偏微分方程数值解作业 09

PB22000150 刘行

2025 年 11 月 25 日

HW 5.8.4

题目给出的差分格式为

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n - \frac{R_x}{2}\delta_x^0 u_{j,k}^n + \frac{R_x^2}{2}\delta_x^2 u_{j,k}^n - \frac{R_y}{2}\delta_y^0 u_{j,k}^n + \frac{R_y^2}{2}\delta_y^2 u_{j,k}^n.$$

其中

$$\delta_x^0 u_{j,k}^n = u_{j+1,k}^n - u_{j-1,k}^n, \qquad \delta_x^2 u_{j,k}^n = u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n,$$

y 方向定义完全类似。

该格式试图逼近二维线性平流方程

$$u_t + au_x + bu_y = 0, \qquad R_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x},\ R_y = \frac{b\Delta t}{\Delta y}.$$

我们对格式左侧做 Taylor 展开：

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} &= u(x_j, y_k, t_n + \Delta t) \\ &= u + \Delta t u_t + \frac{\Delta t^2}{2}u_{tt} + \frac{\Delta t^3}{6}u_{ttt} + O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

再展开右侧每个差分算子。以 x 方向为例，

$$\begin{aligned} \delta_x^0 u_{j,k}^n &= u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x) \\ &= 2\Delta x u_x + \frac{2\Delta x^3}{3}u_{xxx} + O(\Delta x^5), \\ \delta_x^2 u_{j,k}^n &= u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x) = \Delta x^2 u_{xx} + \frac{\Delta x^4}{12}u_{xxxx} + O(\Delta x^6). \end{aligned}$$

代入格式右端得：

$$u_{j,k}^n - R_x\Delta x\, u_x - \frac{R_x\Delta x^3}{3}u_{xxx} + \frac{R_x^2}{2}\Delta x^2 u_{xx} - R_y\Delta y\, u_y - \frac{R_y\Delta y^3}{3}u_{yyy} + \frac{R_y^2}{2}\Delta y^2 u_{yy} + O(\Delta x^4 + \Delta y^4).$$

由于 $R_x = a\Delta t/\Delta x$，化简得

$$u_{j,k}^n - a\Delta t u_x - \frac{a\Delta t\,\Delta x^2}{3}u_{xxx} + \frac{a^2\Delta t^2}{2}u_{xx} - b\Delta t u_y - \frac{b\Delta t\,\Delta y^2}{3}u_{yyy} + \frac{b^2\Delta t^2}{2}u_{yy}.$$

现在比较两边 Taylor 展开。左侧二阶项为

$$\frac{\Delta t^2}{2}u_{tt}.$$

而 PDE 给出

$$u_{tt} = (au_x + bu_y)_t = au_{xt} + bu_{yt} = a^2u_{xx} + 2abu_{xy} + b^2u_{yy}.$$

于是左侧二阶项应为

$$\frac{\Delta t^2}{2}(a^2u_{xx} + 2abu_{xy} + b^2u_{yy}).$$

而右侧二阶项为

$$\frac{a^2\Delta t^2}{2}u_{xx} + \frac{b^2\Delta t^2}{2}u_{yy},$$

缺失关键项

$$ab\Delta t^2 u_{xy}.$$

因此二阶项不匹配，从而局部截断误差包含一阶项：

$$\tau = O(\Delta t),$$

故该格式 **在时间上不是二阶精度。**

HW 5.8.7

我们希望确定点 $(j\Delta x, k\Delta y, (n+1)\Delta t)$ 的数值解依赖哪些网格点。

(1) 格式一

$$u_{j,k}^{n+1} = a_2u_{j,k-1}^n + a_3u_{j,k}^n + a_4u_{j,k+1}^n.$$

显然，它仅用到上一层 n 层的 $(j,k-1)$、(j,k)、$(j,k+1)$。

继续向前递推可得依赖域为所有满足

$$k-(n-m) \le k' \le k+(n-m)$$

的点 (j,k')，其中 m 为层数。

因此数值依赖域为以 (j,k) 为中心、k 方向逐层扩大的条带区域（横向三点格式形成 1D 锥形域）。

(2) 格式二

$$u_{j,k}^{n+1} = a_1 u_{j-1,k}^n + a_3 u_{j,k}^n + a_4 u_{j+1,k}^n + a_5 u_{j,k+1}^n.$$

该格式依赖四个点：

$$(j-1,k), \quad (j,k), \quad (j+1,k), \quad (j,k+1).$$

逐层回溯可知依赖域呈 "L" 形扩展，既包含 x 方向的扩散，也包含 y 方向的偏移。

补充题

考虑热方程

$$u_t = \alpha u_{xx}.$$

Crank–Nicolson 格式写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2}.$$

1. 截断误差

对 u_j^{n+1} 做 Taylor 展开：

$$u_j^{n+1} = u + \Delta t u_t + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + O(\Delta t^3),$$

空间二阶差分展开为

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} + O(\Delta x^4).$$

代入后可得局部截断误差

$$\tau = O(\Delta t^2 + \Delta x^2).$$

因此 CN 格式 **时间二阶、空间二阶**。

2. 相容性

将 PDE $u_t = \alpha u_{xx}$ 代入差分格式，可发现主项完全相消，仅余高阶项，因此该格式相容于热方程。

由于截断误差 $\tau \to 0$ 当 $(\Delta t, \Delta x) \to 0$，故满足相容性定义。

3. 稳定性（Fourier 模分析）

令

$$u_j^n = \hat{u}^n e^{ikj\Delta x}.$$

代入可得放大因子

$$G = \frac{1 - r\sin^2(k\Delta x/2)}{1 + r\sin^2(k\Delta x/2)}, \qquad r = \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

显然有

$$|G| \le 1.$$

因此 CN 格式为 ** 无条件稳定 **。

综上，Crank–Nicolson 格式具有：

- 二阶时间精度；
- 二阶空间精度；
- 无条件稳定；
- 与热方程相容。