Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

TOPOLOGIA DA IMAGEM DIGITAL

Sumário

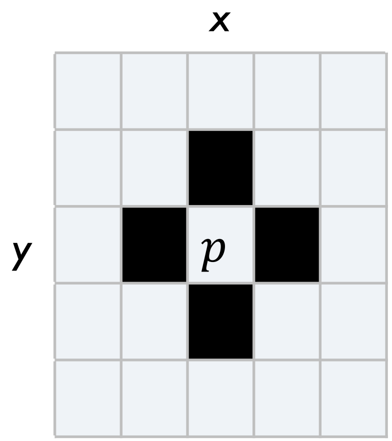
- Vizinhança de um pixel
- O que é conectividade?
- Algoritmo para rotular componentes conectadas
- Relação de adjacência
- Medidas de distância

Valor de um pixel

- Uma imagem é tratada como uma matriz de pixels
- Um pixel p na coordenada (x,y) está associado a um valor de intensidade $V(p)$ correspondente a $f(x,y)$
  - Imagem de 8 bits: $V(p) = \{k \mid 0 <= k <= 255\}$

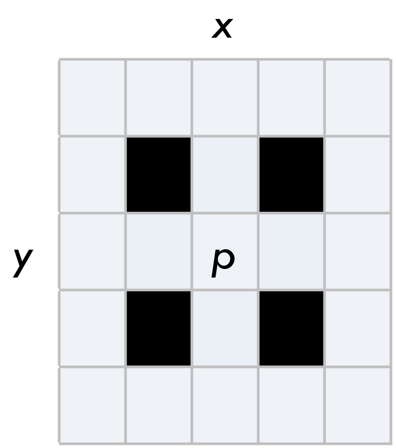
Vizinhança de um pixel

- Vizinhança-4 de um pixel p ($N_4(p)$)
  - Um pixel p na coordenada (x,y) tem 4 vizinhos cujas coordenadas são dadas por
    - $N_4(p) = \{(x+1,\ y), (x-1,\ y), (x,\ y+1), (x,\ y-1)\}$
  - Se *p* é um pixel da borda, então ele terá um numero menor de vizinhos



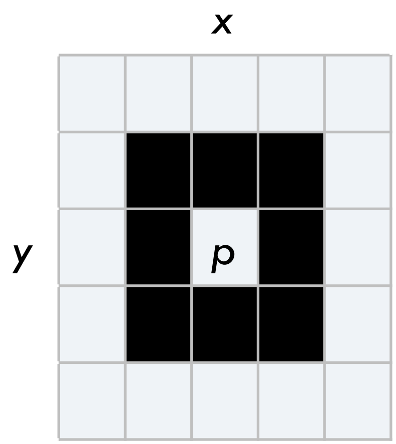
Vizinhança de um pixel

- Vizinhança diagonal de um pixel p ($N_D(p)$)
  - Um pixel *p* na coordenada (x,y) tem 4 vizinhos na diagonal cujas coordenadas são dadas por
    - $N_D(p) = \{(x+1, y+1),(x+1,y-1),(x-1,y+1), (x-1, y-1)\}$



Vizinhança de um pixel

- Vizinhança-8 de um pixel p ($N_8(p)$)
  - Os 8-vizinhos de um pixel *p* é o conjuntos dos vizinhos $N_4(p)$ e dos $N_D(p)$.
    - $N_8(p) = N_4(p) \cup N_D(p)$



Adjacência

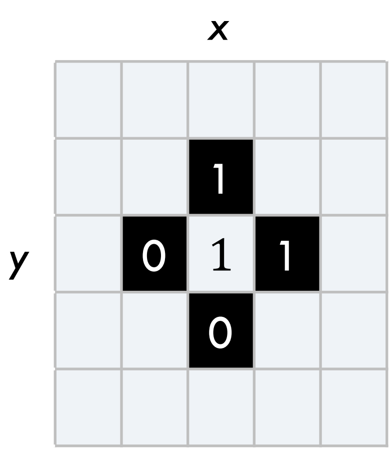
- É um conceito distinto de vizinhança
  - Serão observados, além da vizinhança, os valores dos pixels vizinhos
  - Estabelece limites de objetos e componentes de regiões

Adjacência

- Os valores dos pixels vizinhos devem estar contidos dentro de um conjunto Q de valores de intensidades. Ex:
  - Imagens binárias: $Q = \{1\}$
  - Imagens tons de cinza: $Q = \{v \mid v > 127\}$
  - Três tipos de adjacência
    - Adjacência-4
    - Adjacência-8
    - Adjacência-m

Adjacência

- Adjacência-4 → $A_4(p)$
  - O pixel *q* está na vizinhança-4 de *p*
    - $q \in N_4(p)$
  - *p* e *q* estão na mesma faixa de valores
    - $V(p) \in Q \text{ e } V(q) \in Q$



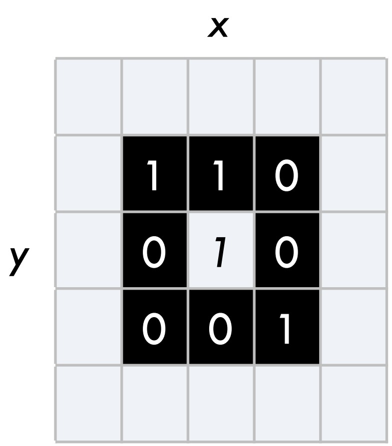
$Q = \{1\}$

$p = (x, y), V(p) = 1$

$A_4(p) = \{(x, y-1), (x+1, y)\}$

Adjacência

- Adjacência-8 → $A_8(p)$
  - O pixel q está na vizinhança-8 de p
    - $q \in N_8(p)$
  - p e q estão na mesma faixa de valores
    - $V(p) \in Q \; e \; V(q) \in Q$



$Q = \{1\}$
$p = (x, y), V(p) = 1$

$A_8(p) = \{(x-1, y-1), (x, y-1), (x+1, y+1)\}$

Adjacência

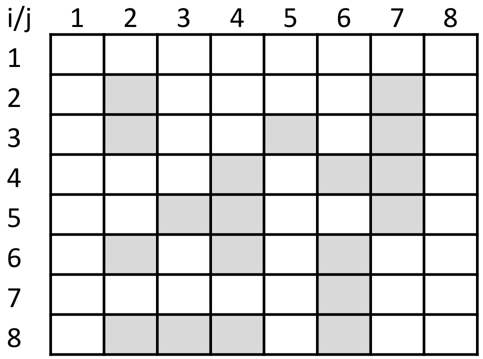
- Adjacência-m → $A_m(p)$
  - Conectividade mista
    - $q \in N_4(p)$ ou
    - $q \in N_8(p) \;\; e \; V(N_4(p) \cap N_4(q)) \notin Q$
  - p e q estão na mesma faixa de valores
    - $V(p) \in Q \; e \; V(q) \in Q$

			x		
		1	1	0	
y		0	1	0	
		0	0	1	

$Q = \{1\}$
$p = (x, y), V(p) = 1$

$A_m(p) = \{\cancel{(x-1, y-1),}\, (x, y-1), (x+1, y+1)\}$

Adjacência



p1 = (3,5)

p2 = (6,4)

A4(p1)? A4(p2)?
A8(p1)? A8(p2)?
Am(p1)? Am(p2)?

pk = (i,j), ...

