

# Cosmological Phase Transition and Gravitational Wave Background

钟佳杭 PB22000093 黄骏坤 PB22000089

2025 年 2 月

## 摘要

宇宙学相变是发生在早期宇宙的宏观历史事件。它可以产生随机引力波背景，是人们探索新物理的一个重要途径。本篇报告主要讨论了 Two-Field Cosmological Phase Transitions and Gravitational Waves in the Singlet Majoron Model [1]。在这篇文章中，作者以单重态 Majoron 模型（一种包含额外希格斯粒子和右手马约拉纳中微子的超越标准模型）作为典型双场相变模型例子，对双场相变进行了详细数值计算，发现了新的相变轨迹，完善了以前对双场相变的讨论。在文章的最后，作者还计算了相应过程对应的随机引力波背景，有望在未来的实验中可以探测检验。我们在这篇报告中复现了他们的大部分数值结果。此外，由于论文发表的时间原因（2018），文章中对于随机引力波背景的计算以当今视角来看是有不当之处的，我们也对其进行了修正。我们在本篇报告中还简要介绍了一个公开的 Python 程序 CosmoTransitions [2]，本次讨论的论文也是使用了这个程序包。

## 1 背景介绍

强烈的一阶相变 (PTs) 在宇宙学领域中蕴含着丰富的现象学内容，尤其在解释宇宙重子生成机制方面具有重要作用。该机制阐明了为何宇宙中物质的数量多于反物质。与此同时，先进激光干涉引力波天文台 (aLIGO) 首次探测到引力波 (GWs)，标志着我们进入了引力波天文学的新纪元。我们如今可以深入研究在不同物理过程中引力波的产生，并在多

个频段上进行探测。截止目前，由一阶相变过程中产生的随机引力波背景因其丰富的物理现象而越来越受到关注。

然而，标准模型 (SM) 中的电弱相变 (EWPT) 被证明为高阶相变，其相变强度过弱，难以产生有效的重子生成或相变引力波 (PTGW)。为了实现强烈的一阶相变并探索新的物理现象，学者们已经研究了多种对标准模型的扩展，包括引入额外标量单态场的模型、六维有效算符模型、双希格斯双峰模型 (2HDMs)、次小子希格斯模型 (NMSSM) 等。

单重态 Majoron 模型 (Singlet Majoron Model) 是一种对标准模型的简洁扩展，最初提出时旨在解决中微子质量问题。在该模型中，加入了一个额外的复希格斯单态场，通过其真空期望值 (VEV) 破坏了全局  $U(1)_{B-L}$  对称性，并为右手中微子提供质量。近年来，关于一阶相变的强烈兴趣已不断增长，尤其是在引力波和射电天文以及暗物质物理等领域的潜力研究中得到了广泛关注。

在相关文献中 [3, 4]，作者指出，在有效 Majoron 势能的表面上存在一个平坦方向，这使得两场问题可以被简化为一个有效场问题。他们的分析结果表明，强烈的一阶相变是可实现。进一步的研究 [5] 确认，相变通常可以分为两个阶段：首先是由  $U(1)_{B-L}$  对称性破缺引起的非常弱的一阶相变，其次是电弱相变。在该早期研究中未考虑单重态希格斯场与右手中微子之间的 Yukawa 耦合。

随后，一项全面的数值模拟研究 [6] 进一步处理了两场问题。该研究表明，确实存在两步相变的情况——即先是由于  $U(1)_{B-L}$  对称性破缺引发的相变，随后是电弱相变。此外，他们还发现，为了实现强烈的一阶相变，必须考虑希格斯场之间的较大相互作用耦合值，并且单态希格斯场与右手中微子之间的 Yukawa 耦合是不可或缺的。

在我们讨论的这篇论文 [1] 中，作者进行了全面的数值模拟，以分析两场宇宙学相变 (PTs) 并评估由此产生的引力波 (GWs)，使用了公开的 Python 包 CosmoTransition [2]。通过完整的二维模拟，他们不仅确认了先前研究中发现的相变模式，还发现了更多新的模式。对于每种他们发现的相变模式，他们还探讨了使用空间探测引力波干涉仪，如 LISA、DECIGO、BBO、TAJI (ALIAdesoped) 和天琴，来探测相变引力波的可能性。

## 2 主要模型和计算方法

### 2.1 单态 Majoron 模型

#### 2.1.1 粒子物理模型

单重态 Majoron 模型是标准模型 (SM) 粒子物理学最简单的扩展之一。除了原有的规范对称性  $SU_c(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  之外, 该模型引入了一个全局对称性  $U(1)_{B-L}$ , 其中  $B$  和  $L$  分别代表重子数和轻子数。右手中微子  $\nu_R$  与复数单重希格斯场  $\sigma$  一起, 成为高能物理粒子的新成员。该模型的拉格朗日量为:

$$\mathcal{L} = -f\bar{L}i\sigma_2\Phi^*\nu_R - g\sigma\bar{\nu}_R^c\nu_R + h.c., \quad (2.1)$$

其中,  $\Phi$  和  $L$  分别是标准模型的希格斯和轻手性 (LH) 费米子双重态, 而  $f$  和  $g$  是对应的 Yukawa 耦合常数。

双重态和单重态希格斯的势能在树图阶近似下可表示为:

$$V(\sigma, \Phi) = \lambda_s|\sigma|^4 + \mu_s^2|\sigma|^2 + \lambda_h|\Phi|^4 + \mu_h^2|\Phi|^2 + \lambda_{sh}|\sigma|^2|\Phi|^2. \quad (2.2)$$

为了确保现今的真空期望值 ( $v_{BL}, v_{ew} = 246$  GeV) 能够实现, 我们取参数:

$$\mu_s^2 = -\lambda_s v_{BL}^2 - (1/2)\lambda_{sh}v_{ew}^2, \quad \mu_h^2 = -\lambda_h v_{ew}^2 - (1/2)\lambda_{sh}v_{BL}^2$$

为了更清楚地表示 Higgs 场的自由度, 我们将其展开为实分量:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{BL} + \rho + i\chi), \quad (2.3)$$

$$\Phi^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1 + iG_2, v_{ew} + H + iG_3)^T. \quad (2.4)$$

与在电弱对称性破缺后得到的 Dirac 质量  $m = fv_{ew}/(2\sqrt{2})$  类似, 在  $U(1)_{B-L}$  对称性破缺后, 将会生成一个 Majorana 质量

$$M = gv_{BL}/\sqrt{2}$$

如果 Majorana 质量远大于 Dirac 质量，我们可以将重中微子和轻中微子重新定义为  $N = \nu_R + \nu_R^c + m/M(\nu_L + \nu_L^c)$ ,  $\nu = \nu_L + \nu_L^c - m/M(\nu_R^c + \nu_R)$ 。然后轻中微子的质量  $m_\nu \simeq m^2/M$  被重中微子的质量  $M$  强烈抑制。这也许是理解中微子小质量的最简单方式。然而，与实验数据相比，这种模型并不是最令人满意的。由轻中微子  $m_\nu = (\sqrt{2}/8)(f^2/g)(v_{ew}^2/v_{BL})$  可以看出，它需要一个极小的 Yukawa 耦合  $f \lesssim 3 \times 10^{-7} \sqrt{g}(v_{BL}/\text{GeV})^{1/2}$  (取  $m_\nu < 2 \text{ eV}$ )。因此，本文中我们仅将此模型作为一个基准模型，用以展示多自由度相互作用时的相变。在一些高级模型中，这种不自然的小量级问题可以通过其他机制解决。

当  $U(1)_{B-L}$  全局对称性破缺后，一个无质量的 Goldstone 玻色子  $\chi$  出现了，这就是本文讨论的 Majoron 场。尽管根据上述势函数，Majoron 是无质量的，但考虑到某些高维算符的效应，仍可能生成一个小质量。基于文献 [7] 的推论，作者采用了以下限制条件

$$v_{BL} \lesssim \left( \frac{m_\nu}{25 \text{ eV}} \right)^{4/7} \times 10 \text{ TeV}. \quad (2.5)$$

