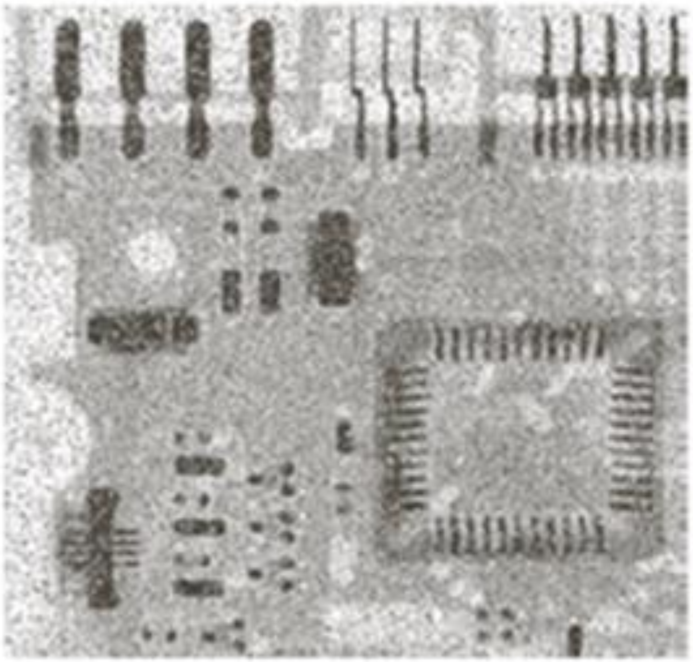
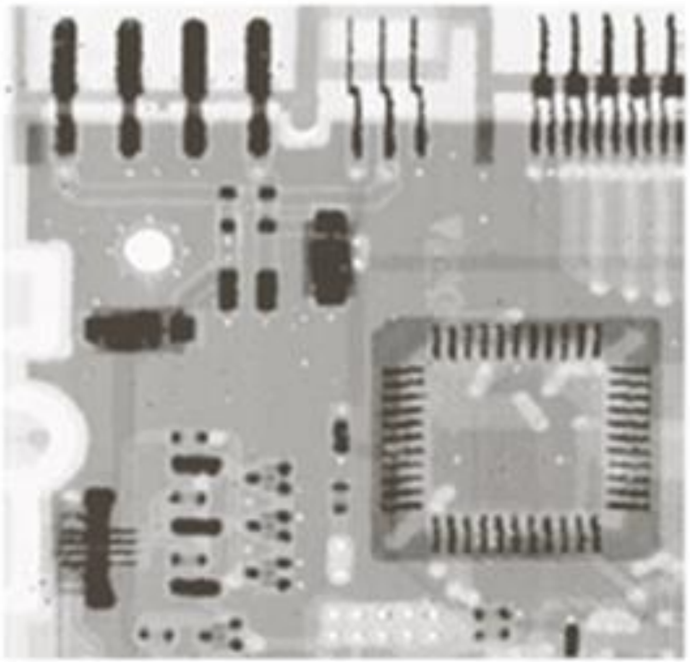
Filtragem espacial de imagem e convolução

Roteiro do curso

- Introdução
  - Objetos, definições, dispositivos de aquisição de imagens
  - Amostragem e Quantização
- Realce e restauração de imagens
  - Operadores ponto a ponto
  - Filtragem no domínio espacial
  - Filtragem no domínio da freqüência
- Segmentação
- Morfologia matemática
- Sistemas de cores para imagens
- Armazenagem, compressão e recuperação de imagens