Relação de Adjacência

- Um caminho digital do pixel *p(x,y)* ao pixel *p(s,t)* é uma sequência de pixels distintos (x_0,y_0), (x_1,y_1),…, (x_n,y_n), em que
  - $(x_0,y_0) = (x,y)$ e $(x_n,y_n) = (s,t)$;
  - os pixels (x_i,y_i) e (x_{i-1},y_{i-1}) são adjacentes para

  $1 \leq i \leq n$

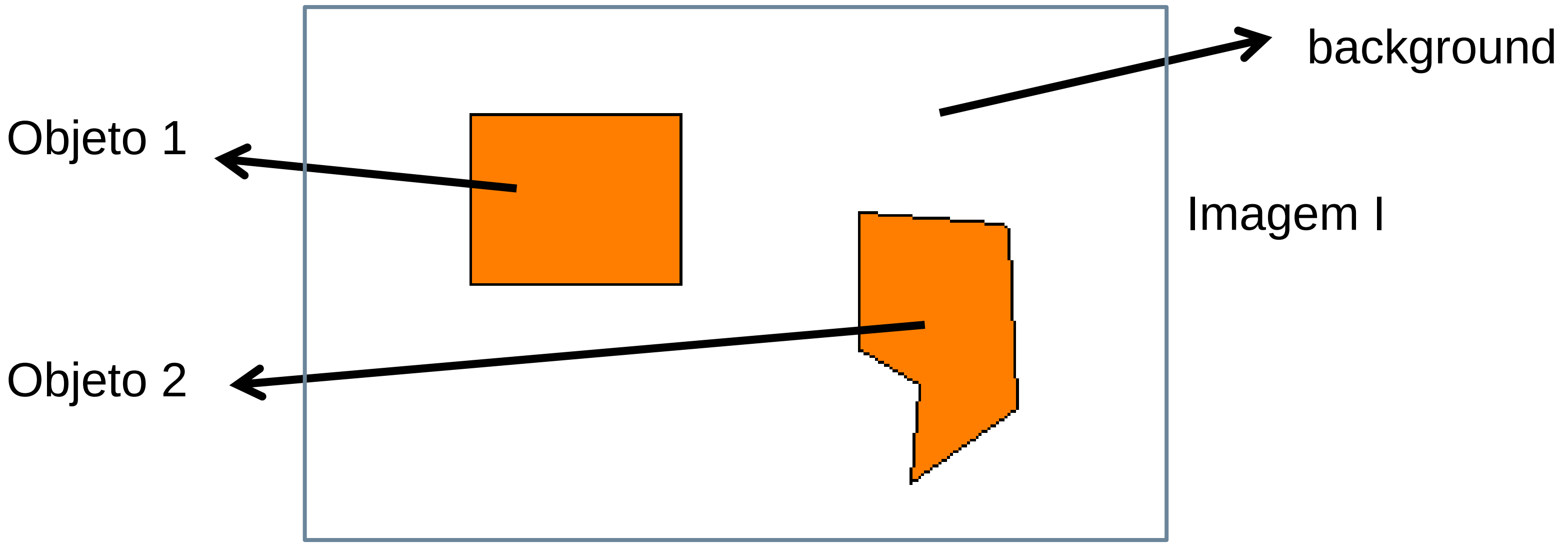
- Se $(x_0,y_0) = (x_n,y_n)$ então o caminho é fechado

Conectividade

- Conectividade entre pixels é um conceito muito importante
- É útil para
  - Estabelecer os limites dos objetos
  - Identificar as componentes de uma imagem
    - obtenção de propriedades especificas do objeto para processamento de mais alto nível

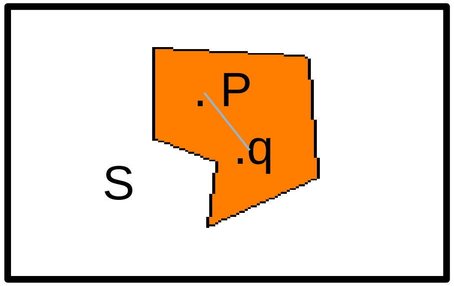
Conectividade

- Precisamos identificar quais pixels pertencem a cada componente da imagem I
  - Para isto precisamos saber quais pixels são conexos



Conectividade

- Dois pontos p e q ε S são conexos se existe um caminho entre p e q tal que todos os pontos deste caminho também pertencem a S



- Para qualquer pixel p em S, o conjunto de pixels conexos a ele em S é chamado de um componente conexo de S

- Se existir apenas um componente conexo então S é dito ser um conjunto conexo

Conectividade

- Seja R um subconjunto de pixels em uma imagem I
  - R é uma região de I se R for um conjunto conexo
  - Duas regiões R_i e R_j são adjacentes se sua união formar um conjunto conexo
  - Para definir um conjunto conexo o tipo de adjacência utilizada precisa ser especificado

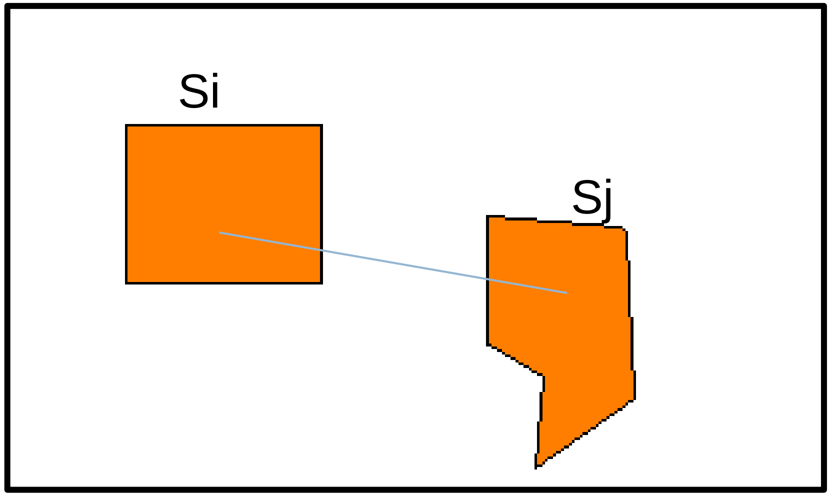
Conectividade

- Exemplo
  - R1 U R2 formam uma região se a adjacência-8 for utilizada
  - Usando adjacência-4, R1 e R2 são duas regiões disjuntas

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{array}\right\} R1 \\ \left.\begin{array}{ccc}0&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{array}\right\} R2 \end{array}$$