由于中微子质量的上限小于  $m_\nu \sim 2 \text{ eV}$  [8]，得到

$$v_{BL} \lesssim 1.6 \text{ TeV}. \quad (2.6)$$

在文献 [9, 10] 中指出，当  $v_{BL}$  大于  $v_{ew}$  时可能会有危险。然而，在作者的数值模拟中，他们将探讨  $v_{BL}$  大于或小于  $v_{ew}$  的情况，以便在参数空间上给出一个全局的展望，这可能导致强烈的一阶相变和引力波。值得注意的是，作者发现  $v_{BL} > v_{ew}$  时模型的现象在天文学上的兴趣也较小。

### 2.1.2 一阶相变

考虑到

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}(s + \rho + i\chi), \quad (2.7)$$

$$\Phi^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_1 + iG_2, h + H + iG_3)^T. \quad (2.8)$$

在当前的真空尺度下，重新得到公式 (2.3)。在树图阶近似下，势能可写为：

$$V_{\text{tree}}(s, h) = \frac{1}{4}\lambda_s(s^2 - v_{BL}^2) + \frac{1}{4}\lambda_h(h^2 - v_{ew}^2)^2 + \frac{1}{4}\lambda_{sh}(s^2 - v_{BL}^2)(h^2 - v_{ew}^2). \quad (2.9)$$

其全局最小值清晰地表示今天的真空。然后作者使用 MS 重整化方法考虑在零温下的循环修正：

$$\Delta V^{T \neq 0}(s, h) = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^2(s, h) \left[ \log \frac{m_i^2(s, h)}{Q^2} - c_i \right], \quad (2.10)$$

其中  $(c_i, c_W, c_Z) = (3/2, 5/6, 5/6)$  和  $(n_H, n_G, n_\rho, n_X, n_W, n_Z, n_{\nu R}, n_t) = (1, 3, 1, 1, 6, 3, -6, -12)$ 。质量谱可以在原文 [1] 的附录 6 中找到。作者还引入了一个辅助项  $\Delta V_{\text{ct}}^{T=0}(s, h) = Ah^2$ ，并使用以下重整化条件：

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} (V_{\text{tree}} + \Delta V_1^{T=0} + \Delta V_{\text{ct}}^{T=0}) \right|_{(\text{vBL}, \text{vEW})} = 0, \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial h} (V_{\text{tree}} + \Delta V_1^{T=0} + \Delta V_{\text{ct}}^{T=0}) \right|_{(\text{vBL}, \text{vEW})} = 0. \quad (2.12)$$

为了确保在零温下的真空是稳定的，作者解出并替代能量标度  $Q$  和  $A$ 。温度修正项为：

$$\Delta V^{T \neq 0}(s, h, T) = \sum_F n_F \frac{T^4}{2\pi^2} J_F \left[ \frac{m_F^2(s, h)}{T^2} \right] + \sum_B n_B \frac{T^4}{2\pi^2} J_B \left[ \frac{m_B^2(s, h)}{T^2} \right], \quad (2.13)$$

其中

$$J_i \left[ \frac{m_i^2}{T^2} \right] = \int_0^\infty dx x^2 \log \left[ 1 \pm \exp \left( -\sqrt{x^2 + \frac{m_i^2}{T^2}} \right) \right], \quad (2.14)$$

其中费米子的符号为加号，玻色子的符号为减号。为了包含环（或 daisy）贡献，我们对玻色子质量做出以下替换：

$$m_B^2(s, h) \rightarrow \mathcal{M}_B^2(s, h, T) = m_B^2(s, h) + \Pi_B(T). \quad (2.15)$$

对于自能和 Z 玻色子纵向分量的热质量（Debye 质量），其表达式可以在原文 [1] 附录 6 中找到。作者将 Debye 质量项代入式 (2.13)。通过这样做，替换式 (2.14) 不仅适用于三次项，还适用于一般的有效势能。这两种不同的处理方法可以理解为 1-loop 微扰理论中的理论不确定性，可以正确地处理。最后，经典场的总有效势能由以下公式给出：

$$V_{\text{eff}}(s, h, T) = V_{\text{tree}}(s, h) + \Delta V_1^{T=0}(s, h) + \Delta V_{\text{ct}}^{T=0}(s, h) + \Delta V^{T \neq 0}(s, h, T). \quad (2.16)$$

有了上述有效势能，可以通过求解边界方程来解出泡泡的行为：

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{\alpha}{r} \frac{d\phi}{dr} = \nabla V_{\text{eff}}(\phi), \quad (2.17)$$

$$\phi(r \rightarrow \infty) = \phi_F, \quad \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (2.18)$$

其中  $r^2 = |x|^2$ ，在有限温度下  $\alpha = 2$ ，在零温度下  $\alpha = 3$ 。对于单一场问题，它们可以通过所谓的“overshooting-undershooting”方法求解。然而，多重场的情况变得更加复杂。为了克服这种情况，一种强大的方法被称为“路径变形”在文献 [2] 中被提出。在作者的分析中，我们使用公开可用的包 CosmoTransition [2] 来研究多场中的相变。

相变强度可以通过参数  $\alpha$  来说明， $\alpha$  是潜热和辐射能量的比值，

$$\alpha \equiv \left. \frac{\rho_{\text{vac}}}{\rho_r} \right|_{T=T_*}, \quad (2.19)$$

其中潜热通过以下方式计算：

$$\rho_{\text{vac}} = \left[ T \left( \frac{d\Delta V_{\text{eff}}}{dT} \right) - \Delta V_{\text{eff}} \right]_{T=T_*}, \quad (2.20)$$

$\Delta V_{\text{eff}}$  是实际真空和虚假真空之间的势能差；辐射能量密度为  $\rho_r = g_* \pi^2 T_*^4 / 30$ ，其中  $g_*$  是相对自由度数。相变的时间尺度是参数  $\beta$  的倒数，

$$\beta = - \left. \frac{d(S_3/T)}{dt} \right|_{T=T_*} \simeq \left. \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{T=T_*}. \quad (2.21)$$

其中 Euclid 作用量为：

$$S_3 = \int d^3x \left[ \left( \frac{1}{2} \right) (\nabla s)^2 + \left( \frac{1}{2} \right) (\nabla h)^2 + V_{\text{eff}}(s, h, T) \right], \quad (2.22)$$

并且气泡成核速率由  $\Gamma = \Gamma_0 \exp(-S_3/T)$  定义。在实际计算中， $\beta$  的无量纲化是相当有用的，定义为：

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\beta}{H_*} = T_* \frac{d(S_3/T)}{dT} \Big|_{T=T_*}. \quad (2.23)$$

根据定义，较大的  $\alpha$  值意味着更强的相变，而较大的  $\beta$  值意味着更快的相变。相变温度  $T_*$  是通过气泡成核概率在单位时间和单位体积  $\simeq 1$  时估算的：

$$1 \simeq \int_0^{T_*} \frac{dt}{H^3} = \int_{T_*}^{\infty} \frac{dT}{T} \left( \frac{90}{8\pi^3 g_{\text{eff}}} \right)^2 \left( \frac{M_{\text{pl}}}{T} \right)^4 \exp(-S_3/T). \quad (2.24)$$

这为我们提供了一个简单的准则来估算  $T_*$ ，如下所示：

$$\frac{S_3}{T_*} \simeq \ln \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{90}{8\pi^3 g_{\text{eff}}} \right)^2 \right] + 4 \ln \left[ \frac{M_{\text{pl}}}{T_*} \right]. \quad (2.25)$$

请注意，在推导这一准则时，我们假设宇宙的能量密度主要由辐射主导，因此当  $\alpha$  非常大时，它不适用——这意味着辐射主导的情况会被破坏，例如当泡泡在真空中运行趋于光速时。

## 2.2 相变模拟

### 2.2.1 Package: CosmoTransitions

CosmoTransitions [2] 是一个用于分析由单个或多个标量场驱动的有限温度宇宙学相变的公开数值程序包。该程序包通过分析理论中的不同真空态，来确定它们的临界温度（即真空能级简并的温度）、过冷温度，以及成核泡泡的泡泡壁场位形。这些泡泡壁场位形分割了不同的真空态（相）并且描述了相变的隧穿动力学。在这个程序中作者引入了一种新的路径变形方法（path deformation），可以用来找到多场情况下的泡泡壁场位形，对薄壁和厚壁同样适用。