Exemplo



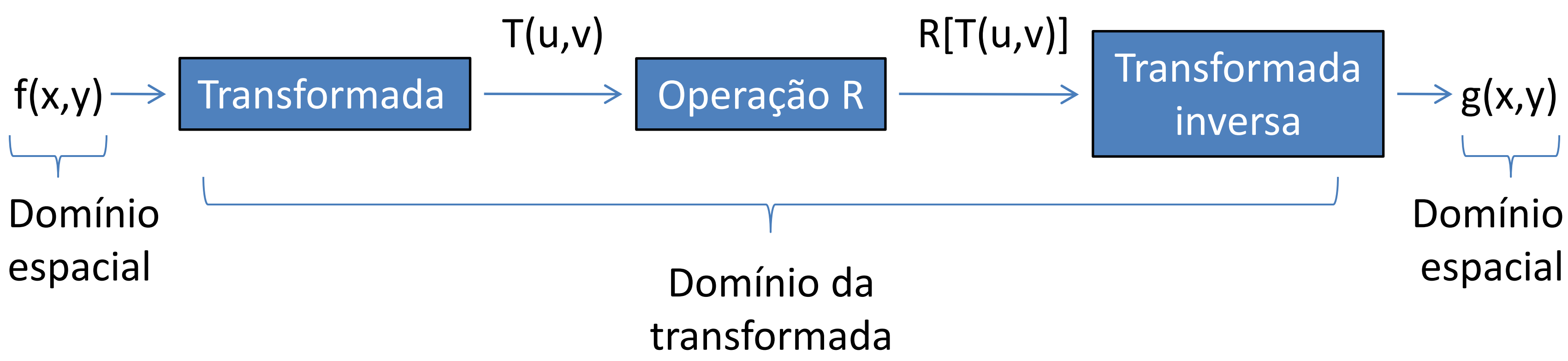


Roteiro da aula

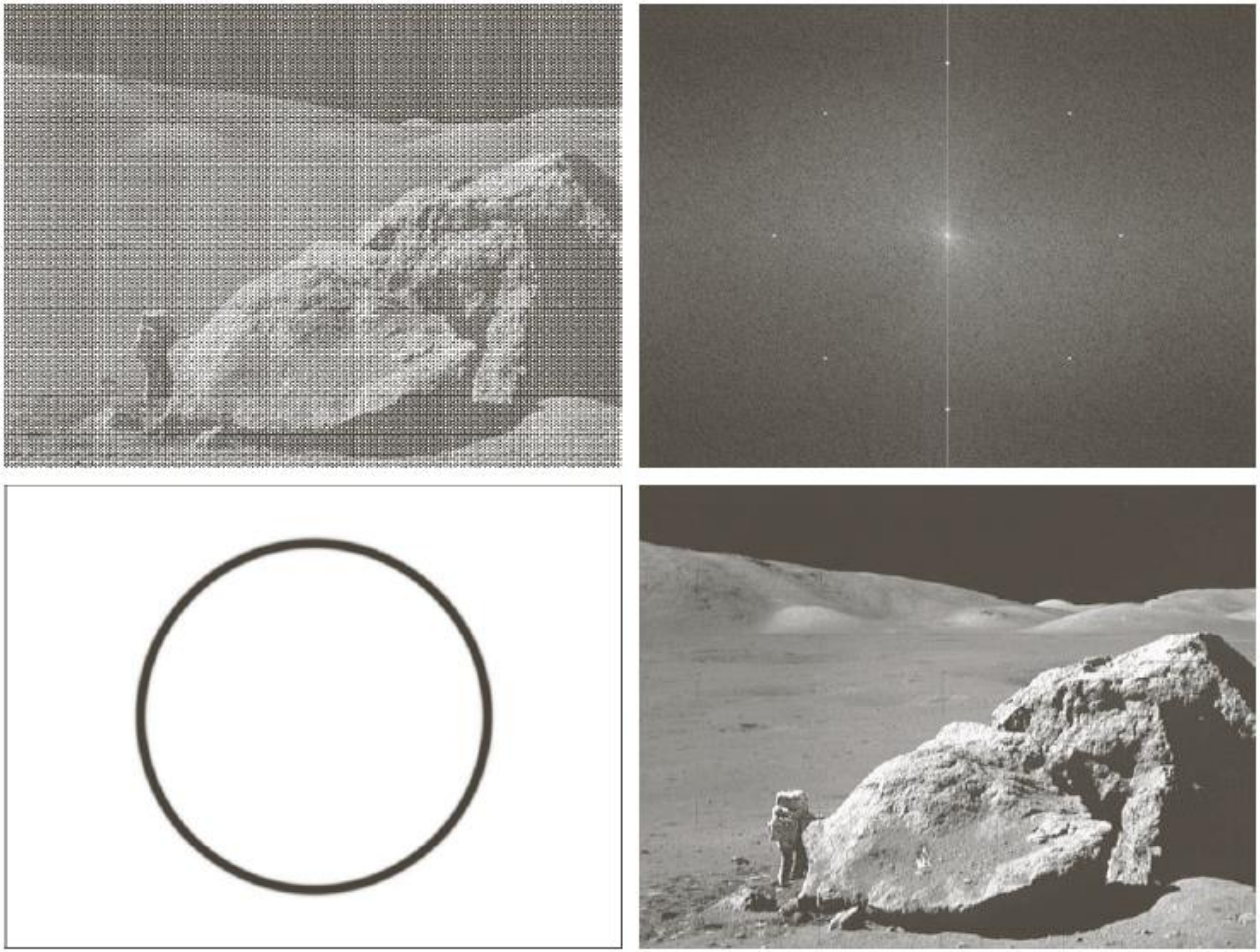
- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Domínio Espacial x Domínio da Transformada

- Refere-se ao plano da imagem
- Envolve a manipulação direta dos pixels da imagem



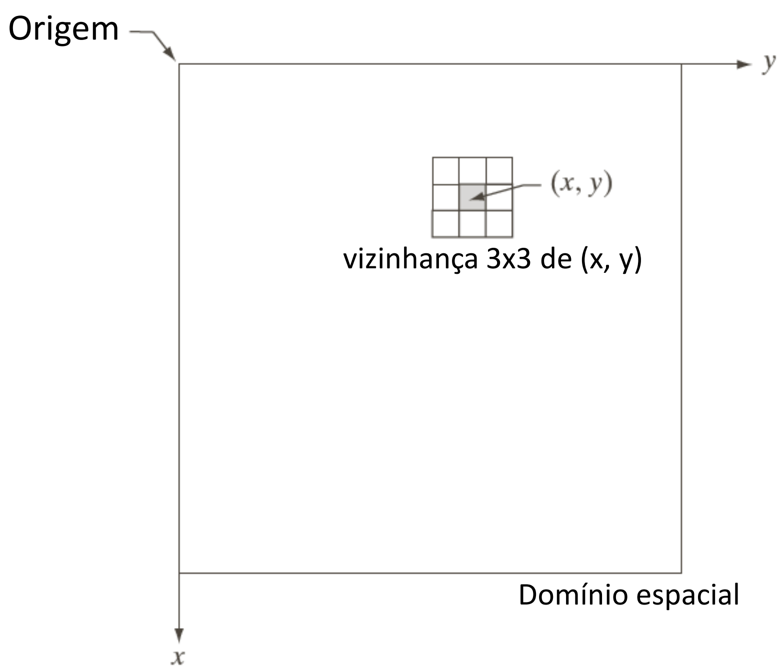
Domínio Espacial x Domínio da Transformada



Domínio da freqüência

Transformada de Fourier (próxima aula)

Domínio Espacial



f (x,y)

