MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Morfologia

- Na Biologia
  - área que trata com a forma e a estrutura de plantas e animais

- Processamento de Imagens
  - Ferramenta para extração de componentes de imagens que sejam úteis na representação e descrição da forma de uma região
  - As técnicas morfológicas também são utilizadas para filtragem, afinamento e poda
  - Baseada na Teoria dos Conjuntos

Definições Básicas

- Imagens binárias
  - O conjunto de todos os pixels pretos (ou brancos) é uma descrição completa dessa imagem
  - Os conjuntos são membros do espaço bi-dimensional de números inteiros Z^2. Cada elemento é definido pelas coordenadas (x, y)
- Imagens em nível de cinza
  - Podem ser representadas por conjuntos cujos componentes estejam em Z^3: (x, y, z), onde z corresponde ao valor da intensidade

Definições Básicas

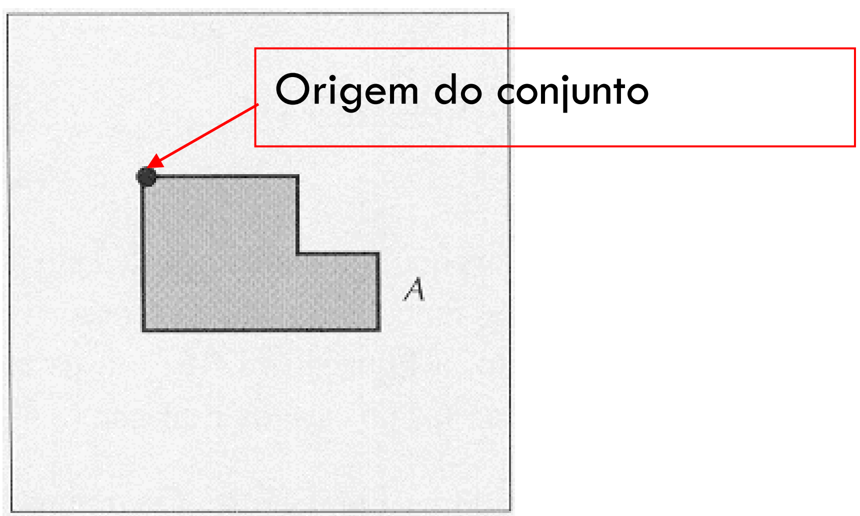
- Sejam A e B conjuntos de Z^2, com componentes:
  - $a = (a_1, a_2)$
  - $b = (b_1, b_2)$

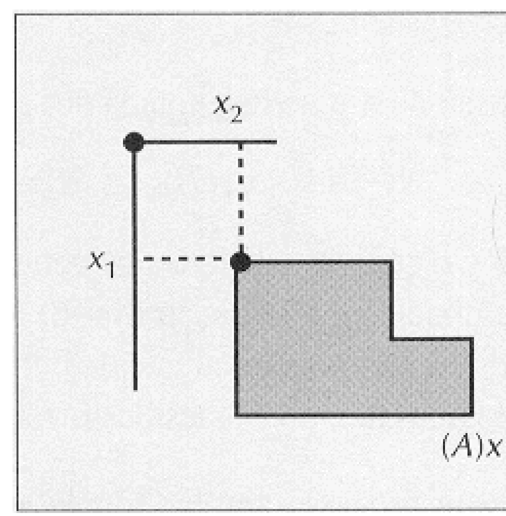
- Considere também
  - $x = (x_1, x_2)$

Definições Básicas

- Translação de *A* por *x*

$$(A)_x = \{c \mid c = a + x, \quad para\ a \in A\}$$

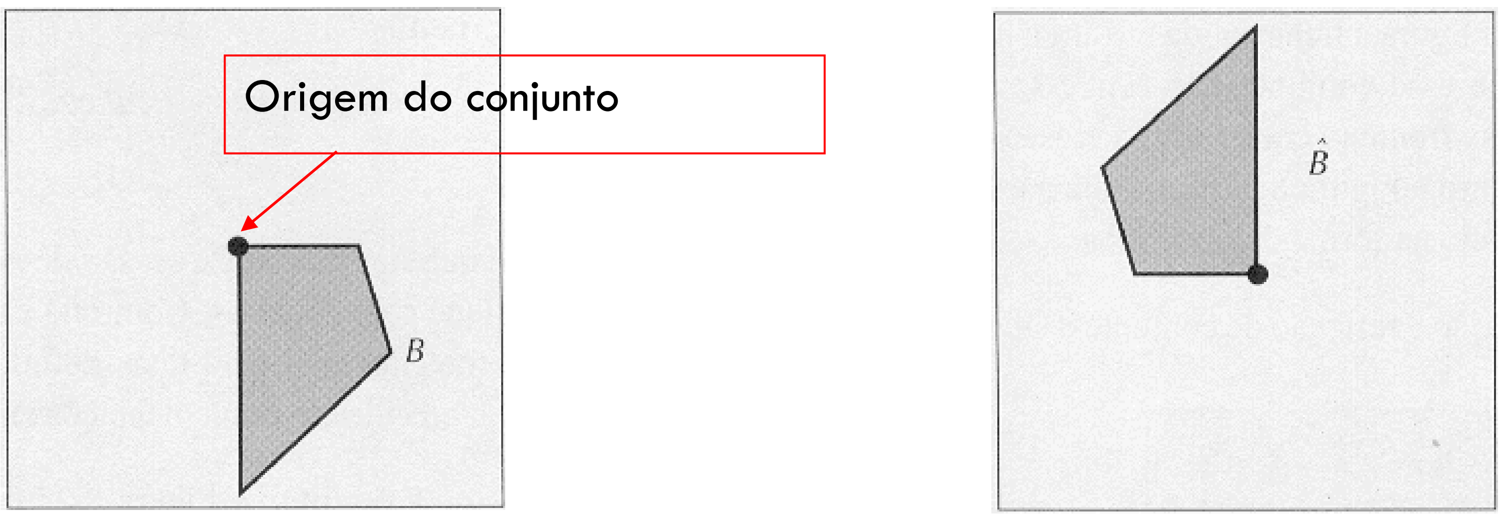




Definições Básicas

- Reflexão de *B*

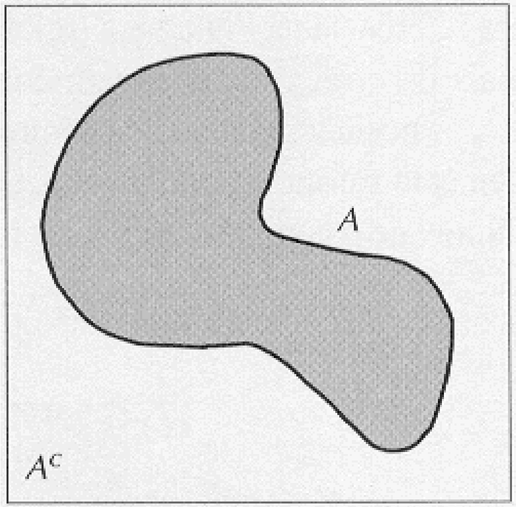
$$\hat{B} = \{x \mid x = -b, \quad para\ b \in B\}$$



Definições Básicas

- Complemento do conjunto *A*

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$



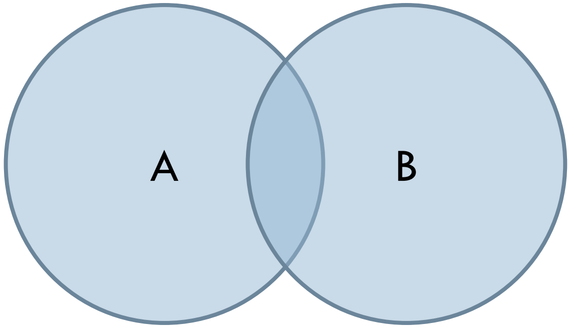
Definições Básicas

- Interseção de *A* e *B*
  - É o conjunto de pixels pertencentes a ambos

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- União de *A* e *B*
  - É o conjunto de pixels que pertencem a *A* ou *B*

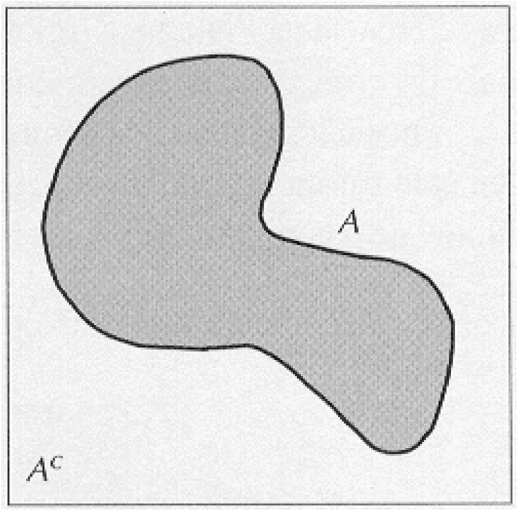
$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

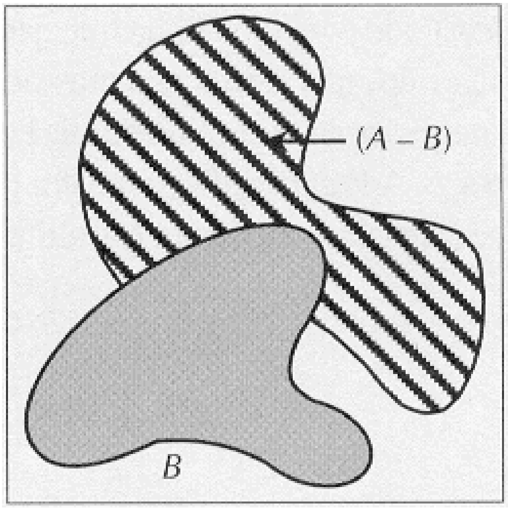


Definições Básicas

- Diferença de dois conjuntos *A* e *B*
  - É o conjunto de pixels que pertencem a um, mas não ao outro

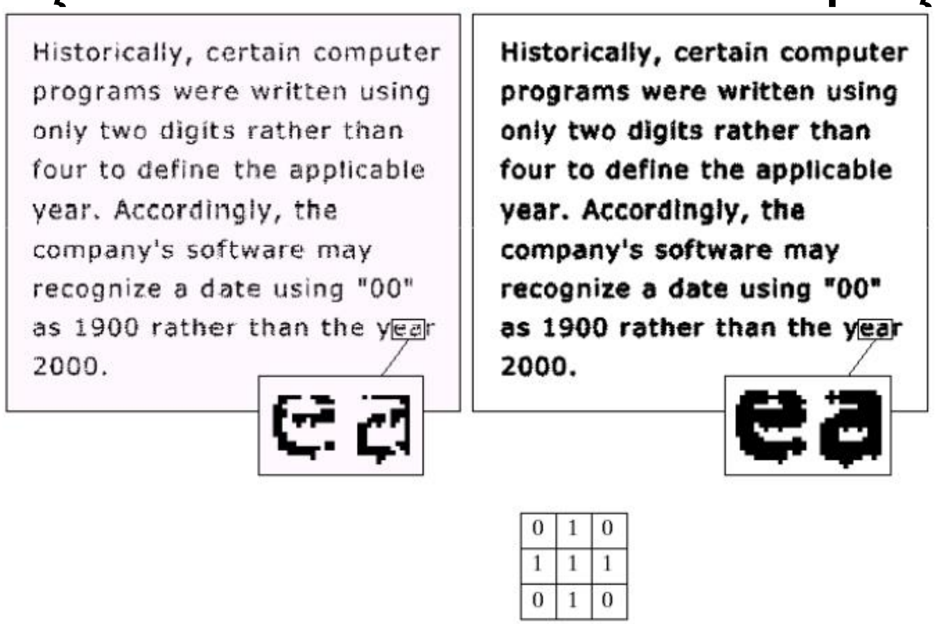
$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$$





Dilatação Binária

- A dilatação é uma transformação morfológica que combina dois conjuntos usando adição vetorial
  - Como o seu nome diz, o resultado será uma imagem "engordada"
- Aplicação: Preenchimento de espaço (*gap filling*)



a c
b

FIGURE 9.5
(a) Sample text of poor resolution with broken characters (magnified view).
(b) Structuring element.
(c) Dilation of (a) by (b). Broken segments were joined.