这个程序包包含三个基础模块：一个模块允许人们自定义一个具体的多场相变模型；一个模块可以追踪有效势的局部最小值随温度的变化以确定临界温度；一个模块可以计算两个真空态之间的隧穿解（泡泡壁解）。在这个程序包的帮助下，人们可以容易地模拟一个具体多场相变模型的相变轨迹。

### 2.2.2 细节

由于存在两个标量场，式 (2.16) 的有效势能构成一个二维曲面，并随温度演化而变化。在早期宇宙中温度极高，对称性未被破缺，此时场空间的零点成为唯一的真空态。随着宇宙膨胀、温度下降，式 (2.16) 的有效势能结构逐渐复杂化，不同局域极小值随之形成，其中最低者为真真空。相变 (PTs) 可通过从高位真空隧穿至低位真空发生。当不同真空之间存在势垒时，对应一级相变；而当势能曲面平滑过渡、无势垒形成时，则属于高级相变。作者的数值模拟显示，单重态 Majoron 模型中的相变模式非常丰富，通常呈现多步相变特征：部分沿  $s$  场方向，部分沿  $h$  场方向，另一些则沿混合方向。

## 2.3 相变引力波

在强一阶相变过程中，会生成各种各样的重力波源；考虑来自标量场、声波和磁流体动力学 (MHD) 湍流的贡献。第一个重力波源来自真空泡碰撞，重力波能谱和峰值频率为：

$$\Omega_{\text{env}} h^2 \simeq 1.67 \times 10^{-5} \left( \frac{H}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\kappa_s \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \left( \frac{100}{g_*} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{0.11 v_w^3}{0.42 + v_w^2} \right) \times \frac{3.8(f/f_{\text{env}})^{2.8}}{1 + 2.8(f/f_{\text{env}})^{3.8}}, \quad (2.26)$$

$$f_{\text{env}} \simeq 1.65 \times 10^{-5} \text{ Hz} \left( \frac{0.62}{1.8 - 0.1 v_w + v_w^2} \right) \left( \frac{\beta}{H} \right) \left( \frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right) \left( \frac{g_*}{100} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (2.27)$$

这些通过经验得到的公式总结于数值模拟的包络近似中。第二个源是由大规模运动的声波产生的，其引力波源谱和峰值频率为：

$$\Omega_{\text{sw}} h^2 \simeq 2.65 \times 10^{-6} \left( \frac{H}{\beta} \right) v_w \left( \frac{\kappa_v \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \left( \frac{100}{g_*} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{7(f/f_{\text{sw}})^{6/7}}{4 + 3(f/f_{\text{sw}})^2} \right]^{7/2}, \quad (2.28)$$

$$f_{\text{sw}} \simeq 1.9 \times 10^{-5} \text{ Hz} \left( \frac{1}{v_w} \right) \left( \frac{\beta}{H} \right) \left( \frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right) \left( \frac{g_*}{100} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (2.29)$$

第三种是由 MHD 湍流生成的引力波，其能谱和峰值频率为：

$$\Omega_{\text{tu}} h^2 \simeq 3.35 \times 10^{-4} \left( \frac{H}{\beta} \right) v_w \left( \frac{\kappa_{\text{tu}} \alpha}{1 + \alpha} \right)^{3/2} \left( \frac{100}{g_*} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{(f/f_{\text{tu}})^3}{[1 + (f/f_{\text{tu}})]^{11/3} (1 + 8\pi f/h_*)}, \quad (2.30)$$

$$f_{\text{uw}} \simeq 2.7 \times 10^{-5} \text{ Hz} \left( \frac{1}{v_w} \right) \left( \frac{\beta}{H} \right) \left( \frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right) \left( \frac{g_*}{100} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (2.31)$$

其中  $h_* = 1.65 \times 10^{-5} \text{ Hz} (T_*/100 \text{ GeV}) (g_*/100)^{\frac{1}{6}}$ 。



## 3 模拟结果

### 3.1 双场演化

我们复现了几个参数下的双场相变演化，如图 1-3对应于论文中的 FIG.1-FIG.3。

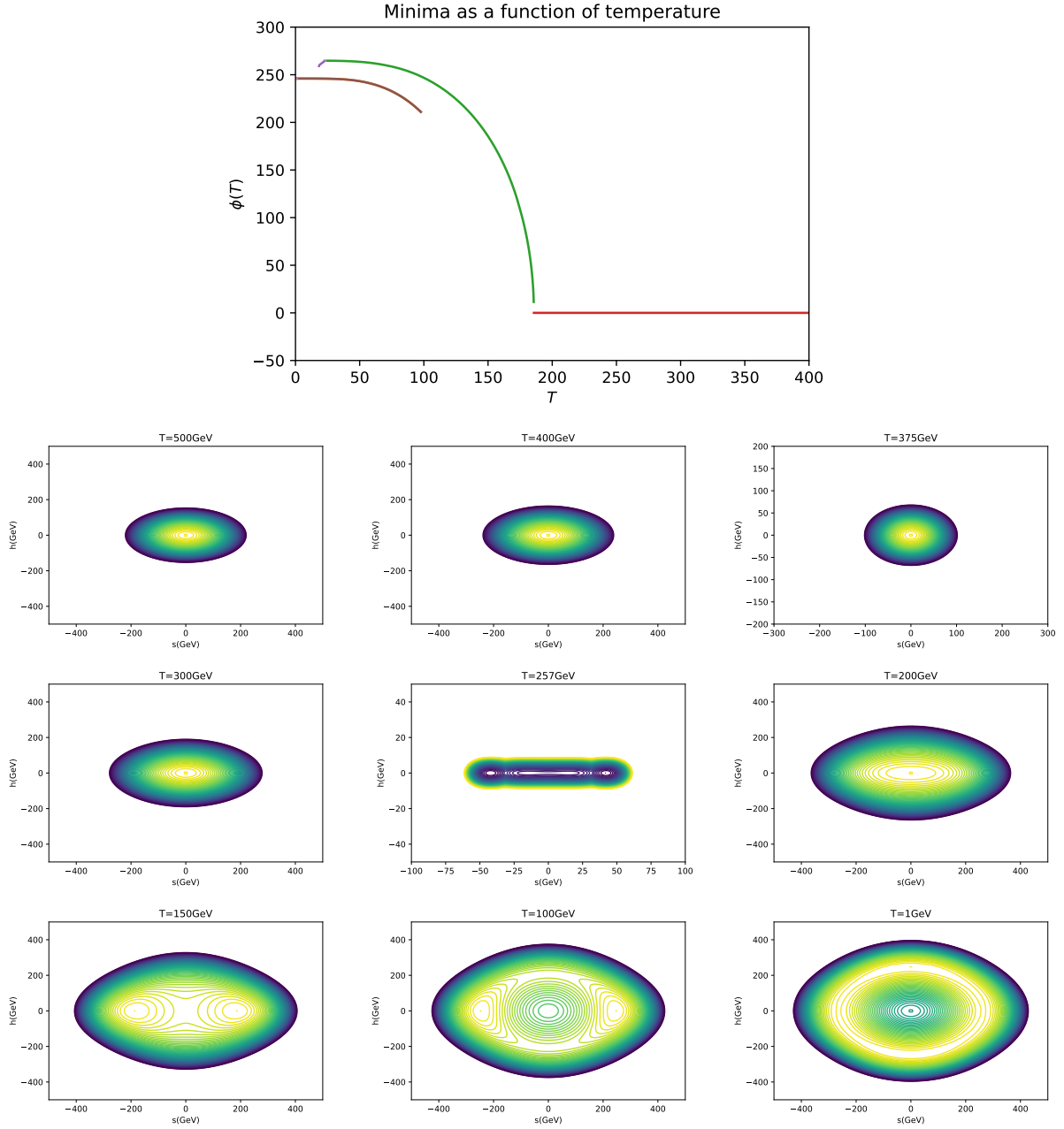


图 1: 模型参数为  $v_{BL} = 1\text{GeV}$ ,  $\lambda_s = 0.1$ ,  $\lambda_h = 0.13$ ,  $\lambda_{sh} = 0.2$ ,  $g = 1.1$ 。第一张图是有效势的局部最小值随温度的变化, 后续的图是在不同温度下有效势等高线图。其中  $\phi = \sqrt{s^2 + h^2}$ 。模拟结果显示在约 257GeV 发生了一次  $s$  方向的一阶相变。

