Pré-Cálculo

PET-SI

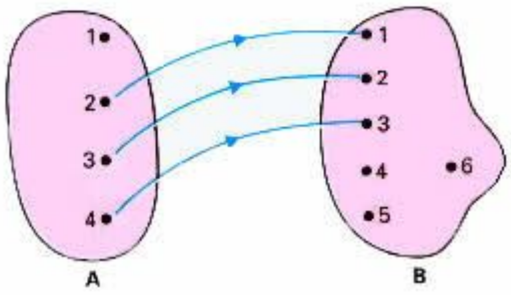
Funções

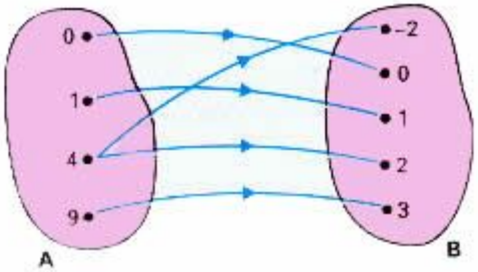
O que é uma função ?

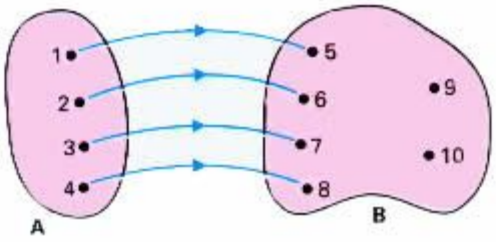
O conceito de função é um dos mais importantes em toda a matemática. O conceito básico é o seguinte: toda vez que temos dois conjuntos e algum tipo de associação entre eles, que faça corresponder a todo elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo, ocorre uma função.

O uso de funções pode ser encontrado em diversos assuntos. Por exemplo, na tabela de preços de uma loja, a cada produto corresponde um determinado preço. Outro exemplo seria o preço a ser pago numa conta de luz, que depende da quantidade de energia consumida.

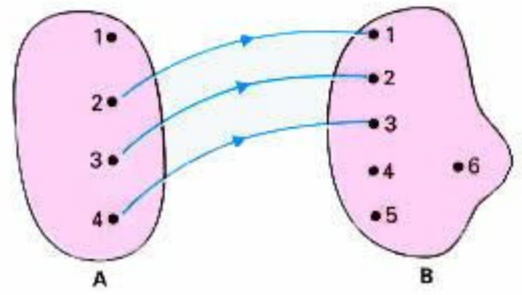
Exemplos:



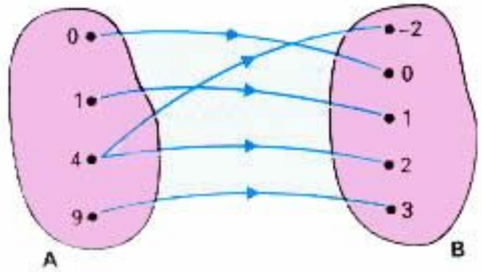


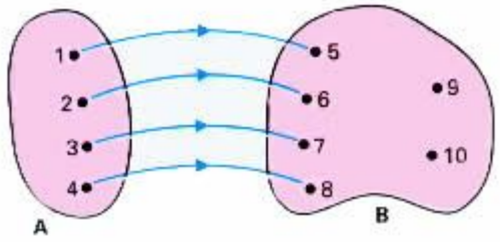


Exemplos:

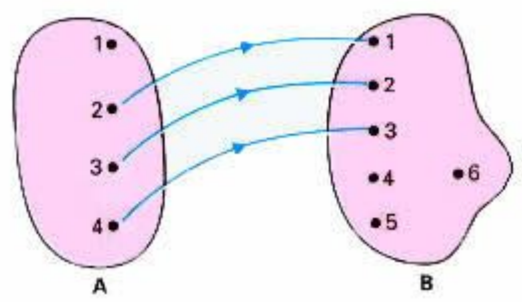


A relação acima não é uma função, pois existe o elemento 1 no conjunto A, que não está associado a nenhum elemento do conjunto B.

