线性对流方程的数值解: FTBS 与 CTCS 方法比较

PB22000150 刘行

1 问题描述

考虑一维线性对流方程

$$u_t + au_x = 0, \qquad x \in [0,1],\ t > 0,$$

其中 $a > 0$ 为常数. 给定初值

$$u(x,0) = u_0(x),$$

并在区间端点施加周期边界条件

$$u(0,t) = u(1,t).$$

该方程的解析解为

$$u(x,t) = u_0(x - at),$$

表示初值以速度 a 向右平移. 我们的目标是用有限差分法求解该方程, 并比较两种不同时间离散方法的表现.

2 数值方法

2.1 网格与记号

将空间区间 $[0,1]$ 均分为 J 个单元, 空间步长 $\Delta x = 1/J$; 时间步长记为 Δt, 设

$$\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x}.$$

网格点记为 $x_j = j\Delta x,\ t^n = n\Delta t$, 离散近似 $u(x_j, t^n) \approx u_j^n$.

2.2 FTBS 方法推导

FTBS (Forward Time, Backward Space) 格式在时间上采用显式前向差分, 在空间上采用后向差分:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

整理得:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(u_j^n - u_{j-1}^n).$$

这是一个一阶时间、一阶空间精度的格式. 其稳定性条件为

$$\lambda \le 1.$$

2.3 CTCS 方法推导

CTCS (Central Time, Central Space) 格式采用时间中心差分与空间中心差分:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

化简为显式递推形式:

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

此方法为时间二阶、空间二阶精度, 但其稳定性取决于 λ:

$$|\lambda| \le 1.$$

若 $\lambda > 1$, CTCS 将产生指数增长的虚假振荡, 导致数值不稳定.

3 数值实验结果

实验参数: 对流速度 $a = 1$, 周期边界条件, 初值 $u_0(x) = \sin(2\pi x)$.

采用不同空间剖分数 J 与 Courant 数 λ, 得到下表结果 (误差分别为 L_2 与 L_∞ 范数).

3.1 CTCS 方法结果

表 1: CTCS 方法在不同参数下的误差结果

J	t	λ	L_2	L_∞	稳定性
80	1.0	0.5	4.92e-03	4.86e-03	稳定
80	1.0	1.5	1.11e+06	1.75e+06	不稳定
10	1.0	0.5	3.95e-01	3.58e-01	稳定
20	1.0	0.5	8.48e-02	8.08e-02	稳定
40	1.0	0.5	2.01e-02	1.96e-02	稳定
80	1.0	0.5	4.92e-03	4.86e-03	稳定
160	1.0	0.5	1.22e-03	1.21e-03	稳定

可以看到, 当 $\lambda = 1.5 > 1$ 时, 数值解严重发散; 而在稳定区间内, 误差随 J 的增加呈 $O(\Delta x^2)$ 收敛.

3.2 FTBS 方法结果

表 2: FTBS 方法在不同时间下的误差结果

J	t	λ	L_2	L_∞	说明
80	0.2	0.5	1.88e+00	1.88e+00	初期误差较大
80	0.5	0.5	5.98e-02	5.98e-02	收敛稳定

可以看到, FTBS 方法稳定性良好, 但由于为一阶精度, 数值耗散较明显, 误差随时间积累而增大.

4 结果分析与比较

- FTBS 方法具有较好的稳定性, 但数值耗散显著;
- CTCS 方法精度更高 (时间、空间二阶), 但对 λ 的稳定性要求更严格;
- 当 $\lambda > 1$ 时, CTCS 方法会发生振荡并迅速发散;
- 当 $\lambda \leq 1$ 时, CTCS 方法随网格加密误差按 $O(\Delta x^2)$ 收敛;
- 实验结果验证了理论稳定性分析.

5 结论

本实验对比了线性对流方程的两种显式差分方法. 结果表明:

1. FTBS 格式稳定但精度低;
2. CTCS 格式精度高但条件稳定;
3. 数值实验验证了稳定性条件与收敛阶的理论分析;
4. 实际计算中应优先选择满足 $\lambda \leq 1$ 的高精度格式.