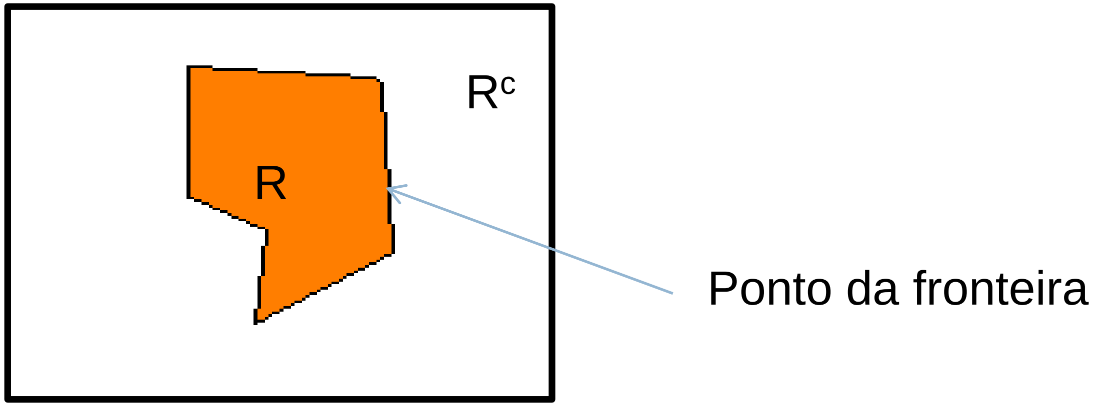
Conectividade

- Exemplo
  - Neste exemplo as regiões Si e Sj são disjuntas para qualquer adjacência (não existe caminho entre p e q)



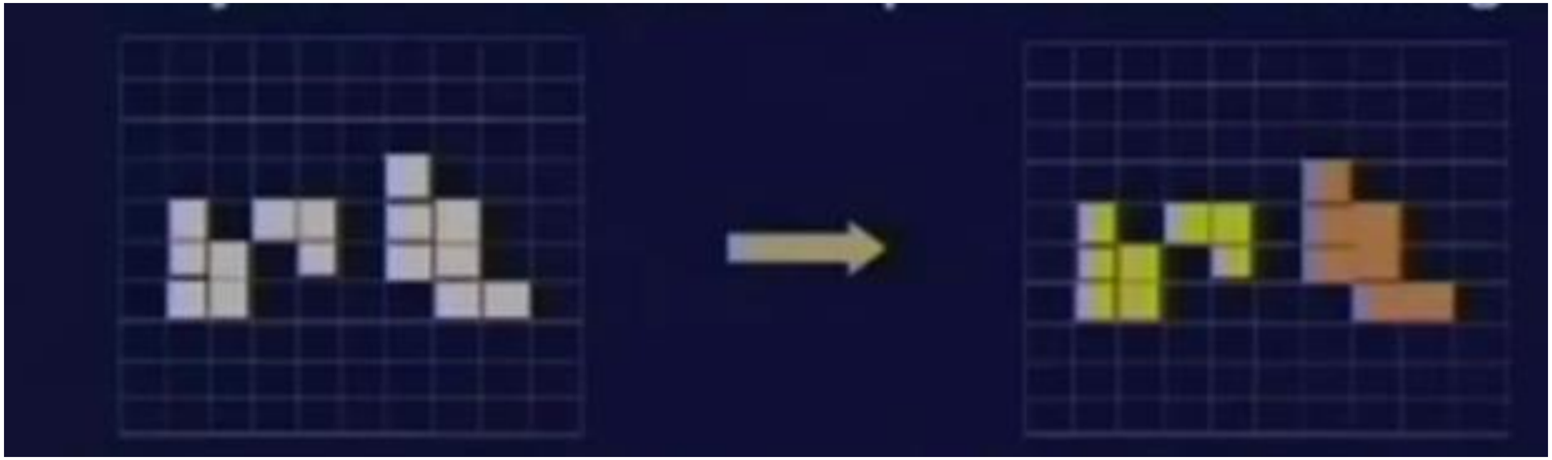
Fronteira ou contorno de uma região

- Seja R uma região
  - A fronteira de R é o conjunto de pixels adjacentes aos pixels do complemento de R



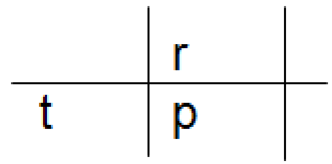
Rotular Componentes Conectadas

- Atribui diferentes rótulos para regiões disjuntas em uma dada imagem
  - Rotular componentes conectadas é um passo fundamental para analise automática de imagens:
    - identificar forma, calcular área, definir fronteira da região
    - obter características de forma ou contorno



Algoritmo para Rotular Componentes Conectadas

- Considere que desejamos rotular componentes 4-conectadas



-
    - Seja p um pixel a ser analisado. A varredura se dá da esquerda para a direita, de cima para baixo.
    - Seja r e t o pixel de cima e a esquerda respectivamente.
    - Dada a natureza da varredura, r e t já foram rotulados se satisfizeram o critério de similaridade (Cs=1; considere que estamos tratando com uma imagem binária).

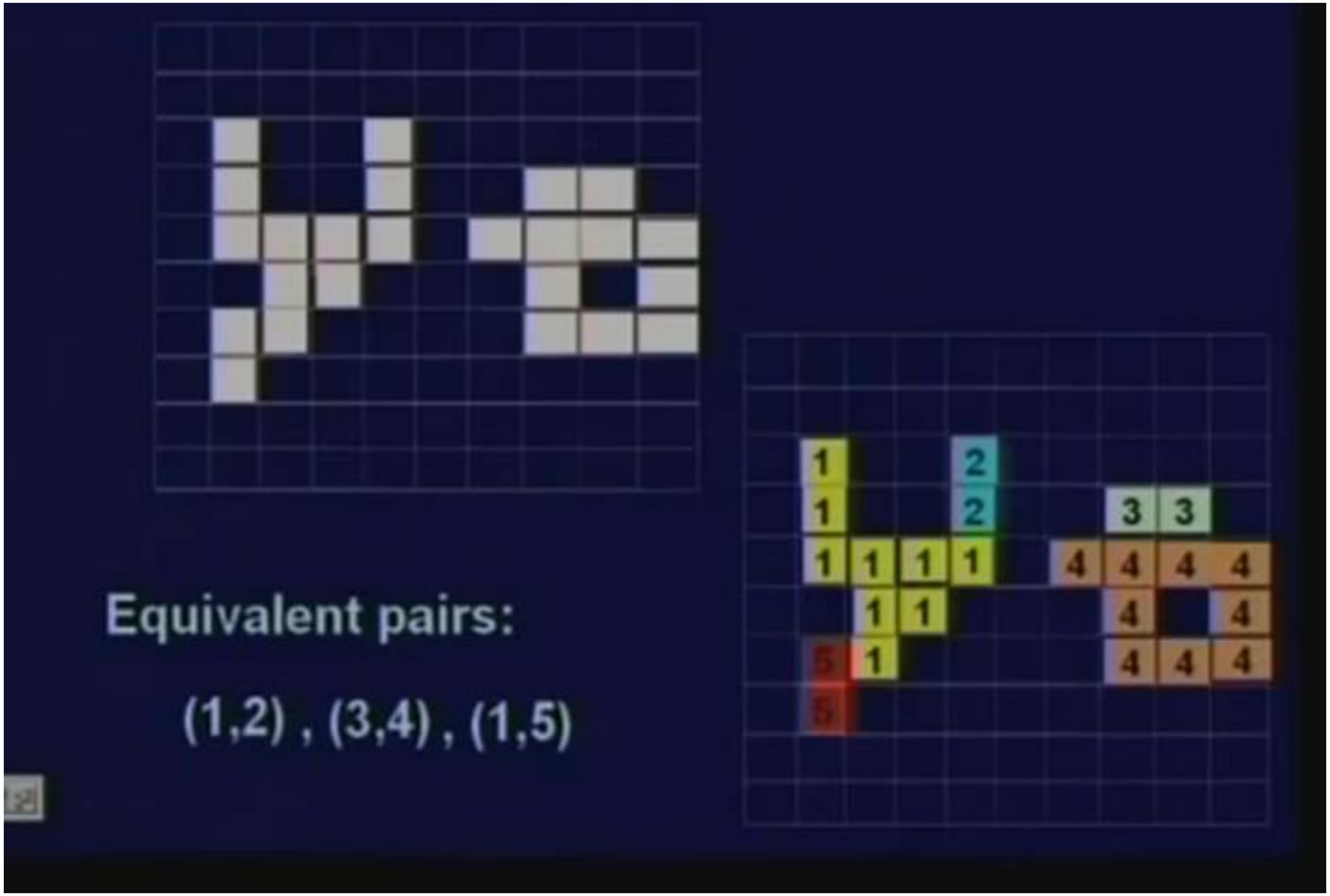
Algoritmo para Rotular Componentes Conectadas

