Teoremas Booleanos e Simplificação Algébrica

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
Prof. João Henrique de Souza Pereira

Créditos dos slides para o Prof. Dr. Daniel D. Abdala

Na Aula Anterior ...

- Conceitos básicos da Álgebra Booleana;
- Variáveis e Funções Booleanas;
- Operações E, OU e NÃO;
- Tabelas Verdade;
- Exemplos de Funções Lógicas;
- Operações compostas:
  - NÃO-E
  - NÃO-OU
  - OU-Exclusivo
  - NÃO-OU-Exclusivo
- Circuitos Lógicos Gerados a partir de Expressões Booleanas;
- Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos;
- Interligação entre Expressões, Circuitos e Tabelas Verdade.

Nesta Aula

- Propriedades Básicas;
- Identidades Auxiliares;
- Teoremas Booleanos;
- Universalidade das Portas NAND e NOR;
- Simplificação de funções via manipulação algébrica;
- Formas canônicas de funções lógicas:
  - Soma de Produtos
  - Produto de Somas
- Obtenção de formas canônicas via manipulação algébrica;
- Obtenção de formas canônicas via tabela da verdade.

Propriedades Básicas (Identidades)

- $X + 0 = X$
- $X \cdot 1 = X$
- $X + 1 = 1$
- $X \cdot 0 = 0$
- $X + X = X$
- $X \cdot X = X$
- $X + \overline{X} = 1$
- $X \cdot \overline{X} = 0$
- $\overline{\overline{X}} = X$

Como podemos provar tais identidades?

Provando Identidades via Tabela da Verdade

- Ex: $X + 0 = X$

X	0	X+0
0	0	0
1	0	1

- Ex: $X \cdot 1 = X$

X	1	X·1
0	1	0
1	1	1

Propriedades

- Comutativa
  - $X+Y = Y+X$
  - $X \cdot Y = Y \cdot X$
- Associativa
  - $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$
  - $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$
- Distributiva
  - $X \cdot (Y+Z) = (X \cdot Y)+(X \cdot Z)$
  - $X+(Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)$
  - $(X+Y) \cdot (Z+W) = X \cdot Z + X \cdot W + Y \cdot Z + Y \cdot W$
  - $(X \cdot Y)+(Z \cdot W) = (X+Z) \cdot (X+W) \cdot (Y+Z) \cdot (Y+W)$

Teoremas de DeMorgan

- Teorema 1: O complemento do produto é igual à soma dos complementos
- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
- Prova: (via tabela verdade)

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Teoremas de DeMorgan

- Teorema 2: O complemento da soma é igual ao produto dos complementos
- $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- Prova: (via tabela verdade)

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Identidades Auxiliares

- $A+A\cdot B = A$

  Prova:

  a) $A\cdot 1 = A$

  b) $A\cdot(1+B) = \boxed{A+A\cdot B}$ (distributiva)

