

HW06

4.1.1

考虑傅里叶模态 $u(x, t) = e^{i\omega x} \hat{u}(\omega, t)$, 代入方程 $u_t = u_{xx} + 100u$ 得:

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega, t) = (100 - \omega^2) \hat{u}(\omega, t)$$

精确解为 $\hat{u}(\omega, t) = e^{(100-\omega^2)t} \hat{f}(\omega)$ 。

分两种情形分析舍入误差:

情形 A: 初始数据存在舍入误差 δ , 即实际初始振幅为 $\hat{f}(\omega) + \delta$ 。最终时刻 t 的数值解为:

$$\hat{u}_{\text{num}}(\omega, t) = e^{(100-\omega^2)t} (\hat{f}(\omega) + \delta)$$

相对于精确解 $\hat{u}(\omega, t) = e^{(100-\omega^2)t} \hat{f}(\omega)$ 的相对误差为:

$$\frac{|\hat{u}_{\text{num}}(\omega, t) - \hat{u}(\omega, t)|}{|\hat{u}(\omega, t)|} = \frac{|\delta|}{|\hat{f}(\omega)|}$$

要保证相对误差不超过 1%, 需满足:

$$\frac{|\delta|}{|\hat{f}(\omega)|} \leq 0.01$$

情形 B: 时间推进过程中产生局部舍入误差 $\varepsilon(s)$ 。在时间 s 引入的误差到最终时刻 t 会被放大 $e^{(100-\omega^2)(t-s)}$ 倍。最坏情况下 ($\omega = 0$), 最大放大因子为 $e^{100 \cdot 2} = e^{200}$ 。为保证最终相对误差不超过 1%, 保守条件要求每次局部绝对误差 ε 满足:

$$\varepsilon \leq 0.01 \cdot e^{-200} |u(\cdot, 2)|$$

其中 $e^{-200} \approx 1.38 \times 10^{-87}$ 。

4.2.1

考虑偏微分方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=0}^4 a_j \frac{\partial^j u}{\partial x^j}$ 。设解的形式为 $u(x, t) = e^{i\omega x} \hat{u}(\omega, t)$, 代入方程得:

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega, t) = \kappa(\omega) \hat{u}(\omega, t)$$

其中符号函数 $\kappa(\omega) = \sum_{j=0}^4 a_j (i\omega)^j$ 。

问题良定的充要条件是: 存在实常数 α , 使得对所有实 ω 有:

$$\operatorname{Re} \kappa(\omega) \leq \alpha$$

展开 $\kappa(\omega)$ 的实部:

$$\begin{aligned}\kappa(\omega) &= a_0 + ia_1\omega - a_2\omega^2 - ia_3\omega^3 + a_4\omega^4 \\ \operatorname{Re} \kappa(\omega) &= \operatorname{Re} a_0 - \operatorname{Re} a_2\omega^2 + \operatorname{Re} a_4\omega^4\end{aligned}$$

当 $\operatorname{Re} a_4 < 0$ 时, $\operatorname{Re} \kappa(\omega) \sim \operatorname{Re} a_4\omega^4 \rightarrow -\infty$ (当 $|\omega| \rightarrow \infty$), 因此 $\operatorname{Re} \kappa(\omega)$ 在 \mathbb{R} 上有上界, 问题总是良定的。

补充作业 1

在时空单元 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ 上积分 PDE $u_t = u_{xx} + f(x, t)$:

$$\iint u_t dx dt = \iint u_{xx} dx dt + \iint f(x, t) dx dt$$

左端:

$$\iint u_t dx dt = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx \approx h(u_j^{n+1} - u_j^n)$$

右端第一项:

$$\iint u_{xx} dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [u_x(x_{j+1/2}, t) - u_x(x_{j-1/2}, t)] dt$$

用 θ 加权近似时间积分:

$$\approx \tau[\theta(u_x(x_{j+1/2}, t_{n+1}) - u_x(x_{j-1/2}, t_{n+1})) + (1 - \theta)(u_x(x_{j+1/2}, t_n) - u_x(x_{j-1/2}, t_n))]$$

用中心差分近似空间导数:

$$u_x(x_{j+1/2}, t) \approx \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h}$$

于是:

$$\iint u_{xx} dx dt \approx \frac{\tau}{h} [\theta(\delta_x^2 u_j^{n+1}) + (1 - \theta)(\delta_x^2 u_j^n)]$$

其中 $\delta_x^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ 。

右端第二项:

$$\iint f(x, t) dx dt \approx h\tau[\theta f_j^{n+1} + (1 - \theta)f_j^n]$$

整理得 θ -格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [\theta \delta_x^2 u_j^{n+1} + (1 - \theta) \delta_x^2 u_j^n] + \theta f_j^{n+1} + (1 - \theta) f_j^n$$