- Procedimento:
  - Se p = 0 então verifica o próximo pixel;
  - Se p = 1, examinar r e t
    - Se (r == 0 e t == 0) então rotula p com novo rótulo;
    - Se (r == 1 e t == 0) ou (r == 0 e t == 1) rotula p com o rótulo de r ou de t;
    - Se (r == 1 e t == 1) e possuem o mesmo rótulo então rotula p com este rótulo;
    - Se (r == 1 e t == 1) e possuem rótulos diferentes então rotula p com um dos rótulos e indica equivalência de rótulos;

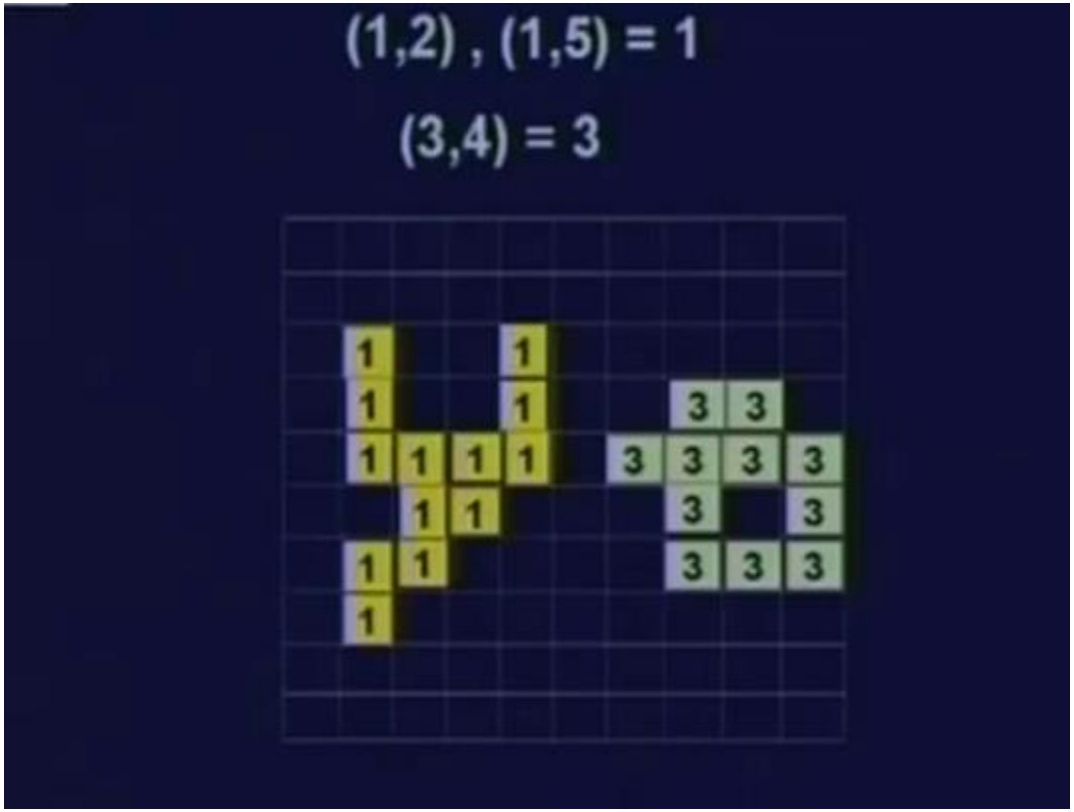
Algoritmo para Rotular Componentes Conectadas

- No final do processo todos que satisfazem o critério de similaridade estarão rotulados, mas alguns com rótulos equivalentes
- Neste caso:
  - transformar todos os pares de rótulos equivalentes em classes de equivalência, atribuindo um rótulo diferente para cada classe;
  - varrer novamente a imagem e substituir cada rótulo pelo rótulo atribuído a sua classe de equivalência.

Demonstração do algoritmo



Resultado



Rotular Componentes Conectadas - Exercício

Considere Sc={1} e a imagem abaixo:

1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1

Os rótulos C e D são equivalentes. Temos, portanto, 3 componentes 4-conectadas.

Componentes 4-conectadas:

A	A	0	0	0	0	0
0	A	A	0	0	0	0
0	0	0	B	0	0	0
0	0	0	B	B	0	C
0	0	0	0	0	D	D
0	0	0	0	0	D	D

Como o procedimento de rotular deve ser alterado para obtermos componentes 8-conectadas???

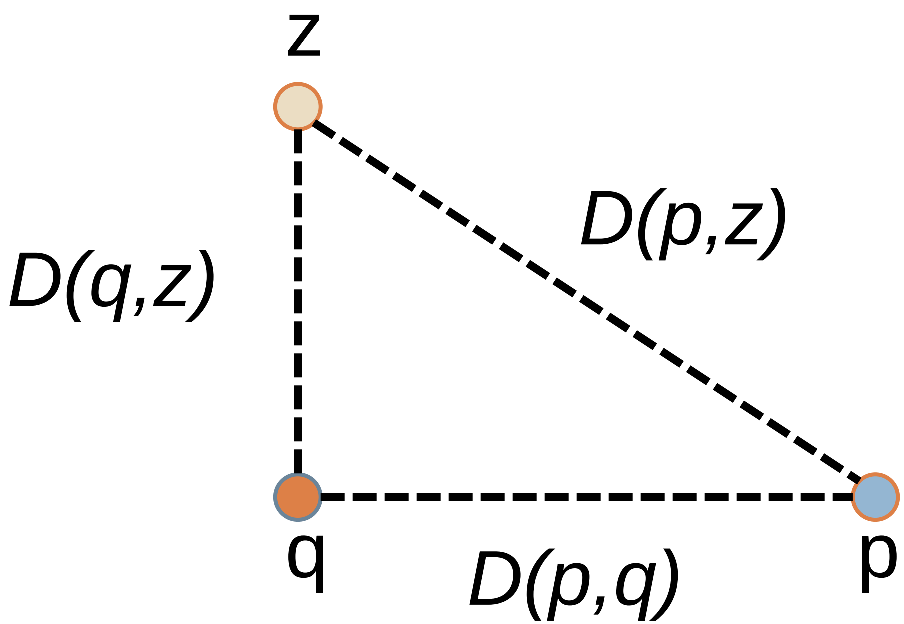
Medida de distância ou Métrica

- Dados os pixels p, q e z com coordenadas (x,y), (s,t) e (u,v), respectivamente, D é uma função de distância se
  - $D(p,q) = D(q,p)$, simetria
  - $D(p,q) \geq 0$, não negatividade
  - $D(p,p) = 0$

