基于光绝热调控的集体边带跃迁

钟佳杭 PB22000093[1] 姚日新 PB22000201[2]

摘要

单量子水平下的操作是控制量子态的重要工具，其中玻色型产生湮灭算符因为在实验中容易实现，并且能够对量子数进行操作，所以在各种量子门的实现和量子态制备中起重要作用。然而，由于玻色型产生湮灭算符导致的迁移率依赖于 Fock 态的量子数，这会对任意量子态的制备产生阻碍。近年来，有研究表明 [2, 1] 基于量子绝热理论，在离子阱系统中可以实现不依赖于 Fock 态量子数的玻色型产生湮灭算符。在本文中，我们复现了前人的一部分工作，并基于量子绝热操作给出了理论推导，较好的吻合了实验中的结果。

正文

1 引言

我们讨论的出发点是一个限制在势阱内的二能级离子。这里的两个能级由电子能级（通常是超精细能级）提供，标记为 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_0\rangle$，其中 $|\psi_0\rangle$ 是高能态。沿着势阱的 x 轴入射的频率为 ω 的激光假定是可调的。势阱本身可近似当作是一个频率为 ω_m 的简谐振子。这个频率值由不同的势阱参数决定。离子质心的位置由算符 $\hat{x}$ 给出。下面我们会把它表示为湮灭和产生算符 a 和 $a^\dagger$，这两个算符应理解为离子质心振动量子的湮灭和产生算符，而与量子化的光场无关。

根据量子理论，一个处于简谐势场中的 2 能级原子的哈密顿量为

$$H_0 = E_0 |\psi_0\rangle\langle\psi_0| + E_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \hbar w_m (a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

考虑一束形为 $E = E_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{R})$ 的光和原子的耦合，扰动哈密顿量 $H_1(t)$ 依赖于平面波的传播方向。如果波矢 $\vec{k}$ 与离子运动方向非正交，则光将扰动离子运动状态。形式上，离子的位置 $\vec{R}$ 由下式给出:

$$\vec{R} = R\hat{r}_0 \quad \text{where} \quad R = z_0\left(a^\dagger + a\right).$$

其中 $\left(a^\dagger + a\right)$ 是简谐振动位置算符, $\hat{r}_0$ 振动方向的单位矢量，

$$z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

是离子物质波波包的特征长度 ($z_0 = 11$ nm for $\omega_m = 1$MHz)。总的扰动哈密顿量可以写为:

$$H_1(t) = \hbar\left(\widetilde{\Omega}|\psi_0\rangle\left\langle\psi_1\middle| + \widetilde{\Omega}^*\middle|\psi_1\right\rangle\langle\psi_0|\right)\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{R} + \phi).$$

做代换

$$\vec{k}\cdot\vec{R} = \eta\left(a^\dagger + a\right)$$

其中 $\eta = kz_0\cos(\theta)$，θ 是 k 和 R 之间的夹角，哈密顿量可以展开成，

[1]钟佳杭同学在本文中负责了理论部分
[2]姚日新同学在本文中负责了复现部分

$$
\begin{aligned}
H_I(t) \;&= \textstyle\sum_n \frac{1}{2}\hbar\Omega_{n,n}\left|\psi_0,n\right\rangle\left\langle\psi_1,n\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t+\mathrm{i}\phi}+\ \mathrm{H.c.} && \text{载波}\\
&+\textstyle\sum_n \frac{1}{2}\hbar\Omega_{n,n+1}\left|\psi_0,n+1\right\rangle\left\langle\psi_1,n\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0-\omega_m)t+\mathrm{i}\phi}+\ \mathrm{H.c.} && \text{一阶蓝边带}\\
&+\textstyle\sum_n \frac{1}{2}\hbar\Omega_{n+1,n}\left|\psi_0,n\right\rangle\left\langle\psi_1,n+1\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0+\omega_m)t+\mathrm{i}\phi}+\ \mathrm{H.c.} && \text{一阶红边带}\\
&+\textstyle\sum_n \frac{1}{2}\hbar\Omega_{n,n+2}\left|\psi_0,n+2\right\rangle\left\langle\psi_1,n\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0-2\omega_m)t+\mathrm{i}\phi}+\ \mathrm{H.c.} && \text{二阶蓝边带}\\
&+\ldots
\end{aligned}
$$