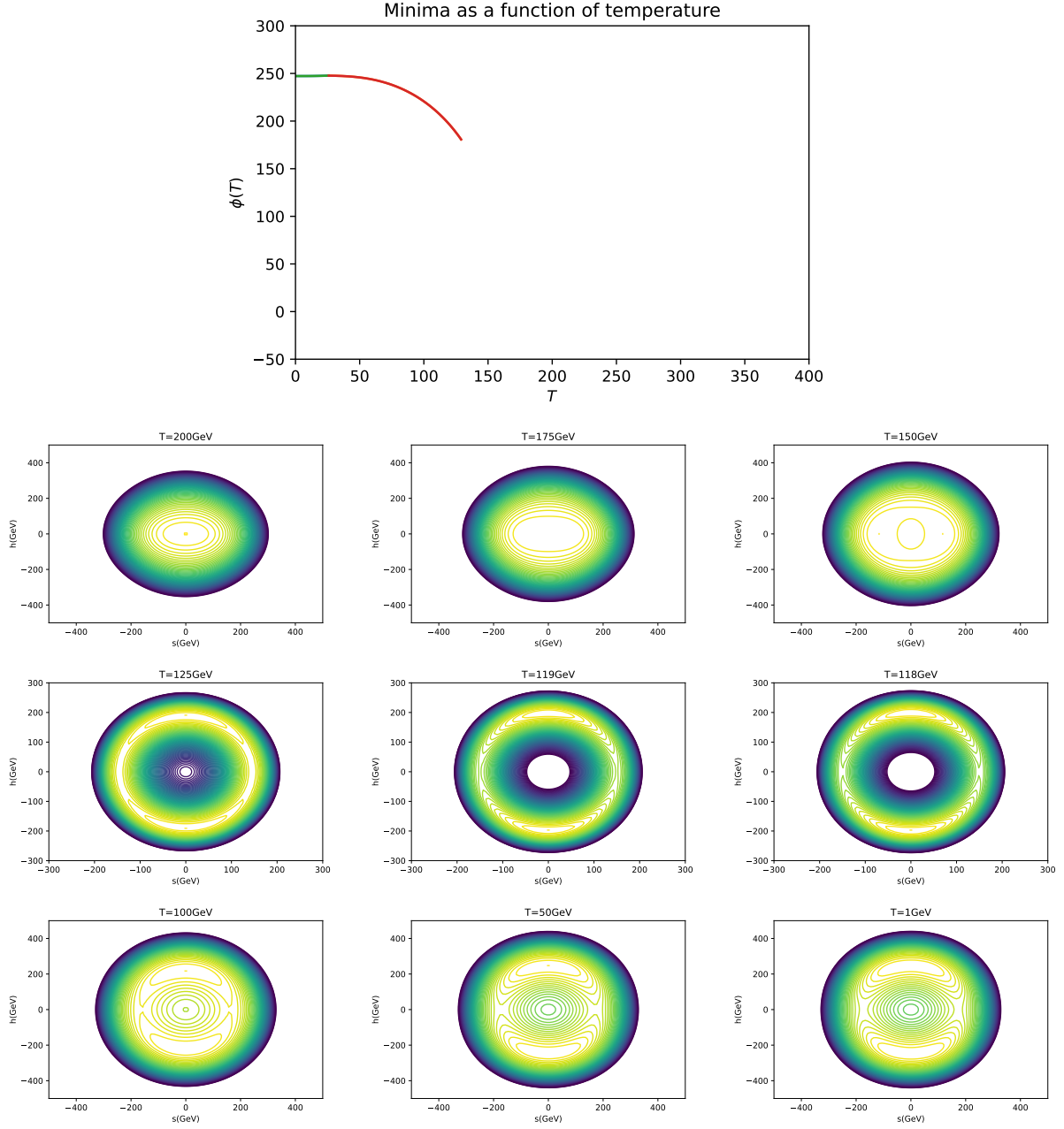
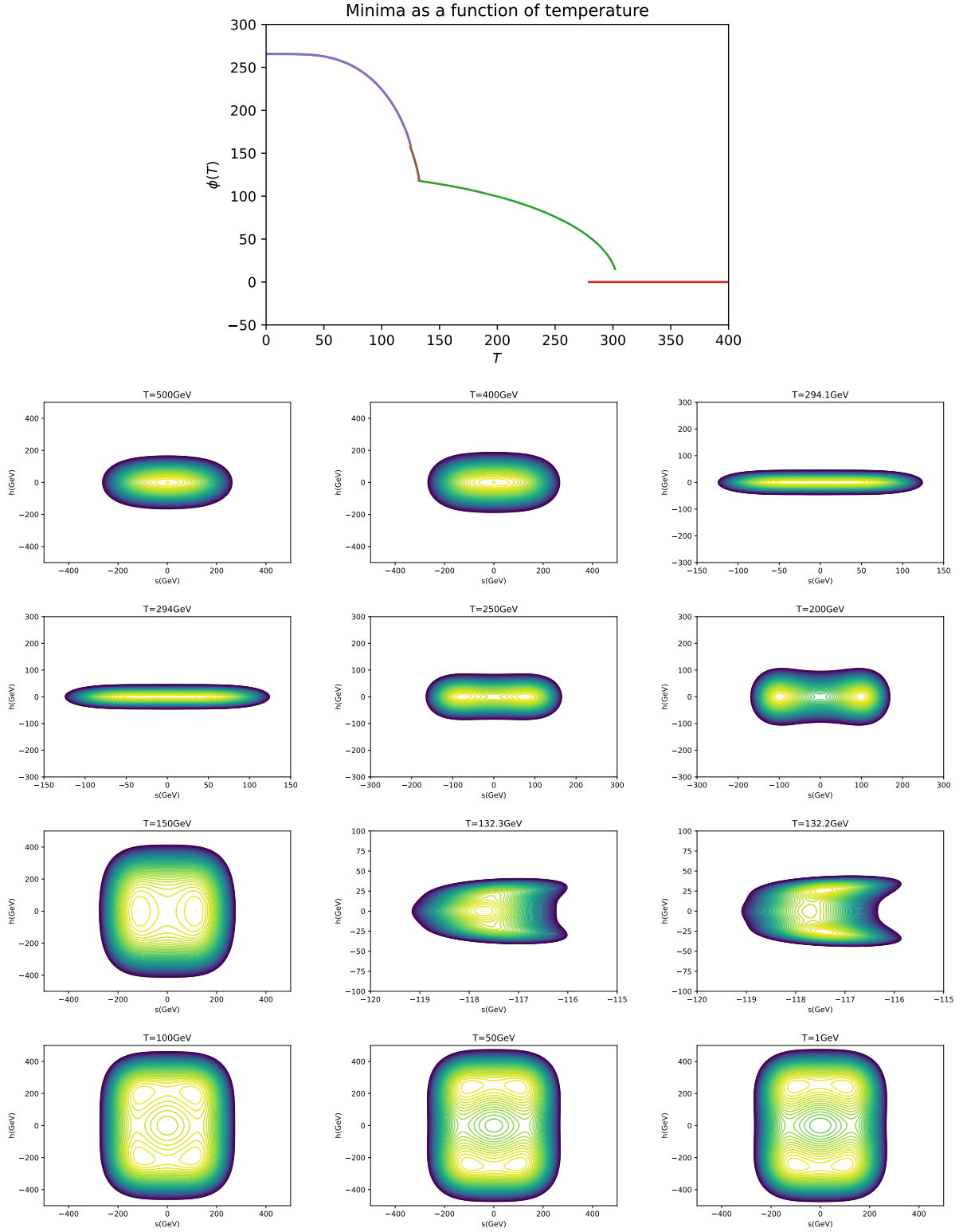


图 2: 模型参数为  $v_{BL} = 25\text{GeV}$ ,  $\lambda_s = 0.35$ ,  $\lambda_h = 0.126$ ,  $\lambda_{sh} = 0.388$ ,  $g = 1.5$ 。第一张图是有效势的局部最小值随温度的变化, 后续的图是在不同温度下有效势等高线图。其中  $\phi = \sqrt{s^2 + h^2}$ 。模拟结果显示在约  $118\text{GeV}$  发生了一次交叉方向的一阶相变。