- Além dessas 3 propriedades, também valem
  - $D(p,q) = 0$, se e somente se $p = q$
  - $D(p,z) \leq D(p,q) + D(q,z)$, também conhecida como desigualdade do triângulo

Medida de distância ou Métrica

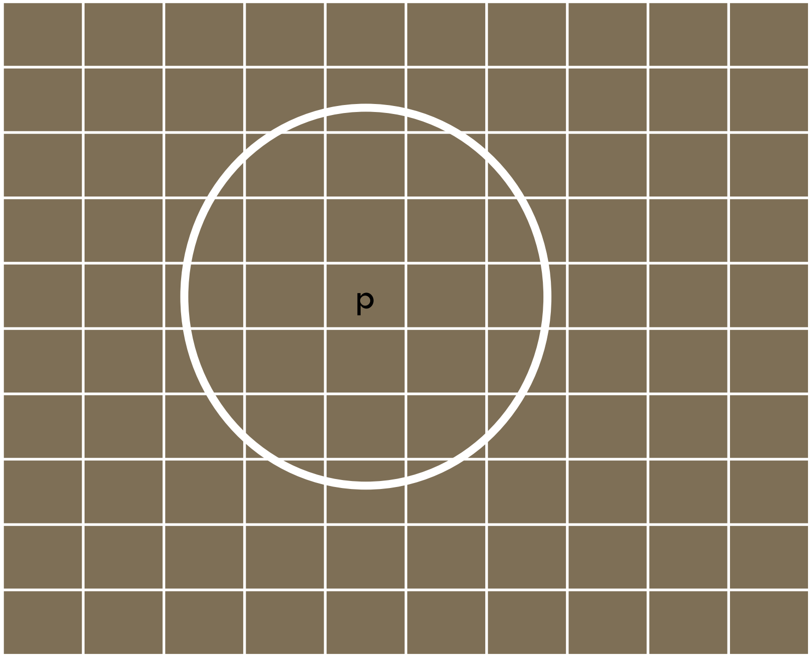
- Desigualdade triangular



Medidas de distância

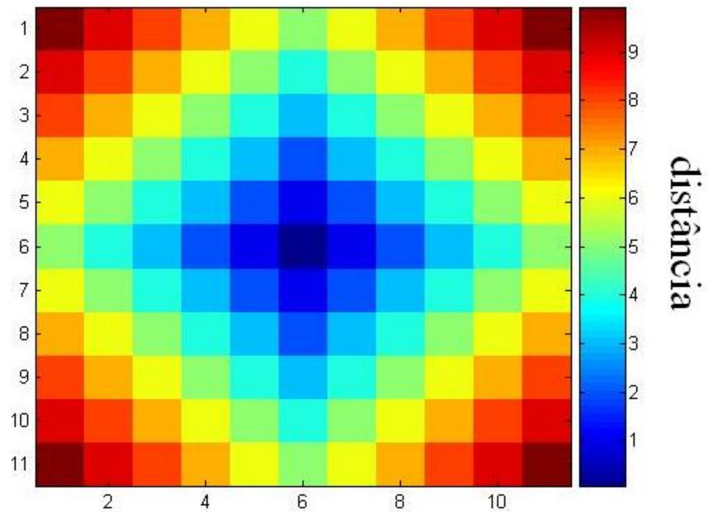
- Distância Euclidiana:

$$D_e(p, q) = \sqrt{(x - s)^2 + (y - t)^2}$$



Medidas de distância

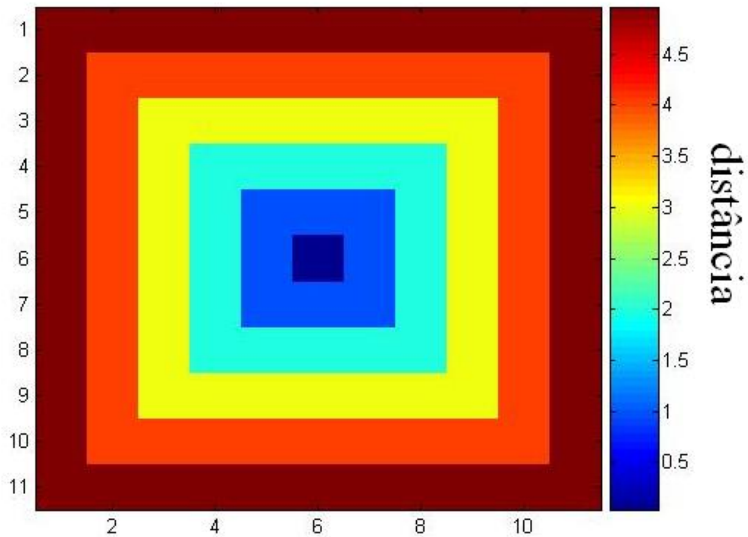
- Distancia D_4 ou *City-block distance ou distância de Manhattan*:
  - $D_4(p,q) = |x-s| + |y-t|$



S = {q| D4(p,q) ≤ r} forma
um diamante centrado em *p*

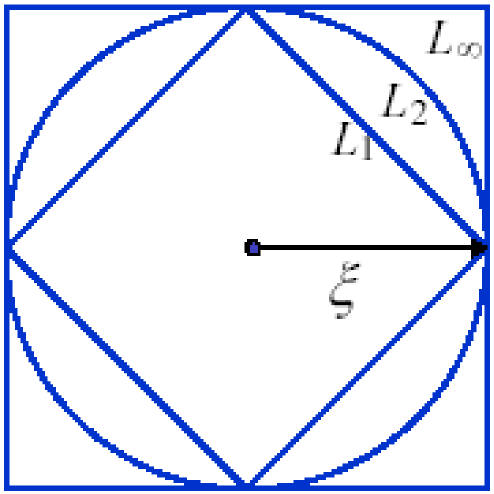
Medidas de distância

- Distancia D_8 ou *Chessboard distance* ou *Distancia de Chebyshev*
  - $D_8(p,q) = max(|x-s|, |y-t|)$
  - $S = \{q \mid D_8(p,q) \leq r\}$ forma um quadrado centrado em p

