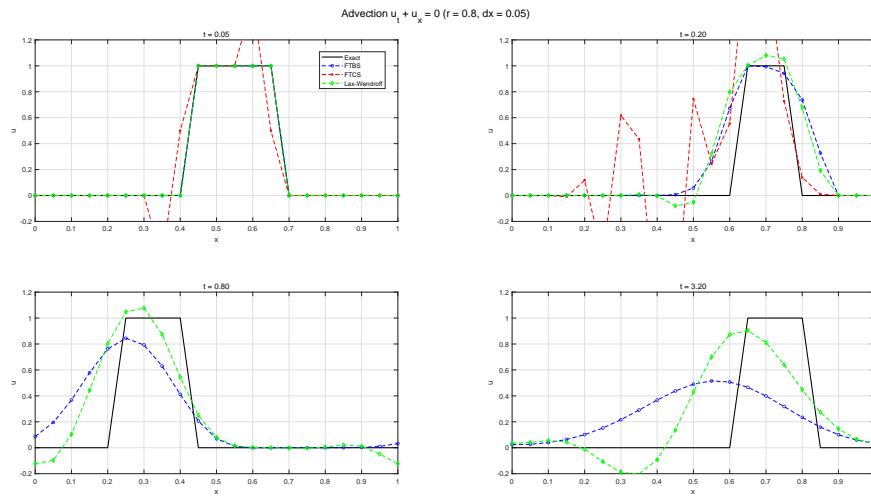


图 2: $r = 0.8$ 时三种格式的数值解比较.

注意: FTCS 在 $t = 0.80$ 与 $t = 3.20$ 时严重不稳定, 故未展示 (unstable/omitted).

5 结果分析与结论

结合图像与理论分析, 可以得到以下结论:

(1) FTCS 的不稳定性

FTCS 在本问题中无条件不稳定, 这是由其放大因子满足

$$|G(\theta)| > 1$$

所决定的. 从实验可见:

- $t = 0.80, 3.20$ ($r = 0.8$) 时振荡爆炸;
- $t = 3.20$ ($r = 0.2$) 也完全失稳.

因此图中未显示这些时刻.

(2) FTBS 的数值耗散 (dissipation)

FTBS 虽然在 $0 < r \leq 1$ 时稳定, 但具有强烈的数值黏性:

- 方波边界被明显 “涂抹”;
- $r = 0.2$ 时耗散更强, 波形显著变钝;
- $r = 0.8$ 时耗散较弱, 但仍可观察到锐利边界的退化.

(3) Lax–Wendroff 的数值色散 (dispersion)

Lax–Wendroff 几乎不耗散, 保持了方波的高度与宽度, 但:

- 在跳跃附近出现振荡 (ripple), 属于典型色散误差;
- 随时间推进振荡频率增高;
- 与 FTBS 相比, 整体波形保存得更好.

综合结论

- FTCS: 无条件不稳定, 不适用于对流方程.
- FTBS: 稳定但耗散强, 适合模拟稳定但模糊的传播.
- Lax–Wendroff: 二阶精度, 保持形状能力强, 但有色散振荡.

总体而言, 在本实验中:

FTBS 稳定但耗散 vs. Lax-Wendroff 稳定但色散.

对于具有间断的输运问题, 若要稳定且不过度抹平波形, Lax-Wendroff 通常优于 FTBS; 但在要求无振荡的场景中, FTBS 更为可靠.