12

图 3: 两步一阶相变的例子, 第一步相变沿  $s$  方向 (294GeV), 第二步相变沿交叉方向 (132GeV)。模型参数为  $v_{BL} = 100\text{GeV}$ ,  $\lambda_s = 0.5$ ,  $\lambda_h = 0.12$ ,  $\lambda_{sh} = 0.1012$ ,  $g = 0.2$ 。其中  $\phi = \sqrt{s^2 + h^2}$ 。

### 3.2 随机引力波背景

我们还复现了相变引力波的能谱。对于论文中的 FIG.4 和 FIG.5 一共八个子图，我们在每张子图中挑选了一到三条代表的引力波能谱进行复现。对于每个单态马约拉纳模型的参数，我们计算得到对应的相变参数：相变成核温度、相变强度和相变速度。对于模型的模拟结果如表 1，对应的引力波能谱如图 4。

表 1: 图 4 中所使用的模型参数。左侧是单态马约拉纳模型的参数，右侧是通过模拟得到的相变参数。

$v_{BL}/\text{GeV}$	$\lambda_s$	$\lambda_h$	$\lambda_{sh}$	$g$	$T_n/\text{GeV}$	$\alpha$	$\beta/H$
25	0.25	0.129098	0.0	1.0	97.2975	0.00094	1105164
50	0.25	0.129098	0.0	1.0	115.9657	0.0004676	2020935
75	0.25	0.129098	0.0	1.0	125.71	0.00034	2600769
100	0.1	0.129098	0.0	0.5	105.455	0.000706	1433765
150	0.1	0.129	0.0098	0.25	134.398	0.000281	3291480
200	0.1	0.124	0.0441	0.75	124.7296	0.00032	90660048
246	0.4	0.15	0.1505	1.4	159.53689	0.00021	74141586
500	0.2	0.19	0.2028	1.75	151.393	0.00025	68684076
750	0.2	0.2	0.2297	1.5	573.5498	0.00011	1368172

## 4 结论

在这篇文章中，作者通过数值模拟研究单重态 Majoron 模型中宇宙学相变的特性及其产生的引力波（GWs），尤其关注两标量场自由度均未被冻结的情形。与单场模型相比，两场模型中的相变模式呈现显著多样性：不仅验证了全局 U(1) 对称性破缺后发生电弱相变（EWPT）的经典模式，还发现了新现象，例如在 U(1) 对称性破缺前发生的强混合相变。这表明单重态 Majoron 模型是理解两场宇宙学相变现象的理想基准框架。相变引力波（PTGWs）的探测前景方面，其振幅可能过低或频率过高，使得 LISA、DECIGO、BBO、TAIJI、天琴等空间干涉仪难以观测。事实上，若忽略对撞机实验排除限，作者可找到产生可探测引力波的强混合相变案例，但此类案例需大幅提升两个希格斯场之间的耦合强度，

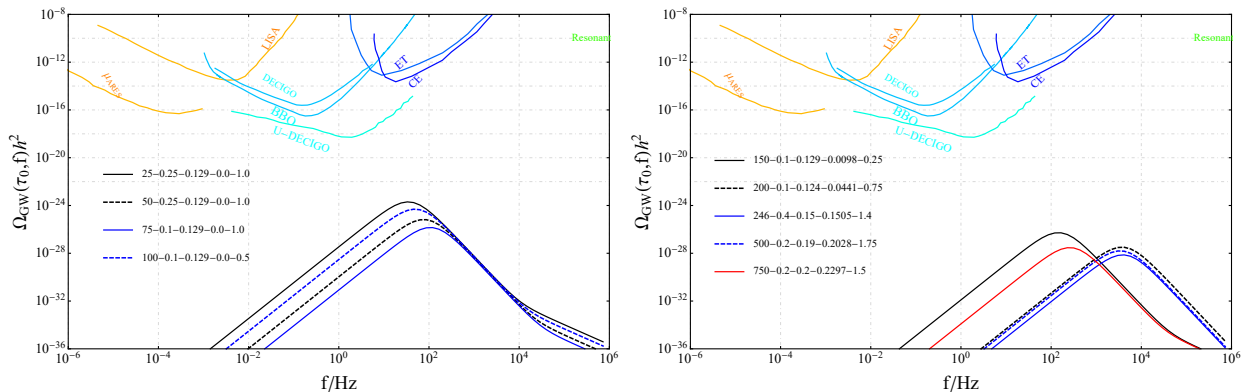


图 4: 引力波信号与未来空间干涉仪探测能力的对比。参数标记采用字符串格式“ $v_{BL}/\text{GeV} - \lambda_s - \lambda_h - \lambda_{sh} - g$ ”。

并要求非标准模型 (SM) 希格斯玻色子质量低于较重的希格斯玻色子质量的一半。这类参数空间因受限于  $H \rightarrow hh$  衰变分支比的实验约束而被排除。尽管如此, 作者强调上述结论具有模型依赖性, 而这篇研究开发的数值方法可广泛应用于其他多自由度的宇宙学相变模型。最后, 作者指出该数值方法的拓展潜力: 当前仅考虑了等离子体中 non-runaway 型或 runaway 型的真空泡泡, 但排除了真空中的 runaway 真空泡泡, 因其违反式 (2.25) 的判据。若纳入后者, 参数空间可能进一步受限。此外, 该方法亦可应用于极低频段的宇宙学相变研究, 其预言可能通过未来原初引力波实验进行检验或证伪。

## 5 与课本的关联

在计算层面上, 对于一个具体的相变模型, 首先程序会使用梯度下降法求解每个温度下有效势的局部最小值, 如图 5 所示。然后, 在两个局部最小值相同时确定临界温度。最后, 根据式 (2.17) 和 (2.18), 通过数值求解微分方程确定隧穿解。这样的隧穿解是温度的函数, 如图 6 所示。我们可以根据判据式 (2.25), 求得过冷后的相变成核温度。

在理论层面上，主要与学校开设的广义相对论与宇宙学、宇宙学、热力学与统计物理、量子场论和量子场论 II 课程联系紧密。对于这些涉及到的理论知识，我们将其整理在附录之中。

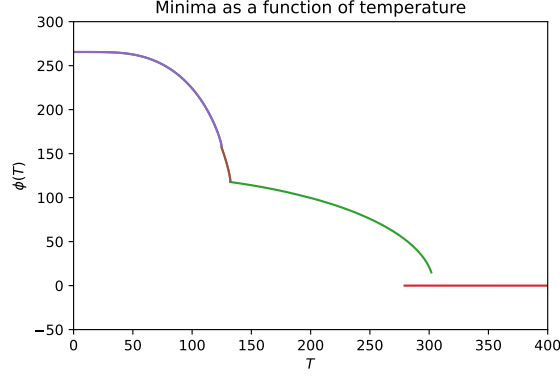


图 5: 有效势局部最小值求解示意图。其中  $\phi = \sqrt{s^2 + h^2}$ 。此图来自模型参数  $v_{BL} = 100\text{GeV}$ ,  $\lambda_s = 0.5$ ,  $\lambda_h = 0.12$ ,  $\lambda_{sh} = 0.1012$ ,  $g = 0.2$ 。

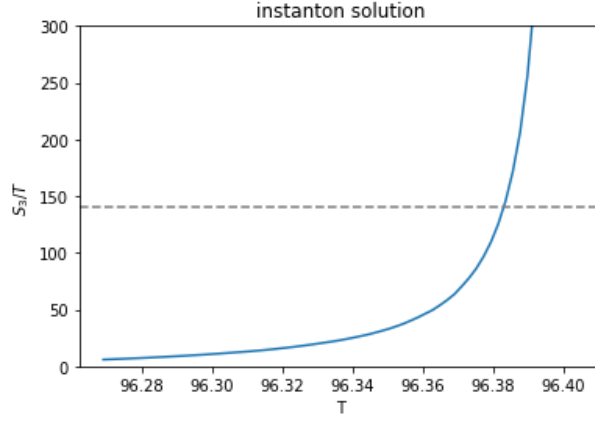


图 6: 实线为不同温度下, 两个真空态之间隧穿解作用量, 与单位空间衰变率  $\Gamma$  的关系为  $S_3/T = -\ln \Gamma + c$ ,  $c$  为常数。虚线为宇宙发生有效相变的判据, 式 (2.25)。实线与虚线相交的温度即为相变成核温度  $T_n$ 。此图来自模型参数  $v_{BL} = 25\text{GeV}$ ,  $\lambda_s = 0.25$ ,  $\lambda_h = 0.129$ ,  $\lambda_{sh} = 0.0$ ,  $g = 1.0$  成核温度为  $97.2975\text{GeV}$  的一阶相变。

