HW06

4.1.1

考虑傅里叶模态 $u(x,t)=e^{i\omega x}\widehat{u}(\omega,t)$，代入方程 $u_t=u_{xx}+100u$ 得：

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}(\omega,t)=(100-\omega^2)\widehat{u}(\omega,t)$$

精确解为 $\widehat{u}(\omega,t)=e^{(100-\omega^2)t}\widehat{f}(\omega)$。
分两种情形分析舍入误差：
情形 A：初始数据存在舍入误差 δ，即实际初始振幅为 $\widehat{f}(\omega)+\delta$。最终时刻 t 的数值解为：

$$\widehat{u}_{\text{num}}(\omega,t)=e^{(100-\omega^2)t}(\widehat{f}(\omega)+\delta)$$

相对于精确解 $\widehat{u}(\omega,t)=e^{(100-\omega^2)t}\widehat{f}(\omega)$ 的相对误差为：

$$\frac{|\widehat{u}_{\text{num}}(\omega,t)-\widehat{u}(\omega,t)|}{|\widehat{u}(\omega,t)|}=\frac{|\delta|}{|\widehat{f}(\omega)|}$$

要保证相对误差不超过 1%，需满足：

$$\frac{|\delta|}{|\widehat{f}(\omega)|}\le 0.01$$

情形 B：时间推进过程中产生局部舍入误差 $\varepsilon(s)$。在时间 s 引入的误差到最终时刻 t 会被放大 $e^{(100-\omega^2)(t-s)}$ 倍。最坏情况下（$\omega=0$），最大放大因子为 $e^{100\cdot 2}=e^{200}$。为保证最终相对误差不超过 1%，保守条件要求每次局部绝对误差 ε 满足：

$$\varepsilon\le 0.01\cdot e^{-200}|u(\cdot,2)|$$

其中 $e^{-200}\approx 1.38\times 10^{-87}$。

4.2.1

考虑偏微分方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{j=0}^{4}a_j\frac{\partial^j u}{\partial x^j}$。设解的形式为 $u(x,t)=e^{i\omega x}\widehat{u}(\omega,t)$，代入方程得：

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}(\omega,t)=\kappa(\omega)\widehat{u}(\omega,t)$$

其中符号函数 $\kappa(\omega)=\sum_{j=0}^{4}a_j(i\omega)^j$。
问题良定的充要条件是：存在实常数 α，使得对所有实 ω 有：

$$\operatorname{Re}\kappa(\omega)\le\alpha$$

展开 $\kappa(\omega)$ 的实部：

$$\kappa(\omega) = a_0 + ia_1\omega - a_2\omega^2 - ia_3\omega^3 + a_4\omega^4$$
$$\operatorname{Re}\kappa(\omega) = \operatorname{Re}a_0 - \operatorname{Re}a_2\omega^2 + \operatorname{Re}a_4\omega^4$$

当 $\operatorname{Re}a_4 < 0$ 时，$\operatorname{Re}\kappa(\omega) \sim \operatorname{Re}a_4\omega^4 \to -\infty$（当 $|\omega| \to \infty$），因此 $\operatorname{Re}\kappa(\omega)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有上界，问题总是良定的。

补充作业 1

在时空单元 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ 上积分 PDE $u_t = u_{xx} + f(x,t)$：

$$\iint u_t dxdt = \iint u_{xx} dxdt + \iint f(x,t) dxdt$$

左端：

$$\iint u_t dxdt = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} [u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)]dx \approx h(u_j^{n+1} - u_j^n)$$

右端第一项：

$$\iint u_{xx} dxdt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [u_x(x_{j+1/2}, t) - u_x(x_{j-1/2}, t)]dt$$

用 θ 加权近似时间积分：

$$\approx \tau[\theta(u_x(x_{j+1/2}, t_{n+1}) - u_x(x_{j-1/2}, t_{n+1})) + (1-\theta)(u_x(x_{j+1/2}, t_n) - u_x(x_{j-1/2}, t_n))]$$

用中心差分近似空间导数：

$$u_x(x_{j+1/2}, t) \approx \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h}$$

于是：

$$\iint u_{xx} dxdt \approx \frac{\tau}{h}[\theta(\delta_x^2 u_j^{n+1}) + (1-\theta)(\delta_x^2 u_j^n)]$$

其中 $\delta_x^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$。
右端第二项：

$$\iint f(x,t) dxdt \approx h\tau[\theta f_j^{n+1} + (1-\theta) f_j^n]$$

整理得 θ-格式：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2}[\theta\delta_x^2 u_j^{n+1} + (1-\theta)\delta_x^2 u_j^n] + \theta f_j^{n+1} + (1-\theta) f_j^n$$

截断误差分析：空间中心差分误差：$\delta_x^2 u_j = h^2 u_{xx} + \frac{h^4}{12} u_{xxxx} + O(h^6)$ 时间差商：$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + O(\tau^2)$ 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时，时间截断误差为 $O(\tau^2)$，空间截断误差为 $O(h^2)$。