Dilatação Binária

- A dilatação de *A* por *B* é definida como

$$A \oplus B = \left\{ c \in Z^2 \middle| c = a + b,\ a \in A \ e \ b \in B \right\}$$

- Onde
  - *A* e *B* são conjuntos de Z^2 (imagens binárias)
  - *A* é a imagem sendo operada
  - *B* é chamado de **Elemento Estruturante**
    - Sua natureza define como a dilatação irá ocorrer

Dilatação Binária

- A dilatação de *A* por *B* é definida como

$$A \oplus B = \left\{ c \in Z^2 \middle| c = a + b,\ a \in A \ e \ b \in B \right\}$$

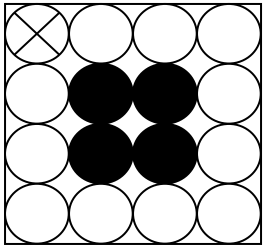
- A dilatação é o conjunto de todos os deslocamentos **c** tais que *A* sobreponha-se em pelo menos um elemento não nulo.

Dilatação Binária

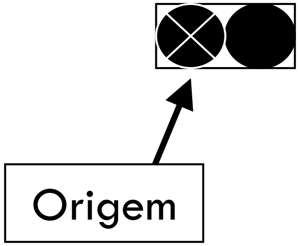
- Exemplo
  - Dado a imagem *A* e o elemento estruturante *B*, calcular

$$A \oplus B$$

A = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}



B = {(0,0),(0,1)}

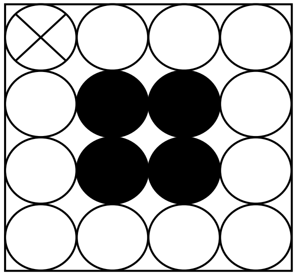


Dilatação Binária

- Exemplo

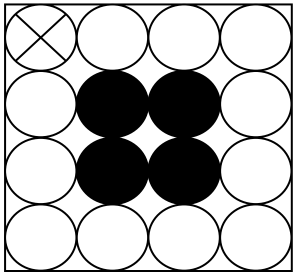
$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

A = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}



{A + [(0,0)]} = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}

(1,1) + (0,0) = (1,1)
(1,2) + (0,0) = (1,2)
(2,1) + (0,0) = (2,1)
(2,2) + (0,0) = (2,2)



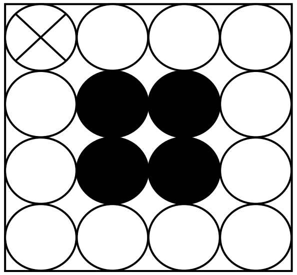
A translação de qualquer pixel por (0,0) não altera sua posição

Dilatação Binária

- Exemplo

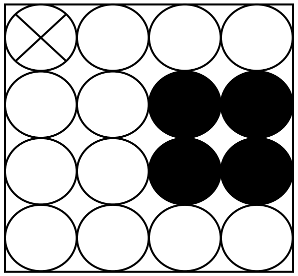
$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

A = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}



{A + [(0,1)]} = {(1,2),(2,2),(1,3),(2,3)}

(1,1) + (0,1) = (1,2)
(1,2) + (0,1) = (1,3)
(2,1) + (0,1) = (2,2)
(2,2) + (0,1) = (2,3)

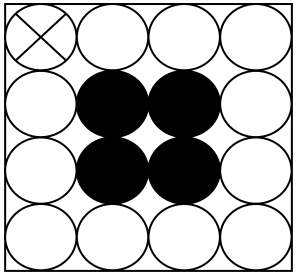


Dilatação Binária

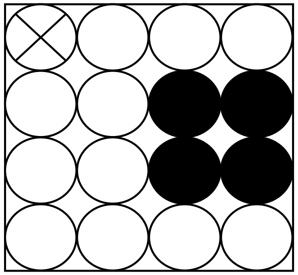
- Exemplo

$$A \oplus B = \{A + [(0,0)]\} \cup \{A + [(0,1)]\}$$

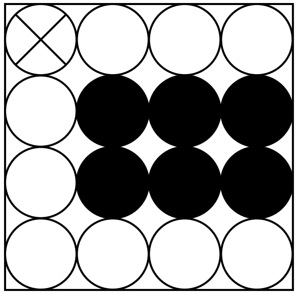
$\{A + [(0,0)]\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$



$\{A + [(0,1)]\} = \{(1,2),(2,2),(1,3),(2,3)\}$

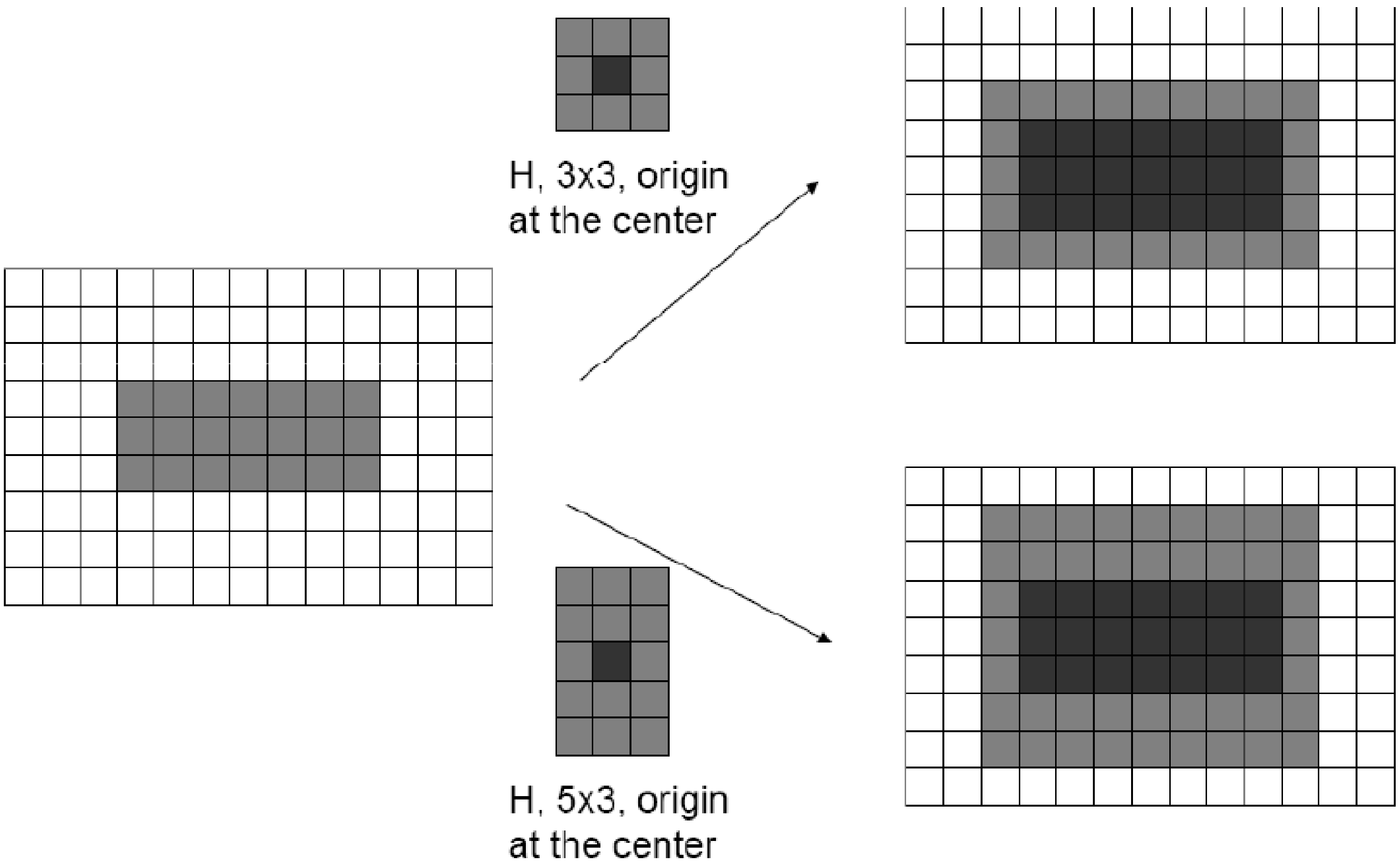


$A \oplus B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$



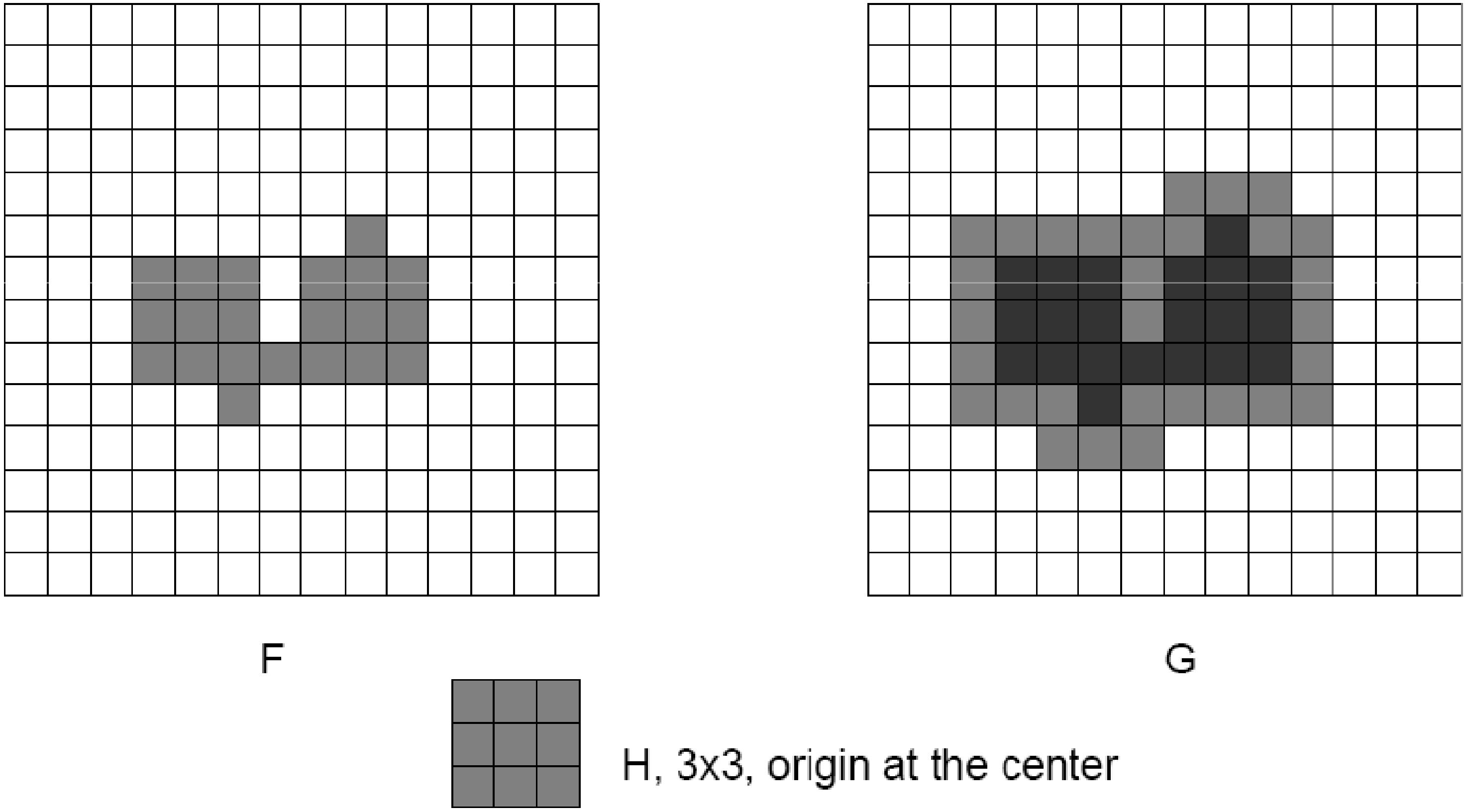
Dilatação Binária

- Exemplos



Dilatação Binária

- Exemplos



Erosão Binária

- A erosão é uma transformação morfológica que combina dois conjuntos usando vetores de subtração
  - Como o seu nome diz, o resultado será uma imagem "encolhida"
- Aplicação: Remoção de Componentes

a b c

FIGURE 9.7 (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.