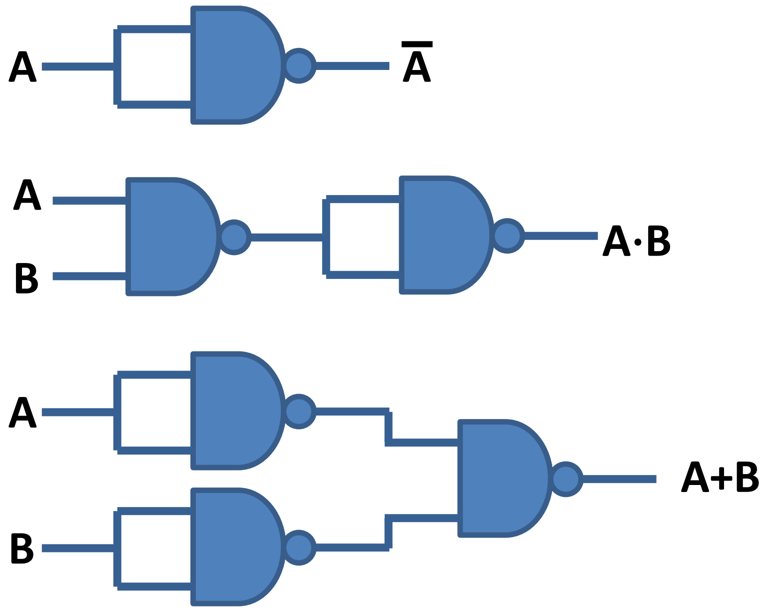
  c) $1+B = 1$

  d) $A\cdot 1 = A \therefore A+A\cdot B = A$

- $A.A+B = A+B$
- $\overline{A}+(A\cdot B) = \overline{A}+B$

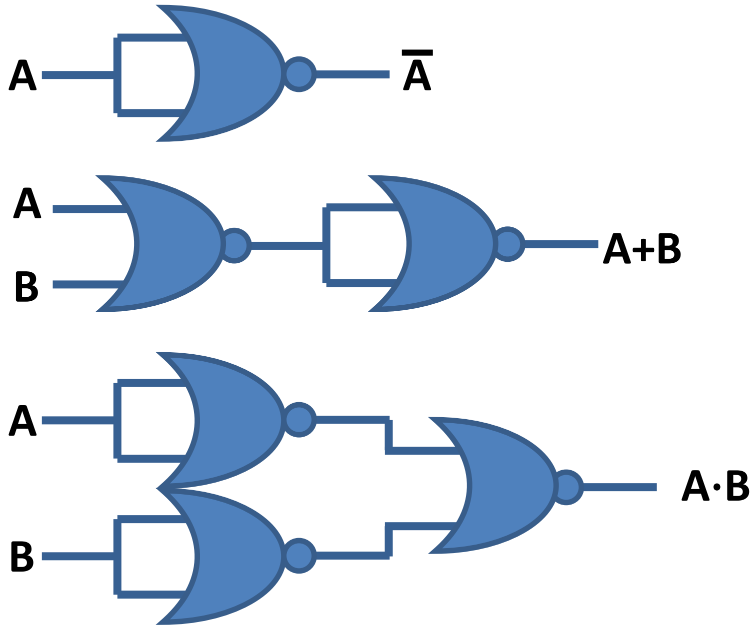
Universalidade NAND

- Significa que usando apenas portas NAND ($\overline{A \cdot B}$) é possível obter qualquer outra porta



Universalidade NOR

- Significa que usando apenas portas NOR ($\overline{A+B}$) é possível obter qualquer outra porta



Simplificação Algébrica

- Porque é necessário simplificar equações Booleanas?
  - Funções Booleanas são traduzidas para circuitos digitais. Quando mais simples, menos portas lógicas serão necessárias;
  - O circuito fica mais simples de implementar fisicamente;
  - Há menor geração de calor, e menor consumo de energia.

Simplificação Algébrica

- Existem diferentes formas de simplificar uma função Booleana:
  - Manipulação Algébrica
  - Simplificação via Mapas de Veitch-Karnaugh
- Em simplificação algébrica, a função é manipulada via as identidades e propriedades Booleanas com o intuito de se buscar uma versão reduzida da função.

Propriedades/Teoremas

Propriedades	Propriedades
$X + 0 = X$	$X+Y = Y+X$
$X \cdot 1 = X$	$X \cdot Y = Y \cdot X$
$X + 1 = 1$	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$
$X \cdot 0 = 0$	$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$
$X + X = X$	$X \cdot (Y+Z) = (X \cdot Y)+(X \cdot Z)$
$X \cdot X = X$	$X+(Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)$
$X + \overline{X} = 1$	$(X+Y) \cdot (Z+W) = X \cdot Z + X \cdot W + Y \cdot Z + Y \cdot W$
$X \cdot \overline{X} = 0$	$(X \cdot Y)+(Z \cdot W) = (X+Z) \cdot (X+W) \cdot (Y+Z) \cdot (Y+W)$
$\overline{\overline{X}} = X$	$A+A \cdot B = A$
$\overline{X \cdot Y} = \overline{X}+\overline{Y}$	$(A+B) \cdot (A+C) = A + B \cdot C$
$\overline{X+Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$	$\overline{A}+(A \cdot B) = \overline{A}+B$
$A \oplus B = \overline{A} \cdot B+A \cdot \overline{B}$	

Exemplo

Passo	Equação	Propriedade
0	$A+\overline{A}\cdot B$	$(1\cdot X=X)$
1	$(1\cdot A)+(\overline{A}\cdot B)$	Distributiva
2	$(1+\overline{A})\cdot(1+B)\cdot(A+\overline{A})\cdot(A+B)$	$(1 + X = 1)$
3	$1\cdot 1\cdot(A+\overline{A})\cdot(A+B)$	$(1 \cdot X = X)$
4	$(A+\overline{A})\cdot(A+B)$	$(X + \overline{X} = 1)$
5	$1\cdot(A+B)$	$(1 \cdot X = X)$
6	$A+B$	
	$\therefore\ A+\overline{A}\cdot B = A+B$	