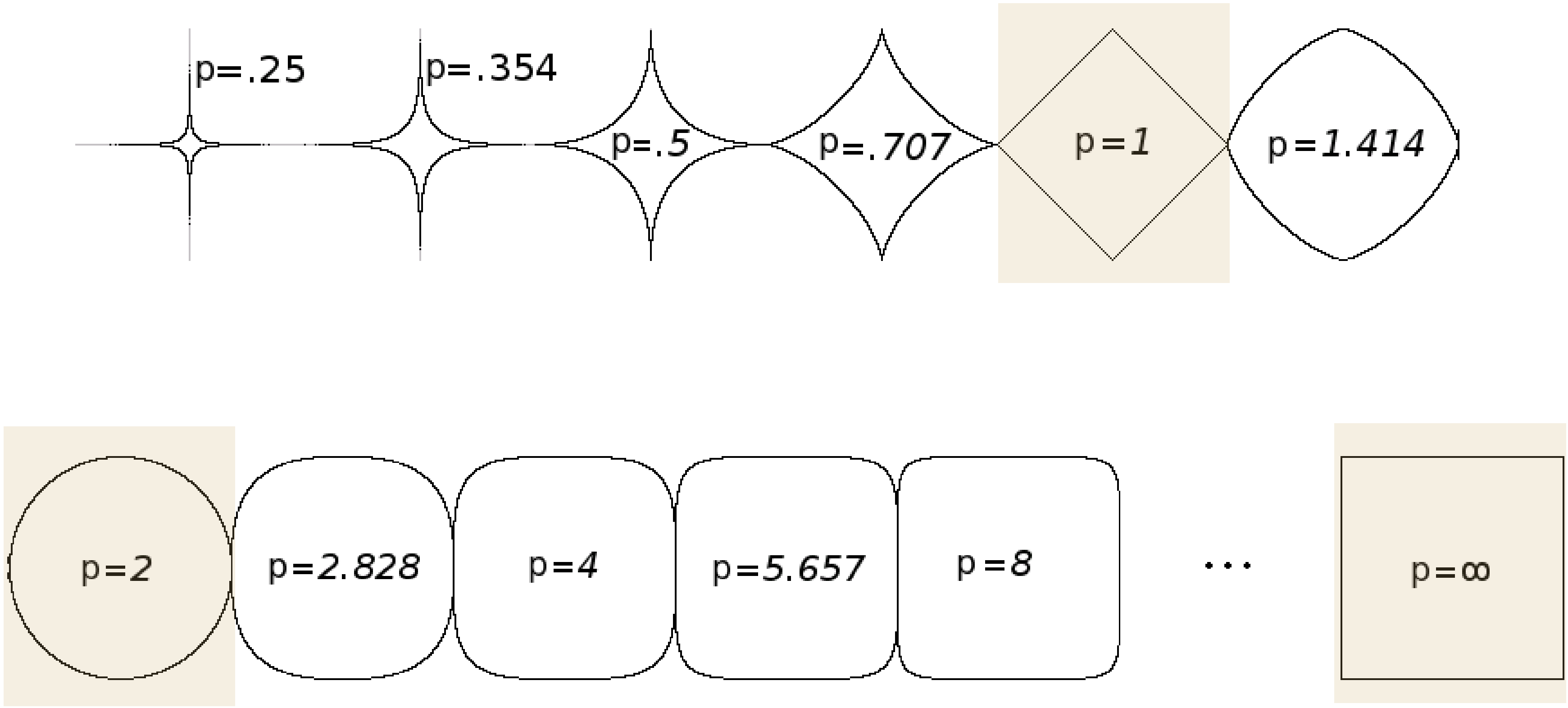


Medidas de distância

- Distância de Minkowski: é uma métrica do espaço Euclideano e generaliza as outras distâncias
  - $D_M(p,q) = [(x-s)^p + (y-t)^p]^{1/p}$
  - p = 1
    - distância de Manhattan
  - p = 2
    - distância Euclideana
  - p = ∞
    - distância de Chebyshev



Distância de Minkowski para diferentes valores de p



Aplicações: shape matching

Como obter o esqueleto da forma?

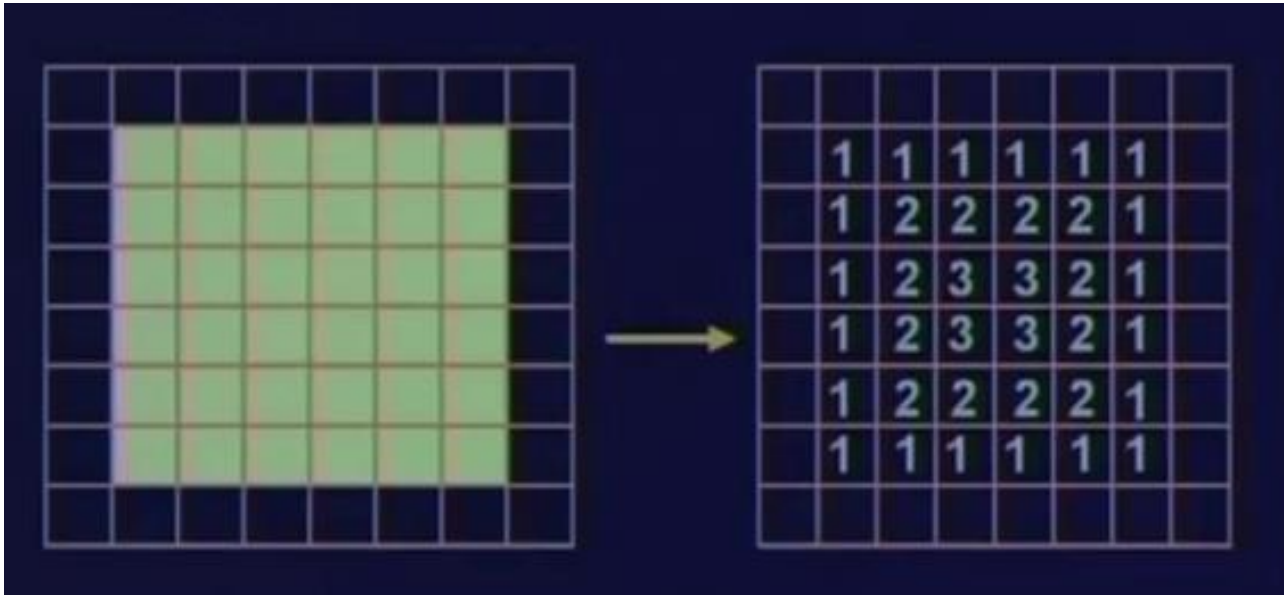
- Imagine uma região cujo material pega fogo de forma uniforme
- Coloque fogo simultaneamente em cada ponto do contorno e veja o fogo se alastrar para o interior da região;
- Sempre que fogo se encontra vindo de pontos diferentes, ele apaga formando uma linha
- Esta linha é o esqueleto

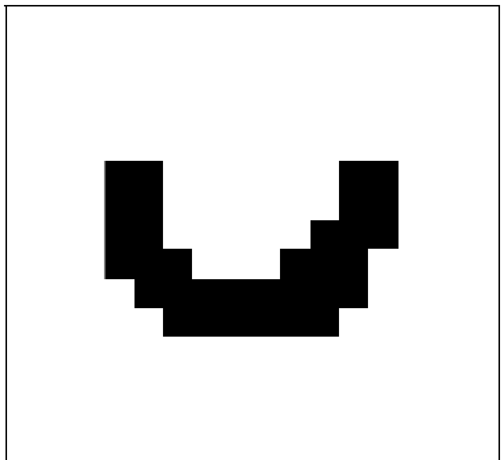
Esqueletonização

- O esqueleto pode ser obtido via transformada de distância
- Transformada de distância
  - Calcula um campo escalar (ou vetorial) que representa as distâncias mínimas entre o objeto e os pontos do espaço no qual ele está envolvido
  - A transformada de distância é normalmente utilizada em imagens binárias

