

Atom Origin

2024 Spring

摘要

原子起源是一个横跨宇宙学、粒子物理、核物理、原子物理和统计物理的有趣主题。本文整理了原子起源的来龙去脉，重点着眼于原子物理范畴，着重阐述了早期宇宙中电子和原子核结合形成原子的过程，并试以简单的物理图像解释此过程和宇宙微波背景辐射的关系。

1 原子起源的故事

世界纷繁复杂，都源于小小的原子。上个世纪初对原子的研究，使人类走向了量子理论。如今，人们建立起了一套完善的量子理论——量子场论以及从实验中总结的粒子物理标准模型，它可以解释人类进行的几乎所有的实验。人们相信量子场论及粒子物理标准模型至少在 TeV 量级及以下都是有效的。在人类探索量子理论的一系列的过程中，原子起到了十分重要的作用。可是我们不禁要问世界上的原子是从哪里来的呢 [?]?

原子起源是一个重要又有趣的问题。没有原子地球无法形成，人类无法诞生，迄今为止所有科学理论都无从谈起。同时，很明显的是原子起源问题需要跨越漫长的历史，和宇宙起源、物质形成、星体演化、原子物理、核尺度物理都有密切的联系。上世纪广义相对论被提出之后，人们获得了一套可以描述宇宙行为的物理理论，并结合宇宙学观察建立起了标准大爆炸理论 (Standard Big Bang Theory)，又称 Λ CDM 宇宙学。它假设了宇宙中存在固定组分的暗能量、冷物质、辐射物质和曲率（曲率在宇宙演化方程中可以等效地看成一种组分），通过这 4 个参数很好地描述了宇宙

行为。同时它也提供了一个可以发生核反应和原子形成的舞台——早期宇宙。诚然，这个简单的宇宙模型存在一些问题，比如宇宙大尺度结构起源，大爆炸奇点问题等等，但是对于我们在这篇小论文中的目标——解释原子起源和原子形成，我们想已经是足够的了。因此在第 2 节和第 3 节的讨论之中，我们都将局限于一个同质均匀的膨胀宇宙而忽略可能的效应 [?]。也是在上个世纪，人们对原子核物理的研究也不断深入，发现了弱相互作用力和强相互作用力，进而建立起了粒子物理标准模型 (Standard Model)。这一模型涵盖了基本粒子之间所有已知的相互作用，为计算质子中子反应，以及一系列复杂的核反应提供了理论依据。尽管人们相信还有超出标准模型的物理，但对于能标约为 $\sim 1\text{MeV}$ 的核合成过程，我们有充分理由相信它是可靠的。

最终在结合了标准大爆炸模型和粒子物理标准模型后，人们建立起了原子起源的过程 [?]：在宇宙暴涨 (Inflation) [?] 结束、Higgs 场发生对称性破缺， W^\pm, Z 玻色子获得质量 (电弱相变 EW phase transition) 之后，宇宙中被标准模型中的粒子主导 (可能还有冷暗物质 Cold Dark Matter)，这个时候宇宙温度很高，夸克还没有结合形成质子和中子。随着宇宙膨胀，温度逐渐下降，夸克结合形成质子和中子，这一过程称为 QCD 相变 (QCD phase transition)。当宇宙温度下降至 $T \sim 1\text{MeV}$ 时，弱相互作用开始变得不足以维持中微子的与其它粒子的热平衡和质子中子之间的化学平衡，导致了质子和中子之间有一个固定的相对比例，给之后的早期核合成提供了初始条件。在温度下降到 $T \sim 0.05\text{MeV}$ 时，质子和中子开始结合形成原子核 [?]，这被称作原初核合成 (Big Bang Nucleosynthesis)。

在宇宙的初期形成的原子核都是轻元素 (指氢、氦、锂和它们的同位素)。然后在经历了 60 万年后，宇宙逐渐冷却，由辐射主导时期变为了物质主导时期，这个时期内电子和原子核结合 (Recombination) 形成我们今天看到的原子，同时宇宙变得“透明”，光得以自由传播，形成了重要的热宇宙遗留——宇宙微波背景辐射 (CMB) [?]。宇宙微波背景辐射为宇宙学家和天文学家提供了非常重要的信息，也让人们得以获悉早期宇宙的条件。更进一步地，在物质主导时期，宇宙中的微扰开始生长，最终在宇宙诞生约 2 亿年后形成了宇宙中的第一批恒星。在恒星的核反应下，轻元素向重元素转变，最后又通过超新星爆发等效应分散到宇宙中。而在机缘巧合之下，这些原子聚集在宇宙的某处角落，形成了我们今天的世界。

本文将讨论电子结合原子核形成原子的过程，也即大爆炸故事里的 Recombination，这将在第 3 节中详细论述。在 3.1 节里我们通过理论分析和数值计算讨论了

电子结合原子核形成原子的过程，并指出了结合温度 T_r 远小于氢原子基态结合能 $B_H \approx 13.6\text{eV}$ ；在 3.2 节里，我们讨论了自由电子比例下降对光子电子相互作用的影响，并接着讨论了光子电子解耦合过程，这造就了一个重要的宇宙学观察对象——宇宙微波背景辐射（CMB）；最后在 3.3 节中，我们简要解释了宇宙微波背景辐射的特征，以及它的一些重要观测结果。

为了逻辑的完整性，在讨论原子形成之前，我们插入了第 2 节原初核合成的内容，这将为原子形成提供初始条件（原子核之间的比例），它将告诉我们，作为近似，只讨论电子和氢原子核的结合是合理的。在 2.1 节里，我们通过数值模拟计算了原初核合成的过程，得到了宇宙早期轻元素丰度分布；然后在 2.2 节里，我们基于一些合理的简化假设，给出了原初核合成的理论分析，再次获得了宇宙中氢核氦核丰度比 $n_{He}/n_H \approx 1/16$ （其余原子核可忽略不计）。

同样为了逻辑的完整性，在第 4 节中，我们简要介绍了恒星内部核合成的过程，这将解释重元素的由来。

为了避免行文冗余，我们将需要的理论放在了附录 A 和附录 B 中。在附录 A 中，我们介绍了描述早期宇宙需要用到的理论，并给出了早期核合成时期宇宙膨胀速率、宇宙温度和宇宙学度规的表达式。在 A.1 节里，我们首先介绍了粒子物理标准模型，根据能量标度而言，它在早期原子核形成时期是有效的；然后在 A.2 节里，我们介绍了同质均匀平坦情况下宇宙的演化方程，它包含两个部分，一个是物质场运动方程，一个是 Friedmann 方程；在 A.3 节中，我们讨论了宇宙中粒子的平衡态热力学行为并给出了物质场行为，最终结合 Friedmann 方程给出了早期核合成时期宇宙学度规随时间的显式表达式；最后在 A.4 节里，我们介绍了处理非平衡过程所需要的动力学方程。附录 B 给出了 Compton 散射截面计算过程。

