Abstract

这是关于早期热宇宙的文章

早期热宇宙

钟佳杭

2024

1 引言

按照宇宙大爆炸理论。。。

A 量子场论

再加热之后，宇宙中出现了标准模型中的粒子，对于它们的性质和量子场论的基本原理总结如下

A.1 基本方程

希格斯标量场

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \tag{A.1}$$

QED

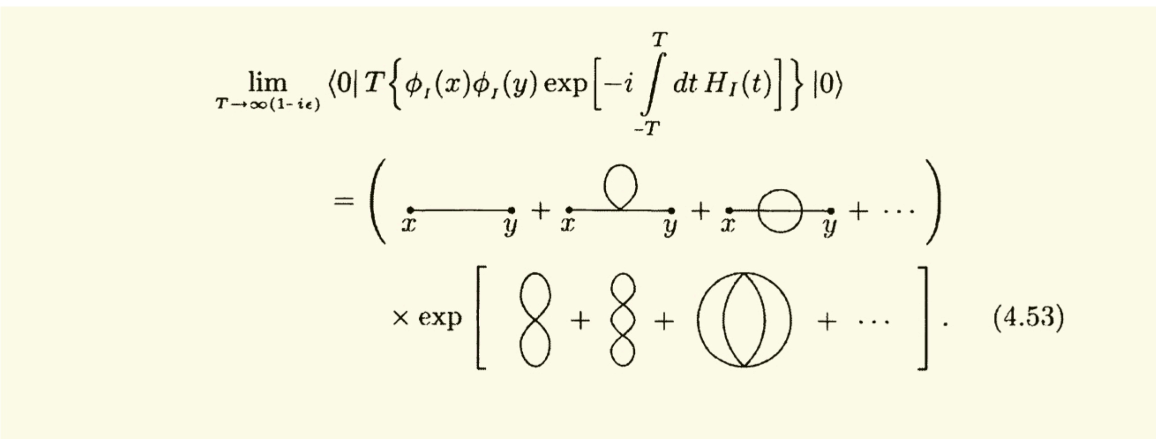
$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{A.2}$$

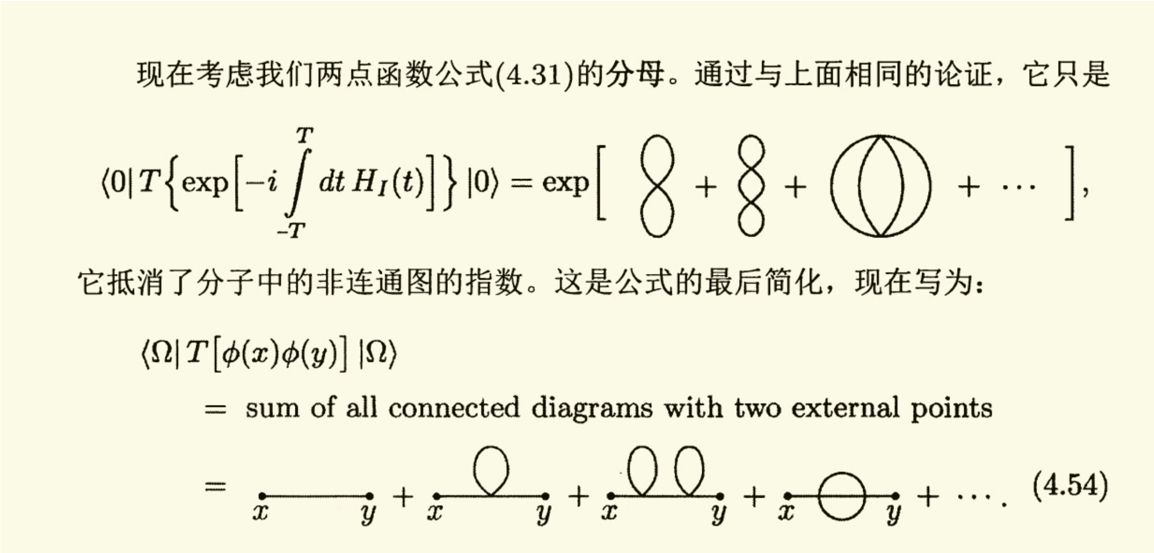
A.2 量子场论的基本思路

量子场论的基本思路为根据对称性定出粒子的自由场方程和相互作用项，计算体系的 n 点关联函数，具体表达式为

$$\langle\Omega| T\phi_H(x_1)\phi_H(x_2) |\Omega\rangle = \frac{\langle 0| T\phi(x_1)\phi(x_2)\exp[-i\int H_I d^4x] |0\rangle}{\langle 0| T\exp[-i\int H_I d^4x] |0\rangle} \tag{A.3}$$