截断误差分析: 空间中心差分误差: $\delta_x^2 u_j = h^2 u_{xx} + \frac{h^4}{12} u_{xxxx} + O(h^6)$ 时间差商: $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + O(\tau^2)$ 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, 时间截断误差为 $O(\tau^2)$, 空间截断误差为 $O(h^2)$ 。

补充作业 2

(A) 在时空单元 $[t_{n-1}, t_{n+1}] \times [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上积分 PDE $u_t = u_{xx}$:

$$\iint u_t dx dt = \iint u_{xx} dx dt$$

左端:

$$\iint u_t dx dt = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_{n-1})] dx = h(\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^{n-1})$$

其中 $\bar{u}_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx$ 为单元平均。

右端:

$$\iint u_{xx} dx dt = \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} [u_x(x_{j+1/2}, t) - u_x(x_{j-1/2}, t)] dt$$

用时间中点近似:

$$\approx 2\tau [u_x(x_{j+1/2}, t_n) - u_x(x_{j-1/2}, t_n)]$$

用中心差分近似空间导数:

$$u_x(x_{j+1/2}, t_n) \approx \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n}{h}$$

于是:

$$\iint u_{xx} dx dt \approx \frac{2\tau}{h} (\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n)$$

得到格式:

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^{n-1}}{2\tau} = \frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{h^2}$$

截断误差分析: 时间方向泰勒展开:

$$\begin{aligned} u(x_j, t_{n+1}) &= u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4) \\ u(x_j, t_{n-1}) &= u - \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4) \end{aligned}$$

于是:

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})}{2\tau} = u_t + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} + O(\tau^4)$$

空间方向:

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{h^2} = u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O(h^4)$$

由 PDE $u_t = u_{xx}$, 局部截断误差为:

$$\text{LTE} = \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + O(\tau^4 + h^4)$$

故格式精度为 $O(\tau^2 + h^2)$ 。

(B) 考虑三点线性组合 $L_h[u]_j = \alpha u_{j-1} + \beta u_j + \gamma u_{j+1}$ 逼近 $u_{xx}(x_j)$ 。泰勒展开:

$$\begin{aligned} u_{j\pm 1} &= u_j \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} + O(h^5) \\ L_h[u]_j &= (\alpha + \beta + \gamma)u_j + (\gamma - \alpha)hu_x + \frac{\alpha + \gamma}{2}h^2u_{xx} \\ &\quad + \frac{\gamma - \alpha}{6}h^3u_{xxx} + \frac{\alpha + \gamma}{24}h^4u_{xxxx} + O(h^5) \end{aligned}$$

要逼近 u_{xx} , 需满足:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\gamma - \alpha = 0$$

$$\frac{\alpha + \gamma}{2}h^2 = 1$$

解得 $\alpha = \gamma = \frac{1}{h^2}$, $\beta = -\frac{2}{h^2}$ 。此时 u_{xxx} 项系数为 0, 但 u_{xxxx} 项系数为 $\frac{h^2}{12}$, 故误差主项为 $O(h^2)$, 无法达到三阶精度。

补充作业 3

方程 $u_t = \partial_x(\kappa(x)u_x)$, 其中 $\kappa(x) = 0.1 + \sin^2 x$ 。

定义空间节点 $x_j = jh$, 时间节点 $t_n = n\tau$, 界面点 $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$ 。界面扩散系数取精确值:

$$\kappa_{j+1/2} = \kappa(x_{j+1/2}) = 0.1 + \sin^2(x_{j+1/2})$$

数值通量:

$$F_{j+1/2}^n = \kappa_{j+1/2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$$

空间离散算子:

$$\mathcal{L}_h(u^n)_j = \frac{F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n}{h} = \frac{1}{h} \left[\kappa_{j+1/2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \kappa_{j-1/2} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right]$$

Crank-Nicolson 时间离散:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2} [\mathcal{L}_h(u^{n+1})_j + \mathcal{L}_h(u^n)_j]$$

精度分析: 空间离散误差: 在界面 $x_{j+1/2}$ 处,

$$\kappa_{j+1/2} \frac{u_{j+1} - u_j}{h} = \kappa(x_{j+1/2}) [u_x(x_{j+1/2}) + O(h^2)]$$

故通量近似误差为 $O(h^2)$, 空间离散整体误差为 $O(h^2)$ 。时间离散采用 Crank-Nicolson 格式, 截断误差为 $O(\tau^2)$ 。综上, 格式精度为 $O(\tau^2 + h^2)$ 。