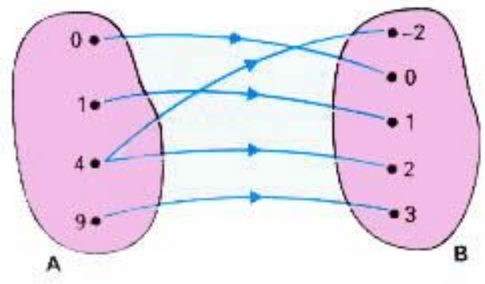




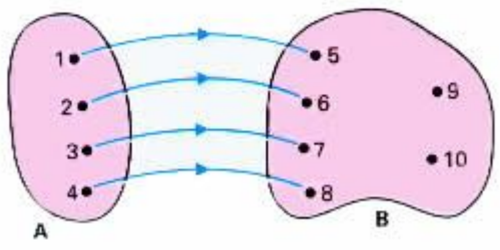
Exemplos:



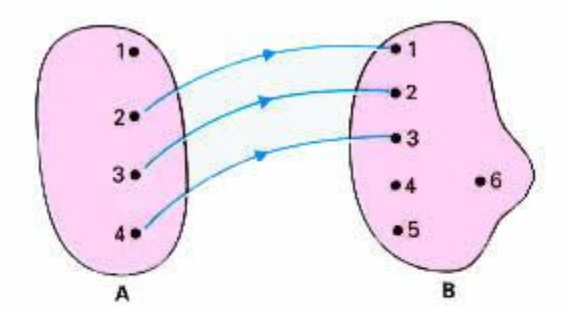
A relação acima não é uma função, pois existe o elemento 1 no conjunto A, que não está associado a nenhum elemento do conjunto B.



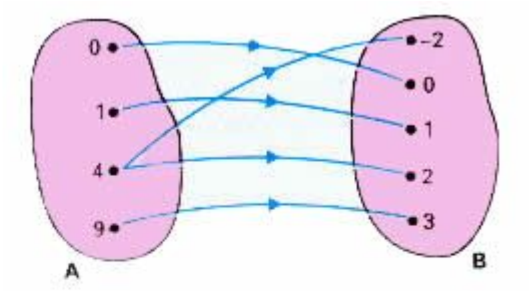
A relação acima também não é uma função, pois existe o elemento 4 no conjunto A, que está associado a mais de um elemento do conjunto B.



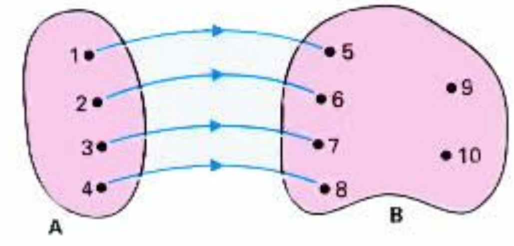
Exemplos:



A relação acima **não é uma função**, pois existe o elemento 1 no conjunto A, que não está associado a nenhum elemento do conjunto B.



A relação acima também **não é uma função**, pois existe o elemento 4 no conjunto A, que está associado a mais de um elemento do conjunto B.



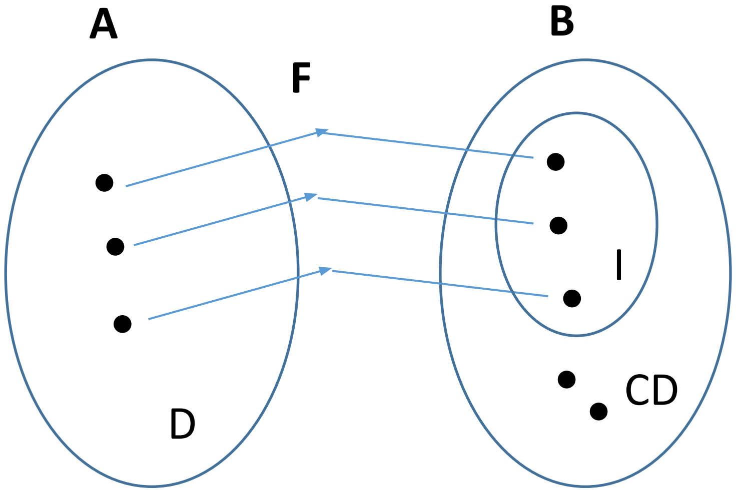
A relação acima **é uma função**, pois todo elemento do conjunto A está associado a somente um elemento do conjunto B.

Em outras palavras:

De um modo geral, dados dois conjuntos **A** e **B**, e uma relação entre eles, dizemos que essa relação é uma **função de A em B** se e somente se, **para todo x ∈ A** existe **um único y ∈ B** de modo que x se relaciona com y.