其中

$$\Omega_{n,m}=\Omega\left|\left\langle n\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\left(a^\dagger+a\right)}\right|m\right\rangle\right|.$$

本文中，我们调整光的频率使得它对齐一阶蓝边带并具有如下形式 $\omega=\omega_0+\omega_m+\Delta$，此时其他高频振动项可以忽略。因此，有效的扰动哈密顿量具有如下形式。

$$H_{bsb}=\frac{\eta\Omega}{2}(a^\dagger\hat{\sigma}_+e^{i\Delta t}+a\hat{\sigma}_-e^{-i\Delta t})$$

根据含时微扰论，如果我们在 $t=0$ 时刻输入这个光场演化到 $t\to\infty$，则一阶蓝边带扰动哈密顿量的演化算符可以等效成

$$U_I(\infty,0)-\hat{I}\propto a^\dagger\hat{\sigma}_+-a\hat{\sigma}_-=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle\left|\psi_0\right\rangle\left\langle n\right|\left\langle\psi_1\right|-h.c$$

这就是玻色型产生湮灭算符的实现。

从高能级向低能级跃迁相当于光的发射过程，相反的跃迁是光的吸收过程，这就是光学中说的受激发射和受激吸收。

然而这样的玻色型算符导致的迁移率依赖于 Fock 态的量子数，这会对任意量子态的制备产生阻碍，比如说这样的操作不能把一个经典态转换为非经典态。同时，由于不同的量子数态在这些算符作用下迁移速率不同，实验中很难同时对声子数态的叠加态进行操作，这对实验提出了很高的要求。因此，由于受到这样的限制，近些年许多研究转而使用如下算符：

$$\hat{S}^+=\sum_{n=0}^{\infty}\left|n+1\right\rangle\left\langle n\right|,\hat{S}^-=\sum_{n=0}^{\infty}\left|n\right\rangle\left\langle n+1\right|$$

它们能够在不引入额外因子的前提下对量子数态进行操作，因而给实验操作带来很大的方便。

本文复现了一篇文章中实现上述算符的手段，并基于量子绝热理论给出了理论推导。

2 复现

我们考虑在阱频为 $\omega_m=(2\pi)2.8\mathrm{MHz}$ 的三维势阱中的单个捕获 $^{171}\mathrm{Yb}^+$ 离子 [2]；与之耦合的两能级系统由 $S_{1/2}$ 的两个超精细态 $|F=1,m_F=0\rangle\equiv|\uparrow\rangle$ 和 $|F=0,m_F=0\rangle\equiv|\downarrow\rangle$ 表示，它们的跃迁频率为 $\omega_{\mathrm{HF}}=(2\pi)12.6428\mathrm{GHz}$ 如图 a 所示。由上文定义，由频率为 $\omega=\omega_0+\omega_m+\Delta$ 的激光束产生的 aJC 相互作用或蓝边带跃迁 $H_{\mathrm{aJC}}=\frac{\eta\Omega}{2}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+e^{i\Delta t}+$ h.c 支配了演化过程。

基于受激拉曼绝热通道方法，调节参数 $\Omega(t)=\Omega_0\sin(\pi t/T)$ 和 $\Delta(t)=\Delta_0\cos(\pi t/T)$，可以在绝热条件 $T\gg 1/\eta\Omega_0$ 下得到 $\left|n+1\right\rangle\left|\psi_0\right\rangle\left\langle n\right|\left\langle\psi_1\right|$ 算符作用的结果。