Erosão Binária

- A erosão de *A* por *B* é definida como

$$A \Theta B = \left\{ c \in Z^2 \middle| c + b \in A,\ para\ \ todo\ \ b \in B \right\}$$

- Onde
  - *A* e *B* são conjuntos de Z^2 (imagens binárias)
  - *A* é a imagem sendo operada
  - *B* é chamado de **Elemento Estruturante**
    - Sua natureza define como a erosão irá ocorrer

Erosão Binária

- A erosão de *A* por *B* é definida como

$$A \Theta B = \left\{ c \in Z^2 \middle| c + b \in A,\ para\ \ todo\ \ b \in B \right\}$$

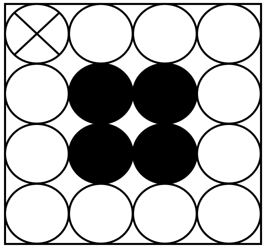
- A erosão é conjunto de translações de *B* que alinham *B* sobre o conjunto de pixels do objeto em *A*
  - Isso significa que nem todas as translações necessitam ser consideradas, mas somente aquelas que tem a origem de *B* em um membro de *A*

Erosão Binária

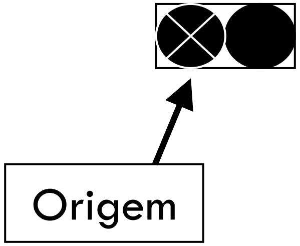
- Exemplo
  - Dado a imagem A e o elemento estruturante B, calcular

$$A \Theta B$$

A = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}

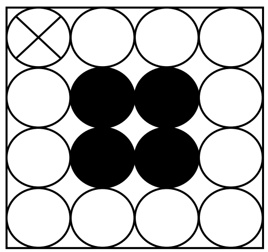


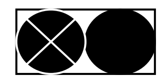
B = {(0,0),(0,1)}



Erosão Binária

- Exemplo





A = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}

B = {(0,0),(0,1)}

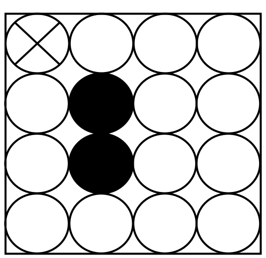
a	B	a + b

(1,1) +[(0,0),(0,1)] = [(1,1),(1,2)] $\Rightarrow$ $(1,1) \in A \Theta B$

(1,2) +[(0,0),(0,1)] = [(1,2),(1,3)] $\Rightarrow$ $(1,2) \notin A \Theta B$

(2,1) +[(0,0),(0,1)] = [(2,1),(2,2)] $\Rightarrow$ $(2,1) \in A \Theta B$

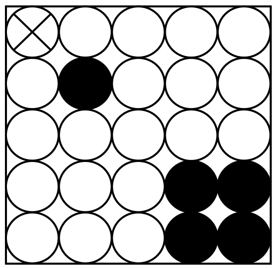
(2,2) +[(0,0),(0,1)] = [(2,2),(2,3)] $\Rightarrow$ $(2,2) \notin A \Theta B$

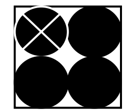


$A \Theta B$

Erosão Binária

- Exemplo

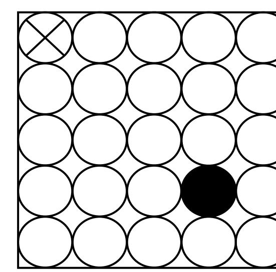




A={(1,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)}

B={(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}

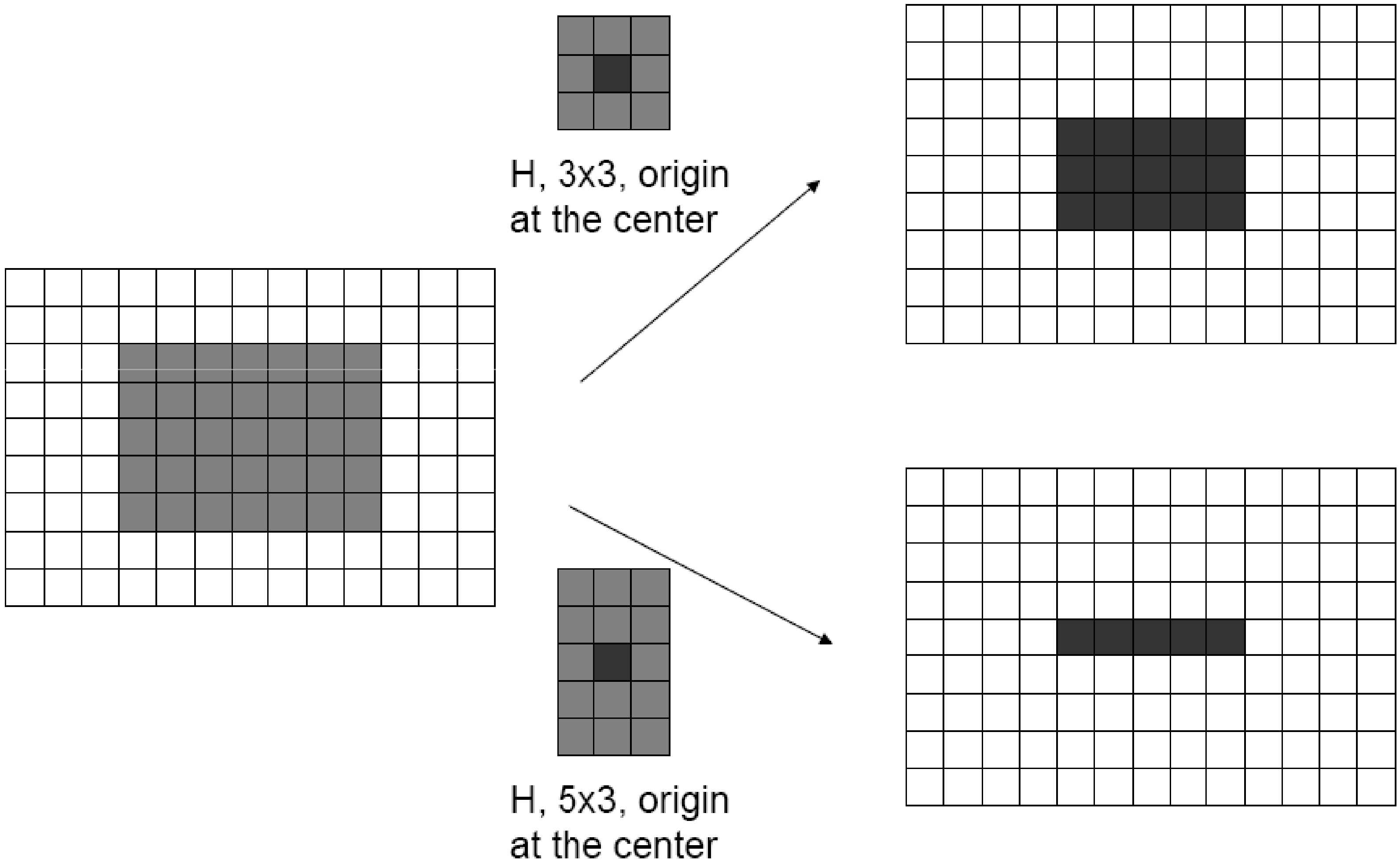
a	B	a + b	
(1,1) +	[(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)] =	[(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)]	$(1,1) \notin A \Theta B$
(3,3) +	[(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)] =	[(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)]	$(3,3) \in A \Theta B$
(3,4) +	[(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)] =	[(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)]	$(3,4) \notin A \Theta B$
(4,3) +	[(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)] =	[(4,3),(4,4),(5,3),(5,4)]	$(4,3) \notin A \Theta B$
(4,4) +	[(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)] =	[(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)]	$(4,4) \notin A \Theta B$



$A \Theta B$

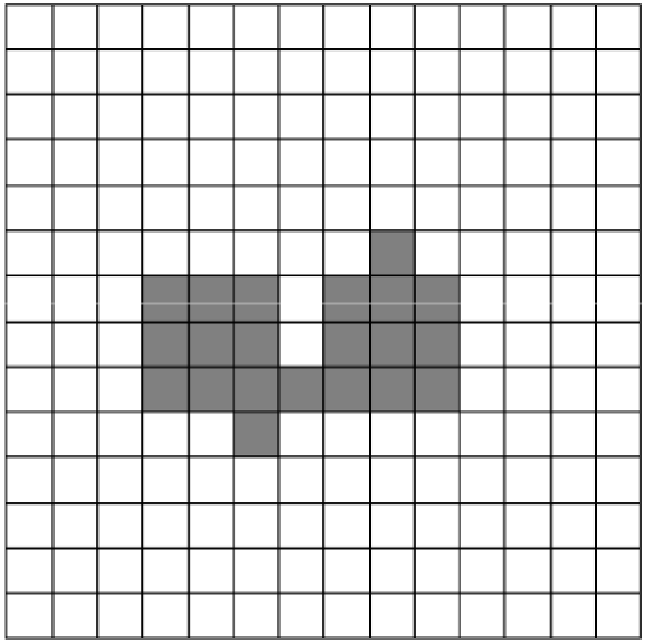
Erosão Binária

- Exemplos

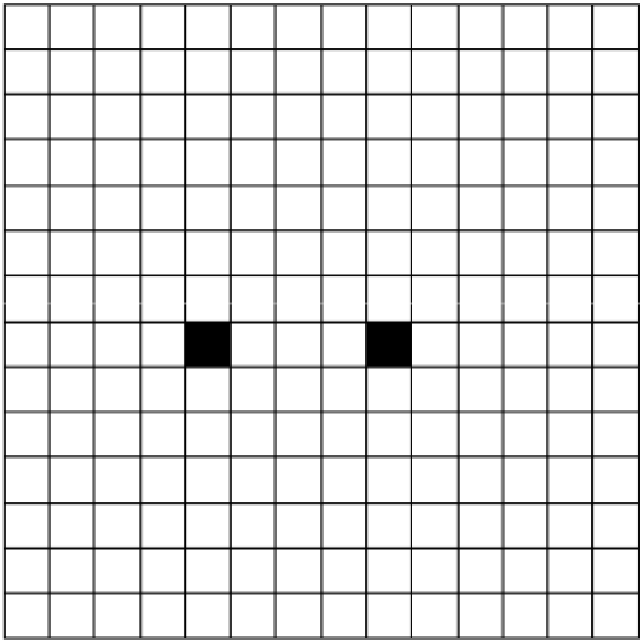


Erosão Binária

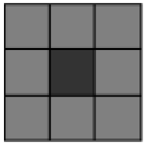
- Exemplos



F



G



H, 3x3, origin at the center

Dilatação x Erosão

- Considerações
  - A Dilatação expande uma imagem e a Erosão reduz
  - A Erosão não é o inverso da Dilatação (há exceções)
    - Elas são operações duais:

$$\left(A \Theta B\right)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

    - O complemento de uma Erosão é o mesmo que uma Dilatação do complemento da imagem pelo elemento estruturante refletido