Domínio, Contradomínio e Imagem da função

- Domínio: O conjunto dos elementos de A que se relacionam com B
- Contradomínio: O conjunto de chegada
- Imagem: O conjunto dos elementos de B que se relacionam com A



A(conjunto de partida)
B(conjunto de chegada)

Lei da formação

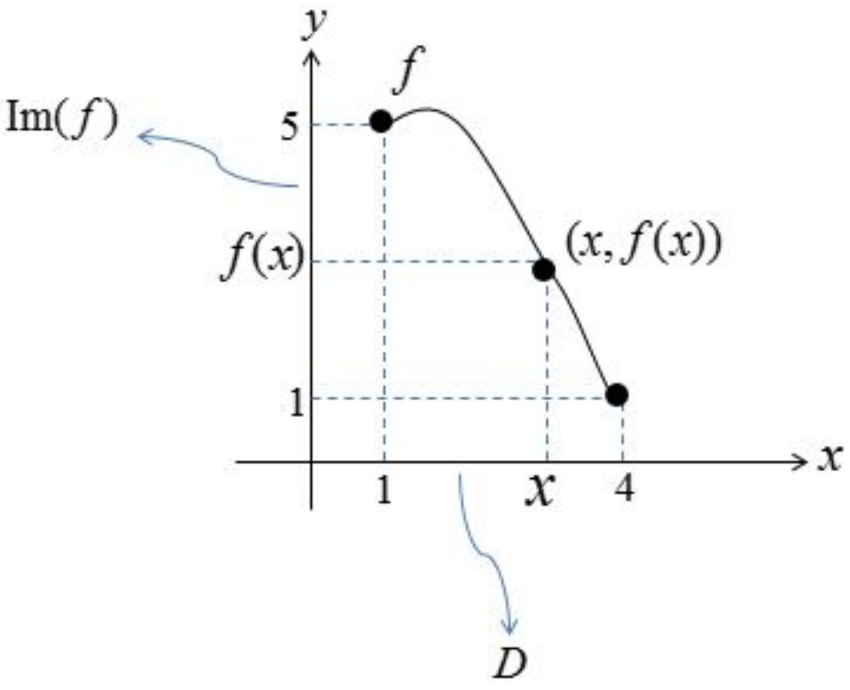
Uma função pode ser representada por uma fórmula:

Exemplo: $f(x) = x + 3$ (obs: $f(x) = y$)

$f(1) = 1 + 3 = 4$

Ou seja, quando x vale 1, y vale 4

Exemplo Gráfico:



$$f(1) = 5$$
$$f(4) = 1$$
$$f(5) = \not\in$$

$$D = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 4\} = [1,4]$$
$$\text{Im}(f) = \{y \in R \mid 1 \leq y \leq 5\} = [1,5]$$

Exemplos:

1

$$f(x) = 49 - x^2$$

$$f(5) = 49 - 5^2$$

$$49 - 25$$

$$24$$

2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \text{ for par} \\ x+5 \text{ se } x \text{ for ímpar} \end{cases}$$

$$f(2) = 4$$

$$f(3) = 8$$

Exercícios:

1

Dada a função $f(x) = -x^2 + 2x$

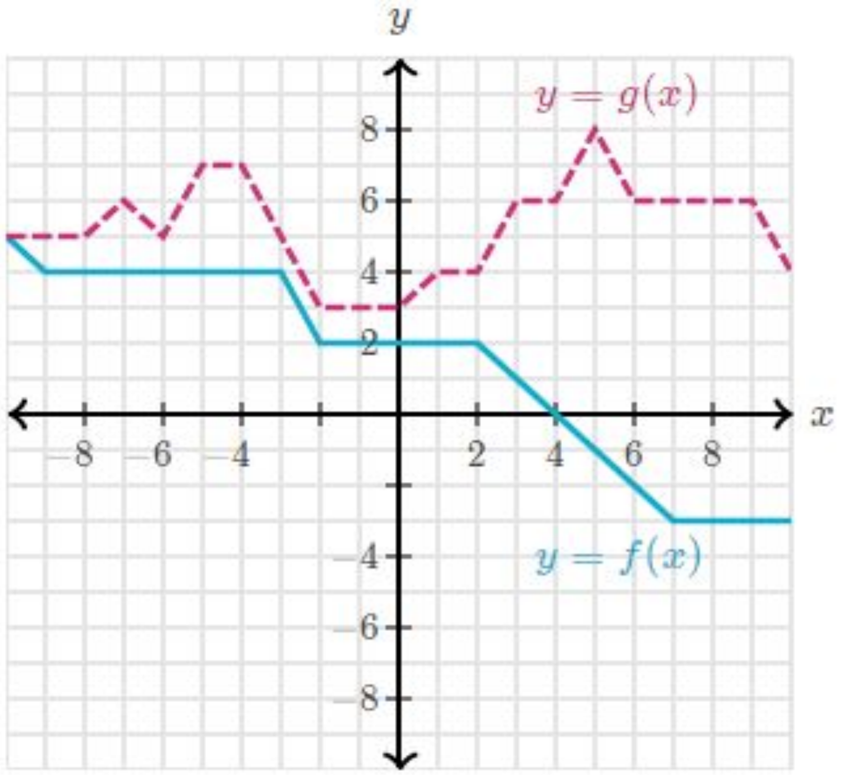
Simplifique:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

