Representações Avançadas em Binário

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
Prof. Dr. rer. nat. Daniel D. Abdala

Na Aula Anterior...

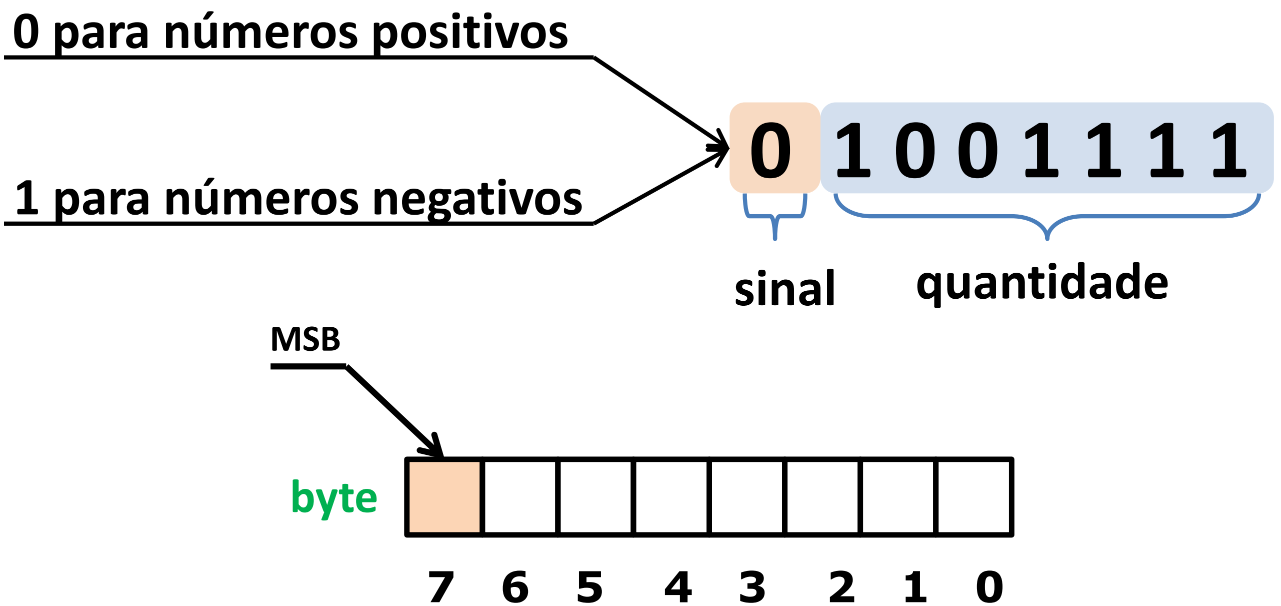
- Fundamentação dos sistemas Numéricos Posicionais
- Sistema Numéricos
  - Decimal
  - Binário
  - Octal
  - Hexadecimal
- Conversão de bases

Nesta Aula

- Representação de números negativos em binário;
- Representação de números reais em base binária;
- Conversão de bases de números reais;
- Complementos de 1 e 2;
- Extensão do sinal em complemento de 2;
- Notação de ponto flutuante;
- Motivação para Códigos Binários;
- Código BCD;
- Código Johnson;
- Código Excesso de 3;
- Código Gray;
- Código ASCII.

Números Inteiros Sinalizados

- Utiliza-se um tamanho fixo de palavra;
- Geralmente o bit mais significativo é reservado para o sinal do número;



Exemplos

1	0 0 0 0 0 0 1	⇨	-1_{10}
1	0 0 0 1 0 1 0	⇨	-10_{10}
0	0 1 0 1 0 1 0	⇨	$+42_{10}$
1	0 1 0 1 0 1 0	⇨	-42_{10}

Representações Alternativas para Números Inteiros Sinalizados

- Os números de magnitude com sinal são fáceis de entender, mas eles requerem demasiado hardware para adição e subtração. Isso tem levado ao uso amplo de complementos para aritmética binária.

- Existem dois tipos de complemento:
  - Complemento de 1
  - Complemento de 2

Complemento de 1

- O complemento de 1 é calculado pela inversão de cada um dos bit do número;
- Existe duas possíveis representações par o número 0.