Abertura

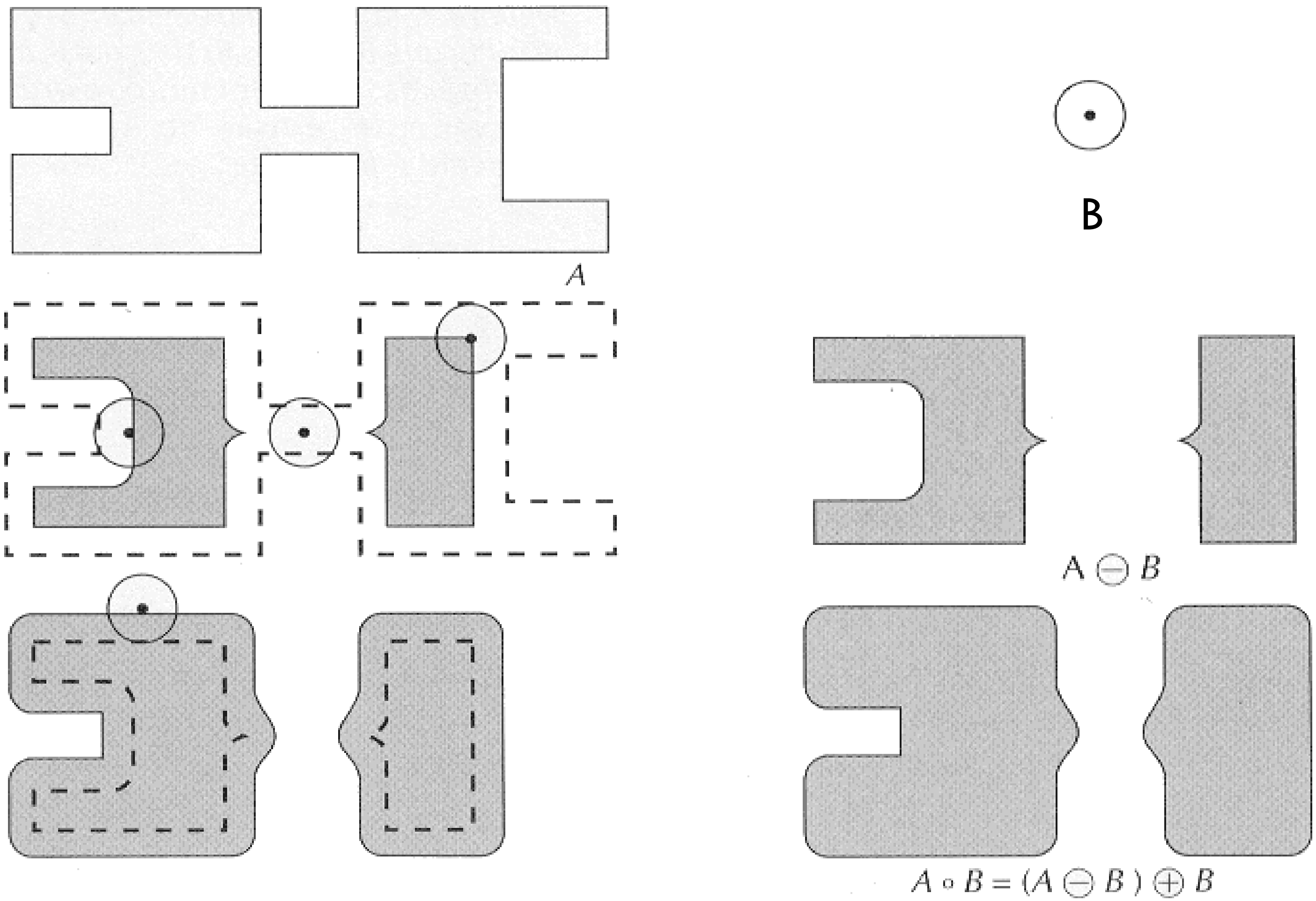
- A operação de Abertura é uma operação de Erosão seguida imediatamente de uma Dilatação utilizando o mesmo elemento estrutural
  - Assim, a Abertura de um conjunto *A* por um elemento estruturante *B*, é definida como:

$$A \circ B = (A \Theta B) \oplus B$$

  - A Abertura é uma operação morfológica que geralmente suaviza o contorno de uma imagem, quebra *istmos* estreitos e elimina protusões finas

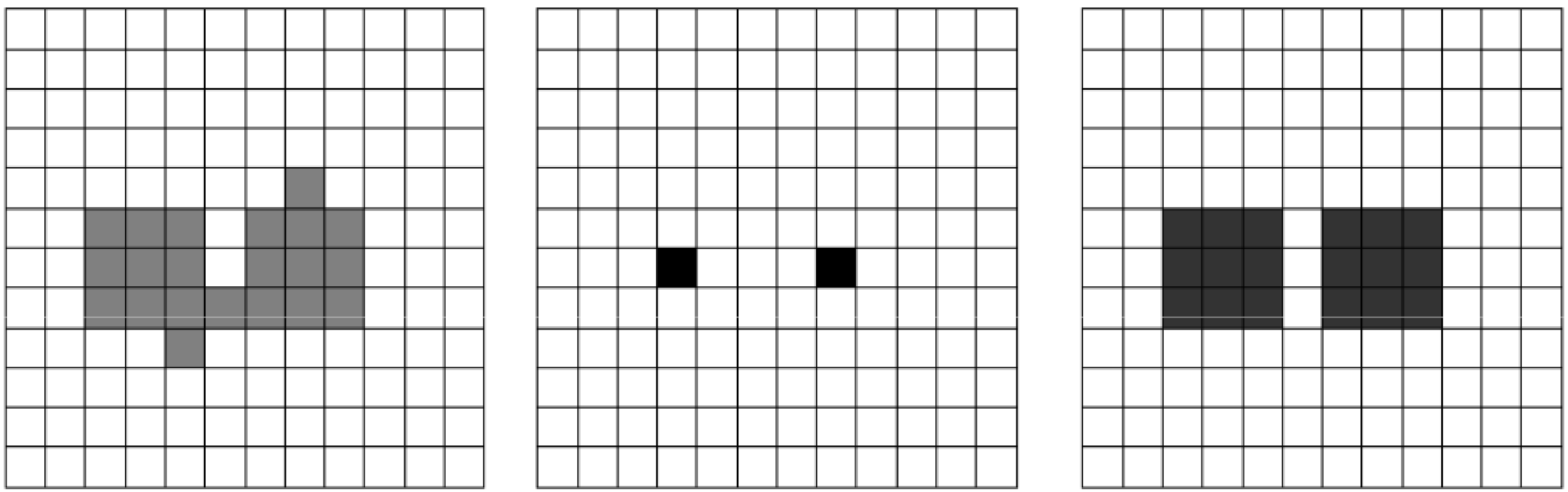
Abertura

- Exemplo

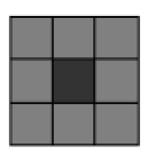


Abertura

- Exemplo



F $\qquad$ $F \Theta H$ $\qquad$ $(F \Theta H) \oplus H$



H, 3x3, origin at the center

Abertura

- Utilização
  - A Abertura tende a abrir pequenos vazios ou espaços entre objetos próximos numa imagem
  - A operação Abertura é usada também para remover ruídos da imagem (pontos brancos no fundo preto)
    - Pontos aleatórios e isolados podem ser removidos pela Erosão e a forma dos objetos é recuperada pela Dilatação sem restaurar o ruído
    - Este processo é útil apenas para remover pontos de ruído no fundo. Ele não serve para pontos espúrios dentro do objeto

Fechamento

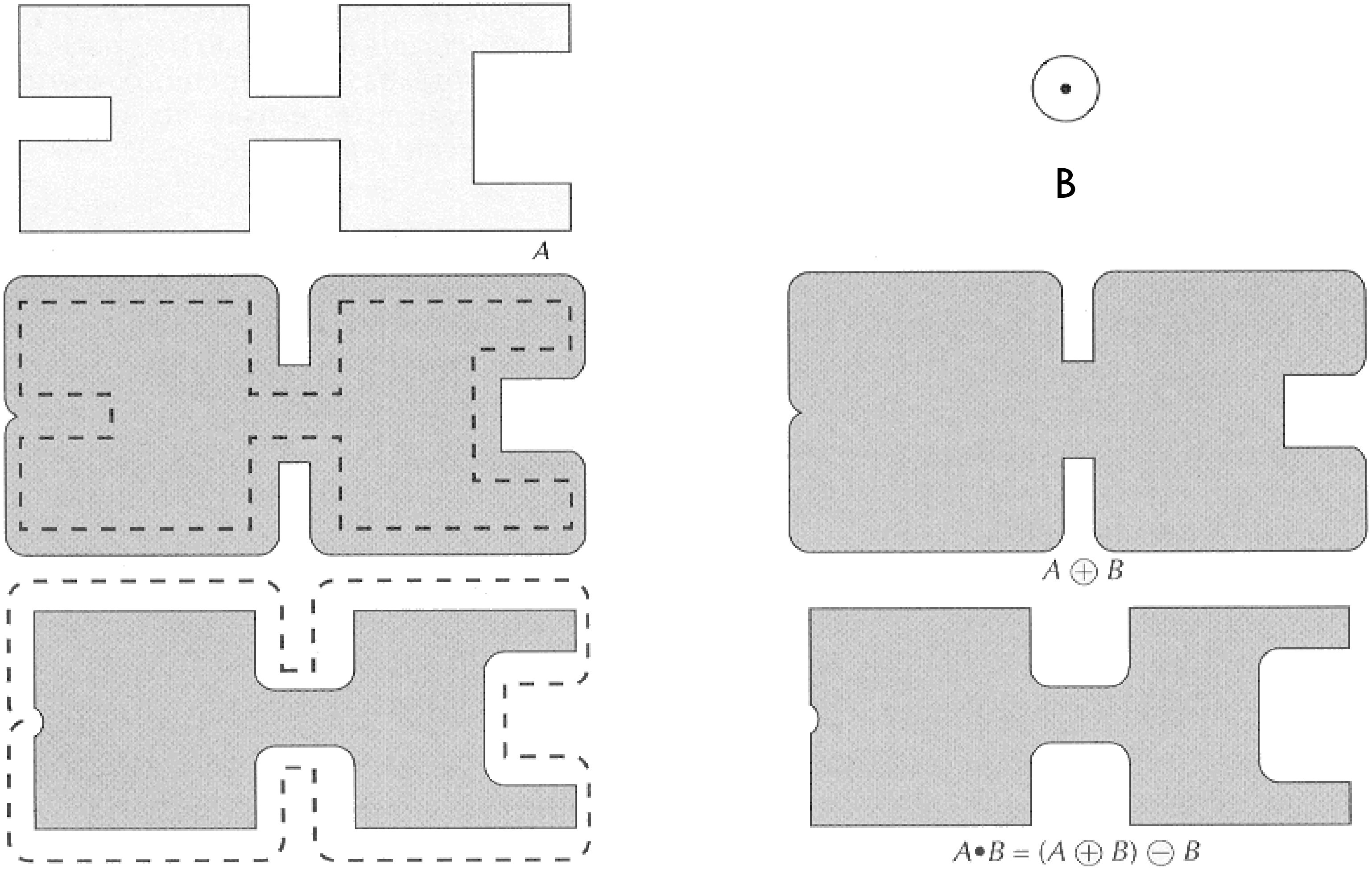
- A operação de Fechamento é uma operação de Dilatação seguida imediatamente de uma Erosão utilizando o mesmo elemento estrutural
  - Assim, o Fechamento de um conjunto *A* por um elemento estruturante *B*, é definida como:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

  - A operação de Fechamento também tende a suavizar os contornos, mas geralmente funde partes, elimina pequenos buracos e preenche fendas em um contorno