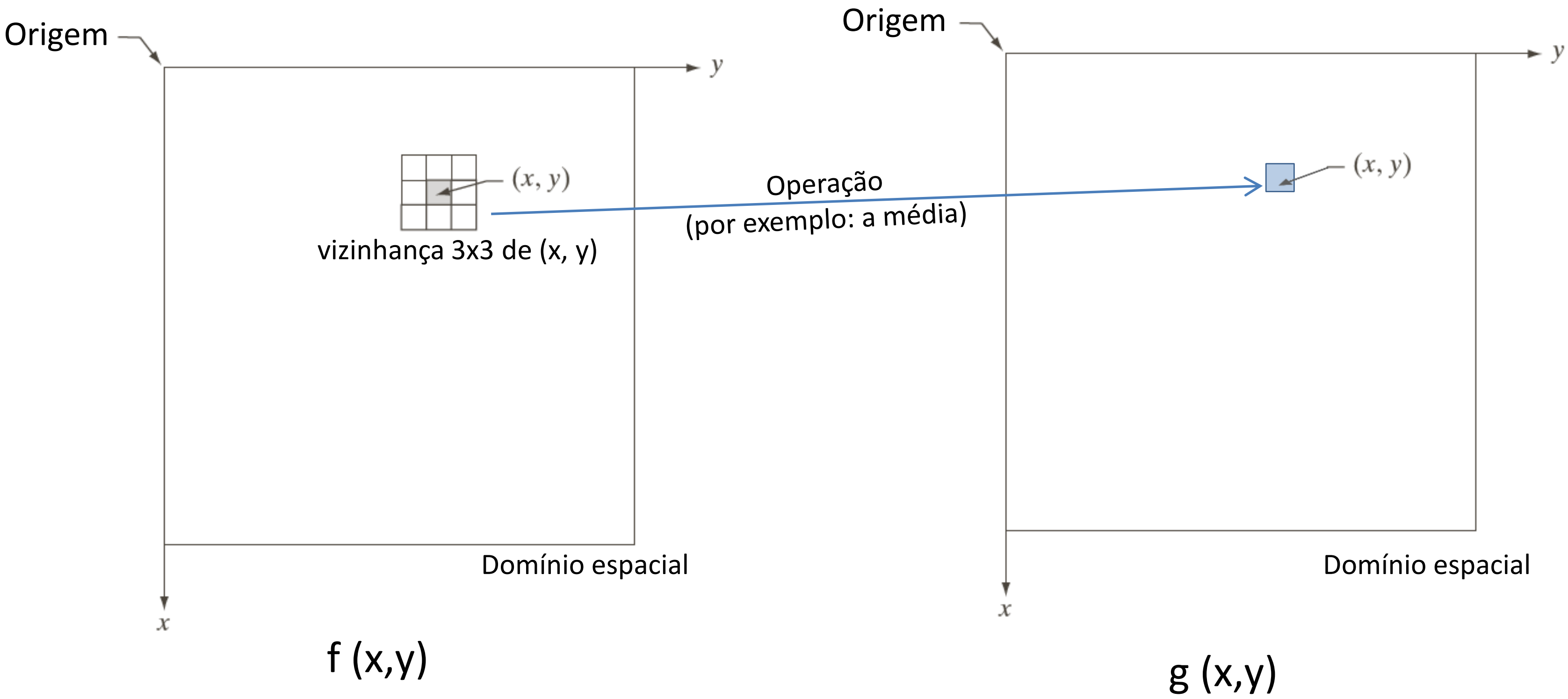
Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Filtragem Espacial

- Uma das principais ferramentas usadas em processamento de imagens, com diversas aplicações
  - Pré-processamento
  - Eliminação de ruídos
  - Suavização
  - Segmentação

Filtragem Espacial



$$g(x,y) = T[f(x,y)]$$

Filtragem Espacial

- Máscaras espaciais (*kernels, templates*, janelas)

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Valores das máscaras são chamados de coeficientes
- O processo de filtragem é similar a um operação matemática denominada **convolução**

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Correlação e Convolução

- Existem dois conceitos matemáticos importantes e que estão relacionados com a filtragem espacial linear: **correlação** e **convolução**
- Correlação
  - Desloca-se a máscara sobre a imagem e calcula-se a soma dos produtos em cada local
- Convolução
  - Mesmo processo que a correlação, exceto que a máscara é antes espelhada (rotacionada em 180º)

Exemplo 1D

Correlação

Origem f w

(a) 0 0 0 1 0 0 0 0 1 2 3 2 8

(b) 0 0 0 1 0 0 0 0
1 2 3 2 8

Posição inicial de alinhamento

Complemento com zeros

(c) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8

(d) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8

Posição após um deslocamento

(e) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8

Posição após quatro deslocamentos

(f) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 3 2 8

Posição final

Resultado completo da correlação

(g) 0 0 0 8 2 3 2 1 0 0 0 0

Resultado da correlação (tamanho original)

(h) 0 8 2 3 2 1 0 0

Convolução

Origem f w rotacionado 180°

0 0 0 1 0 0 0 0 8 2 3 2 1 (i)

0 0 0 1 0 0 0 0 (j)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (k)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (l)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (m)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (n)
8 2 3 2 1

Resultado completo da convolução

0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0 (o)

Resultado da convolução (tamanho original)

0 1 2 3 2 8 0 0 (p)

Exemplo 2D

Origem $f(x, y)$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & w(x,y) & \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

(a)

f complementada com zeros

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(b)

Posição inicial para w

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(c)

Resultado completo da correlação

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(d)

Resultado da correlação (tamanho original)

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(e)

w rotacionada

$$\begin{matrix} 9 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(f)

Resultado completo da convolução

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(g)

Resultado da convolução (tamanho original)

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

(h)

Correlação e Convolução

- Equações para máscaras de tamanho *m x n*
  - Correlação

$$w(x,y)\circ f(x,y)=\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}w(s,t)\,f(x+s,y+t)$$

  - Convolução

$$w(x,y)*f(x,y)=\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}w(s,t)\,f(x-s,y-t)$$

Espelhamento ou rotação, feito na imagem

$$a=(m-1)/2 \qquad b=(n-1)/2$$

Correlação e Convolução

- Observações
  - As equações devem ser avaliadas para todos os x e y
  - Se a máscara for simétrica, os resultados da convolução e da correlação são os mesmos
  - No geral, em aplicações de processamento de imagens, as máscaras são simétricas
  - “Convoluir uma máscara com uma imagem” corresponde as seguintes operações:

Desloca, Multiplica, Soma

Exercício

- Convoluir a função *f* com a máscara *w*, onde:

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

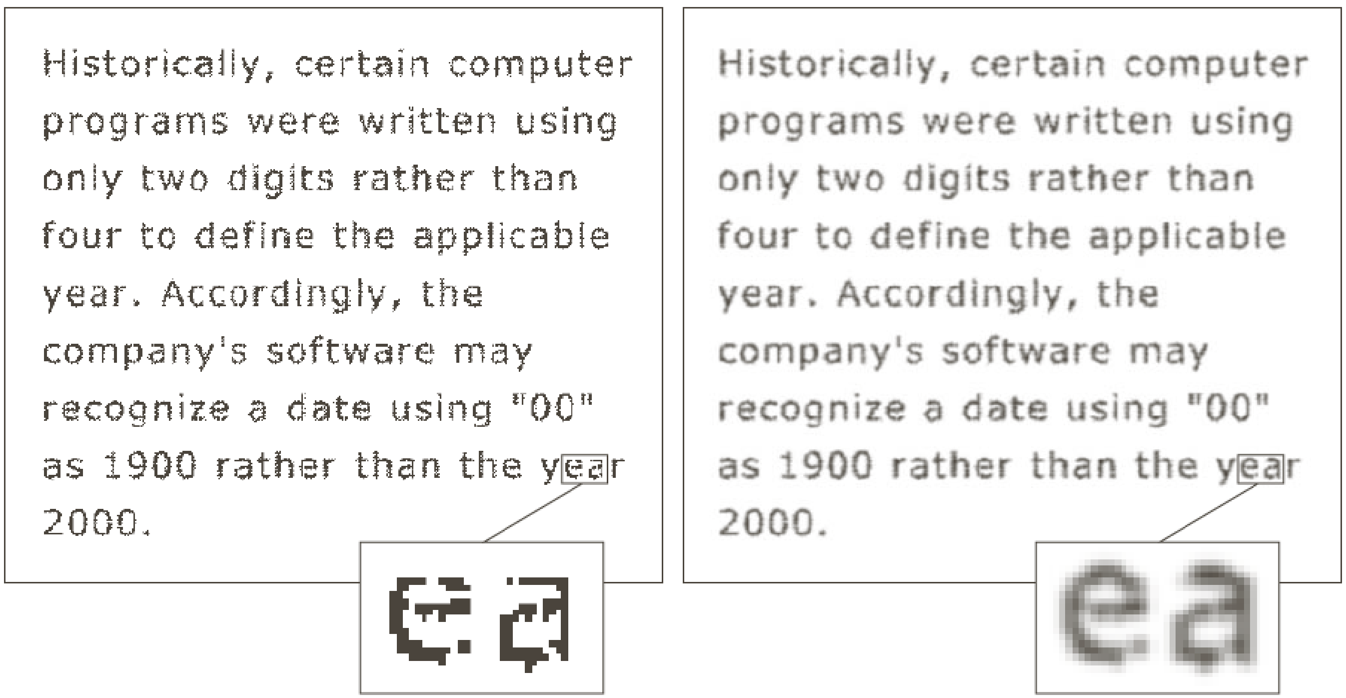
Filtros espaciais de suavização

- Filtros usados para o borramento e redução de ruídos
  - Borramento

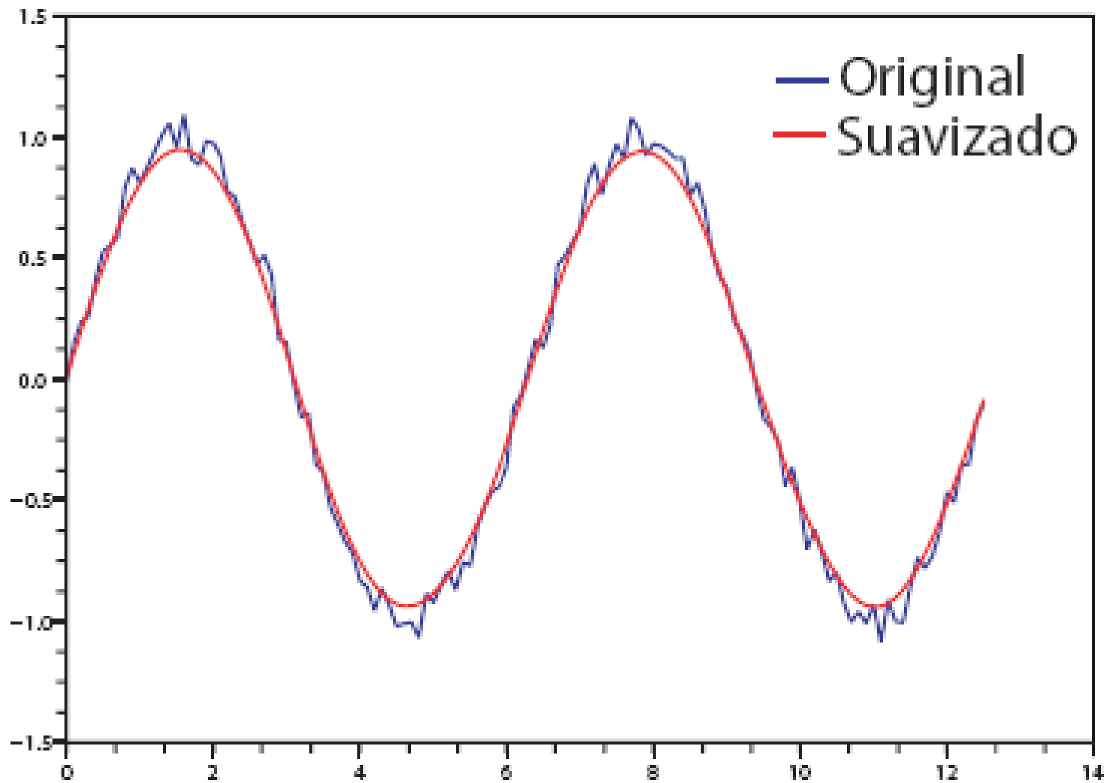
Filtros espaciais de suavização

- Redução de ruídos

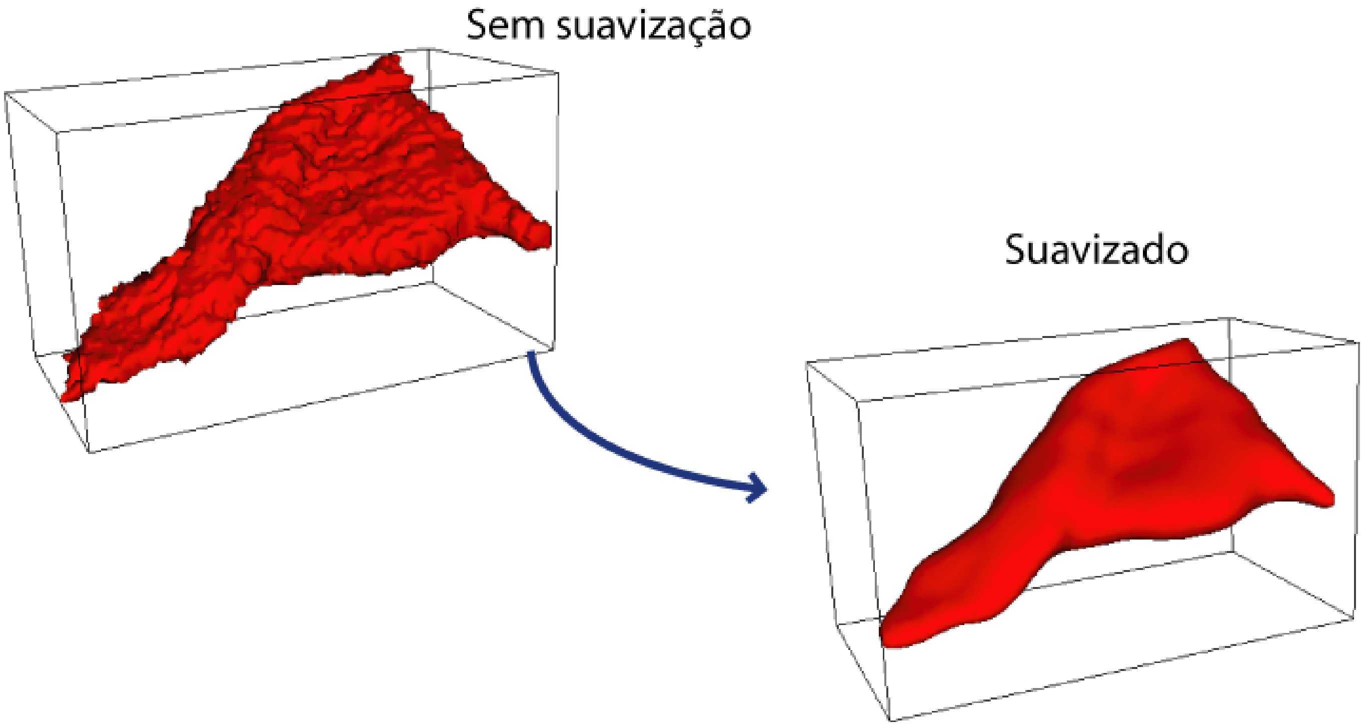
Exemplo: Suavização



Exemplo: Suavização



Exemplo: Suavização



Filtros espaciais de suavização

- Filtros
  - Filtro de média
  - Filtro Gaussiano
  - Filtro de mediana

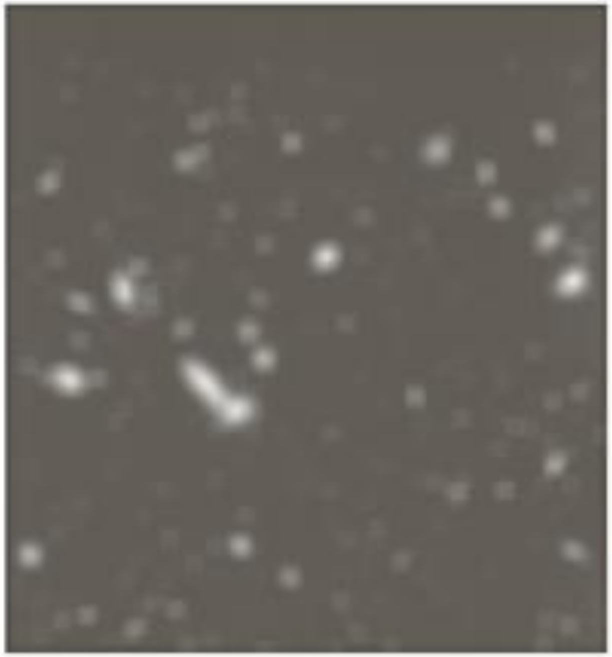
Filtros espaciais de suavização

- Filtros de média
  - Máscaras de convolução
  - Exemplos:

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{16} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Suavização

Original



Suavizada
(filtro de média 5x5)

Limiar

Filtros espaciais de suavização

- Filtros de média