补充作业 2

(A) 在时空单元 $[t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上积分 PDE $u_t = u_{xx}$：

$$\iint u_t dxdt = \iint u_{xx} dxdt$$

左端：

$$\iint u_t dxdt = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_{n-1})] dx = h(\overline{u}_j^{n+1} - \overline{u}_j^{n-1})$$

其中 $\overline{u}_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx$ 为单元平均。
右端：

$$\iint u_{xx} dxdt = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} [u_x(x_{j+1/2}, t) - u_x(x_{j-1/2}, t)] dt$$

用时间中点近似：

$$\approx 2\tau [u_x(x_{j+1/2}, t_n) - u_x(x_{j-1/2}, t_n)]$$

用中心差分近似空间导数：

$$u_x(x_{j+1/2}, t_n) \approx \frac{\overline{u}_{j+1}^n - \overline{u}_j^n}{h}$$

于是：

$$\iint u_{xx} dxdt \approx \frac{2\tau}{h} (\overline{u}_{j+1}^n - 2\overline{u}_j^n + \overline{u}_{j-1}^n)$$

得到格式：

$$\frac{\overline{u}_j^{n+1} - \overline{u}_j^{n-1}}{2\tau} = \frac{\overline{u}_{j+1}^n - 2\overline{u}_j^n + \overline{u}_{j-1}^n}{h^2}$$

截断误差分析：时间方向泰勒展开：

$$u(x_j, t_{n+1}) = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4)$$
$$u(x_j, t_{n-1}) = u - \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4)$$

于是：

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})}{2\tau} = u_t + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} + O(\tau^4)$$

空间方向：

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{h^2} = u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O(h^4)$$

由 PDE $u_t = u_{xx}$，局部截断误差为：

$$\mathrm{LTE} = \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O(\tau^4 + h^4)$$

故格式精度为 $O(\tau^2 + h^2)$。

(B) 考虑三点线性组合 $L_h[u]_j = \alpha u_{j-1} + \beta u_j + \gamma u_{j+1}$ 逼近 $u_{xx}(x_j)$。泰勒展开：

$$
\begin{aligned}
u_{j\pm 1} &= u_j \pm h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} + O(h^5) \\
L_h[u]_j &= (\alpha+\beta+\gamma) u_j + (\gamma-\alpha) h u_x + \frac{\alpha+\gamma}{2} h^2 u_{xx} \\
&\quad + \frac{\gamma-\alpha}{6} h^3 u_{xxx} + \frac{\alpha+\gamma}{24} h^4 u_{xxxx} + O(h^5)
\end{aligned}
$$

要逼近 u_{xx}，需满足：

$$
\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= 0 \\
\gamma-\alpha &= 0 \\
\frac{\alpha+\gamma}{2} h^2 &= 1
\end{aligned}
$$

解得 $\alpha = \gamma = \frac{1}{h^2}$，$\beta = -\frac{2}{h^2}$。此时 u_{xxx} 项系数为 0，但 u_{xxxx} 项系数为 $\frac{h^2}{12}$，故误差主项为 $O(h^2)$，无法达到三阶精度。

补充作业 3

方程 $u_t = \partial_x(\kappa(x) u_x)$，其中 $\kappa(x) = 0.1 + \sin^2 x$。
定义空间节点 $x_j = jh$，时间节点 $t_n = n\tau$，界面点 $x_{j+1/2} = (j+1/2)h$。界面扩散系数取精确值：

$$
\kappa_{j+1/2} = \kappa(x_{j+1/2}) = 0.1 + \sin^2(x_{j+1/2})
$$

数值通量：

$$
F^n_{j+1/2} = \kappa_{j+1/2} \frac{u^n_{j+1} - u^n_j}{h}
$$

空间离散算子：

$$
\mathcal{L}_h(u^n)_j = \frac{F^n_{j+1/2} - F^n_{j-1/2}}{h} = \frac{1}{h}\left[\kappa_{j+1/2}\frac{u^n_{j+1}-u^n_j}{h} - \kappa_{j-1/2}\frac{u^n_j - u^n_{j-1}}{h}\right]
$$

Crank-Nicolson 时间离散：

$$
\frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\tau} = \frac{1}{2}[\mathcal{L}_h(u^{n+1})_j + \mathcal{L}_h(u^n)_j]
$$

精度分析：空间离散误差：在界面 $x_{j+1/2}$ 处，

$$
\kappa_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h} = \kappa(x_{j+1/2})[u_x(x_{j+1/2}) + O(h^2)]
$$

故通量近似误差为 $O(h^2)$，空间离散整体误差为 $O(h^2)$。时间离散采用 Crank-Nicolson 格式，截断误差为 $O(\tau^2)$。综上，格式精度为 $O(\tau^2 + h^2)$。