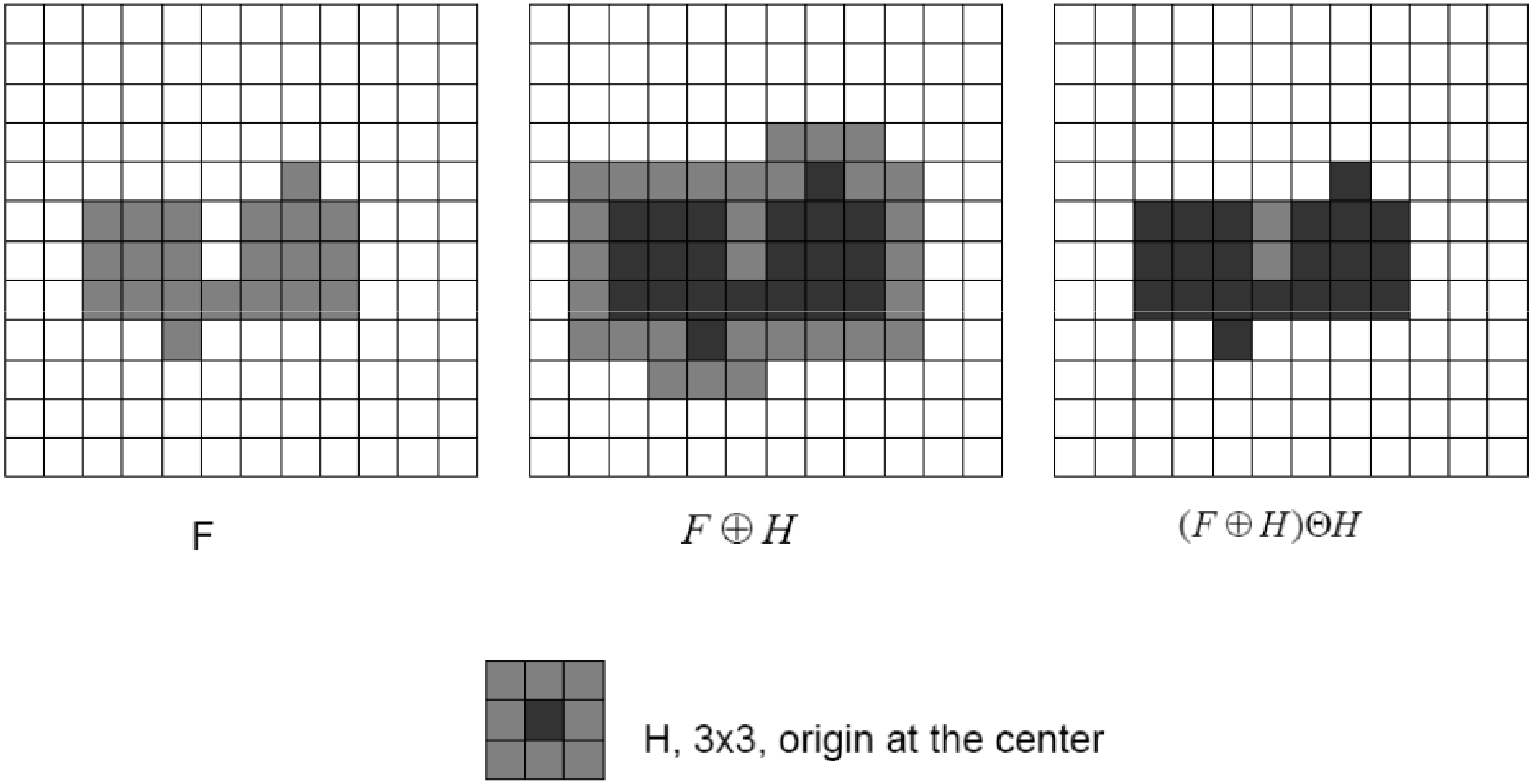
Fechamento

- Exemplo



Fechamento

- Exemplo



Fechamento

- Utilização
  - A operação de Fechamento irá preencher ou fechar os vazios dentro do objeto
  - A operação Fechamento pode remover muitos dos pixels pretos de ruído (objeto branco)

Abertura x Fechamento

- Abertura
  - $A \circ B$ é um sub-conjunto de A
  - Se C for um sub-conjunto de D, então $C \circ B$ será um sub-conjunto de $D \circ B$
- Fechamento
  - A é um sub-conjunto de $A \bullet B$
  - Se C for um sub-conjunto de D, então $C \bullet B$ será um sub-conjunto de $D \bullet B$

Abertura x Fechamento

- Idempotência

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

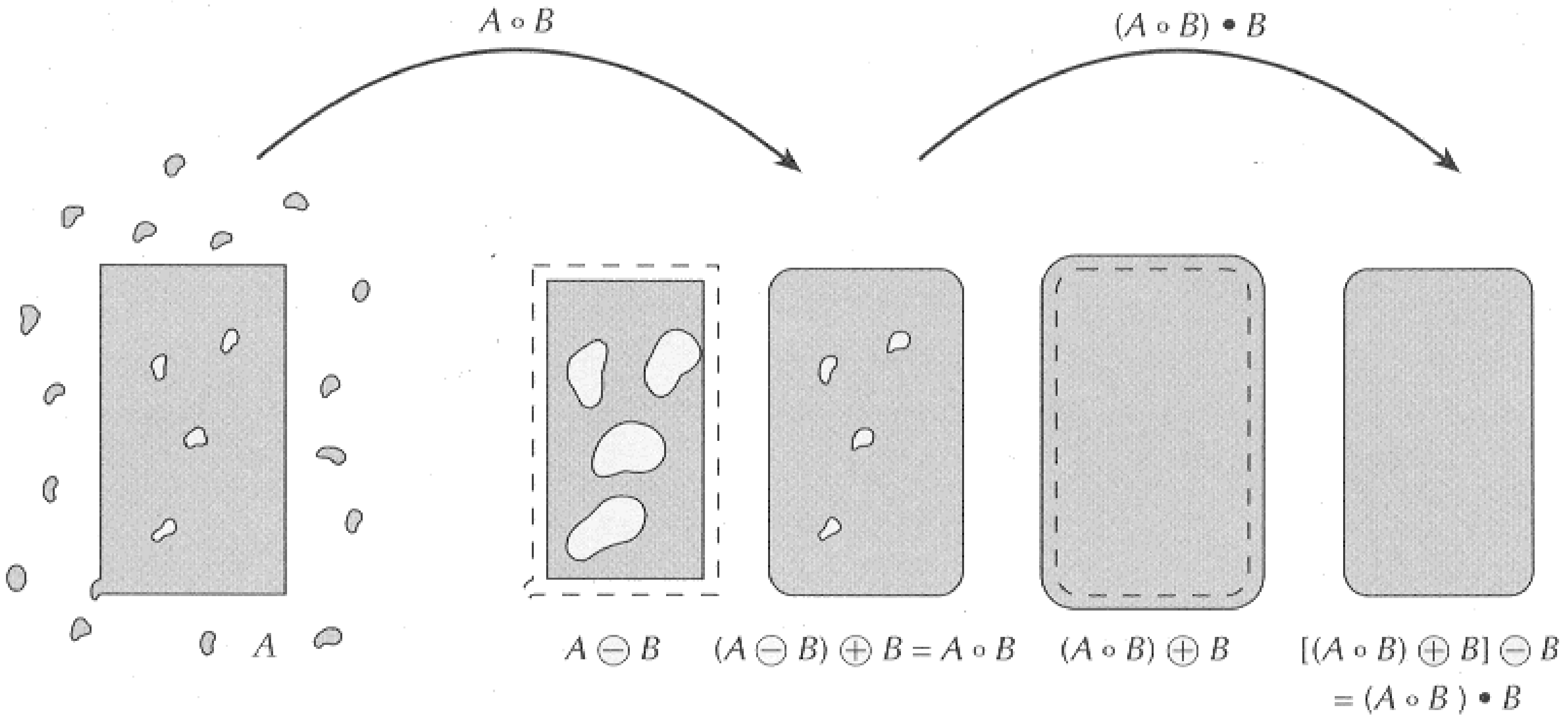
$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$$

- A Abertura e o Fechamento são operações duais relativamente à complementação e reflexão de conjuntos

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$$

Exemplo: Filtro Morfológico

- Um filtro para ruídos isolados, pode ser realizado através de uma Abertura seguida de um Fechamento

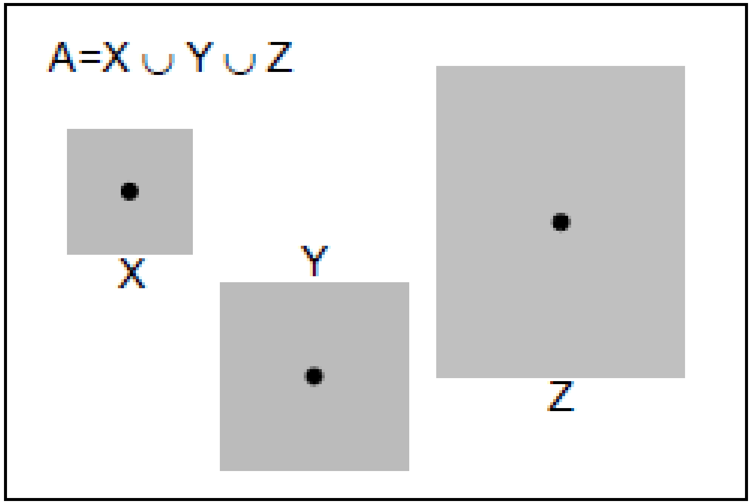


Transformada Hit-or-Miss

- A transformada morfológica *hit-or-miss* é uma ferramenta básica para a detecção de formas em uma imagem
- Essa transformada combina erosão e dilatação para produzir um operador capaz de indicar a posição onde um determinado padrão se encontra
  - O padrão procurado é o elemento estruturante B
  - A transformada somente é capaz de encontrar elementos sem ruídos

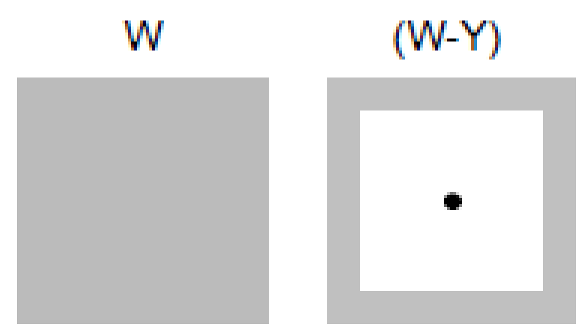
Transformada Hit-or-Miss:

- Exemplo
  - Seja *A* uma imagem que consiste de três padrões *X*, *Y* e *Z*. Nosso objetivo é localizar o padrão *Y*
    - A origem de cada forma localizada em seu centro de gravidade



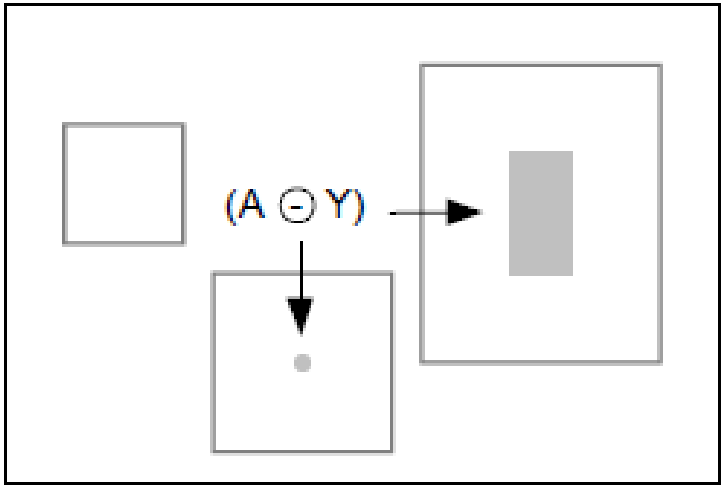
Transformada Hit-or-Miss

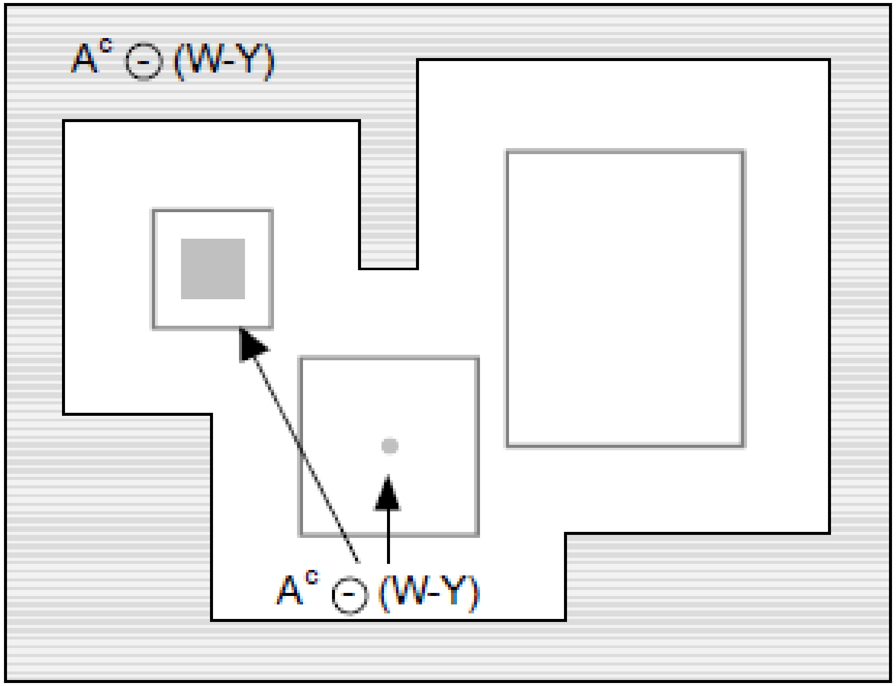
- Itens necessários para a transformada
  - O complemento de *A*: A^c
  - Se circundarmos *Y* com uma pequena janela *W*, o "*fundo local*" de *Y* com respeito a *W* será o conjunto diferença (*W*-*Y*)