2

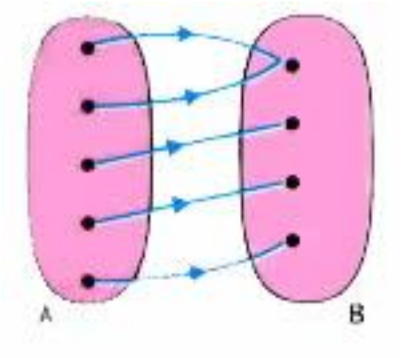
De acordo com o gráfico, calcule:

$-1.f(-9) + 7.g(6)$



Função Sobrejetora:

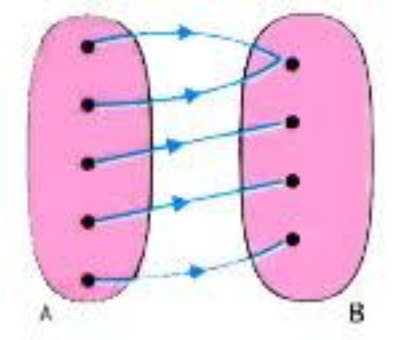
Dizemos que uma função é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem for igual ao contradomínio, isto é, se Im=B. Em outras palavras, não pode sobrar elementos no conjunto B sem receber flechas. Exemplo:



Função Injetora:

A função é injetora se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem. Portanto, não pode haver nenhum elemento no conjunto B que receba duas flechas.

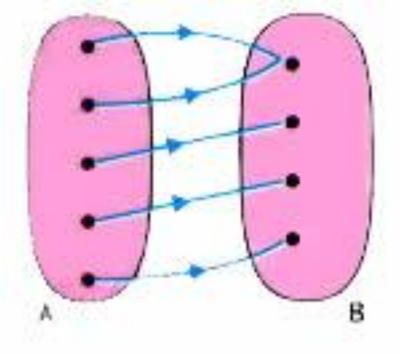
Exemplo:



Função Injetora:

A função é injetora se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem. Portanto, não pode haver nenhum elemento no conjunto B que receba duas flechas.

Exemplo:



Função Bijetora:

Uma função é bijetora quando ela é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.

Função Afim:

É chamada **função afim** toda função polinomial do primeiro grau. Formalmente escrevemos que:

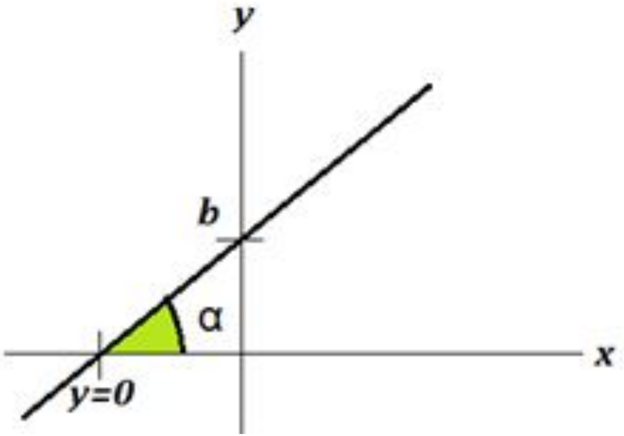
Uma função f:R→R é uma função afim quando existem dois números reais *a* e *b* tais que satisfaçam a seguinte condição, $\forall x \in R$ e $b \neq 0$ temos:

$$y=f(x)=ax+b$$

Onde:

- *a* é o coeficiente angular do gráfico de *f*
- *b* é o coeficiente linear, ou o ponto de intersecção com o eixo y
- *x* é a variável independente.

Função Afim:



Podemos determinar o valor de *a* pela tangente do ângulo α formado pela interseção do gráfico da função com o eixo x, ou seja:

$$tg\alpha = a$$

Basicamente, o gráfico de uma função afim será sempre uma reta. Os fatores que vão determinar a sua posição no plano são os coeficientes linear e angular, particulares de cada função.

Função Polinomial:

As funções polinomiais são definidas por expressões polinomiais. Elas são representadas pela expressão:

$$\mathbf{f(x) = an\ .\ xn + an - 1\ .\ xn - 1 + \ldots + a2\ .\ x2 + a1\ .\ x + a0}$$

Onde, n é o número inteiro positivo ou nulo, x é a variável, a0, a1, ...an – 1, an são os coeficientes e an . xn, an – 1 . xn – 1, ... a1 . x , a0 são os termos.

Cada função polinomial associa-se a um único polinômio, sendo assim chamamos as funções polinomiais também de polinômios.

Função Polinomial:

Para encontrar o valor numérico de um polinômio, substituímos um valor numérico na variável x.