在接下来的讨论中，我们取自然单位制

$$\hbar = c = k_B = 1.$$

2 早期核合成

在温度 $T \sim 1\text{MeV} \gg 1\text{eV}$ 时，电子和原子核还没有办法结合，但是此时发生的原初核合成会为之后的原子形成提供初始条件。具体来讲，这个时期内质子和中子结合形成非氢原子核，接下来的讨论将说明，除了氢原子核和氦原子核之外的原

表 1: Events of university

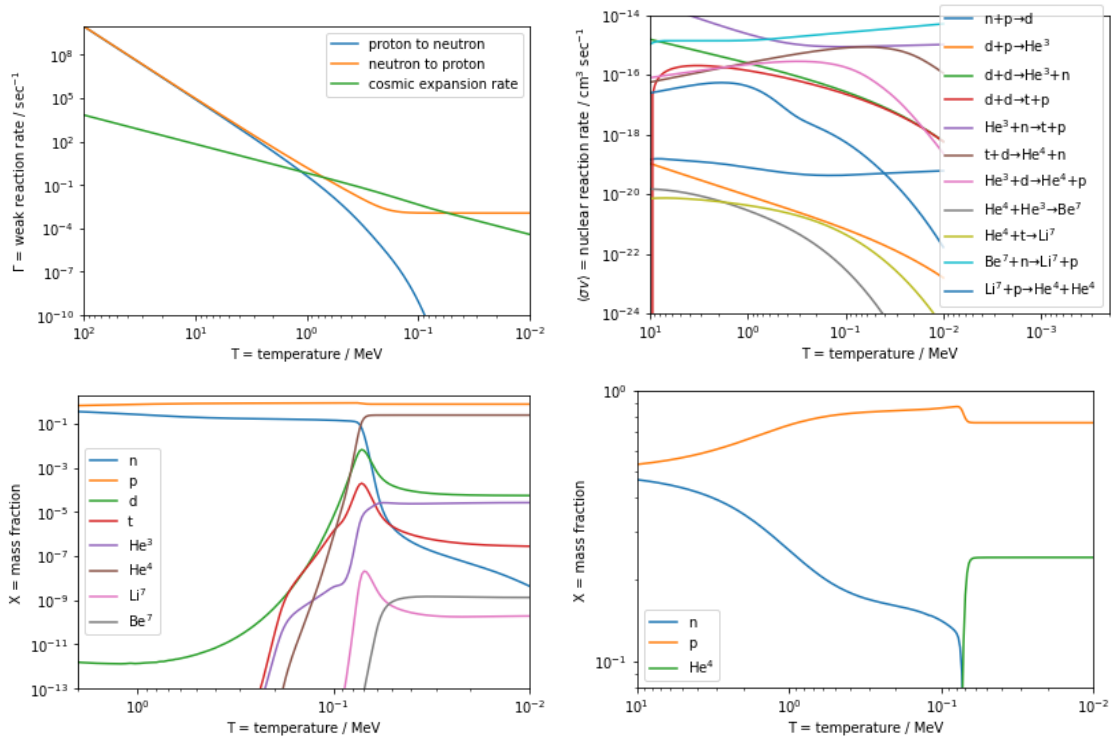
| Event | time t | redshift z | temperature T |
|--------------------------------|----------------------|-----------------|--------------------|
| Singularity | 0 | ∞ | ∞ |
| Quantum gravity | $\sim 10^{-43}$ s | - | $\sim 10^{18}$ GeV |
| Inflation | $\gtrsim 10^{-34}$ s | - | - |
| Baryogenesis | $\lesssim 20$ ps | $> 10^{15}$ | > 100 GeV |
| EW phase transition | 20ps | 10^{15} | 100GeV |
| QCD phase transition | 20μ s | 10^{12} | 150MeV |
| Dark matter freeze-out | ? | ? | ? |
| Neutrino decoupling | 1 s | 6×10^9 | 1MeV |
| Electron-positron annihilation | 6 s | 2×10^9 | 500keV |
| Big Bang nucleosynthesis | 3 min | 4×10^8 | 100keV |
| Matter-radiation equality | 60kyr | 3400 | 0.75eV |
| Recombination | 260 – 380kyr | 1100 – 1400 | 0.26 – 0.33eV |
| Photon decoupling | 380kyr | 1100 | 0.26eV |
| Reionization | 100 – 400Myr | 10 – 30 | 2.6 – 7.0meV |
| Dark energy-matter equality | 9Gyr | 0.4 | 0.33meV |
| Present | 13.8Gyr | 0 | 0.24meV |

{tab:1}

子核比例都可以忽略不记，而氢与氦之间的比例约为 16 : 1，质量比例约为 4 : 1。因此它们在之后原子合成中将要消耗的电子数约为 8 : 1。由于此时温度远低于质子和中子的质量，它们都可视为非相对论粒子。

2.1 早期核合成过程模拟

根据附录 A 里的理论，在获得了 $H(t)$ 和各种核反应速率后 [?](图 2.1, 图 2.1), 通过玻尔兹曼方程（式 A.16）右侧添加反应式可以直接写出多元微分方程组，因此可以直接数值求解出原子形成前不同种类的原子核之间的比例。



{rateasy}

{minimument}

图 1: 左上图: 弱相互作用速率和宇宙膨胀速率随时间的关系, 可以看到质子到中子的反应速率单调递减且衰减速度比宇宙膨胀速率快, 因此在 $T \sim 1\text{MeV}$ 时质子和中子不能维持在化学平衡处。后期中子到质子的反应速率增长受中子衰变的影响。(质子数密度上升, $\Gamma_n = n_p \langle\sigma v\rangle$, 式 A.16) 右上图: 列出了所有核反应过程及其速率随时间的关系 (以光子温度代表宇宙时)。其中 d 代表氘核, t 代表氚核。左下图: 考虑中子和氢氦锂及其所有同位素之间的核反应, 数值求解微分方程, 用光子温度代表宇宙时。可以读出 $T \sim 10^{-2}\text{MeV}$ 时, 质子的质量分数 $X_p = 0.7581681024100827$, He^4 的质量分数为 $X_{\text{He}^4} = 0.24175090149750278$ 。右下图: 只考虑中子和氢氦之间的核反应, 氦的比例过低, 不在图中显示, 同样以光子温度代表宇宙时。同样可以读出 $T \sim 10^{-2}\text{MeV}$ 时, 质子的质量分数 $X_p = 0.7582729739128302$, He^4 的质量分数为 $X_{\text{He}^4} = 0.24164563861539343$, 和上面考虑了所有过程的结果十分接近, 这为我们接下来的分析提供了支持。

2.2 核合成理论分析

虽然有数值模拟的结果, 但是理论分析可以帮助我们更好的理解这个过程, 得到物理直观, 我们采用 4 步来分析这个过程 [?].