  - Nota-se que neste caso não é o melhor filtro

Máscara usada: 5x5

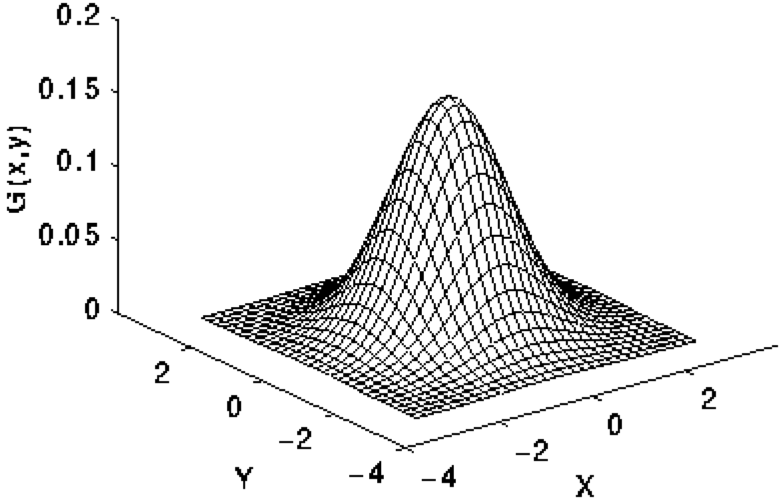
FIGURE 3.33 (a) Original image, of size 500 × 500 pixels. (b)–(f) Results of smoothing with square averaging filter masks of sizes $m = 3, 5, 9, 15$, and 35, respectively. The black squares at the top are of sizes 3, 5, 9, 15, 25, 35, 45, and 55 pixels, respectively; their borders are 25 pixels apart. The letters at the bottom range in size from 10 to 24 points, in increments of 2 points; the large letter at the top is 60 points. The vertical bars are 5 pixels wide and 100 pixels high; their separation is 20 pixels. The diameter of the circles is 25 pixels, and their borders are 15 pixels apart; their intensity levels range from 0% to 100% black in increments of 20%. The background of the image is 10% black. The noisy rectangles are of size 50 × 120 pixels.