Exemplo

Passo	Equação	Propriedade
0	$(A\cdot B\cdot C)+(A\cdot\overline{C})+(A\cdot\overline{B})$	evidência A
1	$A\cdot ((B\cdot C)+\overline{C}+\overline{B})$	$\overline{\overline{X}}=X$
2	$A\cdot ((B\cdot C)+\overline{\overline{\overline{C}+\overline{B}}})$	DeMorgan
3	$A\cdot ((B\cdot C)+(\overline{\overline{\overline{C}}\cdot\overline{\overline{B}}}))$	$\overline{\overline{X}}=X$
4	$A\cdot ((B\cdot C)+(\overline{C\cdot B}))$	$BC=X$ / $X+\overline{X}=1$
5	$A\cdot 1$	$X\cdot 1=X$
6	A	
	$\therefore\ (A\cdot B\cdot C)+(A\cdot\overline{C})+(A\cdot\overline{B}) = A$	

Exemplo

Passo	Equação	Propriedade
0	$(\overline{(A+B)\cdot C})+(\overline{D\cdot (B+C)})$	DeMorgan
1	$((\overline{A+B})+\overline{C})+(\overline{D}+\overline{(B+C)})$	DeMorgan
2	$(\overline{A}\cdot\overline{B})+\overline{C}+(\overline{D}+\overline{B}\cdot\overline{C})$	evidência $\overline{C}$
3	$(\overline{A}\cdot\overline{B})+(\overline{C}\cdot(1+\overline{B}))+\overline{D}$	$(1+X=1)$
4	$(\overline{A}\cdot\overline{B})+\overline{C}+\overline{D}$	
	$\therefore (\overline{(A+B)\cdot C})+(\overline{D\cdot (B+C)}) = (\overline{A}\cdot\overline{B})+\overline{C}+\overline{D}$	

Mintermos e Maxtermos

- Funções lógicas podem ser padronizadas utilizando duas formas padrão:
  - **SdP - Soma de Produtos (∏M)** – expressão é uma soma (OU) de produtos (E) de variáveis (Mintermos);
  - **PdS - Produto de Somas (∑M)** – expressão é um produto (E) de somas (OU) de variáveis (Maxtermos);
- Regra: Todos os **termos** devem possuir todas as variáveis da equação!

Mintermos e Maxtermos

- Cada mintermo ou maxtermo se associa a uma possibilidade de entrada de uma função lógica

termo

A	B	mintermo	maxtermo
0	0	$\bar{A}\cdot\bar{B}$	$\bar{A}+\bar{B}$
0	1	$\bar{A}\cdot B$	$\bar{A}+B$
1	0	$A\cdot\bar{B}$	$A+\bar{B}$
1	1	$A\cdot B$	$A+B$

SdP e PdS

- Ex: SdP
  - $F(A,B,C) = A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C$
  - $F(A,B,C) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
- Ex:PdS
  - $F(A,B,C) = (\overline{A}+\overline{B}+C) \cdot (A+\overline{B}+\overline{C}) \cdot (\overline{A}+B+\overline{C})$
  - $F(A,B) = (\overline{A}+B) \cdot (A+\overline{B}) \cdot (\overline{A}+\overline{B})$
- Funções que não estão nas formas canônicas
  - $F(A,B,C) = A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot \overline{C}$
  - $F(A,B) = A \cdot (A+\overline{B})$

Usando Identidades para Obtenção das Formas Canônicas

- Exemplo, dada a função abaixo, encontre sua forma canônica de mintermos:

$$F(A,B) = A+(\bar{A}\cdot B)$$

Passo	Equação	Propriedade
0	$A+(\bar{A}\cdot B)$	$X\cdot 1=X$
1	$(1\cdot A)+(\bar{A}\cdot B)$	$X+\bar{X}=1$
2	$((B+\bar{B})\cdot A)+(\bar{A}\cdot B)$	distributiva
3	$(A\cdot B)+(A\cdot \bar{B})+(\bar{A}\cdot B)$	
	$\therefore A+(\bar{A}\cdot B) = (A\cdot B)+(A\cdot \bar{B})+(\bar{A}\cdot B)$	
	$\prod M_F = (A\cdot B)+(A\cdot \bar{B})+(\bar{A}\cdot B)$	