Transformada Hit-or-Miss

- Ordem das operações
  - Primeiramente, aplicamos a Erosão de *A* por *Y*
  - Em seguida, aplicamos a Erosão do complemento de *A* pelo conjunto fundo local *(W-Y)*

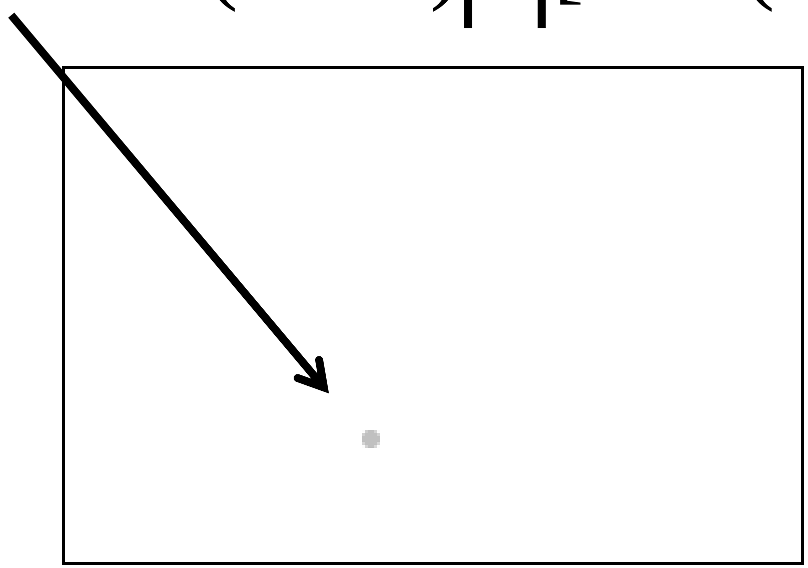




Transformada Hit-or-Miss

- Resultado
  - A interseção da erosão de A por Y e a erosão de A^c por $(W-Y)$ resulta na posição do objeto que se está buscando

$$A \otimes Y = (A \Theta Y) \bigcap [A^c \Theta (W - Y)]$$



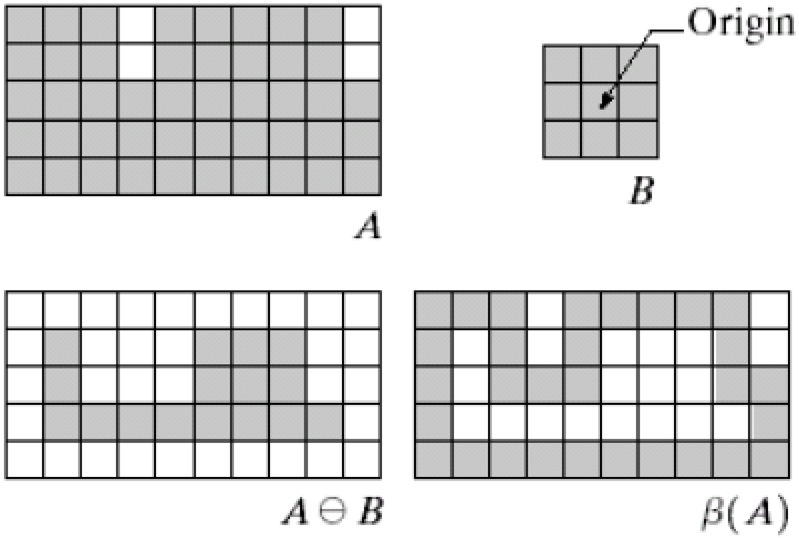
Algoritmos Morfológicos Básicos

- No caso de imagens binárias, a principal aplicação de morfologia é a extração de componentes da imagem que sejam úteis na representação e na descrição de formas
- Exemplos
  - Extração de fronteiras
  - Preenchimento de regiões
  - Componentes conectados
  - Afinamento/Espessamento
  - Esqueletização

Algoritmos Morfológicos Básicos

- Extração de fronteiras
  - A fronteira de uma imagem *A* é obtida por meio da erosão de *A* por *B*, e posterior subtração dessa erosão do próprio *A*

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$



Algoritmos Morfológicos Básicos

- Extração de fronteiras: Exemplo

Algoritmos Morfológicos Básicos

- Extração de fronteiras
  - Como utilizamos uma operação de erosão, temos as borda internas da forma. O mesmo pode ser feito com uma operação de dilatação
  - Bordas internas

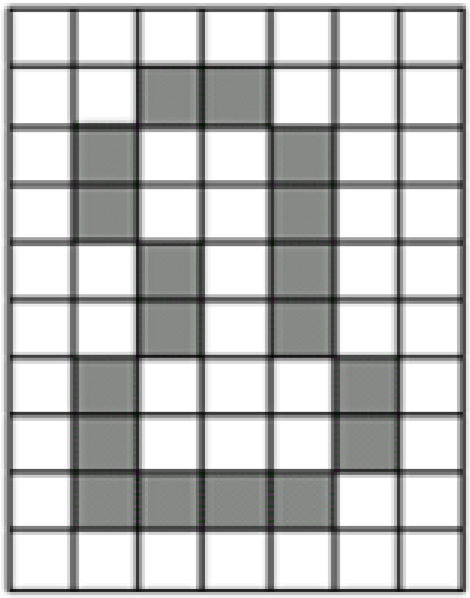
$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

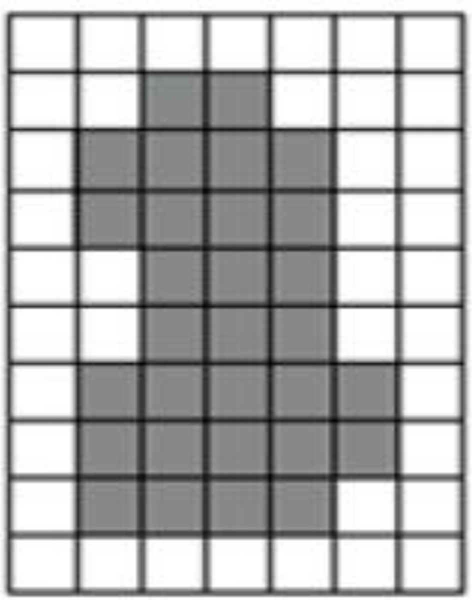
  - Bordas externas

$$\beta(A) = (A \oplus B) - A$$

Algoritmos Morfológicos Básicos

- Preenchimento de Regiões
  - A partir de um ponto dentro da uma região definida por uma borda/fronteira, esse algoritmo busca preencher completamente a região até a borda





Algoritmos Morfológicos Básicos

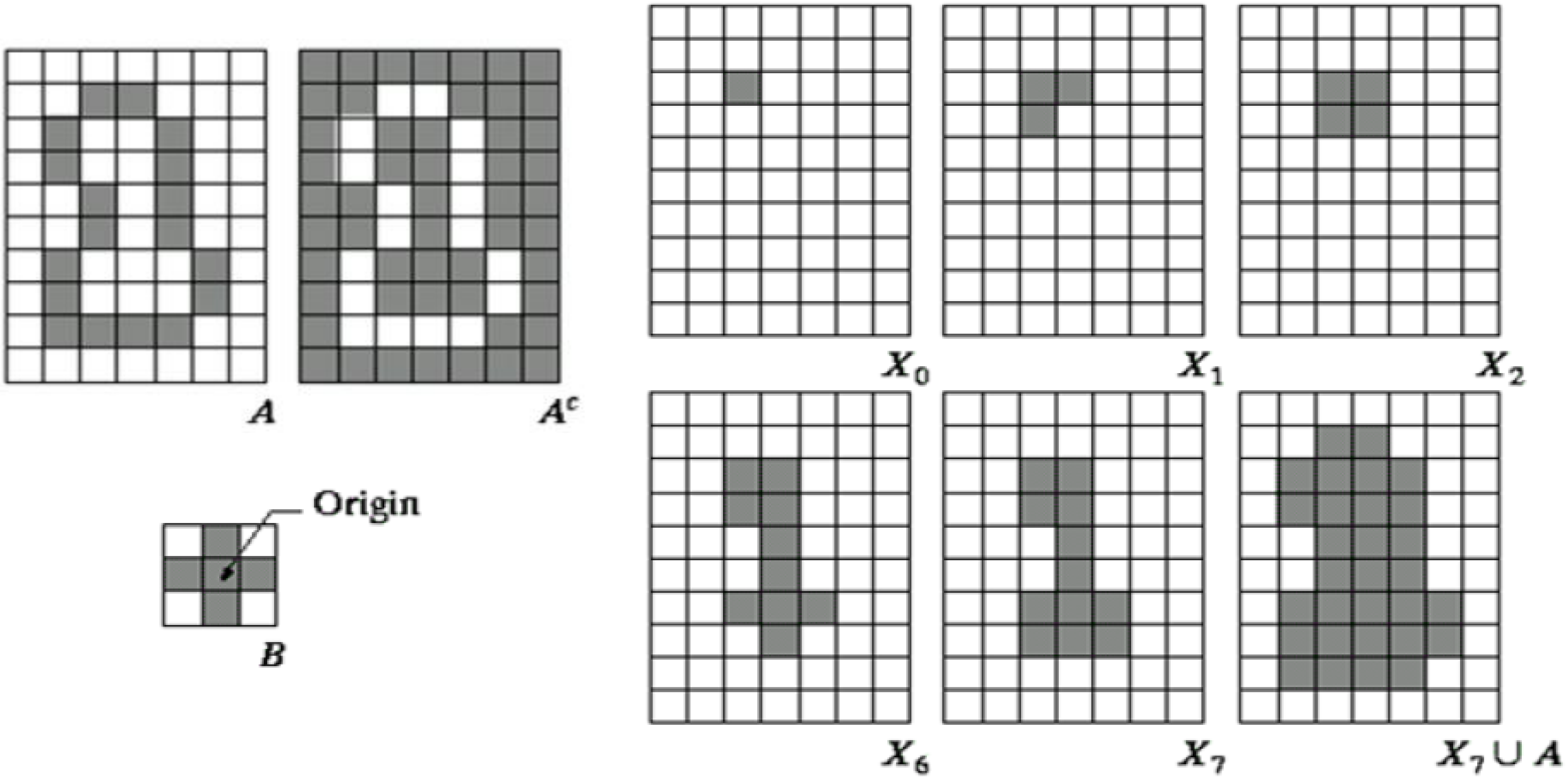
- Preenchimento de Regiões

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \bigcap A^c \qquad para \quad k = 1,2,3,....$$

  - Onde
    - X_0 é um ponto dentro da fronteira
    - B é o elemento estruturante
    - A^c é o complemento de A
  - Essa equação é aplicada repetidamente até que X_k seja igual a X_{k-1}
  - Por fim, o resultado é unido com a fronteira original

