Homework 17

231275040 林方恒

2024 年 5 月 13 日

1 Problem 1

令 $\langle D_{12}, |\rangle$ 表示 12 的所有正因子组成的偏序集。

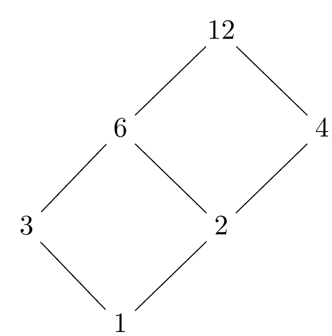
(1) 证明 $\langle D_{12}, |\rangle$ 是一个偏序格, 并由此定义运算 $*$ 和 $\circ$, 证明 $\langle D_{12}, |\rangle$ 是对应的代数格

a. 由于 $x \vee y = lcm(x, y)$, $x \wedge y = gcd(x, y)$, 由于 $gcd(x, y)$, $lcm(x, y)$ 始终存在, 令 $x \in D_{12}$, $y \in D_{12}$, $z \in D_{12}$, 有 $z \mid x$, $z \mid y$, 故 $z \mid gcd(x, y)$, 即 $gcd(x, y)$ 为最大下界. 同理, $lcm(x, y)$ 为最小上界, 所以 $\langle D_{12}, |\rangle$ 是一个偏序格.

b. 定义运算 $* = lcm$ 和 $\circ = gcd$, 显然满足交换律和结合律, $x * (x \circ y) = lcm(x, gcd(x, y)) = x$, $x \circ (x * y) = gcd(x, lcm(x, y)) = y$ 满足吸收律, 故其为代数格.

(2) 按照 (1) 的定义, 说明 $\langle D_{12}, *, \circ\rangle$ 是否是一个有补格

如图, 显然 2, 6 没有补元



(3) 按照 (1) 的定义, 说明 $\langle D_{12}, *, \circ\rangle$ 是否是一个分配格

如图, 此格的任意子格均不同构于 M_3 或 M_5, 故其为分配格.

2 Problem 2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集, 判断哪些偏序集是格.

(1) $L = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$;

显然 3 与 5 没有最小上界, 不是格

(2) $L = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 12\}$;

是一个偏序格

(3) $L = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$;

是一个偏序格

(4) $L = \{1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots\}$;

是一个偏序格

3 Problem 3