Usando Identidades para Obtenção das Formas Canônicas

- Mesmo exemplo, dada a função abaixo, encontre sua forma canônica de maxtermos:

$$F(A,B) = A+(\bar{A}\cdot B)$$

Passo	Equação	Propriedade
0	$A+(\bar{A}\cdot B)$	$X\cdot 1=X$
1	$(1\cdot A) +(\bar{A}\cdot B)$	distributiva
2	$(1+\bar{A})\cdot(1+B)\cdot(A+\bar{A})\cdot(A+B)$	$(1+X=1)$
3	$1\cdot 1\cdot(A+\bar{A})\cdot(A+B)$	$(X+\bar{X}=1)$
4	$1\cdot 1\cdot 1\cdot(A+B)$	$(1\cdot 1=1)$ / $1\cdot X=X$
5	$A+B$	
	$\therefore A+(\bar{A}\cdot B) = A+B$	
	$\sum M_F = A+B$	

Usando Identidades para Obtenção das Formas Canônicas

- Usar manipulação Algébrica para encontrar as formas canônicas de uma função Booleana qualquer pode ser problemático em alguns casos:

- Felizmente, há uma forma mais simples para obtenção de funções em sua forma canônica

Utilizando TV para Obtenção de Formas Canônicas

- A partir da tabela verdade de uma função é muito simples encontrar a sua forma canônica;
- Vejamos um exemplo. Considere a função:

$$F(A,B) = A+(\bar{A}\cdot B)$$

- O primeiro passo, refere-se a construir sua tabela verdade

Método da Tabela

	A	B	$\overline{A}\cdot B$	$A+(\overline{A}\cdot B)$
Maxtermos	0	0	0	0
Mintermos	0	1	1	1
	1	0	0	1
	1	1	0	1

- A partir da tabela é possível identificar os mintermos e maxtermos:
  - Mintermos correspondem a linhas com “1”;
  - Maxtermos correspondem a linhas com “0”.

Método da Tabela

- Para representar a função com base em seus mintermos ($\prod M_F$) selecionamos as linhas nas quais o resultado é igual a "1".
- Em seguida, verificamos suas variáveis de entrada (na linha). Se a variável for igual a 0, marcamos ela com "¯", caso contrário, usamos a variável diretamente.

A	B	$\bar{A}\cdot B$	$A+(\bar{A}\cdot B)$
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

$$\left.\begin{array}{l} \bar{A}B \\ A\bar{B} \\ AB \end{array}\right\} \prod M_F = \bar{A}B + A\bar{B} + AB$$

Método da Tabela

- Para representar a função com base em seus maxtermos ($\sum M_F$) selecionamos as linhas nas quais o resultado é igual a "0".
- Em seguida, verificamos suas variáveis de entrada (na linha). Se a variável for igual a 1, marcamos ela com "¯", caso contrário, usamos a variável diretamente.

A	B	$\bar{A}\cdot B$	$A+(\bar{A}\cdot B)$
0	0	0	0

$\Rightarrow$ **A+B** $\Rightarrow$ $\sum M_F = A+B$

Exercício

- Prove via manipulação algébrica que:

$$\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}B\bar{C}+ABC = \bar{A}+BC$$

Exercício

- Prove via tabela verdade TODAS as propriedades e teoremas apresentados nesta aula.

Pro Lar

- Leitura (Tocci): 3.10,3.11 (pp. 67-72)
- Leitura (Tocci): 4 – 4.3 (pp. 100 -106)
- Leitura (Capuano): 4 – 4.7 (pp. 93-100)
- Leitura (Capuano): 4.8 (pp. 100-104)
- Exercícios (Tocci): E = {3.22-3.24}
- Exercícios (Tocci): E = {4.1 – 4.3}

Bibliografia Comentada

- TOCCI, R. J., WIDMER, N. S., MOSS, G. L. **Sistemas Digitais – Princípios e Aplicações**. 11ª Ed. Pearson Prentice Hall, São Paulo, S.P., 2011, Brasil.

- CAPUANO, F. G., IDOETA, I. V. **Elementos de Eletrônica Digital**. 40ª Ed. Editora Érica.
- São Paulo. S.P. 2008. Brasil.