Step1

两个假设:

- (1). 没有超过氦核的重核 (图 3.1.2, 图 3.1.2)
- (2). 在温度 $T > 0.1\text{MeV}$ 时, 重子中只有中子和质子存在。

第一个假设使得我们只需要在 Boltzmann 方程中考虑氢核和氦核, 以及它们的同位素: 氘、氚以及氦-3, 第二个假设的作用是, 当 $T \approx 0.1\text{MeV}$ 时, 只有自由质子和中子存在, 其他的轻核子还没有产生, 于是我们可以先结出中子与质子的丰度之比, 再用于计算氘, 氦等的合成。具体的计算: 弱相互作用

$$\begin{aligned} n + \nu_e &\longleftrightarrow p^+ + e^- \\ n + e^+ &\longleftrightarrow p^+ + \bar{\nu}_e \end{aligned}$$

我们假设电子和中微子的化学势足够小, 可忽略, 于是有: $\mu_n = \mu_p$

通过附录 A 式 A.18, 我们知道热平衡时, 两种非相对论粒子的粒子数比遵从:

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{eq} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-(m_n - m_p)}{T}\right) \approx e^{-Q/T}$$

其中 $Q \approx 1.30\text{MeV}$ 是中子与质子的质量差, 当 $T \gg 1\text{MeV}$ 时, 中子与质子的数量相当

Step2

计算中子的 Freeze-Out。定义中子的比例如下:

$$X_n \equiv \frac{n_n}{n_n + n_p} \quad (2.1)$$

于是有:

$$X_n^{eq}(T) = \frac{e^{-Q/T}}{1 + e^{-Q/T}} \quad (2.2)$$

中子遵循上述的热平衡条件直到中微子完全解耦 ($T_f \sim T_{dec} \sim 0.8\text{MeV}$) 这里的解耦是指 p n 之间的弱相互作用不足以维持它们之间的化学平衡, 于是我们得到那个时候的中微子丰度估计:

$$X_n^{eq}(0.8\text{MeV}) = 0.17 \quad (2.3)$$

在粗略的估计下, 我们得到了对中子最终 freeze-out 的丰度

$$X_n^\infty \sim X_n^{eq}(0.8\text{MeV}) \sim \frac{1}{6} \quad (2.4)$$

这里我们将结果转化为分数是在暗示这只是一个量级上的估计

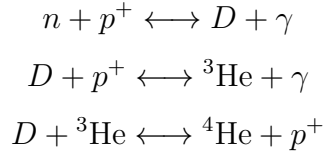
Step3

计算中子衰变。当 $T < 0.2\text{MeV}$ 时, 中子的寿命问题变得需要考虑了, 在 Freeze-Out 过程结束的基础上, 我们简单地使用以下公式来描述考虑衰变后的中子密度:

$$X_n(t) = X_n^\infty e^{-t/\tau_n} \quad (2.5)$$

Step4

计算氦核的融合。到目前为止, 宇宙已经主要由质子和重子组成了。出于密度太低以及时间太短的原因, 氦核不能直接由三体或以上的核子的碰撞形成。更重的核子一定由较轻的 2 个原子核碰撞产生, 我们给出氘, 氘与氦-3 的主要 (反应速率快) 核反应方程:



氘直接由中子和质子的碰撞产生。由于氘的结合能相对小, 因此氘的丰度比较迟才达到一个

可观的程度, 也因此, 其他重核需要等待氘的合成过程才能进一步形成, 这个过程叫做“氘瓶颈”。我们可以估计这个时间如下:

带入 $t_{nuc} \sim 330\text{sec}$, 我们有: $X_n(t_{nuc}) \sim \frac{1}{8}$

$$\frac{n_{He}}{n_H} = \frac{n_{He}}{n_p} \approx \frac{\frac{1}{2}X_n(t_{nuc})}{1 - X_n(t_{nuc})} \sim \frac{1}{2}X_n(t_{nuc}) \sim \frac{1}{16} \quad (2.6)$$

3 原子形成时期

由上一节我们知道, 宇宙中的重子主要只有氢原子核 (质子) 和氦原子核, 比例约为 16 : 1。简化而不失物理直观地, 我们假设宇宙中的重子只有质子。根据最粗略的估计, 原子形成的温度 $T \sim 10\text{eV}$, 但是接下来的分析却说明结合温度要比

这低一个数量级，这是因为光子电子的作用——虽然但温度低于氢原子电子结合能时结合就理应发生，但是高能光子又会把结合的电子撞出来，于是就需要宇宙进一步冷却，原子形成才能发生。而随着原子形成的进行，宇宙中的电子数量急剧减少，电子光子的反应速率随之减少，宇宙对于光子变得“透明”，这就产生了宇宙的第一束（自由）光——宇宙微波背景辐射。由于温度能标很低，在接下来的讨论中，除了光子之外的粒子都视为非相对论粒子。

3.1 Recombination 和原子形成

3.1.1 热平衡状态

从 $T > 1\text{eV}$ 开始讨论这个问题，重子、光子和电子的反应式为：

$$e^- + p^+ \longleftrightarrow H + \gamma.$$

当重子和光子仍处在热平衡（力学平衡和化学平衡）时（服从化学势等式 $\mu_H = \mu_e + \mu_p$ ），当 $T < m_i$ 时，（ $i = \{e, p, H\}$ ），我们得到平衡丰度（式 A.18）：

$$n_i^{eq} = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_i - m_i}{T} \right) \quad (3.1)$$

为了去掉化学势，我们考虑他们的比值：

$$\left(\frac{n_H}{n_e n_p} \right)_{eq} = \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{2\pi m_H}{m_e m_p T} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{m_e + m_p - m_H}{T} \right) \quad (3.2)$$

在系数中，我们可以将氢原子与质子质量近似认为是相当的，但是在指数中我们需要注意这项微小的差别，即氢原子基态结合能：

$$B_H \equiv m_e + m_p - m_H = 13.6\text{eV} \quad (3.3)$$

对于电子和质子组成的氢原子，由于自旋的存在形成一个单态和一个三重态，即 $g_H = 4$ ，又由于宇宙是中性的，有 $n_e = n_p$ ，于是有：

$$\left(\frac{n_H}{n_e^2} \right)_{eq} = \left(\frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{B_H}{T} \right). \quad (3.4)$$

用下面的式子可以反映自由电子的比例:

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_b}, \quad (3.5)$$

其中 n_b 是重子的密度。根据观察事实, 重子与光子比例为 $\eta_b = n_b/n_\gamma = 5.5 \times 10^{-10} (\Omega_b h^2 / 0.020)$, 我们用光子数密度 (式 A.19) 写出重子数密度:

$$n_b = \eta_b n_\gamma = \eta_b \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3.$$

同样的, 在这里我们认为宇宙中的重子只有氢原子 (质子), 于是 $n_b = n_p$ 。于是我们得到 Saha 方程:

$$\left(\frac{1 - X_e}{X_e^2} \right)_{eq} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{B_H}{T} \right). \quad (3.6) \quad \{\text{saha}\}$$