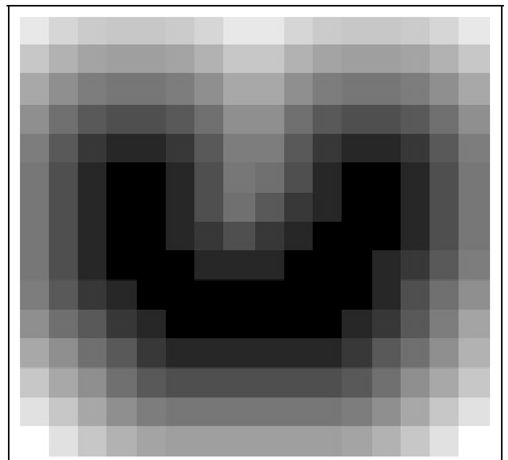
Transformada de distância

- O resultado da transformação é uma imagem similar à original, exceto que os níveis de cinza dentro da região são alterados para identificar a menor distância de cada ponto ao contorno da forma





(a)



(b)

5.8	5.4	5.1	5.0	5.0	5.1	5.4	5.8	5.8	5.4	5.1	5.0	5.0	5.1	5.4	5.8
5.0	4.5	4.1	4.0	4.0	4.1	4.5	5.0	5.0	4.5	4.1	4.0	4.0	4.1	4.5	5.0
4.2	3.6	3.2	3.0	3.0	3.2	3.6	4.2	4.2	3.6	3.2	3.0	3.0	3.2	3.6	4.2
3.6	2.8	2.2	2.0	2.0	2.2	2.8	3.6	3.6	2.8	2.2	2.0	2.0	2.2	2.8	3.6
3.2	2.2	1.4	1.0	1.0	1.4	2.2	3.2	3.2	2.2	1.4	1.0	1.0	1.4	2.2	3.2
3.0	2.0	1.0	**0.0**	**0.0**	1.0	2.0	3.0	2.8	2.0	1.0	**0.0**	**0.0**	1.0	2.0	3.0
3.0	2.0	1.0	**0.0**	**0.0**	1.0	2.0	2.8	2.2	1.4	1.0	**0.0**	**0.0**	1.0	2.0	3.0
3.0	2.0	1.0	**0.0**	**0.0**	1.0	1.4	2.0	1.4	1.0	**0.0**	**0.0**	**0.0**	1.0	2.0	3.0
3.0	2.0	1.0	**0.0**	**0.0**	**0.0**	1.0	1.0	1.0	**0.0**	**0.0**	**0.0**	1.0	1.4	2.2	3.2
3.2	2.2	1.4	1.0	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	1.0	2.0	2.8	3.6
3.6	2.8	2.2	1.4	1.0	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	**0.0**	1.0	1.4	2.2	3.2	4.1
4.2	3.6	2.8	2.2	1.4	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.4	2.2	2.8	3.6	4.5
5.0	4.2	3.6	2.8	2.2	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.2	2.8	3.6	4.2	5.0
5.7	5.0	4.2	3.6	3.2	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	3.2	3.6	4.2	5.0	5.7
6.4	5.7	5.0	4.5	4.1	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.1	4.5	5.0	5.7	6.4

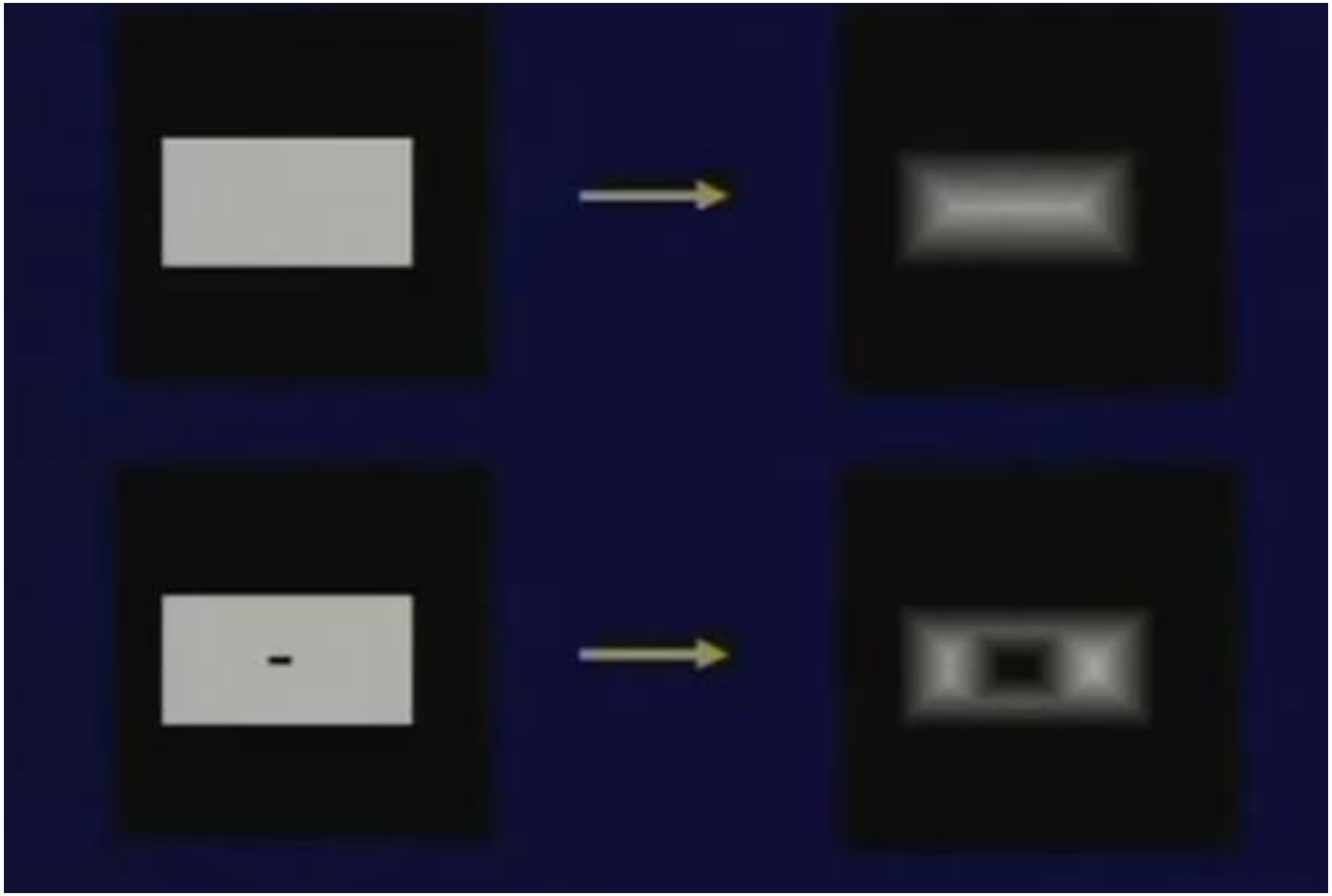
(c)

Figura 2.9: Cálculo da transformada distância. (a) Objeto original. (b) Transformada distância representada em tons de cinza. As regiões mais claras são as de maior distância. (c) Valor da distância de cada *pixel* ao objeto mostrado em *(a)*.