如果能使用微扰论，则可以用 Dayson 级数和 Wick 定理将分子分母展开成全部收缩图。再利用非联通图指数化的操作，可以将分子中非连通图的部分与分母相消，这样就只需要计算分子的微扰展开中的联通图部分。





现在考虑我们两点函数公式(4.31)的分母。通过与上面相同的论证，它只是

$$\langle 0|T\Big\{\exp\Big[-i\int_{-T}^{T}dt\,H_I(t)\Big]\Big\}|0\rangle = \exp\Big[\quad + \quad + \quad + \cdots \Big],$$

它抵消了分子中的非连通图的指数。这是公式的最后简化，现在写为：

$$\begin{aligned}\langle\Omega|T\big[\phi(x)\phi(y)\big]|\Omega\rangle &= \text{sum of all connected diagrams with two external points} \\ &= \quad + \quad + \quad + \quad + \cdots . \end{aligned} \tag{4.54}$$

已经知道了体系所有的 n-点关联函数后，体系的动力学已经完全确定了，具体体现为 LSZ 约化公式。

$$LSZ \tag{A.4}$$

A.3 路径积分形式

在早期宇宙的研究中需要使用有限温度场论，在这里我记载了路径积分量子化的主要思路和重要的式子，有助于拓展到有限温度场论的情形。

一般的 n 点格林函数在路径积分形式下的表达式为（以 2 点关联为例）

$$\langle\Omega|\,T\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\,|\Omega\rangle = \lim\frac{\int D\phi\phi(x_1)\phi(x_2)\exp[i\int d^4x\mathcal{L}]}{\int D\phi\exp[i\int d^4x\mathcal{L}]} \tag{A.5}$$

定义配分函数可以使上式写得更紧凑

$$Z[J] = \int(D\phi)\exp[i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)] = \int(D\phi)\exp[i\int d^4x(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}'+J\phi)] \tag{A.6}$$

定义 $Z_0[J] = \int(D\phi)\exp[i\int d^4x(\mathcal{L}_0+J\phi)]$，则有相互作用的配分函数可以使用泛函导数写成自由配分函数的形式。

$$Z[J] = N'\exp[i\int d^4z\mathcal{L}'(-i\frac{\delta}{\delta J(z)})]Z_0[J] \tag{A.7}$$

自由形式的配分函数很好计算

$$Z_0[J] = \exp[-\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)] \tag{A.8}$$

从而关联函数可以表达成自由形式的配分函数

$$\langle\Omega|\,T\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\,|\Omega\rangle = \frac{(-i\frac{\delta}{\delta J(x_1)})(-i\frac{\delta}{\delta J(x_2)})\exp[i\int d^4z\mathcal{L}'(-i\frac{\delta}{\delta J(z)})]Z_0[J]|_{J=0}}{\exp[i\int d^4z\mathcal{L}'(-i\frac{\delta}{\delta J(z)})]Z_0[J]|_{J=0}} \tag{A.9}$$

这是一个精确的表达式，如果可以做微扰论，那么根据上一小节的讨论，同样运用非连通图指数化的操作，最终我们只需计算分子里的连通图项。

根据我们的经验知道，做傅里叶变换后在动量空间中计算图更为方便，下面列出费曼规则的示意。

1. For each propagator, $= \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$;
2. For each vertex, $= -i\lambda$;
3. For each external point, $= e^{-ip\cdot x}$;
4. Impose momentum conservation at each vertex;
5. Integrate over each undetermined momentum: $\displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$;
6. Divide by the symmetry factor.