我们定义氢原子形成的特征温度 T_c , T_c 使得 $X_e = 0.1$, 即 90% 的电子已经与质子结合形成了氢原子核, 我们得出: $T_c \approx 0.3\text{eV} = 3600 \text{ K}$, 可以发现 $T_c \ll B_H = 13.6\text{eV}$, 这个现象是因为此时宇宙中还有大量高能光子, 光子撞击氢原子会再电离氢原子。

3.1.2 非热平衡状态

上述的热平衡描述存在问题, 这是因为当电子与原子核结合的时候, 电子、质子的数密度快速下降, 导致它们之间的反应速率小于宇宙膨胀的速率, 不能到达局部热平衡 (式 A.17)。更严格的讨论应该从式 A.16 或者式 A.15 出发, 数值求解微分方程给出图 3.1.2 和图 3.1.2, 从图中可以读出自由电子的剩余比例为 $X_e(\infty) = 0.000376386$

通过解析分析的办法也可以估计出自由电子的剩余比例。从式 A.15 出发, 应用到 $e^- + p^+ \rightarrow H + \gamma$ 中, 并假设 $n_H = n_H^{eq}$,

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_e a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle [n_e^2 - (n_e^{eq})^2]. \quad (3.7)$$

散射截面的热平均可由下式近似:

$$\langle \sigma v \rangle \simeq \sigma_T \left(\frac{B_H}{T} \right)^{1/2}, \quad (3.8)$$

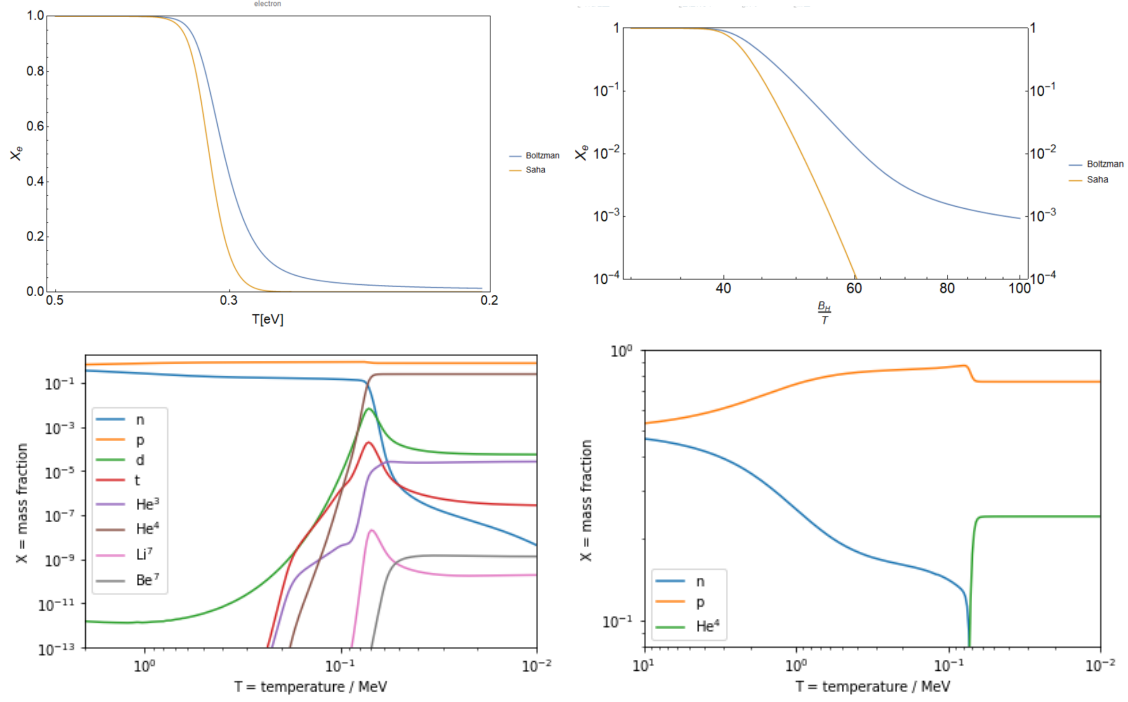


图 2: **左图:** 自由电子比例随温度的变化图, 从图中我们可以看出 Saha 方程较好地描述了原子形成的时间。**右图:** 自由电子比例随 B_H/T 的变化图, 从图中我们可以看出 Saha 方程无法对电子的剩余比例进行估计, 而 Boltzmann 方程则可以预言。

其中 σ_T 为 Thomson 散射截面。改写 $n_e = n_b X_e$, 并利用 $n_b a^3 = const$, 可得:

$$\frac{dX_e}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2} [X_e^2 - (X_e^{eq})^2], \quad (3.9)$$

其中 $x = B_H/T$, 并且利用 Recombination 时期是物质主导时期, 我们有

$$\lambda = \left[\frac{n_b \langle \sigma v \rangle}{xH} \right]_{x=1} = 1.755 \times 10^5 \left(\frac{\Omega_b h}{0.03} \right). \quad (3.10)$$

因为 $n_e^{eq} \sim e^{-x}$, 所以 freeze-out 开始时 $x = x_f$ 就可以忽略 n_e^{eq} 那一项, 利用 freeze-out 时 $\Gamma(T_f) \sim H(T_f)$ 给出:

$$X_e(T_f) T_f = \frac{\pi^2}{2\zeta(3)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m}}{\eta \sigma_T T_0^{3/2} B_H^{1/2}}, \quad (3.11)$$

利用 Saha 方程 (式 3.6) 代入 $X_e(T_f)$, 可以估计出 $T_f \sim 0.25$, $x_f \sim 54$ 。

我们可以将 Boltzmann 方程从 $x > x_f$ 起计算，并略去 n_e^{eq} ,

$$\frac{dX_e}{dx} = -\frac{\lambda X_e^2}{x^2} \quad (x > x_f). \quad (3.12)$$

积分，并考虑到 $X_e^f \gg X_e^\infty$ ，得：

$$X_e^\infty \simeq \frac{x_f}{\lambda} \sim 10^{-3}. \quad (3.13)$$

3.1.3 精细考虑 *

由于结合温度 $T \ll B_H$ ，所以事实上，电子与氢原子核结合形成基态氢原子的过程对自由电子减少并没有多少帮助，正如上面提及的高能光子会阻碍这个过程。当温度进一步下降，更应该考虑的是电子质子结合形成激发态氢原子的过程 [?] (图 3)，比如 $2S$, $2P$ 激发态，再由激发态发出光子变成基态。这一效应将会进一步推迟原子形成的时间。但是正如 [?] 中指出的，这样的考虑可以视作将反应 $e^- + p^+ \rightarrow H + \gamma$ 换成了 $e^- + p^+ \rightarrow 2S + \gamma$ ，所以只在散射截面上有细微差别，造成了原子形成时间的微小推迟。