* Distância Euclidiana

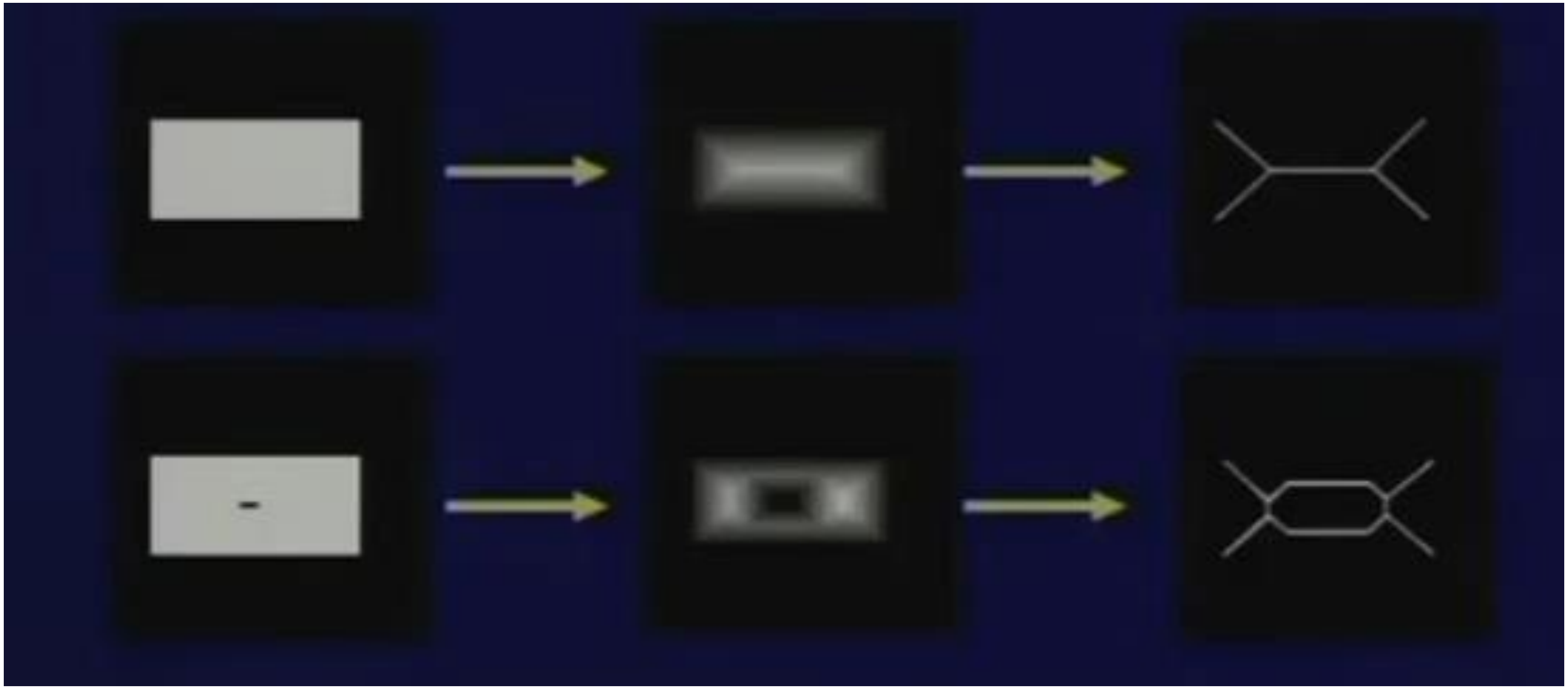
Transformada de distância

- Exemplos



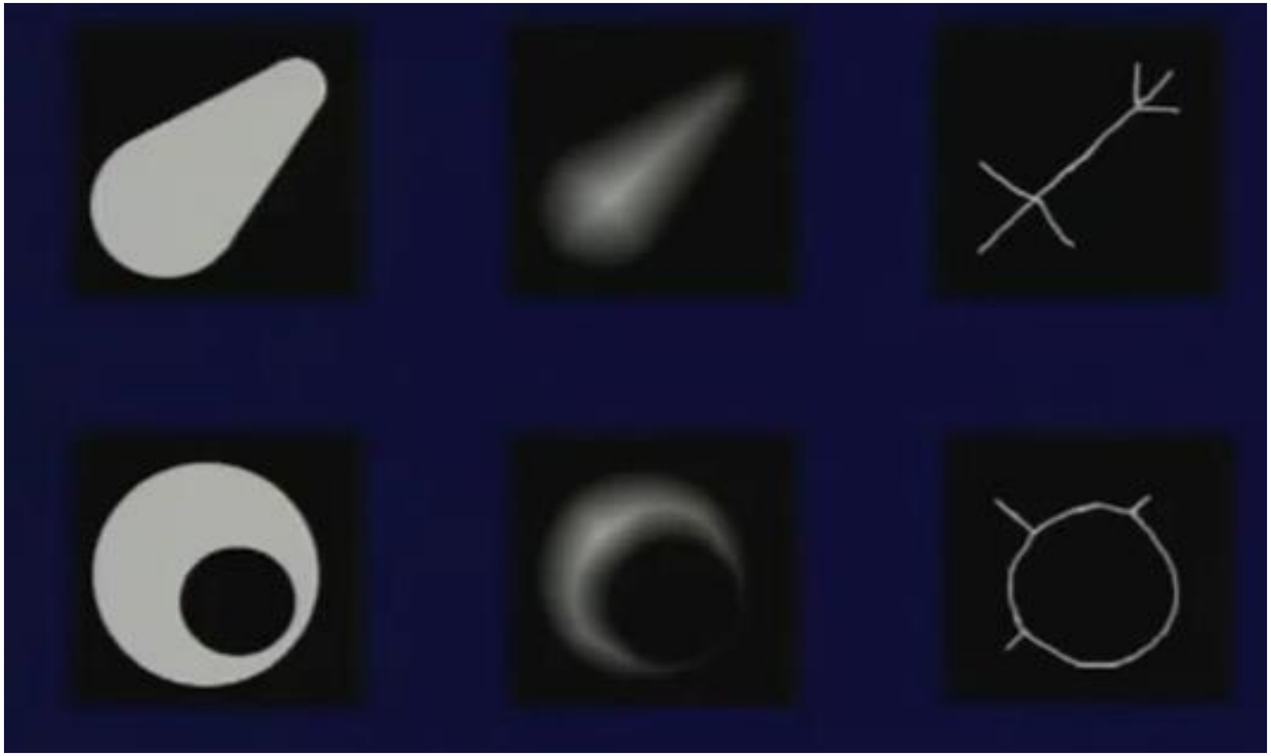
Esqueletização

- O esqueleto ocorre nas regiões de singularidade da transformada (cristas e descontinuidade de curvatura)



Esqueletização

- Outros exemplos



Esqueletização

- O uso de diferentes métricas → diferentes esqueletos
- O esqueleto é útil:
  - produz uma representação simples e compacta da forma;
  - preserva características topológicas e de tamanho da forma original