为读出离子量子位态, 使用所谓电子搁置技术 (electron shelving technique) 。假设原子有三个能级, 基态能级 $|g\rangle$ 、亚稳激发能级 $|e\rangle$ 和另一个短寿命激发能级 $|3\rangle$ 。原子通过与 $|g\rangle\to|e\rangle$ 共振的强激光耦合形成叠加态 $\alpha|g\rangle+\ \beta|e\rangle$, 现在对这个态进行测量。为此用强激光驱动 $|g\rangle\to|3\rangle$ 跃迁。如果测量过程中原子坍缩到态 $|g\rangle$ 上, 原子就会在强探测敫光驱动下, 从 $|g\rangle$ 态跃迁到 $|3\rangle$ 态, 并通过自发辐射迅速衰变回到 $|g\rangle$ 态发射[F]光光子。如果原子坍缩到 $|e\rangle$ 态上, 探测光对它没有作用, 就没有[F]光光子发射出来。于是通过搜集[F]光光子就可以在 $|g\rangle$ 态和 $|e\rangle$ 态间做出区分。使用这种方法, 尽管从 $|3\rangle$ 态一次跃迁发射一个荧光光子被探测到的几率很小, 但是由于 $|3\rangle$ 态短寿命快衰变, 在极短的探测时间内可以多次激发, 发射大量荧光光子, 这种方法探测效率很高，可以接近 100% 。

通过 python 模拟，我们得到如图 b 所示，与文献吻合较好。

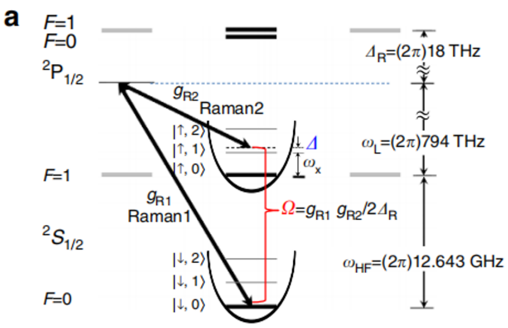

Figure 2.1: 图 a

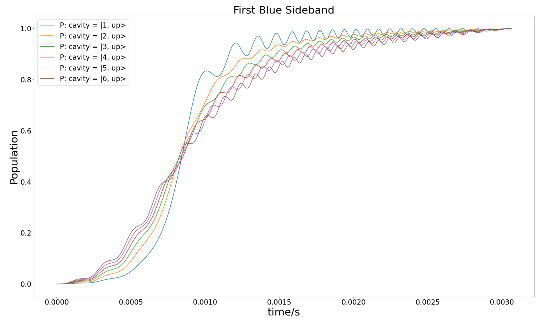

Figure 2.2: 图 b

3 理论

考虑一个处于简谐势场中的 2 能级原子，他的哈密顿量为

$$H_0 = E_0 \left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_0\right| + E_1 \left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_1\right| + \hbar w_m (a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

考虑原子和电场相互作用，只考虑蓝边带相互作用项，转入相互作用绘景后并采取旋转波近似，我们有

$$H_{bsb} = \frac{\eta\Omega}{2}(a^\dagger \hat{\sigma}_+ e^{i\Delta t} + a\hat{\sigma}_- e^{-i\Delta t})$$

自由哈密顿量的本征态组成了一组完备的本征系，因此对于任意的态可以展开成

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{\downarrow,n}(t) e^{-i\frac{E_{\downarrow,n}}{\hbar}t} |\downarrow, n\rangle + c_{\uparrow,n}(t) e^{-i\frac{E_{\uparrow,n}}{\hbar}t} |\uparrow, n\rangle)$$

其中，约定 $|\uparrow\rangle = |\psi_0\rangle, |\downarrow\rangle = |\psi_1\rangle$。

在相互作用绘景中变为

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{\downarrow,n}(t) |\downarrow, n\rangle + c_{\uparrow,n}(t) |\uparrow, n\rangle)$$

为了使用绝热条件，首先需要将该哈密顿量写成不含时的形式，定义幺正算符

$$U(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} (|\downarrow, n\rangle \langle\downarrow, n| e^{i\frac{\Delta}{2}t} + |\uparrow, n\rangle \langle\uparrow, n| e^{-i\frac{\Delta}{2}t})$$