a b
c d

Filtros espaciais de suavização

- Filtro Gaussiano
  - Função gaussiana

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$



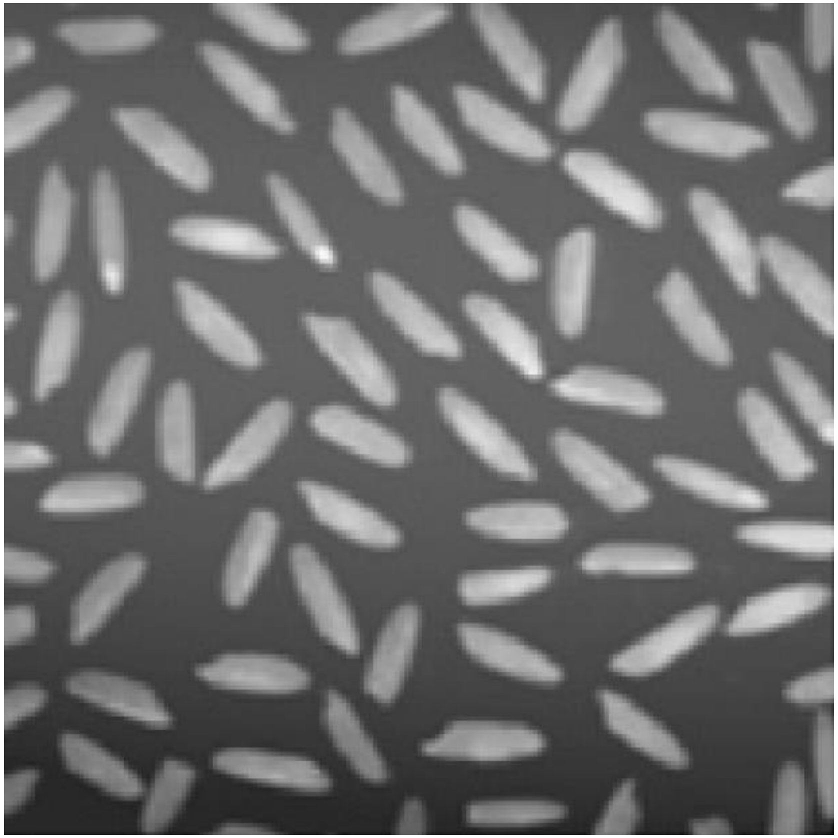
Máscara (sigma = 1)

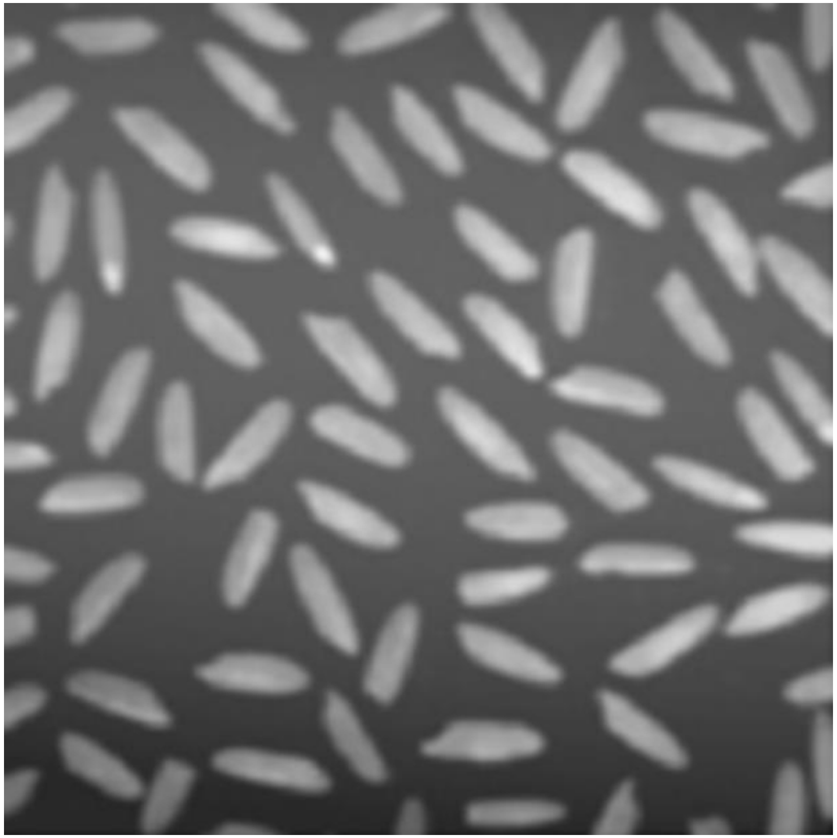
$\frac{1}{273}$

1	4	7	4	1
4	16	26	16	4
7	26	41	26	7
4	16	26	16	4
1	4	7	4	1

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/gsmooth.htm

Exemplo





rice.png - Matlab

Gerando a máscara Gaussiana

```matlab
% Função gaussiana 2D com média
% zero e desvio sigma
function g = GaussXY(x,y,sigma)

  fator = (1/sqrt(2*pi*(sigma^2)));

  g = fator*exp( -(x.^2 + y.^2) ...
             /(2*(sigma.^2)));

end
```

```matlab
% Máscara 5x5
result = zeros(5,5);
a = 2; b = 2;

sigma = 1;

for x=-a:a
  for y=-b:b
    result(x+a+1,y+b+1) ...
      = GaussXY(x,y,sigma);
  end
end

%normalizando o resultado
result = result./sum(result(:));
```

result ~=

10^{-3} *

23	34	38	34	23
34	49	56	49	34
38	56	63	56	38
34	49	56	49	34
23	34	38	34	23

obs: esse sqrt é da 1D.
No 2D não tem mesmo.
sorry.