## A 基础宇宙学

### A.1 Friemann Equations

根据宇宙微波背景辐射 (CMB) 和宇宙大尺度结构 (LSS) 的观测结果, 宇宙近似是均匀且各向同性的。由此可知宇宙的度规和物质场都满足空间旋转对称性和空间平移对称

性（在我们想要的计算精度下可以忽略宇宙的微扰，量级在  $10^{-5}$ ）即度规，物质的能量密度和压强都只是时间的函数。对宇宙的观察还证明宇宙是（近）平坦的，即宇宙的空间曲率为 0。

由此可知度规的形式为 [?]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathbf{x}^2. \quad (\text{A.1})$$

物质场运动方程为

$$\frac{d}{dt}\rho = -3H(\rho + P), \quad (\text{A.2})$$

其中  $H = \dot{a}/a$ 。

爱因斯坦场方程（此情形下又称 Friedmann Equation）

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

我们考虑宇宙中的物质由不同组分的理想流体构成，分别为辐射 ( $\rho = P$ )、物质 ( $P = 0$ ) 和暗能量 ( $P = -\rho$ )，并考虑宇宙曲率，定义今天的宇宙临界密度为  $\rho_{r,0} = 3H_0^2/8\pi G$ ， $H_0$  为今天的哈勃常数，并取今天的宇宙学度规  $a_0 = 1$ ，那么我们得到  $\Lambda\text{CDM}$  宇宙，

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{k,0}a^{-2} + \Omega_\Lambda), \quad (\text{A.4})$$

其中  $\Omega_{i,0} = \rho_{i,0}/\rho_{r,0}$

## A.2 热宇宙

在早期宇宙时期，粒子密度很大，反应很频繁（特征时间远小于宇宙膨胀的特征时间），于是所有的粒子都处于热平衡状态，又因为宇宙演化方程中只需要物质的能量密度和压强，所以引入热力学是自然的。具体而言，若宇宙中所有种类的粒子都处于热平衡状态，那么宇宙就是一个复相平衡系统  $(T, p, n_i)$ 。然而随着宇宙膨胀，粒子数密度逐渐降低，粒子间的反应速率也下降，于是耦合强度较小的粒子就脱耦合了，它的温度就与其它粒子温度不一样了。脱耦合的过程是非平衡过程，将在 2.4 节中介绍，一般而言宇宙是一个复相系统  $(T_i, p_i, n_i)$ ，其中每个相都是热平衡的，这是因为某种粒子脱耦合后，它会独立演化，由于宇宙的均匀和各向同性，粒子就好像一直处在热化的状态。



表 2: d.o.f. of particles in Standard Model

type		mass	spin	$g$
quarks	$t, \bar{t}$	173GeV	$\frac{1}{2}$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
	$b, \bar{b}$	4GeV		
	$c, \bar{c}$	1GeV		
	$s, \bar{s}$	100MeV		
	$d, \bar{d}$	5MeV		
	$u, \bar{u}$	2MeV		
gluons	$g_i$	0	1	$8 \cdot 2 = 16$
leptons	$\tau^\pm$	1777MeV	$\frac{1}{2}$	$2 \cdot 2 = 4$
	$\mu^\pm$	106MeV		
	$e^\pm$	511keV		
	$\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$	$< 0.6\text{eV}$	$\frac{1}{2}$	$2 \cdot 1 = 2$
	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	$< 0.6\text{eV}$		
	$\nu_e, \bar{\nu}_e$	$< 0.6\text{eV}$		
Higgs boson	$H^0$	125GeV	0	1

从统计力学我们知道，玻色子和费米子的分布函数为：

$$f(E) = \frac{1}{e^{E/T} \pm 1}. \quad (\text{A.5})$$

这里，我们忽略了粒子的化学势 [?].

考虑相对论极限下粒子温度与能量密度和压强的关系

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, P = \frac{1}{3} \rho, \quad (\text{A.6})$$

其中，

$$g_*(T) = \sum_{i=boson} g_i \frac{T_i^4}{T^4} + \frac{7}{8} \sum_{i=fermi} g_i \frac{T_i^4}{T^4}.$$

其中  $g_i$  为相对论性粒子的自由度，各粒子自由度数量见下表。 $T_i$  为各种类粒子的温度， $T$  通常取为光子气体的温度。

当温度与粒子质量相同量级时，粒子变成非相对论性的，其  $g_i$  变为 0。将能量密度代入 Friedmann Equation 可得，

$$\frac{\dot{a}}{a} = H = \frac{\pi}{3} \left( \frac{g_*}{10} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{T^2}{M_{pl}}. \quad (\text{A.7})$$

为了求得  $a(t)$  的演化，还需要  $a$  和  $T$  的关系式，此时，考虑宇宙熵是有用的，可以证明对如果宇宙中的粒子都处于相对论状态且热平衡的状态，宇宙的熵守恒 [?]:

$$\frac{S}{V} = s = \sum_i \frac{\rho_i + P_i}{T_i} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S}(T) T^3. \quad (\text{A.8})$$

其中，

$$g_{*S}(T) = \sum_{i=boson} g_i \frac{T_i^3}{T^3} + \frac{7}{8} \sum_{i=fermi} g_i \frac{T_i^3}{T^3}. \quad (\text{A.9})$$

虽然当非平衡过程发生时，宇宙的熵会增大，但是由于宇宙中的光子熵占主导地位，其它的粒子熵变化可以略去。于是近似地可以认为宇宙演化是一个绝热过程，即宇宙熵守恒。

由于  $V \propto a^3$ ，所以  $sa^3 = \text{Const}$ ，若认为  $g_{*S}$  不随时间变化 ( $g_{*S}$  的具体演化规律将在下节中讨论)，结合 Friedmann 方程可得：

$$a \propto t^{1/2}, T \propto t^{-1/2}.$$

在电弱相变时期， $g_{*S} \approx 110$ ， $g_* \approx 110$ ， $T \sim 100 \text{ GeV}$ 。

## B 随机引力波背景

我们假设引力波在闵可夫斯基时空中传播，

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j, \quad (\text{B.1})$$

它的运动方程可以写成

$$\ddot{h}_{ij}(t, \vec{x}) - \nabla^2 h_{ij}(t, \vec{x}) = S_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}), \quad (\text{B.2})$$

其中  $S_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = (\mathcal{T}^{ik} \mathcal{T}^{jl} - \frac{1}{2} \mathcal{T}^{ij} \mathcal{T}^{kl}) S_{kl}(t, \vec{x})$  代表源的 TT 分量，横向算符定义为  $\mathcal{T}_i^k \equiv \delta_i^k - \frac{\partial^k \partial_i}{\nabla^2}$ 。<sup>1</sup> 在傅里叶空间，运动方程变成

$$\ddot{h}_k^\lambda(t) + k^2 h_k^\lambda(t) = S_k^\lambda(t). \quad (\text{B.3})$$