Exemplo:

Qual o valor numérico de p(x) = 2x3 + x2 - 5x - 4 para x = 3?

Substituindo o valor na variável x temos:

2 . 33 + 32 - 5 . 3 - 4 = 54 + 9 - 15 - 4 = 44

Exemplos:

$$p(x) = 2x + 1$$

$$p(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$$

Symbolab: https://www.symbolab.com/

Operações com Polinômios:

Adição

$(- 7x3 + 5x2 - x + 4) + (- 2x2 + 8x -7)$

$- 7x3 + 5x2 - 2x2 - x + 8x + 4 - 7$

$- 7x3 + 3x2 + 7x -3$

Subtração

$(4x2 - 5x + 6) - (3x - 8)$

$4x2 - 5x + 6 - 3x + 8$

$4x2 - 8x + 14$

Multiplicação

$(3x2 - 5x + 8) . (- 2x + 1)$

$- 6x3 + 3x2 + 10x2 - 5x - 16x +$

8

$- 6x3 + 13x2 - 21x + 8$

Operações com Polinômios:

Divisão

$$3x^3 - 14x^2 + 23x - 10 : x^2 - 4x + 5$$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{3x^3} - 14x^2 + 23x - 10 & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2}
-\cancel{3x^3} + 12x^2 - 15x & 3x - 2 \\ \cline{1-1}
-\cancel{2x^2} + \cancel{8x} - \cancel{10} & \\
+\cancel{2x^2} - \cancel{8x} + \cancel{10} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Obs: Na divisão de polinômios utilizamos o **método chave**. Primeiramente realizamos a divisão entre os coeficientes numéricos e depois a divisão de potências de mesma base. Para isso, conserva-se a base e subtrai os expoentes.

A divisão é formada por: dividendo, divisor, quociente e resto.

divisor . quociente + resto = dividendo

Função Composta:

Dado duas funções f e g, a função composta $f_o g$ é definida por:

$$(f_o g)(x) = f(g(x))$$

$(f_o g)(x)$ está definida sempre que f(x) e f(g(x)) estiverem definidas.

Exemplo: Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \boxed{\sqrt[4]{2-x}}$$

Função Inversa:

Para determinar se uma função possui inversa é preciso verificar se ela é bijetora, pois os pares ordenados da função f devem pertencer à função inversa f^{-1}

O que é domínio na função f vira imagem na f^{-1} e vice-versa.

Dada uma sentença de uma função y = f(x), para encontrar a sua inversa é preciso seguir alguns passos. Dada a função y = 3x – 5 determinaremos a sua inversa da seguinte maneira:

1º passo: isolar x.

$y = 3x - 5$

$y + 5 = 3x$

$x = (y + 5)/3$

2º passo: troca-se x por y e y por x, pois é mais usual termos como variável independente a letra x.

$$\mathbf{y = (x + 5)/3}$$

Portanto, a função f(x) = 3x – 5 terá inversa igual a $f^{-1}(x) = (x + 5)/3$

Função Quadrática:

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde a, b e c são números reais e a 0. Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas:

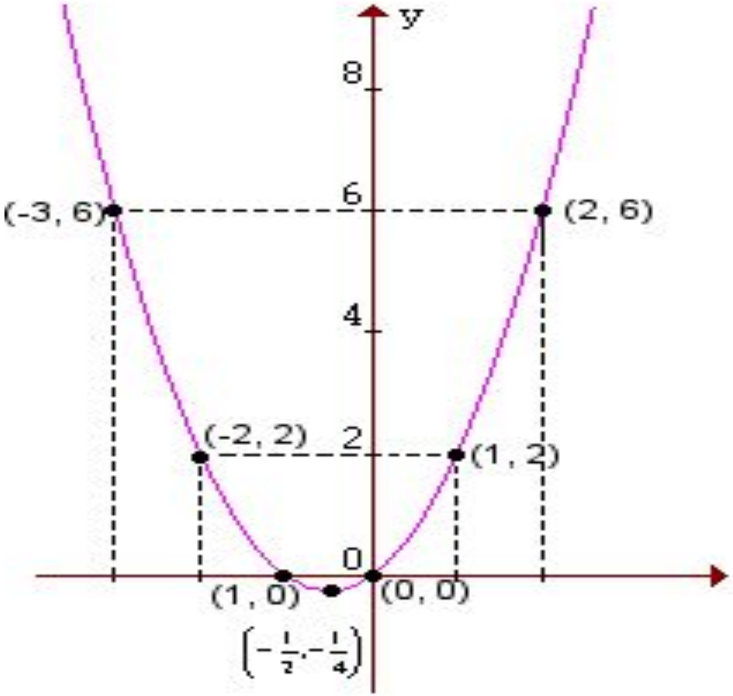
- $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$
- $f(x) = x^2 - 1$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$
- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$
- $f(x) = -x^2 + 8x$, onde $a = -1$, $b = 8$ e $c = 0$
- $f(x) = -4x^2$, onde $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$

Gráfico:

- O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com a 0, é uma curva chamada **parábola**.
- Por exemplo, vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$:
- Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

Gráfico:

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
-1/2	-1/4
0	0
1	2
2	6



Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notamos sempre que:

- se **a > 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**;
- se **a < 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**;

Achar Raízes:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta > 0$ a função tem duas raízes reais distintas.