Filtros espaciais de suavização

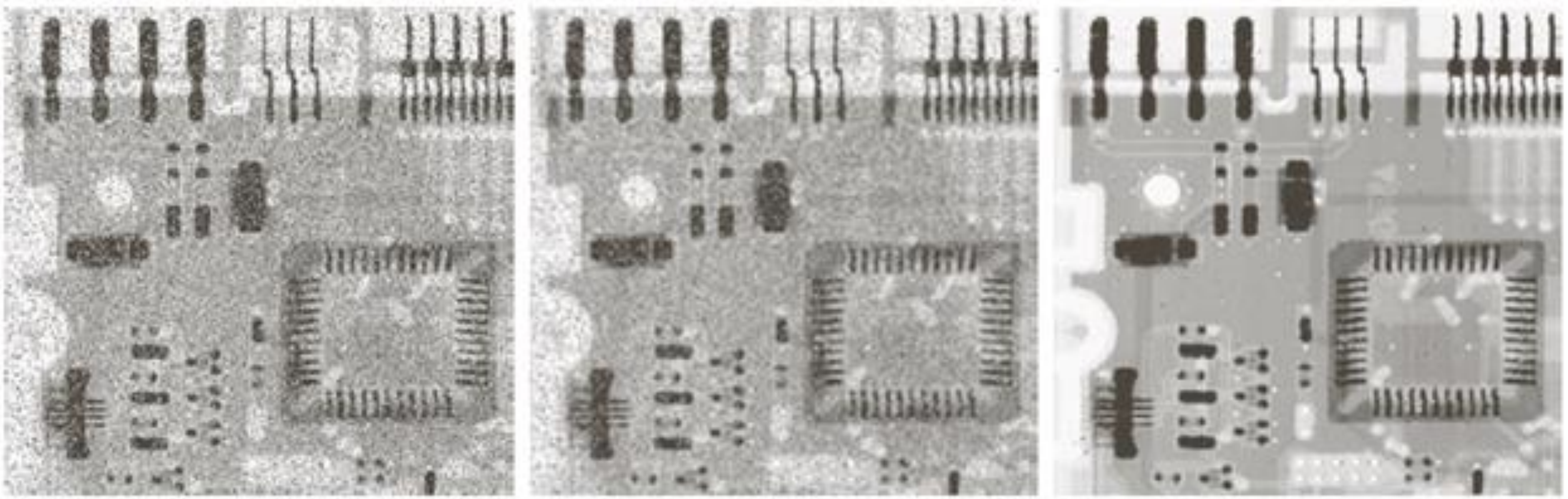
- Filtros de mediana
  - Filtro não linear (não é feita a convolução)
  - A intensidade de cada pixel é substituída pela mediana das intensidades na vizinhança daquele pixel.
    - Ex: o ponto de valor 51 é um ruído:

1	2	2	3	0
0	51	3	1	2
0	3	2	0	1
2	1	0	3	1
3	0	1	2	3

0 - 0 - 1 - 2 - 2 - 2 - 3 - 3 - 51

Filtros espaciais de suavização

- Filtros de mediana



Original Filtro de média 3x3 Filtro de mediana 3x3

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Filtros espaciais de realce

- O realce (*sharpening*) tem como objetivo destacar as transições de intensidade na imagem

Filtros espaciais de realce

- Analogias
  - Filtro de média (suavização)⇔ Integração
  - Realce ⇔ Derivação
- Derivadas são proporcionais ao grau de descontinuidade na imagem
  - Enfatizam as regiões de bordas e os ruídos
  - Não enfatiza regiões constantes ou com variações de intensidade suaves

Derivadas

- As derivadas de uma função digital são definidas em termos de diferenças

Filtros espaciais de realce

- Filtros
  - Laplaciano
  - *Unsharp masking* e *highboost filtering*
  - Derivativos

Filtros espaciais de realce

- Filtro Laplaciano
  - Utiliza derivadas de segunda ordem

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

$$\nabla^2 f = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

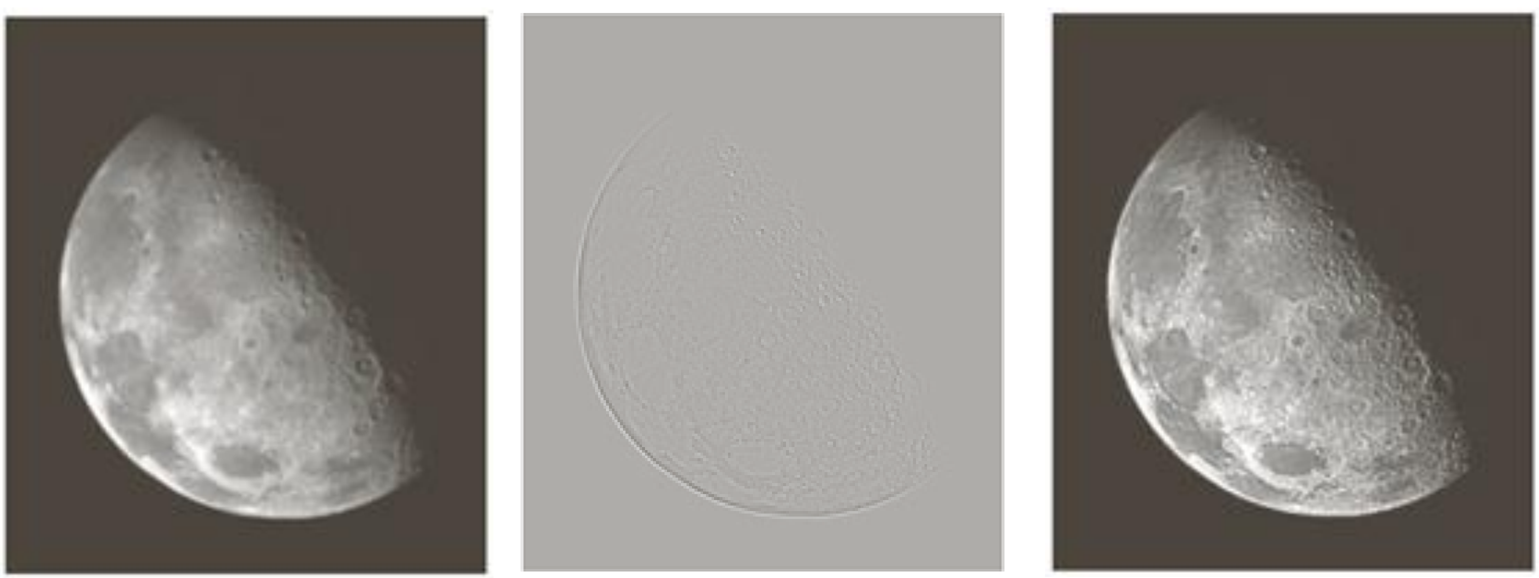
0	−1	0
−1	4	−1
0	−1	0

−1	−1	−1
−1	8	−1
−1	−1	−1

Filtros espaciais de realce

- Filtro Laplaciano
  - Realce é feito somando-se o Laplaciano à imagem

$$g(x,y) = f(x,y) + c[\nabla^2 f(x,y)]$$



Filtros espaciais de realce

- *Unsharp masking e* filtragem *highboost*
  - Seja $\bar{f}(x,y)$ uma suavização de $f(x,y)$

$$g_{mask}(x,y) = f(x,y) - \bar{f}(x,y)$$
$$g(x,y) = f(x,y) + k.g_{mask}(x,y)$$

- *k = 1 → unsharp masking*
- *K > 1 → highboost filtering*

Filtros espaciais de realce

- *Unsharp masking*

Sem filtragem

Com filtragem

Fonte: wikipedia

Filtros espaciais de realce

- Filtragem *highboost*

Original

Suavizada (Gaussiana)