---

<sup>1</sup>拉丁指标被  $\delta_{ij}$  提升或降低。

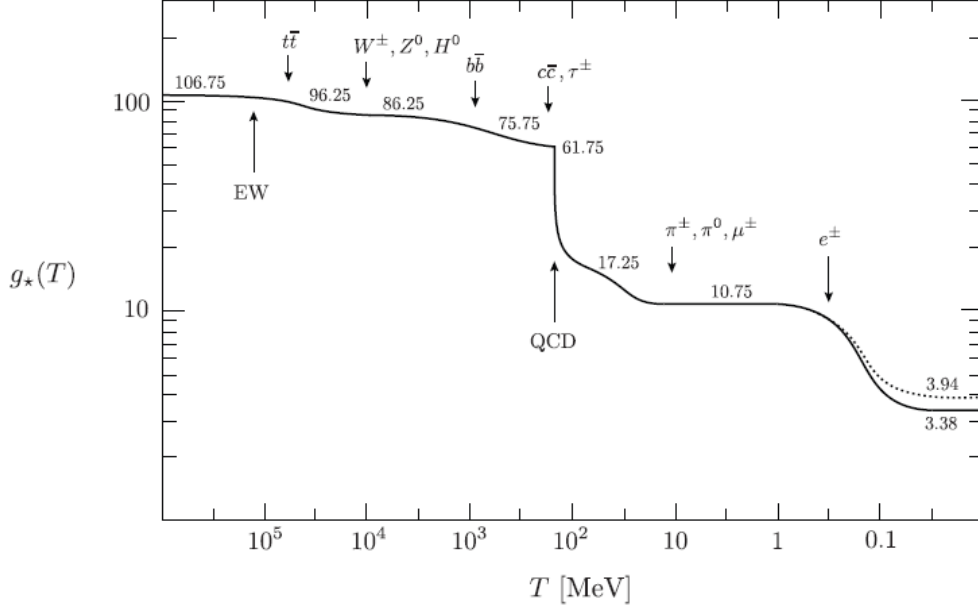


图 7:  $g_*$  的演化。虚线表示  $g_{*S}$  的演化。[?]

其中傅里叶变换定义为  $h_{ij}(t, \vec{x}) = \sum_{\lambda=+, \times} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} h_{\vec{k}}^{\lambda}(t) e_{ij}^{\lambda}(\hat{k})$ ,  $\lambda = +, \times$  代表了两个引力波极化分量。极化张量  $e_{ij}^{\lambda}(\vec{k})$  可以被一对正交的极化矢量构造出来, 分别是  $e_i(\vec{k})$  和  $\bar{e}_i(\vec{k})$ 。这两个极化矢量都与引力波的波矢  $\vec{k}$  正交。

$$e_{ij}^{+}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e_i(\vec{k}) e_j(\vec{k}) - \bar{e}_i(\vec{k}) \bar{e}_j(\vec{k}) \right],$$

$$e_{ij}^{\times}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e_i(\vec{k}) \bar{e}_j(\vec{k}) + \bar{e}_i(\vec{k}) e_j(\vec{k}) \right],$$

满足如下性质,

$$e_{ii}^{\pm} = 0, \quad k^i e_{ij}^{\pm} = 0, \quad e_{ij}^{\lambda} e^{s, ij} = \delta^{\lambda s}. \quad (\text{B.4})$$

TT 分量的投影在傅里叶空间可以被写成<sup>2</sup>

$$S_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \sum_{\lambda=+, \times} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e_{ij}^{\lambda}(\hat{k}) e_{lm}^{\lambda}(\hat{k}) S_{lm}(t, \vec{k}), \quad (\text{B.5})$$

<sup>2</sup> $\mathcal{T}_{ij}$  可以被等价地写成  $\mathcal{T}_{ij} = e_i e_j + \bar{e}_i \bar{e}_j$ 。注意到  $e, \bar{e}, \hat{k}$  是一组正交基, 所以  $\delta_{ij} = e_i e_j + \bar{e}_i \bar{e}_j + \hat{k}_i \hat{k}_j$ 。在傅里叶空间,  $\mathcal{T}_{ij} = \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j = e_i e_j + \bar{e}_i \bar{e}_j$ 。

其中

$$S_{\vec{k}}^\lambda(t) = e_{lm}^\lambda(\hat{k}) S_{lm}(t, \vec{k}) . \quad (\text{B.6})$$

这里,  $S_{lm}(t, \vec{k})$  是  $S_{lm}(t, \vec{x})$  的傅里叶变换。

利用格林函数可以给出 Eq. (B.3) 的特解,

$$h_{\vec{k}}^\lambda(t) = \int_{t_s}^t dt' G_k(t, t') S_{\vec{k}}^\lambda(t') , \quad (\text{B.7})$$

描述了从源产生的引力波。这里格林函数可以被解得

$$\ddot{H}_k(t) + k^2 H_k(t) = 0 , H_1(t) = \sin kt , H_2(t) = \cos kt , G_k(t, t') = \frac{H_1(t)H_2(t') - H_1(t')H_2(t)}{H_1'(t')H_2(t') - H_1(t')H_2'(t')}$$

$$G_k(t, t') = \frac{1}{k} \sin[k(t - t')] . \quad (\text{B.8})$$

注意到  $t_s$  是指  $S_{\vec{k}}^\lambda$  开始起作用的时间。令人感兴趣的观察量是能量谱, 定义为

$$\Omega_{\text{GW}}(t, k) = \frac{1}{\rho_c(t)} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \ln k} , \quad (\text{B.9})$$

其中  $\rho_c(t) = 3M_{\text{Pl}}^2 H^2(t)$  是  $t$  时刻的临界能量密度。实空间中的有效能量密度通常被定义为 [?, ?, ?, ?, ?]

$$\rho_{\text{GW}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}(t, \vec{x}) \dot{h}^{ij}(t, \vec{x}) \rangle , \quad (\text{B.10})$$

其中尖括号代表在几个周期内对引力波取平均和引力波源的系综平均。于是能量谱密度为

$$\begin{aligned} \langle \dot{h}_{ij}(t, \vec{x}) \dot{h}^{ij}(t, \vec{x}) \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{k} d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x} \cdot (\vec{k} + \vec{p})} \sum_{\lambda, s} e_{ij}^\lambda(\hat{k}) e_{ij}^s(\hat{p}) \langle \dot{h}_k^\lambda \dot{h}_p^s \rangle = \int \frac{d^3 \vec{k} d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{x} \cdot (\vec{k} + \vec{p})} \sum_{\lambda, s} e_{ij}^\lambda(\hat{k}) e_{ij}^s(\hat{p}) \delta^{\lambda s} \delta(\vec{k} + \vec{p}) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_h(t, k) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, s} e_{ij}^\lambda(\hat{k}) e_{ij}^s(-\hat{k}) \delta^{\lambda s} \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_h(t, k) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} e_{ij}^\lambda(\hat{k}) e_{ij}^\lambda(\hat{k}) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_h(t, k) = 4\pi^2 4\pi \int \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 \frac{1}{k^3} \mathcal{P}_h(t, k) \\ &= 2 \int d \ln k \mathcal{P}_h(t, k) \\ \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \ln k} &= \frac{1}{16\pi G} \mathcal{P}_h(t, k) \end{aligned}$$

$$\Omega_{\text{GW}}(t, k) = \frac{1}{16\pi G \rho_c(t)} \mathcal{P}_h(t, k) , \quad (\text{B.11})$$

其中  $\mathcal{P}_h$  是无量纲功率谱, 被定义为

$$\langle \dot{h}_{\vec{k}}^\lambda(t) \dot{h}_{\vec{p}}^s(t) \rangle \equiv \delta^{\lambda s} \delta(\vec{k} + \vec{p}) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_h(t, k) . \quad (\text{B.12})$$

