HW07

4.3.1

取能量

$$E(t) = \|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \int u(x,t)^* \, u(x,t) \; \mathrm{d}x.$$

则有

$$\dot{E}(t) = 2\,\Re\,\langle u_t, u\rangle = 2\,\Re \int u^* \left(Au_x + Bu\right) \, \mathrm{d}x.$$

(1) 关于 Au_x 项:

$$\int u^* A u_x \, \mathrm{d}x.$$

当 A 为常矩阵时, 若 $A = A^*$, 则

$$u^* A u_x = \tfrac{1}{2}\partial_x \left(u^* A u\right),$$

于是

$$2\,\Re \int u^* A u_x \, \mathrm{d}x = \Re \int \partial_x \left(u^* A u\right) \, \mathrm{d}x = \Re \left[u^* A u\right]_{\text{边界}}.$$

在周期边界, 无穷远衰减或零通量边界条件下, 该边界项为零. 因此要保证能量守恒, 必须有

$$\boxed{A = A^*.}$$

(2) 关于 Bu 项:

$$2\,\Re \int u^* B u \, \mathrm{d}x = \int u^* \left(B + B^*\right) u \, \mathrm{d}x.$$

要使该项恒为零, 必须且只需

$$\boxed{B^* = -B.}$$

(3) 结论:

在适当的边界条件下 (如周期, 衰减或零通量), 系统

$$u_t = Au_x + B$$

能量守恒当且仅当

$$\boxed{A \text{ 自伴}, \qquad B \text{ 反自伴}.}$$

等价地, 生成算子

$$L = A\partial_x + B$$

在 L^2 空间中反自伴.

4.4.1

设能量

$$E(t) = \|u(\cdot,t)\|^2 = \langle u, u\rangle.$$

对时间求导得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 = \Re\langle u_t, u\rangle = \Re\langle Au_{xx}, u\rangle.$$

对右端分部积分 (假设边界项为零):

$$\Re\langle Au_{xx}, u\rangle = -\Re\langle Au_x, u_x\rangle.$$

若 A 是常矩阵且自伴正定, 即 $A = A^*$, 且存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle Av, v\rangle \geq \alpha\|v\|^2,$$

代入得,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 + 2\alpha\|u_x\|^2 \leq 0.$$

积分 $t \in [0, T]$ 得

$$\|u(\cdot,t)\|^2 + 2\alpha\int_0^t \|u_x(\cdot,\xi)\|^2 \,\mathrm{d}\xi \leq \|u(\cdot,0)\|^2.$$

因此式 (4.4.9) 成立, 可取

$$\boxed{\delta = 2\alpha = 2\lambda_{\min}(A), \qquad K = 1.}$$

4.4.2

考虑系统

$$u_t = Au_{xx} + Bu_x + Cu,$$

其中 $B = B^*$, $C^* = -C$. 同样有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 = \Re\langle Au_{xx}, u\rangle + \Re\langle Bu_x, u\rangle + \Re\langle Cu, u\rangle.$$

对各项分析:

- 第一项: 与 4.4.1 相同,

$$\Re\langle Au_{xx}, u\rangle = -\Re\langle Au_x, u_x\rangle \leq -\alpha\|u_x\|^2.$$

- 第二项: 由于 B 为常矩阵且 $B = B^*$,

$$\Re\langle Bu_x, u\rangle = \frac{1}{2}\Re\int \partial_x(u^*Bu)\,\mathrm{d}x = 0,$$

  边界项为零.

- 第三项: 因 $C^* = -C$,

$$u^* C u \text{为纯虚数} \Rightarrow \Re \langle Cu, u \rangle = 0.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|u\|^2 + 2\alpha \|u_x\|^2 \le 0,$$

与 4.4.1 完全相同. 积分得

$$\|u(\cdot, t)\|^2 + 2\alpha \int_0^t \|u_x(\cdot, \xi)\|^2 \, \mathrm{d}\xi \le \|u(\cdot, 0)\|^2 .$$