Unsharp mask (g_{mask})

Resultado usando *unsharp mask*

Resultado usando filtragem *highboost*

Filtros espaciais de realce

- Filtros derivativos
  - Derivadas de primeira ordem
  - Utilizam a magnitude do gradiente
    - Vetor que indica a direção de maior variação de uma função

$$\nabla f \equiv grad(f) = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

    - Magnitude

$$M(x, y) = mag(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \approx |g_x| + |g_y|$$

Filtros espaciais de realce

- Cálculo da derivada para funções discretas
  - Máscaras
    - Operador gradiente cruzado de Roberts
    - Operador de Prewitt
    - Operador de Sobel

Filtros espaciais de realce

- Operador gradiente-cruzado de Roberts

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\nabla f(x,y)\right| \approx \sqrt{(f * h_1)^2 + (f * h_2)^2}$$

obs: completar a máscara com 0's para ter o tamanho 3x3.

Filtros espaciais de realce

- Operador gradiente-cruzado de Roberts

Filtros espaciais de realce

- Operador de Prewitt

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\nabla f(x,y)\right| \approx \sqrt{(f * h_1)^2 + (f * h_2)^2}$$

Filtros espaciais de realce

- Operador de Prewitt

Filtros espaciais de realce

- Operador de Sobel

$$h_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\nabla f(x, y)\right| \approx \sqrt{(f * h_1)^2 + (f * h_2)^2}$$

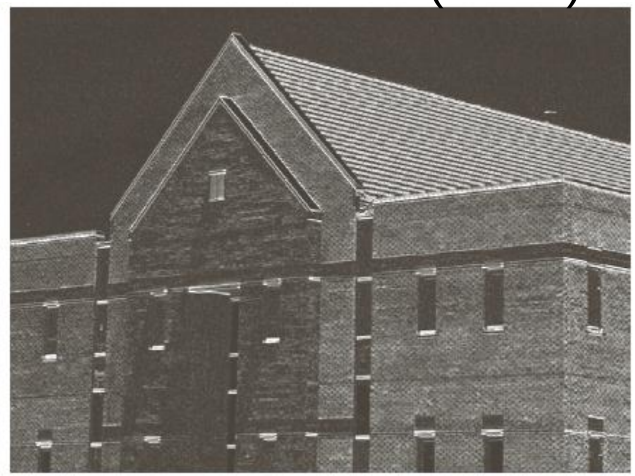
Filtros espaciais de realce

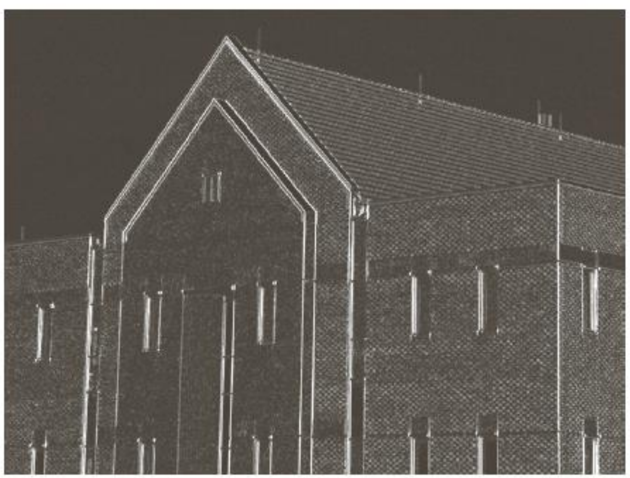
- Operador de Sobel

Filtros espaciais de realce

Original

Bordas horizontais (Sobel)





Bordas verticais (Sobel)

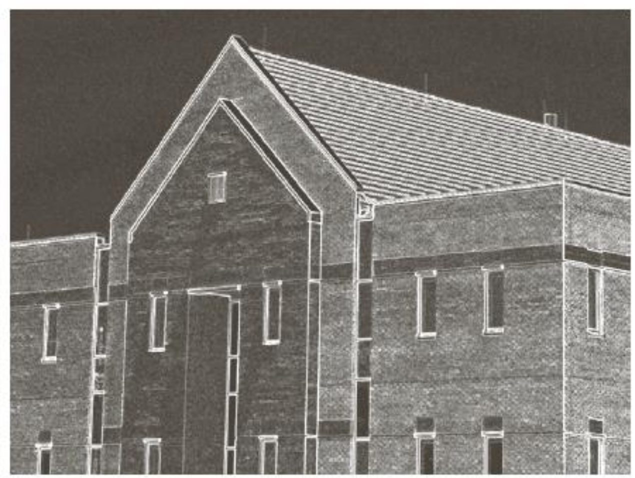
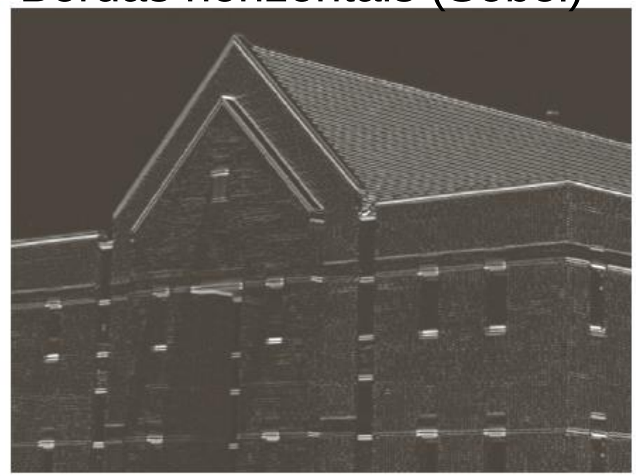


Imagem gradiente

Filtros espaciais de realce

Original suavizada

Bordas horizontais (Sobel)



Bordas verticais (Sobel)

Imagem gradiente

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Agora é a hora da prática!

Roteiro da aula

- Domínio Espacial x Domínio da Transformada
- Filtragem Espacial
- Correlação e Convolução
- Filtros espaciais de suavização
- Filtros espaciais de realce

Próxima aula:
Filtragem no domínio da freqüência

Transformada de Fourier