Se $\Delta = 0$ a função tem duas raízes reais iguais.

Se $\Delta < 0$ a função não tem raízes reais.

Ponto de Máximo ou Mínimo:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

Exercícios:

Esboce o gráfico:

$f(x) = x^2 + x - 6$

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$f(x) = (x - 1)(3x + 2)$

Função Modular:

A função modular é uma função que apresenta o módulo na sua lei de formação. De maneira mais formal, podemos definir função modular como:

$f(x) = |x|$ ou $y = |x|$

A função $f(x) = |x|$ apresenta as seguintes características:

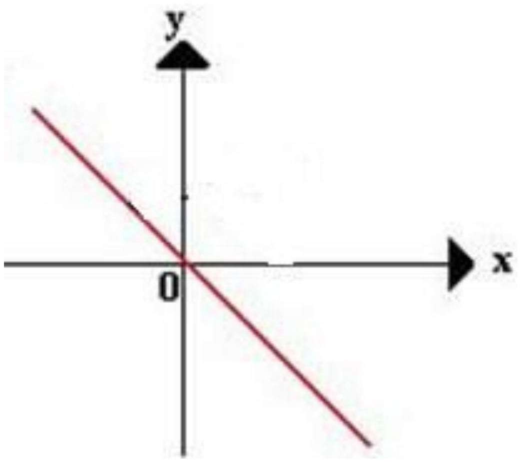
$f(x) = x$, se $x \geq 0$ ou $f(x) = -x$, se $x < 0$

Essas características decorrem da definição de módulo.

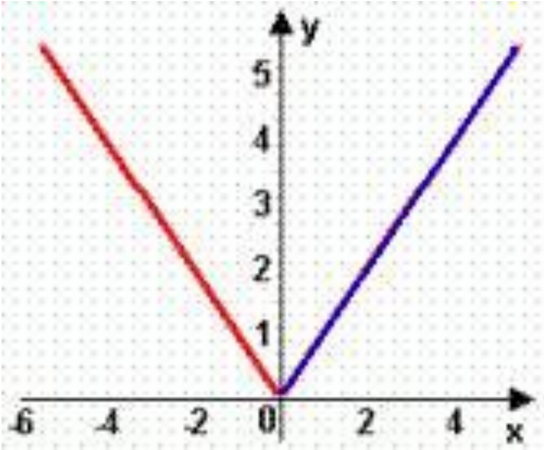
Exemplo 1:

Construa o gráfico da função $f(x) = |-x|$:

Solução: primeiro vamos analisar o gráfico da função acima sem a utilização do módulo na sua lei de formação, ou seja, vamos fazer o gráfico de $g(x) = -x$



O módulo presente na lei da função faz com que a parte do gráfico que se localiza abaixo do eixo x “reflita” no momento em que toca o eixo x. Mas por quê? Simples, a parte do gráfico abaixo do eixo x representa os valores negativos de y e, como o módulo de um número é sempre um valor positivo, o gráfico de $f(x) = |-x|$ fica:



A parte do gráfico que está azul é parte que sofreu ação do módulo.

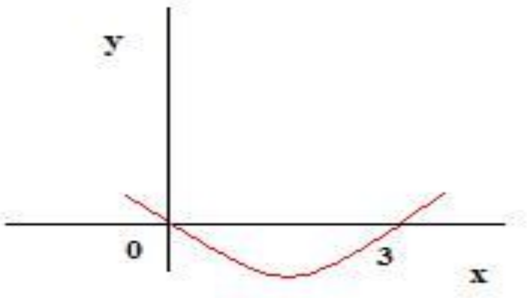
Exemplo 2:

Construa o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 3x|$:
Solução: pela definição de módulo, temos que:

$f(x) = x^2 - 3x$, se $x \geq 0$ e $f(x) = -(x^2 - 3x)$, se $x<0$.

