NPDE 作业 11

刘行　PB22000150

Solution.　考虑热传导模型

$$\begin{cases} u_t = a u_{xx}, & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1], \\ -a u_x(0,t) + \sigma u(0,t) = \phi_0(t), & t > 0, \\ u(1,t) = \phi_1(t), & t > 0, \end{cases}$$

其中 $a > 0,\ \sigma > 0$ 为常数.

在时间方向采用 Crank-Nicolson (CN) 格式, 即在内部网格点处时间二层平均, 空间用二阶中心差分逼近 u_{xx}. 下面逐一给出三种自然边界离散方法对应的差分格式.

统一网格记号

在区间 $[0,1]$ 上取等距网格

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \ldots, M, \qquad h = \frac{1}{M},$$

时间上取

$$t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

记数值解

$$u_j^n \approx u(x_j, t^n).$$

对内部点 $j = 1, \ldots, M-1$, CN 格式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{a}{2h^2}\Big[(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)\Big]. \tag{1}$$

右端本质边界条件直接写成

$$u_M^{n+1} = \phi_1(t^{n+1}), \qquad n \geq 0. \tag{2}$$

关键在于左端自然边界 $-a u_x(0,t) + \sigma u(0,t) = \phi_0(t)$ 的离散. 下面对三种方法分别处理.

(1) 单侧离散方法

在 $x=0$ 处对一阶导数用一阶向前差分逼近

$$u_x(0,t^{n+1}) \approx \frac{u_1^{n+1}-u_0^{n+1}}{h}, \qquad u(0,t^{n+1}) \approx u_0^{n+1}.$$

代入边界条件得到

$$-a\frac{u_1^{n+1}-u_0^{n+1}}{h}+\sigma u_0^{n+1}=\phi_0(t^{n+1}).$$

整理可写成

$$\left(\frac{a}{h}+\sigma\right)u_0^{n+1}-\frac{a}{h}u_1^{n+1}=\phi_0(t^{n+1}). \tag{3}$$

综上, 采用单侧离散时, 完整的 CN 差分格式由 (1) ($j=1,\dots,M-1$), (3) 以及 (2) 共同组成.

(2) 虚拟网格 (虚拟点) 方法

虚拟点方法的思想是: 在边界外增加一个虚拟网格点, 使得可以在 $x=0$ 处仍然使用二阶中心差分, 从而在空间上保持二阶相容性.

空间网格扩展　在原有网格基础上向左再加一个点

$$x_{-1}=-h,$$

并令

$$u_{-1}^n \approx u(x_{-1},t^n)$$

为虚拟未知量.

在 $x=0$ 处用中心差分逼近一阶导数:

$$u_x(0,t^n) \approx \frac{u_1^n-u_{-1}^n}{2h}, \qquad n \ge 0.$$

于是边界条件在时间层 t^n 上离散为

$$-a\,\frac{u_1^n-u_{-1}^n}{2h}+\sigma u_0^n=\phi_0(t^n). \tag{4}$$

同理, 在 t^{n+1} 层有

$$-a\,\frac{u_1^{n+1}-u_{-1}^{n+1}}{2h}+\sigma u_0^{n+1}=\phi_0(t^{n+1}). \tag{5}$$

由 (4) 解出虚拟点 u_{-1}^n:

$$-a\frac{u_1^n-u_{-1}^n}{2h}+\sigma u_0^n=\phi_0(t^n) \quad\Longrightarrow\quad u_{-1}^n=u_1^n+\frac{2h}{a}\big(\phi_0(t^n)-\sigma u_0^n\big),$$

同理

$$u_{-1}^{n+1}=u_1^{n+1}+\frac{2h}{a}\big(\phi_0(t^{n+1})-\sigma u_0^{n+1}\big).$$

0 号点的 CN 格式 采用虚拟点后, 可以把 $x_0 = 0$ 也当作“内部点”, 在 $j = 0$ 处同样写 CN 格式:

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} = \frac{a}{2h^2}\Big[(u_1^{n+1} - 2u_0^{n+1} + u_{-1}^{n+1}) + (u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n)\Big]. \tag{6}$$

将上面得到的 u_{-1}^n, u_{-1}^{n+1} 代入 (6), 得到只含真实格点未知量的边界差分方程:

$$\begin{aligned}\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} &= \frac{a}{2h^2}\Big[u_1^{n+1} - 2u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + \frac{2h}{a}\big(\phi_0(t^{n+1}) - \sigma u_0^{n+1}\big) \\ &\qquad + u_1^n - 2u_0^n + u_1^n + \frac{2h}{a}\big(\phi_0(t^n) - \sigma u_0^n\big)\Big] \\ &= \frac{a}{h^2}\Big[(u_1^{n+1} - u_0^{n+1}) + (u_1^n - u_0^n)\Big] + \frac{1}{h}\Big[\phi_0(t^{n+1}) + \phi_0(t^n) - \sigma(u_0^{n+1} + u_0^n)\Big].\end{aligned} \tag{7}$$

因此, 虚拟网格方法下的 *CN* 差分格式由

- 内部点 $j = 1, \ldots, M-1$ 处的 CN 方程 (1);
- $j = 0$ 处的边界 CN 方程 (7);
- 右端本质边界 (2)

共同组成.

(3) 半网格方法

半网格方法的思想是: 把未知量放在“单元中心” $x_{j-\frac{1}{2}}$ 上, 使控制体积天然“半个网格”贴在边界, 从而在保持守恒性的同时, 在空间上仍能得到二阶相容的自然边界离散.