Figure A.1: 费曼图示意

A.4 自发性对称性破缺

自发性对称性破缺不是真正的少了某种对称性，而是显式地违反了某种对称性，比如在具有 $\phi = -\phi$ 对称性的拉式量中出现了 ϕ^3 项。造成这样违背的原因是，系统的真空态不满足对称性。在处理量子场论时，手段通常是微扰论，既然是微扰论，那就必然需要围绕某个真空态进行微扰，倘若理论本身满足某种对称性，但是它的真空态不满足这种对称性，这时在这个真空态附近做微扰，我们的等效的拉式量，或者说实际拉式量中就会产生违背对称性的项（注意实际观察的粒子是真空的激发，因此真空态附近微扰的场才是实际的场）。比如说 $W^{\pm}$ 和 Z 粒子由于规范对称性不能含有质量项，但是引入 Higgs 机制后，在对称性破缺的真空态附近做微扰论，拉式量中就可以引入对应的质量项，而且人类实验中观察到的粒子也是这种有质量的规范子。

关于对称性破缺有很多重要结论，以下逐个介绍。

A.4.1 多个真空

A.4.2 有效势

A.4.3 量子修正

B 广义相对论

B.1 基本方程

B.2 最大对称性

C 有限温度场论

在有限温度场论中，自然单位制取为

$$k_B = \hbar = c = 1 \tag{C.1}$$

C.1 set up

为了明晰有限温度场论里的概念，尤其是虚时场算符的含义，这里先给出一张对应表

其中前几条有限温度场论的态演化和算符演化都可以看成是定义时，至于为什么可以这么干，将在下一小节有限温度场论和零温度场论的联系中看出。

Time	$t \in [-\infty, \infty]$	$it \longrightarrow \tau \in [0, \beta]$
Schrödinger equation	$\vert\psi_S(t)\rangle = e^{-itH}\vert\psi_S(0)\rangle$	$\vert\psi_S(\tau)\rangle = e^{-\tau H}\vert\psi_S(0)\rangle$
Heisenberg representation	$A_H(t) = e^{itH}A_s e^{-itH}$	$A_H(\tau) = e^{\tau H}A_s e^{-\tau H}$
Interaction representation	$\vert\psi_I(t)\rangle = e^{itH_0}\vert\psi_S(t)\rangle$	$\vert\psi_I(\tau)\rangle = e^{\tau H_0}\vert\psi_S(\tau)\rangle$
Time evolution in interaction representation	$U(t) = e^{iH_0 t}e^{-iHt}$ $= T\exp\left[-i\int_0^t V_I(t')dt'\right]$	$U(\tau) = e^{H_0\tau}e^{-H\tau}$ $= T\exp\left[-\int_0^\tau V_I(\tau')d\tau'\right]$
Perturbation expansion	$S = \langle -\infty\vert T\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} V_I(t)dt\right]\vert -\infty\rangle$	$\frac{Z}{Z_0} = \mathrm{Tr}\left[Te^{-\int_0^\beta Vd\tau}\right]$
Wick's theorem (non-interacting particles)	$\psi(1)\psi^\dagger(2) = \langle\phi\vert T\psi(1)\psi^\dagger(2)\vert\phi\rangle$	$\psi(1)\psi^\dagger(2) = \langle T\psi(1)\psi^\dagger(2)\rangle$
Green's function	$G_{\lambda\lambda'}(t) = -i\langle\phi\vert T\psi_\lambda(\tau)\psi^\dagger_{\lambda'}(0)\vert\phi\rangle$	$\mathcal{G}_{\lambda\lambda'}(\tau) = -\langle T\psi_\lambda(\tau)\psi^\dagger_{\lambda'}(0)\rangle$
Feynman diagrams	$\ln S = TV\sum\{\text{linked clusters}\} = -iT\Delta E$	$\ln\frac{Z}{Z_o} = \beta V\sum\{\text{linked clusters}\}$ $= -\beta\Delta F$

Figure C.1: 有限温度场论与零温度场论对比图

C.2 $S^1 \times R^3$ 中的零温度场论

由正则系综知

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Tr(e^{-\beta H})} \tag{C.2}$$

对于一个可观察量的系综平均值则为

$$\langle O\rangle = \frac{Tr(\rho O)}{Tr(\rho)} \tag{C.3}$$

如果温度等于零则上式就是算符 O 对真空求期望值，类似于零温度场论，我们定义关联函数

$$\mathcal{G} = \langle T\{\phi_H(\tau_1)\cdots\phi_H(\tau_n)\}\rangle \tag{C.4}$$