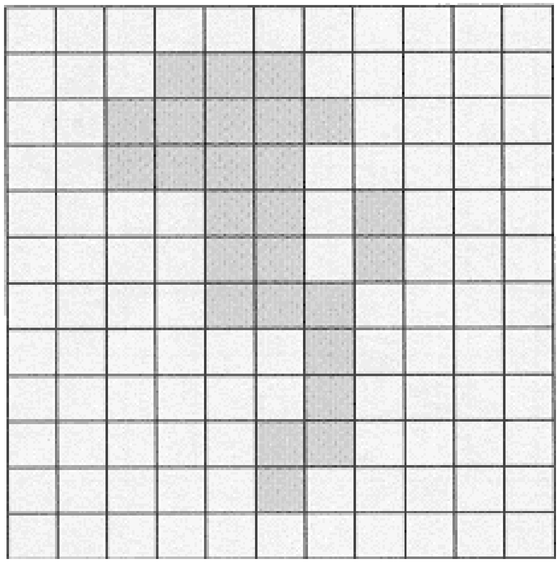
Algoritmos Morfológicos Básicos

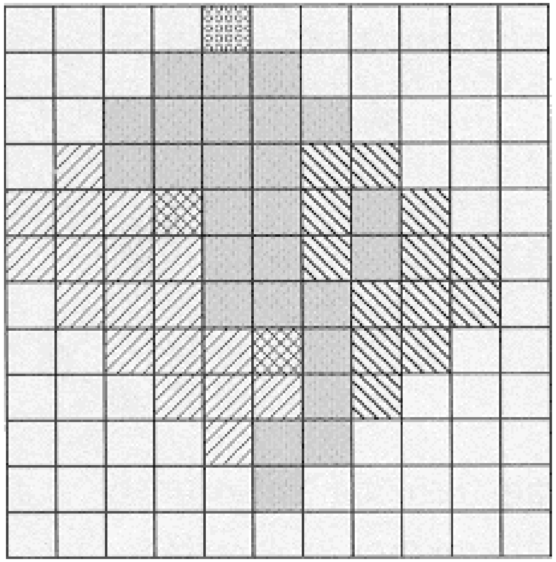
- Preenchimento de Regiões: Exemplo



Algoritmos Morfológicos Básicos

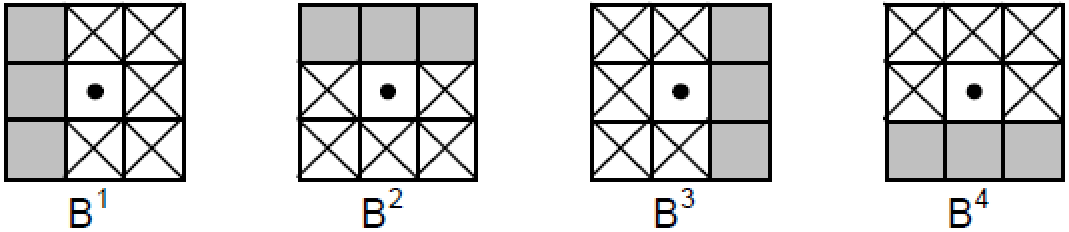
- Casco convexo (Convex Hull)
  - Define-se casco convexo *H* de um conjunto arbitrário *S* como o menor conjunto convexo que ainda contém *S*
  - Utiliza a transformada *hit-or-miss*





Algoritmos Morfológicos Básicos

- Casco convexo (Convex Hull)
  - Utiliza 4 elementos estruturantes:



  - Note que estes elementos possuem pontos indicados com X que significam uma condição “*don’t care*”
    - O pixel naquela posição pode ter valor 0 ou 1

Algoritmos Morfológicos Básicos

- Casco convexo (Convex Hull)

$$X_k^i = (X \circledast B^i) \cup A \quad para \quad i = 1,2,3,4 \quad e \quad k = 1,2,3,\ldots..$$

$$X_0^i = A$$

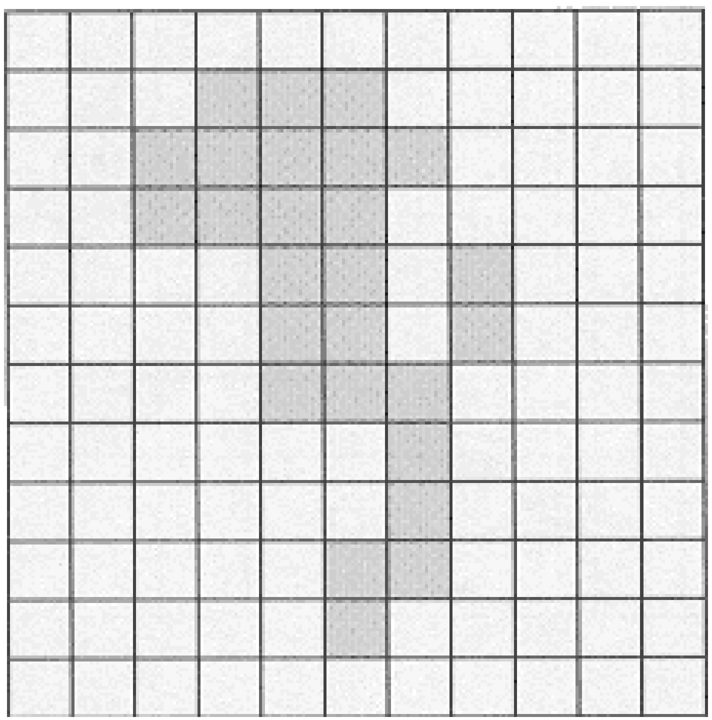
$$D^i = X_{conv}^i$$

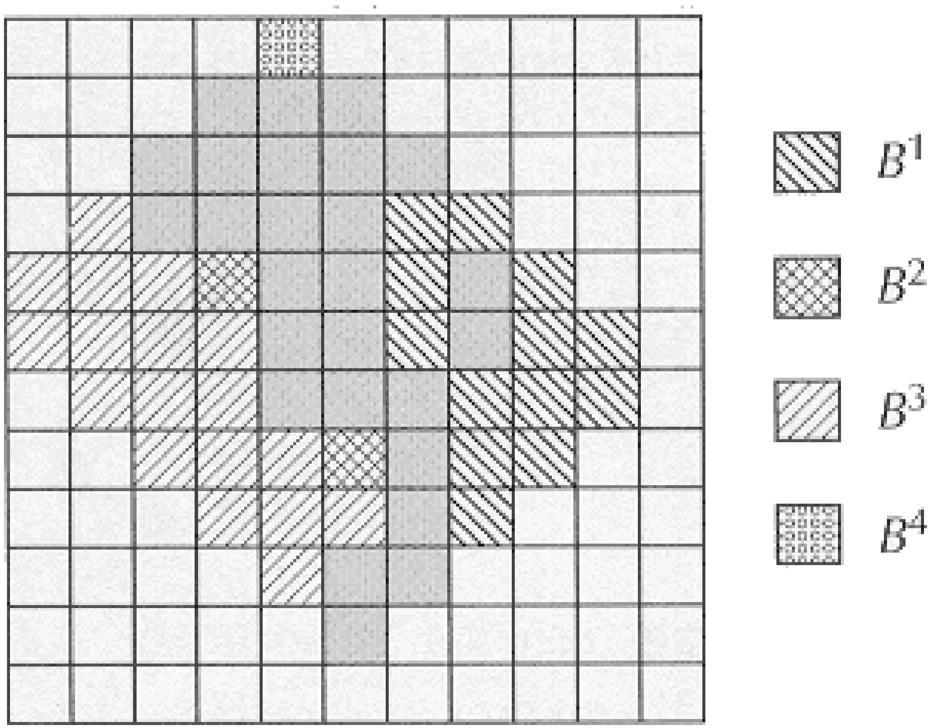
$$\boxed{C(A) = \bigcup_{i=1}^{4} D^i}$$

  - Onde
    - B^i é um dos elementos estruturantes
    - X^i_{conv} indica a convergência: X_k é igual a X_{k-1}

Algoritmos Morfológicos Básicos

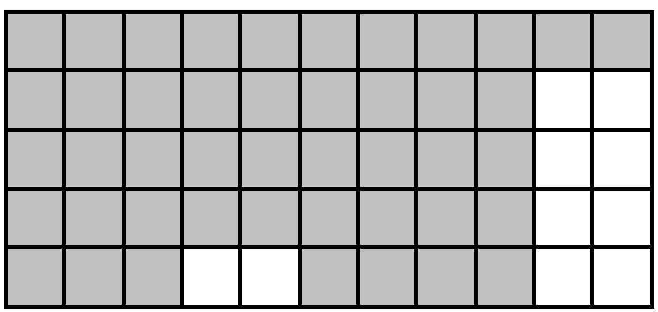
- Casco convexo (Convex Hull): Exemplo



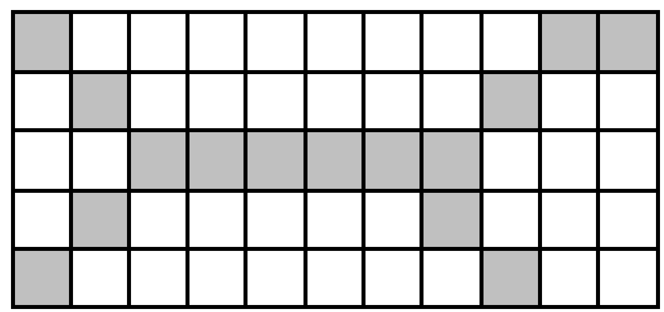


Algoritmos Morfológicos Básicos

- Afinamento (*Thinning*)
  - Consiste em se obter uma versão "emagrecida" da imagem *A*
  - Utiliza a transformada *hit-or-miss*

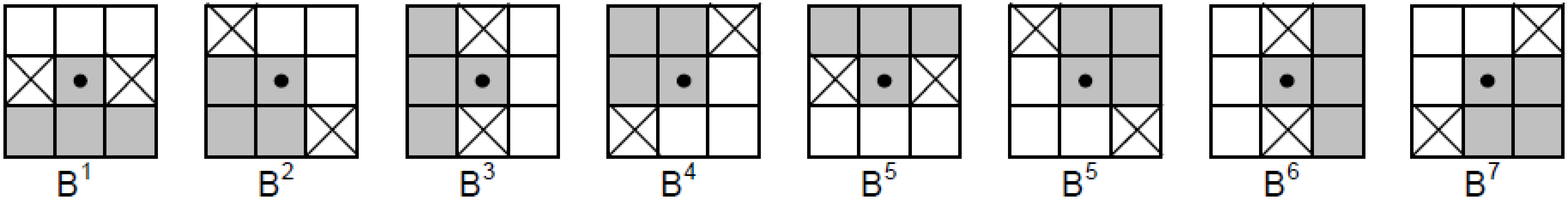


A



Algoritmos Morfológicos Básicos

- Afinamento (*Thinning*)
  - Utiliza 8 elementos estruturantes:



  - Note que estes elementos possuem pontos indicados com X que significam uma condição "*don't care*"
    - O pixel naquela posição pode ter valor 0 ou 1

Algoritmos Morfológicos Básicos

- Afinamento (*Thinning*)

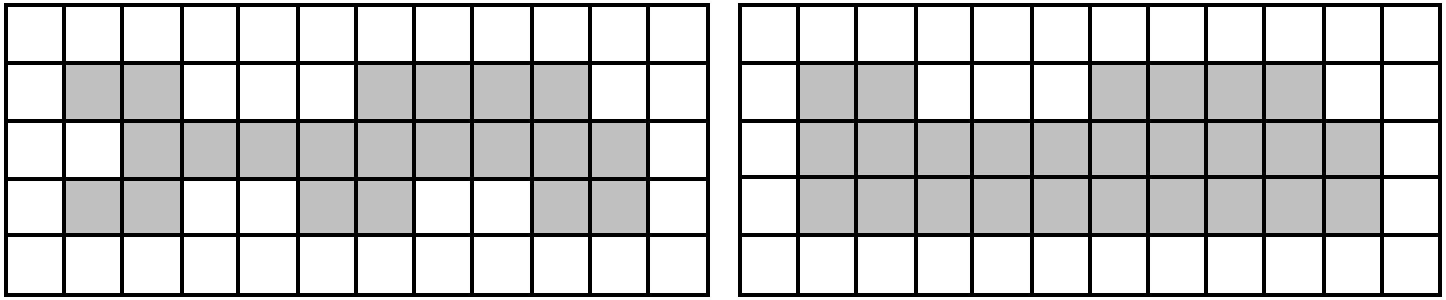
$$\boxed{A \otimes B = A - (A \circledast B) = A \cap (A \circledast B)^c}$$

$$\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \ldots\ldots\ldots B^n\}$$