此时，态矢量可以写成

$$|\psi\rangle_R = U |\psi\rangle_I = \sum_{n=0}^{\infty} (c'_{\downarrow,n}(t) |\downarrow, n\rangle + c'_{\uparrow,n}(t) |\uparrow, n\rangle)$$

下面的表达式中为了记号方便，我们直接把 $c'(t)$ 记成 $c(t)$ 于是，含时哈密顿方程写作：

$$i\hbar\partial_t (U |\psi\rangle_I) = (i\hbar(\partial_t U)U^\dagger + U H_I U^\dagger) U |\psi\rangle_I$$

由此可以定义新的相互作用哈密顿量

$$H'_I = \hbar\frac{\Delta}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{z,n} + \frac{\eta\Omega}{2}\left(a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+\right)$$

其中

$$\sigma_{z,n} = |\downarrow, n\rangle \langle\downarrow, n| - |\uparrow, n\rangle \langle\uparrow, n|$$

计算 H'_I 的矩阵元可以得到

$$\langle i, n| H'_I |j, m\rangle = \frac{\Delta\hbar}{2}\delta_{ij}(\delta_{i\downarrow} - \delta_{i\uparrow}) + \frac{\eta\Omega}{2}(\sqrt{n}\delta_{\uparrow i}\delta_{\downarrow j}\delta_{n,m+1} + \sqrt{n+1}\delta_{\downarrow i}\delta_{\uparrow j}\delta_{n,m-1})$$

上述矩阵的一组本征矢量

$$|e_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2) + 2a\sqrt{a^2+b^2}}}[(a + \sqrt{a^2+b^2}) |\downarrow, n\rangle + b |\uparrow, n+1\rangle]$$

其中

$$a = \frac{\hbar\Delta}{2} = \frac{\hbar\Delta_0}{2}\cos(\frac{\pi t}{T})$$
$$b = \frac{\eta\Omega}{2} = \frac{\eta\Omega_0}{2}\sin(\frac{\pi t}{T})$$

$T \gg \frac{1}{\eta\Omega_0}$，可以采取绝热近似，根据绝热定理系统会保持在以上本征态上 [1]。

$$\lim_{t\to 0} |e_n\rangle = |\downarrow, n\rangle$$
$$\lim_{t->T} |e_n\rangle = |\uparrow, n+1\rangle$$

于是这整个过程的等效算符可以写成

$$\hat{S}^+ = \sum_{n=0}^{\infty} |\uparrow, n+1\rangle \langle\downarrow, n|$$

上述矩阵的另一组能量本征矢量为

$$|g_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2) - 2a\sqrt{a^2+b^2}}}[(a - \sqrt{a^2+b^2}) |\downarrow, n\rangle + b |\uparrow, n+1\rangle]$$

同样的，根据绝热定理系统会保持在上述本征态上。

$$g\lim_{t\to 0} |g_n\rangle = |\uparrow, n+1\rangle$$
$$\lim_{t->T} |g_n\rangle = -|\downarrow, n\rangle$$

该过程的等价算符可以写成

$$-\hat{S}^- = -\sum_{n=0}^{\infty} |\downarrow, n\rangle \langle\uparrow, n+1|$$

4 讨论

由于能够生成非经典和非高斯态，新的产生湮灭算符为量子态操纵提供了一种有效的方案。目前的工作也可以成为实现 Schneider 等人提出的离子量子比特门操作的基础操作之一。该方案可进一步应用于各种量子光学装置，如腔量子电动力学和光学。本文还基于量子绝热理论计算了该操作的理论保真度，有助于进一步的理论推导和实验实现。

References

[1] M. V. Berry. “Transitionless quantum driving”. In: *JOURNAL OF PHYSICS A-MATHEMATICAL AND THEORETICAL* 42.36 (2009). ISSN: 1751-8113. DOI: 10.1088/1751-8113/42/36/365303.

[2] Mark Um et al. “Phonon arithmetic in a trapped ion system”. In: *NATURE COMMUNICATIONS* 7 (2016). ISSN: 2041-1723. DOI: 10.1038/ncomms11410.