Daí, segue que: $x^2 - 3x = 0$

$x = 0$ ou $x = 3$, logo :

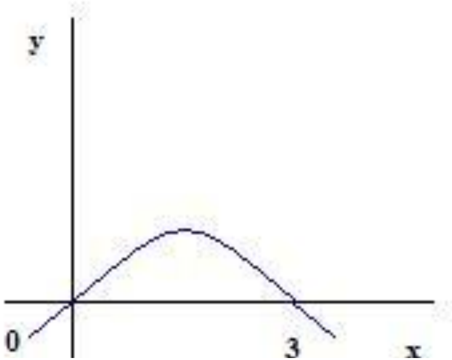


Temos também que:

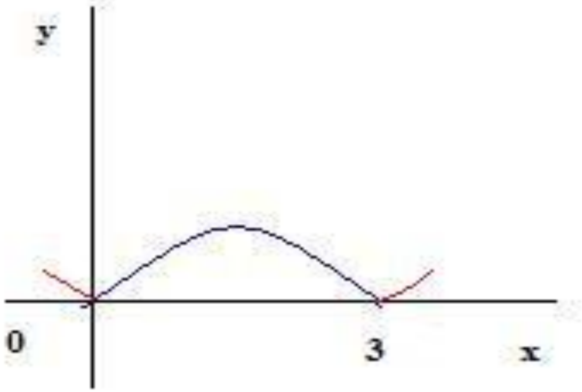
$-(x^2 - 3x) = 0$

$x = 0$ ou $x = 3$

Daí, segue que:



Unindo as partes dos dois gráficos que se encontram acima do eixo x teremos o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 3x|$



Função Exponencial:

Função Exponencial é aquela que a variável está no expoente e cuja base é sempre maior que zero e diferente de um.

Essas restrições são necessárias, pois 1 elevado a qualquer número resulta em 1. Assim, em vez de exponencial, estaríamos diante de uma função constante.

Além disso, a base não pode ser negativa, nem igual a zero, pois para alguns expoentes a função não estaria definida.

Por exemplo, a base igual a - 3 e o expoente igual a 1/2. Como no conjunto dos números reais não existe raiz quadrada de número negativo, não existiria imagem da função para esse valor.

Exemplos:

$f(x) = 4^x$

$f(x) = (0{,}1)^x$

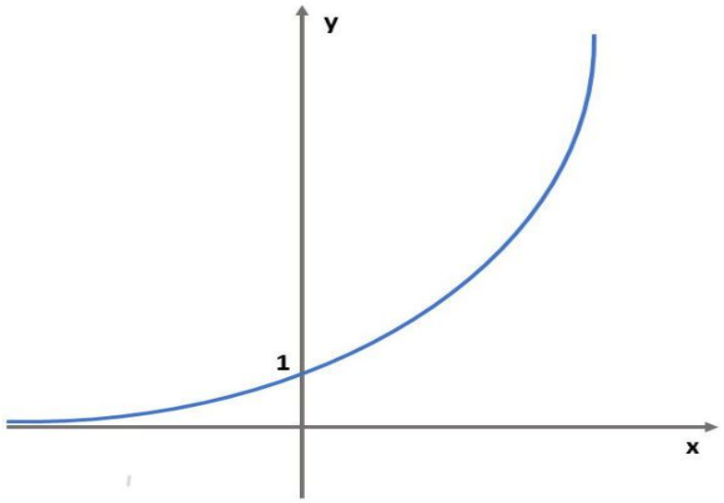
$f(x) = (\frac{2}{3})^x$

Nos exemplos acima **4**, **0,1** e **⅔** são as bases,

enquanto x é o expoente.

Gráfico da função exponencial:

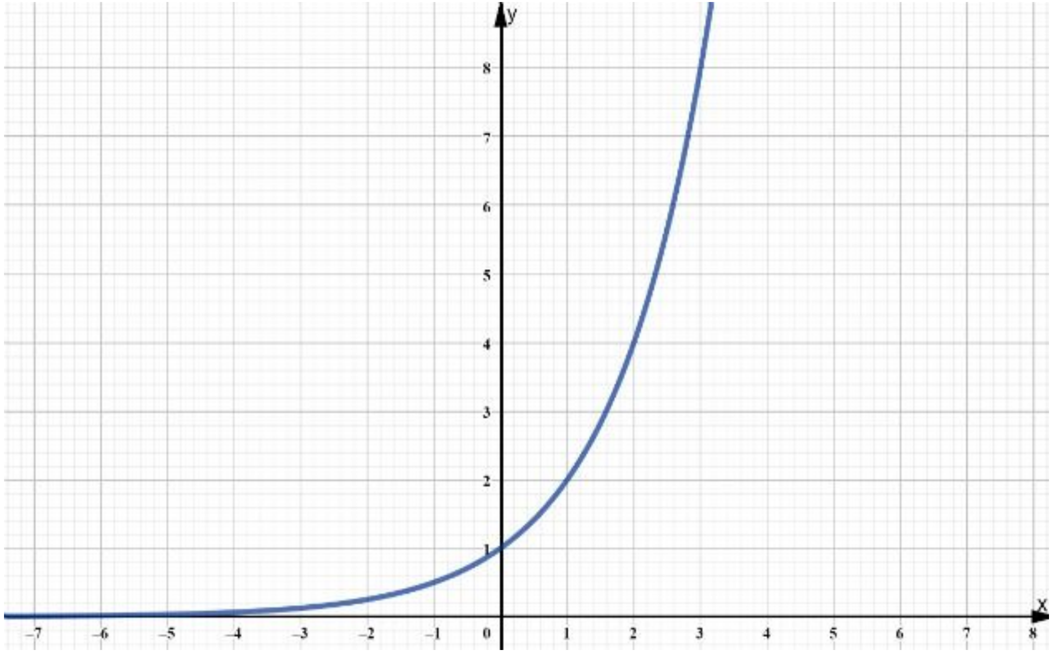
O gráfico desta função passa pelo ponto (0,1), pois todo número elevado a zero é igual a 1. Além disso, a curva exponencial não toca no eixo x. Na função exponencial a base é sempre maior que zero, portanto a função terá sempre imagem positiva. Assim sendo, não apresenta pontos nos quadrantes III e IV (imagem negativa). Abaixo representamos o gráfico da função exponencial.



Função Crescente ou Decrescente

A função exponencial pode ser crescente ou decrescente. Será crescente quando a base for maior que 1. Por exemplo, a função y = 2x é uma função crescente.Para constatar que essa função é crescente, atribuímos valores para x no expoente da função e encontramos a sua imagem. Os valores encontrados estão na tabela abaixo.

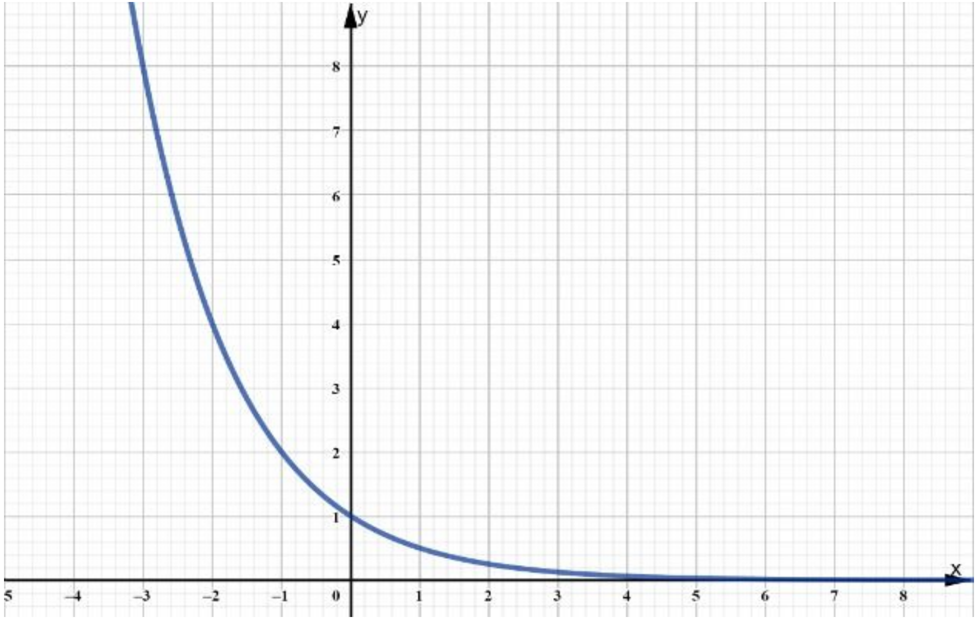
x	$y = 2^x$
-3	$y = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
-2	$y = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
-1	$y = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
0	$y = 2^0 = 1$
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



Função Crescente ou Decrescente

Por sua vez, as funções cujas bases são valores maiores que zero e menores que 1, são decrescentes. Por exemplo, f(x) = (1/2)x é uma função decrescente. Calculamos a imagem de alguns valores de x e o resultado encontra-se na tabela abaixo.Notamos que para esta função, enquanto os valores de x aumentam, os valores das respectivas imagens diminuem. Desta forma, constatamos que a função f(x) = (1/2)x é uma função decrescente.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$
-2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \left(\frac{1}{2}\right)$
2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{4}\right)$
3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{8}\right)$



Referências:

https://www.somatematica.com.br/emedio/funcoes/funcoes.php

https://www.infoescola.com/matematica/funcao-afim/

https://brasilescola.uol.com.br/matematica/%20funcao-inversa.htm