  - Afinar a imagem *A* consiste em aplicar a equação com B^1, depois com B^2, até B^n
    - Repetir o processo até que não ocorram mais mudanças
  - Imagem afinada é convertida para conectividade-m, para eliminar caminhos múltiplos

Algoritmos Morfológicos Básicos

- Espessamento (*Thickening*)
  - Consiste em se obter uma versão "engordada" da imagem *A*
  - Utiliza a transformada *hit-or-miss*
    - Utiliza os mesmos elementos estruturantes do afinamento, trocando os 0's por 1's



Algoritmos Morfológicos Básicos

- Espessamento (*Thickening*)

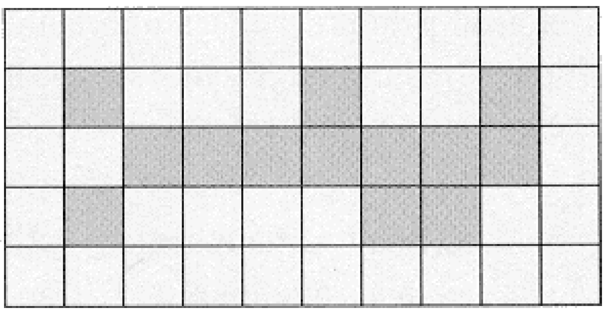
$$A \odot B = A \cup (A \otimes B)$$

  - Entretanto, um algoritmo separado para espessamento raramente é usado. O procedimento usual é
    - Afinar o fundo do conjunto
    - Complementar o resultado

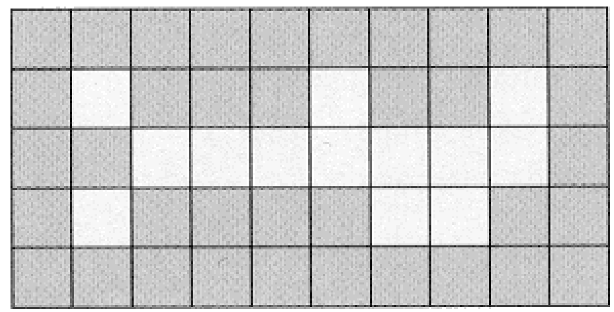
Algoritmos Morfológicos Básicos

- Espessamento (*Thickening*): Exemplo

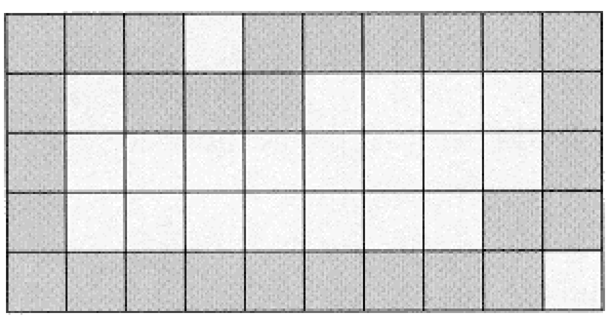
A



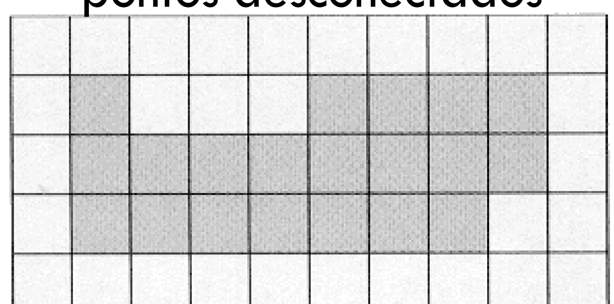
A^c



C = Afinamento de A^c



C^c - e eliminação de pontos desconectados



Espessamento de A

Algoritmos Morfológicos Básicos

- Os operadores de afinamento e espessamento são duais
  - A aplicação do espessamento (afinamento) sobre os pixels do objeto é equivalente à aplicação do afinamento (espessamento) sobre os pixels do fundo da imagem

$$(A \odot B)^c = A^c \otimes B \quad \text{(dualidade)}$$
$$(A \otimes B)^c = A^c \odot B \quad \text{(dualidade)}$$

Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Considerações importantes
  - Um pixel pode agora ter qualquer valor inteiro
  - Operações lógicas simulam a conversão aritméticas
    - Uniões se tornam máximos
    - interseções se tornam mínimo
    - Etc
  - Notação
    - $f(x,y)$: imagem de entrada
    - $b(x,y)$: elemento estruturante, subimagem (função)

Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Dilatação em nível de cinza

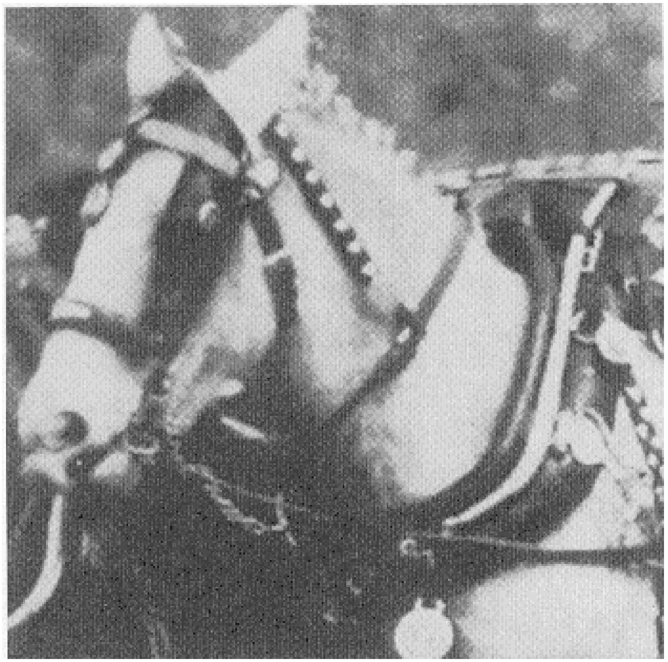
$$(f \oplus b)(s,t) = \max\left\{f(s-x,t-y)+b(x,y) \,\middle|\, (s-x),(t-y) \in D_f\,;(x,y) \in D_b\right\}$$

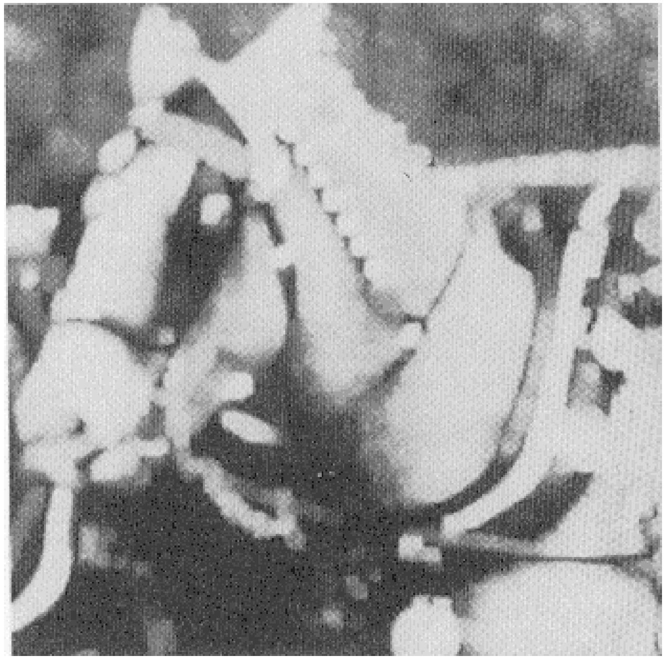
- Onde
  - D_f = Domínio de f
  - D_b = Domínio de b

- Efeito geral na imagem (depende dos valores em b)
  - Imagem resultante tende a ser mais clara que a de entrada
  - Detalhes escuros são reduzidos ou eliminados

Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Dilatação em nível de cinza: Exemplo





Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Similar à convolução 2D
  - A operação *max* substitui as somas da convolução e a adição os produtos da convolução
- O elemento estruturante podem ser negativos. Normalizar os valores da imagem resultante
  - Valores negativos podem ser alterados para zero (underflow)
  - A imagem inteira poderia ter seus valores aumentados para que o menor valor de pixel fosse zero mantendo os valores relativos entre os pixels

Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Erosão em nível de cinza

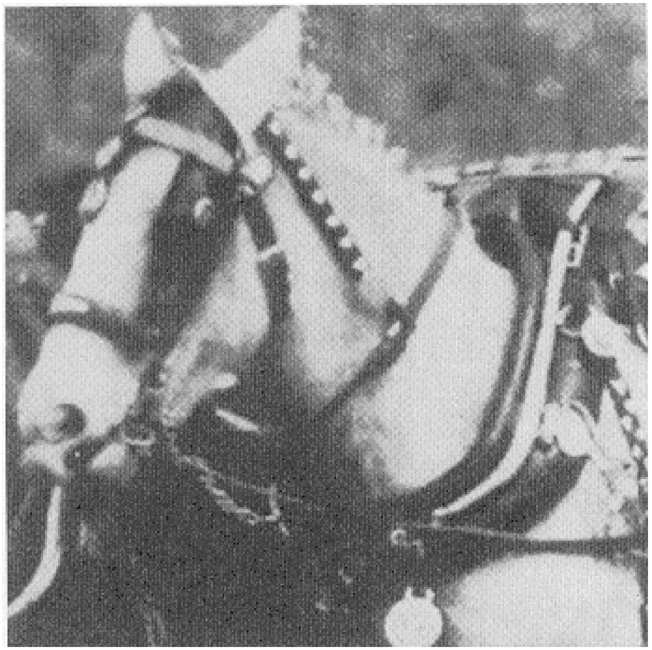
$$(f \Theta b)(s,t) = \min\left\{ f(s+x, t+y) - b(x,y) \middle| (s+x), (t+y) \in D_f ; (x,y) \in D_b \right\}$$

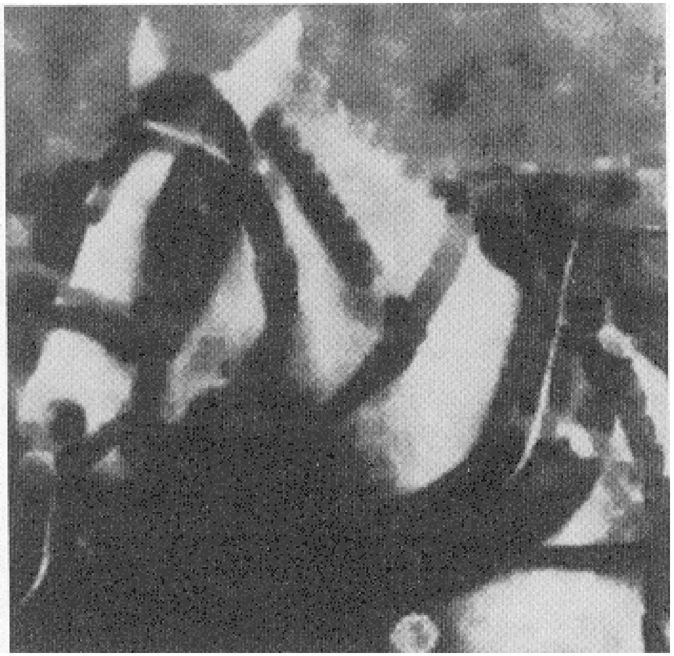
  - Onde
    - D_f = Domínio de *f*
    - D_b = Domínio de *b*

  - Efeito geral na imagem (dependende dos valores em *b*)
    - Imagem resultante tende a ser mais escura que a de entrada
    - Detalhes claros são reduzidos ou eliminados

Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Erosão em nível de cinza: Exemplo





Operações Morfológicas em Tons de Cinza

- Outros operadores
  - Abertura
  - Fechamento
  - Suavização morfológica
    - Abertura morfológica seguida de fechamento
    - Remoção ou atenuação tanto de artefatos claros como escuros ou ruídos
  - Transformada top-hat
    - Enfatiza o detalhe na presença de sombreamento
  - Etc