其中虚时算符的定义见图 C.1

为了计算这样的关联函数，首先可以尝试计算简单的量，如 $Tr(\rho)$，并假设我们观察的系统由大量处于热平衡的标量粒子构成。

$$\begin{aligned} Tr(\rho) &= \int(D\phi)\,\langle\phi|\,e^{-\beta H}\,|\phi\rangle \\ &= \int(D\phi)\,\langle\phi|\,e^{-iH(-i\beta)}\,|\phi\rangle \\ &= \int(D\phi)_{t=0}\int(D\phi)_{\phi,0}^{\phi,-i\beta}\exp(i\int_0^{-i\beta}d^4x\mathcal{L}) \\ &= \int(D\phi)_{\phi(0)=\phi(\tau)}\exp(-\int_0^\tau d^4x_E\mathcal{L}_E) \end{aligned} \tag{C.5}$$

注意到路径积分里的循环边界条件。一般的，Wick 转动 $it \to \tau$ 使一个有限温度场论变成 $S^1 \times R^3$ 时空上的零温度场论。对应规则为:$\tau := it, \mathcal{L}_E := -\mathcal{L}(\phi)$ 我们几乎可以挪用一切有关零温度场论的结论，关联函数的表达式为（以 2 点关联为例）

$$\langle T\phi_H(\tau_1)\phi_H(\tau_2)\rangle = \frac{\int(D\phi)_{\phi(0)=\phi(\tau)}\phi(\tau_1)\phi(\tau_2)\exp[-\int_0^\beta d^4x_E\mathcal{L}_E]}{\int(D\phi)\exp[-\int_0^\beta d^4x_E\mathcal{L}_E]} \tag{C.6}$$

与附录 A 中的讨论一致，我们可以定义自由形式配分函数来使上式变得更为紧凑（更好做微扰论）

$$Z_{\beta,0}[J] = \int (D\phi) \exp[-\int_0^\beta d^4x_E(\mathcal{L}_{E0} + J\phi)] \tag{C.7}$$

根据统计力学的知识，热力学配分函数即为 $Z_\beta[0]$。因此在本章里不在区分场配分函数和热力学配分函数。利用配分函数

关联函数可以写成

$$\langle T\phi_H(\tau_1)\phi_H(\tau_2)\rangle = \frac{(-\frac{\delta}{\delta J(x_1)})(-\frac{\delta}{\delta J(x_2)}) \exp[-\int_0^\beta d^4z\mathcal{L}'(-\frac{\delta}{\delta J(z)})]Z_{\beta,0}[J]|_{J=0}}{\exp[-\int_0^\beta d^4z\mathcal{L}'(-\frac{\delta}{\delta J(z)})]Z_{\beta,0}[J]|_{J=0}} \tag{C.8}$$

只需要注意在做傅里叶变换时由于时间方向是循环的，会给出我们分立的能量谱

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, n \in Z \tag{C.9}$$

对于标量粒子而言，动量空间的费恩曼规则为

- 自由传播子：$\widetilde{\Delta}_{\beta,\mathrm{F}} = \frac{1}{\omega_n^2+k^2+m^2}$
- 顶点：λ，在每个顶点处 Matsubara 频率和动量守恒
- 圈：$\frac{1}{\beta}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$

Figure C.2: 标量粒子费恩曼规则

有了这个规则，便可以计算任意的算符的系综平均值，特别地可以通过计算真空图来计算热力学配分函数。以上规则稍加修改即可对应于玻色子，费米子的规则如下。

首先注意到

$$\langle O\rangle = \sum \langle n|\,O\,|n\rangle = \sum \int d\Psi d\Psi^* \langle n|\,O\,|\Psi\rangle \langle\Psi|n\rangle \tag{C.10}$$

$$= \sum \int d\Psi d\Psi^* \langle -\Psi|n\rangle \langle n|\,O\,|\Psi\rangle \tag{C.11}$$

$$= \int d\Psi d\Psi^* \langle -\Psi|\,O\,|\Psi\rangle \tag{C.12}$$

所以费米子的路径积分边界条件为 $\Psi(0) = -\Psi(\beta)$，能量谱为

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \tag{C.13}$$

在费曼规则中只需把传播子改成 $S_{\beta,F}(\omega_n,\vec{p}) = \frac{\gamma_0\omega_n+\vec{\gamma}\cdot\vec{p}-m}{\omega_n^2+p^2+m^2}$

C.3 重整化

在微扰计算配分函数时，不可避免的需要计算圈图，因此需要仔细考虑重整化问题。

结论是，有限温度的修正不需要引入额外的重整化项。