空间与时间离散 在 $[0,1]$ 上考虑半网格点

$$x_{j-\frac{1}{2}} = \Big(j - \frac{1}{2}\Big)\Delta x, \quad j = 0, 1, \ldots, J+1,$$

其中步长取为

$$\Delta x = \frac{2}{2J+1},$$

从 $x_{-1/2}$ 到 $x_{J+1/2}$ 正好覆盖 $[-\Delta x/2, 1 + \Delta x/2]$, 而 $x_{J-1/2}$ 位于 1 附近, 用来处理右端 Dirichlet 边界. 记

$$u_{j-\frac{1}{2}}^n \approx u(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n).$$

内部点 (例如 $j = 2, \ldots, J-1$) 处的二阶导数仍用中心差分

$$u_{xx}(x_{j-\frac{1}{2}}, t^n) \approx \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^n - 2u_{j-\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{3}{2}}^n}{(\Delta x)^2},$$

于是内部半网格点的 CN 格式为

$$\frac{u^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}-u^{n}_{j-\frac{1}{2}}}{\tau}=\frac{a}{2(\Delta x)^2}\Big[u^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}-2u^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}+u^{n+1}_{j-\frac{3}{2}}+u^{n}_{j+\frac{1}{2}}-2u^{n}_{j-\frac{1}{2}}+u^{n}_{j-\frac{3}{2}}\Big]. \tag{8}$$

右端本质边界在半网格上可直接取

$$u^{n+1}_{J-\frac{1}{2}}=\phi_1(t^{n+1}),\qquad n\ge 0. \tag{9}$$

左端自然边界的半网格离散 左端 $x=0$ 处没有真实格点, 对导数采用“半步中心差分”, 即在 $x_{1/2}$ 与 $x_{-1/2}$ 之间做中心差分:

$$u_x(0,t^n)\approx\frac{u^n_{1/2}-u^n_{-1/2}}{\Delta x},\quad u(0,t^n)\approx\frac{u^n_{1/2}+u^n_{-1/2}}{2}.$$

代入边界条件

$$-au_x(0,t)+\sigma u(0,t)=\phi_0(t),$$

在时间层 t^n 上得到二阶空间相容的差分式

$$-\frac{a}{\Delta x}\big(u^n_{1/2}-u^n_{-1/2}\big)+\frac{\sigma}{2}\big(u^n_{1/2}+u^n_{-1/2}\big)=\phi_0(t^n). \tag{10}$$

同理, 在 t^{n+1} 层有

$$-\frac{a}{\Delta x}\big(u^{n+1}_{1/2}-u^{n+1}_{-1/2}\big)+\frac{\sigma}{2}\big(u^{n+1}_{1/2}+u^{n+1}_{-1/2}\big)=\phi_0(t^{n+1}). \tag{11}$$

这里 $x_{-1/2}$ 是一个虚拟点, 用来保证导数离散的对称性.

消去虚拟半网格点 由 (10) 可解出 $u^n_{-1/2}$:

$$-\frac{a}{\Delta x}(u^n_{1/2}-u^n_{-1/2})+\frac{\sigma}{2}(u^n_{1/2}+u^n_{-1/2})=\phi_0(t^n)$$

等价于

$$\Big(\frac{a}{\Delta x}+\frac{\sigma}{2}\Big)u^n_{-1/2}=\Big(\frac{a}{\Delta x}-\frac{\sigma}{2}\Big)u^n_{1/2}+\phi_0(t^n),$$

从而

$$u^n_{-1/2}=\frac{\Big(\frac{a}{\Delta x}-\frac{\sigma}{2}\Big)u^n_{1/2}+\phi_0(t^n)}{\frac{a}{\Delta x}+\frac{\sigma}{2}}. \tag{12}$$

同理从 (11) 得到

$$u^{n+1}_{-1/2}=\frac{\Big(\frac{a}{\Delta x}-\frac{\sigma}{2}\Big)u^{n+1}_{1/2}+\phi_0(t^{n+1})}{\frac{a}{\Delta x}+\frac{\sigma}{2}}. \tag{13}$$

另一方面, 在最靠近左端的半网格点 $x_{1/2}$ 处 (对应 $j=1$) 的 CN 方程由 (8) 给出:

$$\frac{u^{n+1}_{1/2}-u^{n}_{1/2}}{\tau}=\frac{a}{2(\Delta x)^2}\Big[u^{n+1}_{3/2}-2u^{n+1}_{1/2}+u^{n+1}_{-1/2}+u^{n}_{3/2}-2u^{n}_{1/2}+u^{n}_{-1/2}\Big]. \tag{14}$$

将 (12) 和 (13) 分别代入上式中的 $u_{-1/2}^n$ 与 $u_{-1/2}^{n+1}$, 即可得到只含 $u_{1/2}^n, u_{1/2}^{n+1}, u_{3/2}^n, u_{3/2}^{n+1}$ 以及 $\phi_0(t^n), \phi_0(t^{n+1})$ 的边界差分方程. 为了书写方便, 可将代入后的各个系数记为

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1$$

等常数 (依赖 $a, \sigma, \Delta x, \tau$), 则 (14) 可以整理成

$$\alpha_0 u_{1/2}^{n+1} + \alpha_1 u_{3/2}^{n+1} = \beta_0 u_{1/2}^n + \beta_1 u_{3/2}^n + (\text{含}\, \phi_0(t^n), \phi_0(t^{n+1}) \text{ 的已知项}). \tag{15}$$

于是, 半网格方法下的 *CN* 差分格式由

- 内部半网格点处的 CN 方程 (8);
- 左端 $x = 0$ 处由 (15) 表示的边界差分方程 (其系数通过 (12),(13) 代入 (14) 得到);
- 右端本质边界条件 (9)

共同构成.

以上分别给出了在 CN 时间离散下, 自然边界采用单侧差分, 虚拟网格以及半网格三种空间离散方式时, 对应的差分格式. □