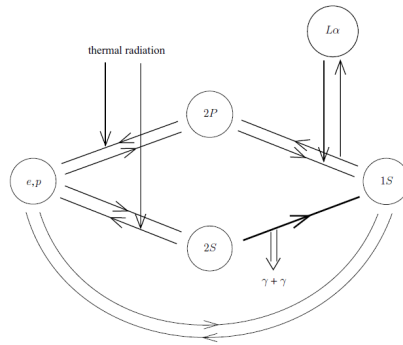


图 3: Recombination diagram

{epH}

3.2 光子解耦合

这一时期光子与物质的耦合主要由光子电子相互作用贡献，

$$e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma, \quad (3.14)$$

相互作用速率 (式 A.16) 约为 $\Gamma_\gamma \approx n_e \sigma_T$, 其中 $\sigma_T = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2} \approx 2 \times 10^{-3} \text{MeV}^{-2}$ 为 Thomson 散射截面。从第一性原理角度出发, 这里应该取成 Compton 散射截面, 但是因为此时温度低, 可取两个光子外线的能动量趋于零, 于是 Compton 散射截面变成 Thomson 散射截面。Thomson 散射截面的计算可以由经典电动力学完成, 也可以先计算 Compton 散射截面再取极限。关于 Compton 散射截面的计算 Peskin[?] 一书中有详细过程, 为了避免行文冗余, 截面计算过程我们放到了附录 B 中。

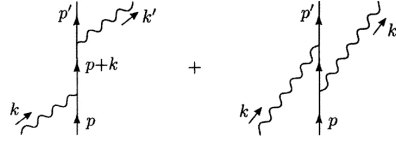


图 4: Compton scattering diagram

{Compton}

这个相互作用速率随着自由电子减少而迅速减少。根据附录 A 的解释, 光子电子解耦合发生在相互作用速率小于宇宙膨胀速率时,

$$\Gamma_\gamma(T_{dec}) \sim H(T_{dec}). \quad (3.15)$$

假设宇宙中只有 (冷) 物质 (式 A.7),

$$\begin{aligned} \Gamma_\gamma(T_{dec}) &= n_b X_e(T_{dec}) \sigma_T = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \sigma_T X_e(T_{dec}) T_{dec}^3, \\ H(T_{dec}) &= H_0 \sqrt{\Omega_m} \left(\frac{T_{dec}}{T_0} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

我们得到

$$X_e(T_{dec}) T_{dec}^{3/2} \sim \frac{\pi^2}{2\zeta(3)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m}}{\eta \sigma_T T_0^{3/2}}.$$

用 Saha 方程估计 $X_e(T_{dec})$, 我们得到

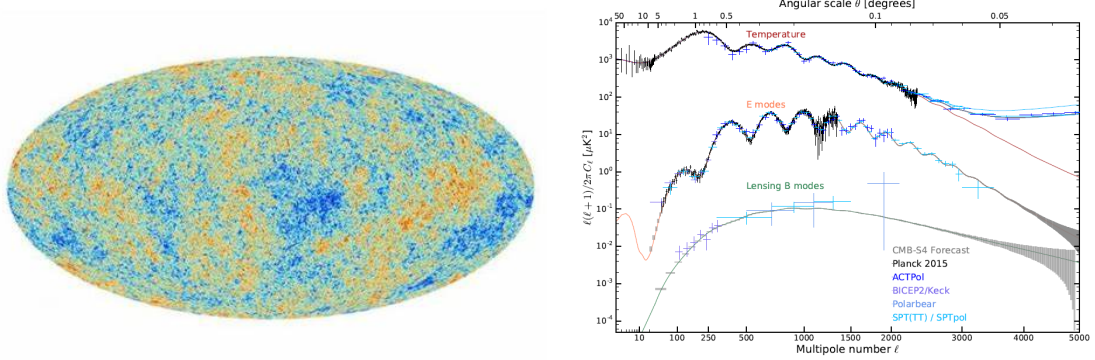
$$T_{dec} \sim 0.27 \text{eV}, \quad X_e(T_{dec}) \sim 0.01.$$

从中我们可以看出光子想要自由传播必须等到自由电子下降到很低的比例。根据温度可以计算出宇宙时

$$t_{dec} \sim 380 \, 000 \text{ yrs}. \quad (3.16)$$

这就是宇宙微波背景辐射产生的时间。

3.3 宇宙微波背景辐射



{AMB}

图 5: 左图: Planck 卫星拍摄的宇宙微波背景辐射图; 右图: 宇宙微波背景辐射温度和极化异性的角功率谱现行测量。

宇宙微波背景辐射是 20 世纪 60 年代射电天文学得到的四大天文发现之一。这一重大发现为宇宙大爆炸模型和宇宙暴胀理论提供了有利的证据，为观测宇宙学开辟了一个新领域，也为各种宇宙模型提供了一个新的观测约束。

根据大爆炸宇宙学模型，宇宙诞生的最初 30 万年里，到处游荡着稠密的自由电子，它们阻止光子有效地传输，辐射不能自由穿行，宇宙处于混沌和黑暗之中。到了第 40 万 ~70 万年以后，温度降低到光子能量不足以击散由氢、氦原子核与电子自由结合成的氢、氦原子以及其他简单原子，自由电子消失，辐射可以自由穿行，并立即从宇宙各处迸发出来，这称为光子与以原子为主的物质粒子退耦。混沌初开，曙光骤现，这就是最早的宇宙背景辐射，也称为原初辐射。那时宇宙温度是 3000 开，辐射峰值波长为 1 微米，在红外波段。从那时起到现在，经历了 130 多亿年，宇宙尺度膨胀了 1000 倍，温度下降了 1000 倍，宇宙背景辐射的波长也增加了 1000 倍，峰值波长到了毫米波段（微波），温度为 3 开左右。

1989 年 11 月 18 日美国发射的宇宙背景辐射探测卫星（COBE）的观测表明，在所观测波段范围内，宇宙微波背景辐射是个标准的黑体谱，其对应的普朗克温度为 $T=2.735\text{ K}$ ，2002 年更新的最终结果将其修正为 $T=2.725\text{ K}$ 。排除观测者自身运动的多普勒效应和其他天体的辐射，宇宙背景辐射是均匀的和各向同性的。1992 年，COBE 卫星上的 DMR 探测器发现宇宙微波背景辐射有十万分之一的不均匀性，这被宇宙学家称之为“宇宙大尺度结构的种子”。

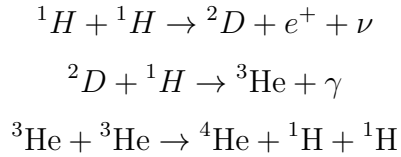
2001 年, 美国又发射了精度更高的“宇宙微波辐射各向异性探测器”(WMAP), 最终给出的宇宙背景辐射温度为 $T_{cmb} = (2.72548 \pm 0.00057)$ 开, 与 COBE 于 2002 年给出的最终结果高度一致。