这里,  $\delta(\vec{k} + \vec{p})$  出现因为  $\langle \dot{h}_{ij}(t, \vec{x}) \dot{h}^{ij}(t, \vec{x}) \rangle$  具有空间平移对称性。回看 Eqs. (B.7), (B.11) 和 (B.12), 在计算  $\Omega_{\text{GW}}(t, k)$  时只需要计算两点关联函数  $\langle S_k^\lambda(t) S_{\vec{p}}^s(t) \rangle$ 。进一步计算

$$\begin{aligned}
\langle \dot{h}_k^\lambda(t) \dot{h}_{\vec{p}}^s(t) \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{t_s}^t dt_1 G_k(t, t_1) S_k^\lambda(t_1) \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{t_s}^t dt_2 G_{\vec{p}}(t, t_2) S_{\vec{p}}^s(t_2) \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left( G_k(t, t) S_k^\lambda(t) + \int_{t_s}^t dt_1 \frac{\partial G_k(t, t_1)}{\partial t} S_k^\lambda(t_1) \right) \left( G_{\vec{p}}(t, t) S_{\vec{p}}^s(t) + \int_{t_s}^t dt_2 \frac{\partial G_{\vec{p}}(t, t_2)}{\partial t} S_{\vec{p}}^s(t_2) \right) \right\rangle \\
&= \left\langle G_k(t, t) S_k^\lambda(t) G_{\vec{p}}(t, t) S_{\vec{p}}^s(t) \right\rangle + \left\langle G_k(t, t) S_k^\lambda(t) \int_{t_s}^t dt_2 \frac{\partial G_{\vec{p}}(t, t_2)}{\partial t} S_{\vec{p}}^s(t_2) \right\rangle + \left\langle G_{\vec{p}}(t, t) S_{\vec{p}}^s(t) \int_{t_s}^t dt_1 \frac{\partial G_k(t, t_1)}{\partial t} S_k^\lambda(t_1) \right\rangle \\
&+ \left\langle \int_{t_s}^t dt_1 \frac{\partial G_k(t, t_1)}{\partial t} S_k^\lambda(t_1) \int_{t_s}^t dt_2 \frac{\partial G_{\vec{p}}(t, t_2)}{\partial t} S_{\vec{p}}^s(t_2) \right\rangle \\
&= \left\langle \int_{t_s}^t dt_1 \frac{\partial G_k(t, t_1)}{\partial t} S_k^\lambda(t_1) \int_{t_s}^t dt_2 \frac{\partial G_{\vec{p}}(t, t_2)}{\partial t} S_{\vec{p}}^s(t_2) \right\rangle \\
&= \left\langle \int_{t_s}^t dt_1 \frac{\partial G_k(t, t_1)}{\partial t} \int_{t_s}^t dt_2 \frac{\partial G_{\vec{p}}(t, t_2)}{\partial t} \langle S_k^\lambda(t_1) S_{\vec{p}}^s(t_2) \rangle \right\rangle_t \\
&= \left\langle \int_{t_s}^t dt_x \int_{t_s}^t dt_y \cos[k(t - t_x)] \cos[p(t - t_y)] \langle S_k^\lambda(t_x) S_{\vec{p}}^s(t_y) \rangle \right\rangle_t
\end{aligned}$$

源项在  $t > t_e$  被关闭

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \int_{t_s}^{t_e} dt_x \int_{t_s}^{t_e} dt_y \cos[k(t - t_x)] \cos[p(t - t_y)] \langle S_k^\lambda(t_x) S_{\vec{p}}^s(t_y) \rangle \right\rangle_t \\
&= \left\langle \int_{t_s}^{t_e} dt_x \int_{t_s}^{t_e} dt_y \cos[k(t - t_x)] \cos[p(t - t_y)] \delta^{\lambda s} \delta(\vec{k} + \vec{p}) \frac{2\pi^2}{k^3} S(t_x, t_y, k) \right\rangle_t \\
\mathcal{P}_h(t, k) &= \left\langle \int_{t_s}^{t_e} dt_x \int_{t_s}^{t_e} dt_y \cos[k(t - t_x)] \cos[k(t - t_y)] S(t_x, t_y, k) \right\rangle_t
\end{aligned}$$

能量密度要对时间做平均  $\frac{1}{2\pi/k} \int_0^{2\pi/k} dt \cos[k(t - t_x)] \cos[k(t - t_y)] = \frac{1}{2} \cos[k(t_x - t_y)]$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_s}^{t_e} dt_x \int_{t_s}^{t_e} dt_y \cos[k(t_x - t_y)] S(t_x, t_y, k)$$

$$\begin{aligned}
h_k^\lambda(t) &= \int_{t_s}^t dt' G_k(t, t') S_k^\lambda(t') = \frac{1}{k} \int_{t_s}^t dt' \sin[k(t - t')] S_k^\lambda(t') = \frac{1}{k} \int_{t_s}^t dt' \sin[k(t_e - t') + k(t - t_e)] S_k^\lambda(t') \\
&= \frac{1}{k} \int_{t_s}^t dt' \cos[k(t_e - t')] S_k^\lambda(t') \sin[k(t - t_e)] + \frac{1}{k} \int_{t_s}^t dt' \sin[k(t_e - t')] S_k^\lambda(t') \cos[k(t - t_e)] \\
\dot{h}_k^\lambda(t) &= \int_{t_s}^t dt' \cos[k(t_e - t')] S_k^\lambda(t') \cos[k(t - t_e)] - \int_{t_s}^t dt' \sin[k(t_e - t')] S_k^\lambda(t') \sin[k(t - t_e)] \\
&= \int_{t_s}^t dt' \cos[k(t - t')] S_k^\lambda(t') = \int_{t_s}^{t_e} dt' \cos[k(t - t')] S_k^\lambda(t') \\
\dot{h}_k^\lambda(t) \dot{h}_{\vec{p}}^s(t) &= \int_{t_s}^{t_e} dt_x \cos[k(t - t_x)] S_k^\lambda(t_x) \int_{t_s}^{t_e} dt_y \cos[k(t - t_y)] S_{\vec{p}}^s(t_y)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_h(t, k) = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{t_e} dt_x \int_{t_s}^{t_e} dt_y \cos[k(t_x - t_y)] S(t_x, t_y, k), \quad (\text{B.13})$$

其中  $S(t_x, t_y, k)$  是两个关联函数, 被定义为

$$\langle S_k^\lambda(t_x) S_{\vec{p}}^s(t_y) \rangle = \delta^{\lambda s} \delta(\vec{k} + \vec{p}) \frac{2\pi^2}{k^3} S(t_x, t_y, k). \quad (\text{B.14})$$

注意到我们已经使用了源项在  $t > t_e$  被关闭的事实。代入 Eq. (B.11) 得到能量谱

$$\Omega_{\text{GW}}(t, k) = \frac{1}{32\pi G \rho_c(t)} \int_{t_s}^{t_e} dt_x \int_{t_s}^{t_e} dt_y \cos[k(t_x - t_y)] S(t_x, t_y, k) . \quad (\text{B.15})$$

将一阶相变时相关的引力波源代入 Eq. (B.15) 便可得到引力波能谱的计算式。遗憾的是除了薄壁、包络近似下泡泡碰撞的引力波谱可以被解析的计算出来，其余的引力波能谱只能通过数值模拟找到近似的表达式。

## 参考文献

- [1] Y. Wan, B. Imtiaz and Y.-F. Cai, *Two-field cosmological phase transitions and gravitational waves in the singlet majoron model*, *The European Physical Journal C* **79** (Jan., 2019) 25, [1804.05835].
- [2] C. L. Wainwright, *Cosmotransitions: Computing cosmological phase transition temperatures and bubble profiles with multiple fields*, *Computer Physics Communications* **183** (Sept., 2012) 2006–2013, [1109.4189].
- [3] N. Sei, I. Umemura and K. Yamamoto, *Constraints on the electroweak phase transition in the singlet majoron model*, *Phys. Lett. B* **299** (1993) 286–292.
- [4] Y. Kondo, I. Umemura and K. Yamamoto, *First order phase transition in the singlet Majoron model*, *Phys. Lett. B* **263** (1991) 93–96.
- [5] K. Enqvist, K. Kainulainen and I. Vilja, *Phase transitions in the singlet majoron model*, *Nucl. Phys. B* **403** (1993) 749–769.
- [6] J. M. Cline, G. Laporte, H. Yamashita and S. Kraml, *Electroweak Phase Transition and LHC Signatures in the Singlet Majoron Model*, *JHEP* **07** (2009) 040, [0905.2559].
- [7] E. K. Akhmedov, Z. G. Berezhiani, R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Planck scale effects on the majoron*, *Phys. Lett. B* **299** (1993) 90–93, [hep-ph/9209285].
- [8] PARTICLE DATA GROUP collaboration, C. Patrignani et al., *Review of Particle Physics*, *Chin. Phys. C* **40** (2016) 100001.

- [9] M. Fukugita and T. Yanagida, *Sphaleron Induced Baryon Number Nonconservation and a Constraint on Majorana Neutrino Masses*, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 1285–1286.
- [10] J. M. Cline, K. Kainulainen and K. A. Olive, *Constraints on majoron models, neutrino masses and baryogenesis*, *Astropart. Phys.* **1** (1993) 387–398, [[hep-ph/9304229](#)].