Decimal	Comp. 1
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000
-1	1110
-2	1101
-3	1100
-4	1011
-5	1010
-6	1001
-7	1000
-0	1111

0 0 1 0 ➔ $+2_{10}$

1 1 0 1 ➔ -2_{10}

Complemento de 2

- O complemento de 2 é calculado pela inversão de cada um dos bits do número. Subsequentemente soma-se 1 ao valor dos bits invertidos;

$$
\begin{array}{rl}
 & 0\,0\,1\,0 \rightarrow +2_{10} \\
 & 1\,1\,0\,1 \\
+ & 0\,0\,0\,1 \\
\hline
 & 1\,1\,1\,0 \rightarrow -2_{10}
\end{array}
$$

Decimal	Comp. 2
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000
-1	1111
-2	1110
-3	1101
-4	1100
-5	1011
-6	1010
-7	1001
-8	1000

Extensão de Sinal Positivo

- Considere por exemplo a representação do número 11

0 1 0 1 1 → $\mathbf{11_{10}}$

- No computador, por conveniência de arquitetura, o tamanho da palavra binária (número de bits) é sempre múltiplo de 2 (4, 8, 16, 32, 64, ...)
- Para acomodar um número de 5 bits em uma palavra de 8 bits, basta estender o sinal para os demais bits

0 0 0 0 1 0 1 1 → $\mathbf{11_{10}}$

Extensão de Sinal Negativo

- Considere por exemplo a representação do número -11 em complemento de 2

1 0 1 0 1 ⇨ **-11_{10}**

- Se completarmos os bits restantes para uma palavra de 8 bits com zeros, o número deixará de ser o mesmo
- Em complemento de 2, basta que completemos os demais bits com o bit "1"

1 1 1 1 0 1 0 1 ⇨ **-11_{10}**

Números Reais em Binário

- Extensão simples do sistema posicional;
- A parte inteira fica inalterada, a parte fracionária utiliza potências negativas.

$1\,0{,}5_{10}$ ⇒

1	0	5
10^1	10^0	10^{-1}

..... ___ ___ ___ ___ , ___ ___ .....

	2^3	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}	2^{-2}	

Pot.	valor
2^{-1}	0,5
2^{-2}	0,25
2^{-3}	0,125
2^{-4}	0,0625
2^{-5}	0,03125
2^{-6}	0,015625
2^{-7}	0,0078125
2^{-8}	0,00390625

Conversão (Reais) Binário - Decimal

$42{,}42_{10} \Rightarrow 42_{10} + 0{,}42_{10}$

$$\begin{array}{r} 0{,}42 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \boxed{0}{,}84 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \boxed{1}{,}68 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \boxed{1}{,}36 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \boxed{0}{,}72 \\ \vdots \end{array}$$

$101010{,}0110_2$

Um Exemplo Mais Simples

$42,25_{10} \Rightarrow 42_{10} + 0,25_{10}$

$$
\begin{array}{r}
0,25 \\
\times\ \ 2 \\
\hline
0,50 \\
\times\ \ 2 \\
\hline
1,00
\end{array}
$$

$101010,01_2$

condição de parada

Conversão binário →decimal

$$\mathbf{1010{,}01_2}$$

$$\mathbf{0x2^{-1} + 1x2^{-2}}$$

Notação em Ponto Flutuante

- Fundamentada na notação numérica científica;

$42{,}42 = 42{,}42 \times 10^0 = 4{,}242 \times 10^1 = 0{,}4242 \times 10^2$

- Utilização otimizada do espaço de representação;
- Note que o sinal fracionário "flutua" dependendo do expoente associado a base;

$$^{+}\!/_{-}\, 0, mantissa \times base^{^{+}\!/_{-}\,\mathrm{expo}ente}$$

- A mantissa está contida no intervalo [0,1[
- É importante notar que a notação em ponto flutuante pode induzir à erros de arredondamento.

Padrões de Representação

IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic, IEEE 754’2008

- Precisão Simples

31	30 … 23	22 … 0
s	**expoente**	**mantissa**

- Precisão Dupla

63	62 … 52	51 … 0
s	**expoente**	**mantissa**

Conversão (Precisão simples)

- Expoente possui um bias de 127 (01111111_2);
- Ao contrário da notação científica tradicional, que coloca todos os dígitos significativos a direita da vírgula, em ponto flutuante deixamos um ‘1’ a esquerda da vírgula.