4 恒星核合成

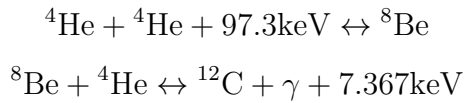
原初核合成大约发生在宇宙大爆炸之后的 $0.01s$ 到 $380,000 \text{ yrs}$ 之间, 那时的核合成过程只出现了并且也只允许出现比较轻的核素: 氢核, 氦核和锂核及其同位素, 与我们今天看到的具有如此多核素的世界是截然不同的。目前为止的理论认为, 现在的重核形成主要是来源于恒星演化过程中的核反应过程。

4.1 α 粒子结合过程

年轻的恒星主要由氢组成, 因此其中最重要的聚变过程是 PP-Chain 反应, 由下面三个过程组成:



这个过程总体上通过四个氢原子形成一个 α 粒子, 释放出约 26.5MeV 的能量。由于 2- β 过程的产物 ${}^8\text{Be}$ 核极其不稳定, 大约 2.6×10^{-16} 秒就会再分裂为氦, 于是只能要求 3- α 过程发生: 即要求恒星中的氦变得充分多时:



而一个 ${}^{12}\text{C}$ 核的质量略小于 3 个 ${}^4\text{He}$ 的质量之和, 因此可以稳定存在。在后面的过程中, 只要聚变释放的能量大于 0, 核聚变就可以一直进行下去。每次结合 ${}^4\text{He}$, 依次生成了 ${}^{16}\text{O}$, ${}^{20}\text{Ne}$, ${}^{24}\text{Mg}$, ${}^{28}\text{Si}$ 等, 直到由一对硅核形成的 ${}^{56}\text{Fe}$ 等铁峰顶元素 (如 ${}^{56}\text{Ni}$, ${}^{56}\text{Co}$), 他们的比结合能达到峰值, 常规的聚变过程无法继续进行下去。

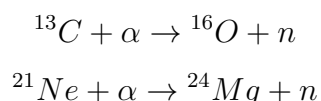
后面两种过程都是针对于比铁重元素的产生过程, 所有产生重铁元素的过程必须以铁核作为起始核, 称为种核 [?]

4.2 S-过程

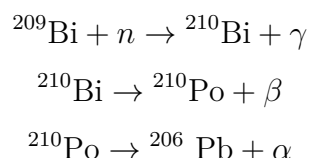
S - 过程又被称为慢中子俘获过程，主要过程在中子数密度较低，温度适中的恒星中进行。在这样的条件下，中子俘获的速率大于其 β 衰变的速率，于是主要可分为两步：

1. 稳定的同位素俘获中子，形成一种或多种质量更大的同位素；
2. 对于不稳定的同位素产生 β 衰变，形成原子序数更大的核，其中部分序数更大的核是稳定的核。

基于以上的过程，我们可以知道对于中子源的大范围积累的通量是必要的。恒星中的主要中子源反应如下：



由于受到衰变速率的限制，对于一些更重的核不能由 S-过程产生，S-过程的周期终止于：



最后 ${}^{206}\text{Pb}$ 俘获 3 个中子，再次形成 ${}^{209}\text{Bi}$ (这是铋的稳定核素)，从而形成循环。S-过程多发生于 AGB 星（产生大量气体和尘埃）中，这种星体状态时变为白矮星的前兆，在转变过程中会以恒星风的形式逸散掉 50% 70% 的质量。S-过程产生的核素大部分得以保存，在长时间的衰变后得到最后稳定的 28 种核素

4.3 R-过程

比铁重的元素的另一形成过程就是 R-过程，又被称为快中子俘获过程。主要过程在中子数密度极高的恒星内部。在经历高密度中子流轰击后，以铁为种核的各种原子核都会形成极度不稳定并富含中子的核，并且很快的经由 β 衰变成为原子序较高、但原子量相同并且较为稳定的原子。在超新星核塌缩的过程中，中子的密度核

极高的温度都满足 R-过程所需的条件，并且其中快速积累的重核将在超新星爆发的时候被抛射出来成为星际介质，从而得以脱离高温保存下来。

5 总结

在本文中我们整理了原子起源的过程，并重点讨论了原子形成的过程。这些过程跨越了漫长岁月，展现了不同尺度的物理理论的关联，既有微观效应对宇宙尺度的影响，也有宇宙演化对粒子、原子造成的影响。在原子物理层面，原子核和电子结合的结合能决定了 Recombination 的时间（和持续时间），也直接决定了宇宙微波背景辐射的形成时间。核尺度上的原初核合成为原子形成提供了初始条件而数亿年后的恒星核合成解释了重元素的由来。尽管我们的初衷是简单、富有物理直观而不失逻辑的理解原子起源过程，但是本文中还是有着明显的逻辑漏洞——均匀宇宙，如果宇宙是理想均匀的，那么就不会形成宇宙大尺度结构，也不会有恒星，不会有恒星核合成；如果宇宙是有扰动的，那么就不可避免的在原初核合成还有 Recombination 阶段留下效应。但是由于时间不足和知识不足等原因，我们抛弃了这个效应，也抛弃了从宇宙微波背景辐射中十万分之一的不均匀性变成如今丰富的宇宙大尺度结构的讨论。

A 热宇宙理论

热宇宙的本质是粒子之间的相互作用速率和宇宙膨胀速率之间的竞争，如果粒子之间的相互作用的特征时间短，那么宇宙就可以到达局部热平衡，从而可以计算热力学可观察量，如温度、压强、平均能量密度；相反如果粒子之间的相互作用特征时间长，那么不同种类的粒子就会因为宇宙的膨胀而解耦合，此时就必须分别考虑不同种类粒子的温度、压强、能量密度，而且需要讨论解耦合过程以确定不同种类粒子之间的比例。

A.1 粒子物理标准模型

粒子物理标准模型是上个世纪 30 年代到 80 年代左右随着量子场论的发展建立起的一套描述原子核尺度的理论。随着 2013 年 Higgs 粒子被发现，粒子物理标准模

型已有 61 种基本粒子，它们的动力学可以用一个拉式密度统一描述，

$$\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{D}\psi + \psi_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c. + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) + \mathcal{L}_{CT}, \quad (\text{A.1})$$

式中几项分别描述了费米场、规范场、希格斯场以及重整化项。其中对我们的讨论最重要的是电弱相互作用，对应于原子形成时期电子光子相互作用和原初核合成时期的质子、中子、不同原子核之间的相互作用。

粒子物理标准模型提供了计算粒子散射的方式，具体来讲，散射过程相互作用是局域的，对于每种可能的末态都有一定的概率发生，概率可以使用微扰展开计算，2 体散射的散射截面可由下式计算 [?]，

$$\sigma = \frac{1}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| 4E_1 E_2} \int_{final\ state} |\mathcal{M}_{if}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_f - \sum p_i) \prod_{final} \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}, \quad (\text{A.2}) \quad \{\text{crosssection}\}$$