故式 (4.4.9) 依然成立, 并可取相同的常数

$$\boxed{\delta = 2\lambda_{\min}(A), \qquad K = 1.}$$

4.5.1

对系统 $u_t = A\, u_x$ 进行空间傅里叶变换:

$$\widehat{u}_t = i\omega A\, \widehat{u}.$$

因此其符号矩阵为 $\widehat{P}(i\omega) = i\omega A$, 特征值为

$$\lambda = i\omega\mu,$$

其中 μ 是矩阵 A 的特征值. 若 $\mu = a + ib$, 则

$$\Re\lambda = \Re(i\omega\mu) = -\omega\, \Im\mu = -\omega b.$$

若 $b \neq 0$, 即 A 存在非实特征值, 则可以改变 ω 的符号, 使 $\Re\lambda$ 取得任意大的正值, 从而不存在有限的 α 使得 $\Re\lambda \le \alpha$ 对所有 ω 成立.
若 $b = 0$, 即 A 的特征值全为实数, 则 $\Re\lambda = 0$, 此时 Petrovsky 条件在 $\alpha = 0$ 时已经成立.
因此不可能出现 "当 $\alpha > 0$ 时成立而当 $\alpha = 0$ 不成立" 的情况. 结论是:

$$\boxed{\text{若} A \text{ 的特征值全实, 则条件在} \alpha = 0 \text{ 时成立; 否则对任意} \alpha \text{ 都不成立.}}$$

4.5.2

给定系统

$$u_t = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_x,$$

有

$$\widehat{P}(i\omega) = i\omega A, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

根据定理 4.5.7, 我们需要找到一个正定厄米矩阵 $\widehat{H}(\omega)$ (为方便起见记为 H, 与 ω 无关) 使得

$$HA = A^* H.$$

此时

$$H\widehat{P}(i\omega) + \widehat{P}(i\omega)^* H = i\omega(HA - A^*H) = 0 \le 2\alpha H,$$

因此可以取 $\alpha = 0$.

设

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}, \qquad H = H^*.$$

代入 $HA = A^\top H$, 得到方程组:

$$\begin{cases} 10h_{11} + 2h_{12} = h_{12}, \\ h_{12} = 10h_{11} + 2h_{12}. \end{cases}$$

由此解得 $h_{12} = -10h_{11}$, 而 h_{22} 可任意取. 为了保证 H 正定, 只需取 $h_{22} > 100h_{11}$. 例如, 取 $h_{11} = 1$, $h_{22} = 101$, 得

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 101 \end{bmatrix}.$$

显然 H 是厄米正定矩阵, 且满足 $HA = A^\top H$. 于是有

$$H\widehat{P}(i\omega) + \widehat{P}(i\omega)^* H = 0 \le 2\alpha H \quad (\alpha = 0),$$

并且由于 H 正定, 存在常数 $K > 0$ 使

$$K^{-1}I \le H \le KI.$$

因此, 矩阵

$$\boxed{\widehat{H}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 101 \end{bmatrix}}$$

满足定理 4.5.7 的条件 (4.5.14) 和 (4.5.15), 且可取 $\alpha = 0$.

补充作业

设系统经过傅里叶变换后为

$$\partial_t \widehat{u}(\omega, t) = \widehat{P}(i\omega)\, \widehat{u}(\omega, t),$$

定义能量函数

$$E(\omega,t) := \|\widehat{u}(\omega,t)\|_{\mathbb{C}^m}^2 = \widehat{u}(\omega,t)^* \widehat{u}(\omega,t).$$

对时间求导, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\omega,t) = \widehat{u}^* \widehat{P}(i\omega)\widehat{u} + \left(\widehat{P}(i\omega)\widehat{u}\right)^* \widehat{u} = \widehat{u}^* \left(\widehat{P}(i\omega) + \widehat{P}(i\omega)^*\right)\widehat{u}.$$

由假设条件,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\omega,t) \le 2\alpha\, E(\omega,t).$$

由 Gronwall 不等式可得

$$E(\omega,t) \le e^{2\alpha t}E(\omega,0) = e^{2\alpha t}\|\widehat{u}_0(\omega)\|^2.$$

对 ω 积分, 并由 Parseval 等式,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} E(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega \le e^{2\alpha t}\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u}_0(\omega)\|^2\,\mathrm{d}\omega = e^{2\alpha t}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

因此,

$$\boxed{\|u(\cdot,t)\|_{L^2} \le e^{\alpha t}\|u_0\|_{L^2}.}$$

该不等式表明:

- 解随时间的增长至多呈指数形式;
- 解对初值连续依赖;
- 解唯一.

由于常系数线性系统的存在性可由傅里叶表示

$$\widehat{u}(\omega,t) = e^{t\widehat{P}(i\omega)}\widehat{u}_0(\omega)$$

直接得到, 因此初值问题 (1) 是 **well-posed**.
事实上, 这正是定理 4.5.7 的特例, 取 $\widehat{H}(\omega) \equiv I$, $K=1$, 此时条件

$$\widehat{H}\widehat{P}(i\omega) + \widehat{P}(i\omega)^*\widehat{H} \le 2\alpha\widehat{H}$$

即为题设所给的不等式.