其中，

$$i\mathcal{M}_{if} = \langle f | U_I(-\infty, +\infty) | i \rangle. \quad (\text{A.3})$$

在早期核合成时期和 Recombination 时期，宇宙中的主要物质为标准模型中的物质（夸克已经结合形成质子和中子，中微子已经脱耦合），为了讨论方便，我们采用流体力学近似而避免使用有限温度场论，即认为宇宙中的物质为理想流体，其性质由流体的能量密度 ρ 和各向同性的压强 P 描述。压强与能量密度的关系与粒子种类和粒子温度有关。

A.2 宇宙演化方程

根据宇宙微波背景辐射（CMB）和宇宙大尺度结构（LSS）的观测结果，宇宙近似是均匀且各向同性的。由此可知宇宙的度规和物质场都满足空间旋转对称性和空间平移对称性（在我们想要的计算精度下可以忽略宇宙的微扰，量级在 10^{-5} ）即度规，物质的能量密度和压强都只是时间的函数。对宇宙的观察还证明宇宙是（近）平坦的，即宇宙的曲率为 0。

由此可知度规的形式为 [?]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2. \quad (\text{A.4})$$

物质场运动方程为

$$\frac{d}{dt}\rho = -3H(\rho + P), \quad (\text{A.5})$$

其中 $H = \dot{a}/a$ 。

爱因斯坦场方程（此情形下又称 Friedmann Equation）

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \end{aligned} \tag{A.6}$$

假设宇宙由辐射 ($\rho = P$)、物质 ($P = 0$) 和暗能量 ($P = -\rho$)，并考虑宇宙曲率，定义今天的宇宙临界密度为 $\rho_{r,0} = 3H_0^2/8\pi G$ ， H_0 为今天的哈勃常数，并取今天的宇宙学度规 $a_0 = 1$ ，那么我们得到 Λ CDM 宇宙，

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{k,0}a^{-2} + \Omega_\Lambda), \tag{A.7} \quad \{\Lambda\text{CDM}\}$$

其中 $\Omega_{i,0} = \rho_{i,0}/\rho_{r,0}$

A.3 热宇宙动力学

在早期宇宙时期，粒子密度很大，反应很频繁（特征时间远小于宇宙膨胀的特征时间），于是所有的粒子都处于热平衡状态，又因为宇宙演化方程中只需要物质的能量密度和压强，所以引入热力学是自然的。具体而言，若宇宙中所有种类的粒子都处于热平衡状态，那么宇宙就是一个复相平衡系统 (T, p, n_i) 。然而随着宇宙膨胀，粒子数密度逐渐降低，粒子间的反应速率也下降，于是耦合强度较小的粒子就脱耦合了，它的温度就与其它粒子温度不一样了。脱耦合的过程是非平衡过程，将在 2.4 节中介绍，一般而言宇宙是一个复相系统 (T_i, p_i, n_i) ，其中每个相都是热平衡的，这是因为某种粒子脱耦合后，它会独立演化，由于宇宙的均匀和各向同性，粒子就好像一直处在热化的状态。

从统计力学我们知道，玻色子和费米子的分布函数为：

$$f(E) = \frac{1}{e^{E/T} \pm 1}. \tag{A.8}$$

这里，我们忽略了粒子的化学势 [?].

考虑相对论极限下粒子温度与能量密度和压强的关系

$$\rho = \frac{\pi^2}{30}g_*(T)T^4, P = \frac{1}{3}\rho, \tag{A.9}$$

表 2: d.o.f. of particles in Standard Model

| type | | mass | spin | g |
|-------------|----------------------------|------------------|---------------|--------------------------|
| quarks | t, \bar{t} | 173GeV | $\frac{1}{2}$ | $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ |
| | b, \bar{b} | 4GeV | | |
| | c, \bar{c} | 1GeV | | |
| | s, \bar{s} | 100MeV | | |
| | d, \bar{d} | 5MeV | | |
| | u, \bar{u} | 2MeV | | |
| gluons | g_i | 0 | 1 | $8 \cdot 2 = 16$ |
| leptons | τ^\pm | 1777MeV | $\frac{1}{2}$ | $2 \cdot 2 = 4$ |
| | μ^\pm | 106MeV | | |
| | e^\pm | 511keV | | |
| | $\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$ | $< 0.6\text{eV}$ | $\frac{1}{2}$ | $2 \cdot 1 = 2$ |
| | $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ | $< 0.6\text{eV}$ | | |
| | $\nu_e, \bar{\nu}_e$ | $< 0.6\text{eV}$ | | |
| Higgs boson | H^0 | 125GeV | 0 | 1 |

{tab:2}

其中,

$$g_*(T) = \sum_{i=boson} g_i \frac{T_i^4}{T^4} + \frac{7}{8} \sum_{i=fermi} g_i \frac{T_i^4}{T^4}.$$

其中 g_i 为相对论性粒子的自由度, 各粒子自由度数量见下表。 T_i 为各种类粒子的温度, T 通常取为光子气体的温度。

当温度与粒子质量相同量级时, 粒子变成非相对论性的, 其 g_i 变为 0。将能量密度代入 Friedmann Equation 可得,

$$\frac{\dot{a}}{a} = H = \frac{\pi}{3} \left(\frac{g_*}{10} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{T^2}{M_{pl}}. \quad (\text{A.10})$$

为了求得 $a(t)$ 的演化, 还需要 a 和 T 的关系式, 此时, 考虑宇宙熵是有用的, 可以证明对如果宇宙中的粒子都处于相对论状态且热平衡的状态, 宇宙的熵守恒 [?]:

$$\frac{S}{V} = s = \sum_i \frac{\rho_i + P_i}{T_i} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S}(T) T^3. \quad (\text{A.11})$$

其中,

$$g_{*S}(T) = \sum_{i=boson} g_i \frac{T_i^3}{T^3} + \frac{7}{8} \sum_{i=fermi} g_i \frac{T_i^3}{T^3}. \quad (A.12)$$

虽然当非平衡过程发生时, 宇宙的熵会增大, 但是由于宇宙中的光子熵占主导地位, 其它的粒子熵变化可以略去。于是近似地可以认为宇宙演化是一个绝热过程, 即宇宙熵守恒。

由于 $V \propto a^3$, 所以 $sa^3 = Const$, 若认为 g_{*S} 不随时间变化 (g_{*S} 的具体演化规律将在下节中讨论), 结合 Friedmann 方程可得:

$$a \propto t^{1/2}, T \propto t^{-1/2}.$$

在早期核合成时期, $g_{*S} \approx 3.94$, $g_* \approx 3.38$, $T \sim 1MeV$ 。

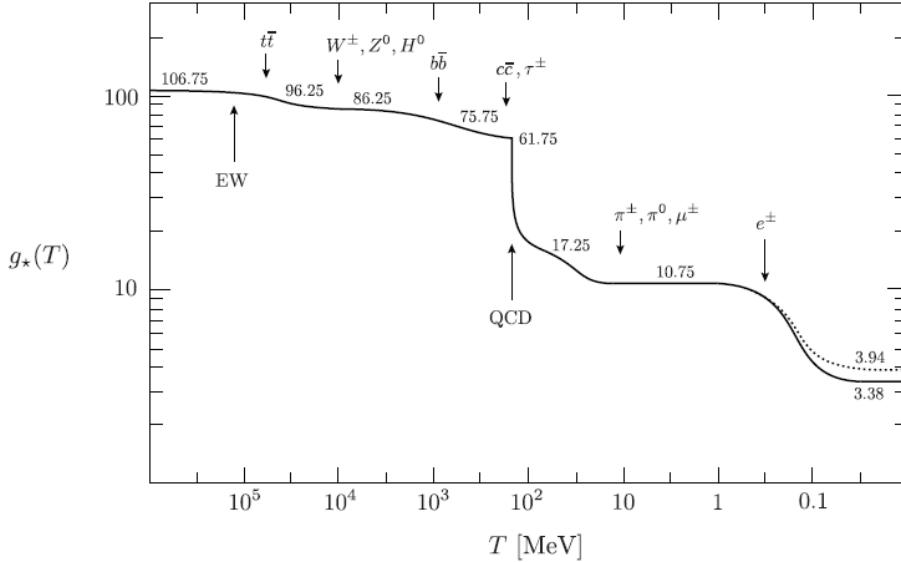


图 6: The evolution of g_* . The dotted line symbolizes the evolution of g_{*S} . [?]

A.4 非平衡过程

为了考虑不同组分直接温度的关系以及非平衡过程, 必须讨论不同组分之间的相互作用, 如前所述, 此时宇宙中由高能粒子主导, 它们之间的相互作用由粒子物理标准模型描述。

在共动体积内粒子数变化由散射过程造成，由于多体（3 体及以上）的散射事件较 2 体散射很少，因此在考虑到精度范围，我们只介绍 2 体到 2 体散射事件。

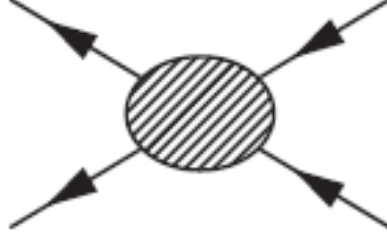


图 7: The crossing diagram

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\alpha n_1 n_2 + \beta n_2 n_3. \quad (\text{A.13})$$

考虑平衡时，可得

$$\beta = \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{eq} \alpha \quad (\text{A.14})$$

所以

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left(n_1 n_2 - \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4} \right)_{eq} n_3 n_4 \right), \quad (\text{A.15}) \quad \{\text{eqreac}\}$$

其中 σ 为散射截面，可由量子场论方法计算得到。

令 $N_i = n_i/s$, $\Gamma_1 = n_2 \langle \sigma v \rangle$ ，可得玻尔兹曼方程：

$$\frac{d \ln N_1}{d \ln a} = -\frac{\Gamma_1}{H} \left[1 - \left(\frac{N_1 N_2}{N_3 N_4} \right)_{eq} \frac{N_3 N_4}{N_1 N_2} \right], \quad (\text{A.16}) \quad \{\text{reaction}\}$$

从式中我们看出两种粒子处于热平衡（化学平衡）的条件为：

$$\Gamma \gg H. \quad (\text{A.17}) \quad \{\text{thermalcondi}\}$$

唯一剩余的一步是热平衡（化学平衡）时粒子之间的比例，这可以通过它们温度相同来确定。假设它们平衡的温度 T_i 小于粒子的质量，采取非相对论极限，忽略化学势，则有

$$n_i^{eq} = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{-m_i}{T} \right), \quad (\text{A.18}) \quad \{\text{eq-num}\}$$

如果温度大于粒子质量，采取非相对论极限，则有：

$$n_i^{eq} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3 \times \begin{cases} 1 & \text{bosons} \\ \frac{3}{4} & \text{fermions} \end{cases}. \quad (\text{A.19}) \quad \{\mathbf{n-gamm}\}$$

B Compton 散射截面计算

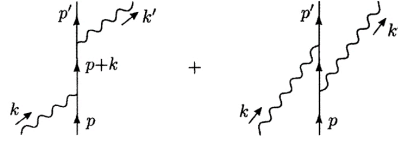


图 8: Compton scattering diagram

{Compton}

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^*(k') \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu(k) u(p) \\ &+ \bar{u}(p') (-ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu(k) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^*(k') u(p) \\ &= -ie^2 \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k) \bar{u}(p') \left[\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p \cdot k'} \right] u(p) \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

光子外线规范取为

$$\sum_{polarizations} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.2})$$

电子外线极化和为

平均散射振幅可以写成：

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \cdot \text{tr} \left\{ (\not{p}' + m) \left[\frac{\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p^\mu}{2p \cdot k'} \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot (\not{p} + m) \left[\frac{\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\rho + 2\gamma^\sigma p^\rho}{2p \cdot k} + \frac{\gamma^\rho \not{k}' \gamma^\sigma - 2\gamma^\rho p^\rho}{2p \cdot k'} \right] \right\} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

通过狄拉克代数计算得到

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[\frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.4})$$

考虑运动学参数（图 9）使用 Compton 散射的著名结果：

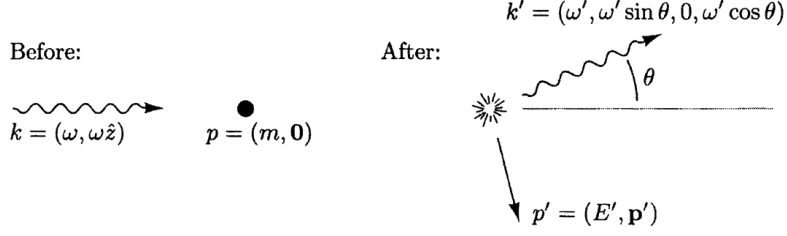


图 9: Compton scattering diagram

{ComptonK}

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)}. \quad (\text{B.5}) \quad \{\text{Compton}\}$$

我们得到相空间积分：

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' + p' - k - p) \\ &= \int \frac{(\omega')^2 d\omega' d\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega' E'} \\ &= \int \frac{d\cos \theta}{2\pi} \frac{\omega'}{4E'} \frac{1}{\left|1 + \frac{\omega' - \omega \cos \theta}{E'}\right|} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos \theta \frac{\omega'}{m + \omega(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos \theta \frac{(\omega')^2}{\omega m}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

将所有东西带入散射截面的计算公式（式 A.2），并设置 $|v_A - v_B| = 1$ ，最终得到：

$$\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta\right]. \quad (\text{B.7})$$

在 $\omega \rightarrow 0$ 的极限下，式 B.5 告诉我们 $\frac{\omega}{\omega'} \rightarrow 1$ ，最终我们得到 Thomson 散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2} (1 + \cos^2 \theta); \quad \sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}. \quad (\text{B.8})$$