Exemplo

- $10{,}25_{10}$ ➡ $1010{,}01_2$ ➡ $1{,}01001 \times 2^3$
- sinal → +
- expoente → 127+3 = 130 → (01111111+11) = 10000010
- mantissa → 01001000000000000000000

31	30 … 23	22 … 0
0	10000010	01001000000000000000000

01001000000000000000000

Casos Especiais

- Números (não normalizados)

	31	30 … 23	22 … 0
zero	**x**	**00000000**	**00000000000000000000000**

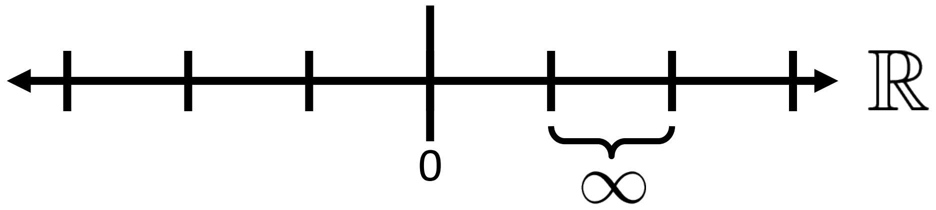
	31	30 … 23	22 … 0
infinito	**x**	**11111111**	**00000000000000000000000**

	31	30 … 23	22 … 0
NaN	**x**	**11111111**	**01000000010000000001000**

Pelo menos 1 bit da man-tissa diferente de zero

Números Representáveis

- Em matemática, o conjunto dos números reais é infinito;
- Entre dois números reais quaisquer, há infinitos números reais;
- Para tal, infinitos dígitos devem ser potencialmente utilizados;
- A representação de números reais utilizando a notação de ponto flutuante, utiliza um número finito de bits;
- Por definição, apenas **números racionais** podem ser representados em ponto flutuante;



Números Representáveis

- $0.1_{10} \rightarrow 0.0001100110011 ....$

$$Fra = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} \cdots \rightarrow 0.1$$

- s = 0 | m = 1.1001100110011 ... e = -4

31	30 … 23	22 … 0
0	**01111100**	**10011001100110011001100**

- Convertendo de volta para decimal ...
- m = 0,100000001490116119384765625
- erro = 0,000000001490116119384765625

Exercícios

- Converta para representação em ponto flutuante (precisão simples)
- **$42,42_{10}$**
- **$3,6_{10}$**

Códigos Binários

- O computador trabalha apenas com números;
- Estes números são sempre em binário, devido a aspectos de construção;
- Códigos binários fornecem uma forma de representar outros conceitos que não números, de maneira a serem mapeados diretamente para suas representações em binário, e desta forma, passíveis de serem processados pelo computador.

BCD 8421

- BCD significa "Binary Coded Decimal", ou seja,
- Representa números de 0-9 em binário;
- Utiliza quatro bits para cada dígito decimal;
- Para representar o número 10 por exemplo, são necessários oito bits em BCD 8421;
- 8421 referem-se as potências de cada uma das quatro casas do sistema de codificação.

BCD 8421

Decimal	Binário Puro	BCD 8421
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0010
3	0011	0011
4	0100	0100
5	0101	0101
6	0110	0110
7	0111	0111

Decimal	Binário Puro	BCD 8421
8	1000	1000
9	1001	1001
10	1010	0001 0000
11	1011	0001 0001
12	1100	0001 0010
13	1101	0001 0011
14	1110	0001 0100
15	1111	0001 0101

Código de Johnson

- Muito utilizado na construção de circuitos contadores;

Dec	Johnson	Binário
0	00000	0000
1	00001	0001
2	00011	0010
3	00111	0011
4	01111	0100
5	11111	0101
6	11110	0110
7	11100	0111
8	11000	1000
9	10000	1001

Código Excesso de 3

- Código simples, soma-se 11_2 ao número binário puro;

$0\,1\,1\,1_2$ ⇒ **$1\,0\,1\,0_{e3}$**

Dec	Exc 3	Binário
0	0011	0000
1	0100	0001
2	0101	0010
3	0110	0011
4	0111	0100
5	1000	0101
6	1001	0110
7	1010	0111
8	1011	1000
9	1100	1001

Código Gray

- Sistema de numeração binário no qual dois valores sucessivos diferem em apenas 1 bit;
- Aplicado em correção de erros, controle de dispositivos eletromecânicos, etc.

Dec	Gray	Binário
0	000	000
1	001	001
2	011	010
3	010	011
4	110	100
5	111	101
6	101	110
7	100	111

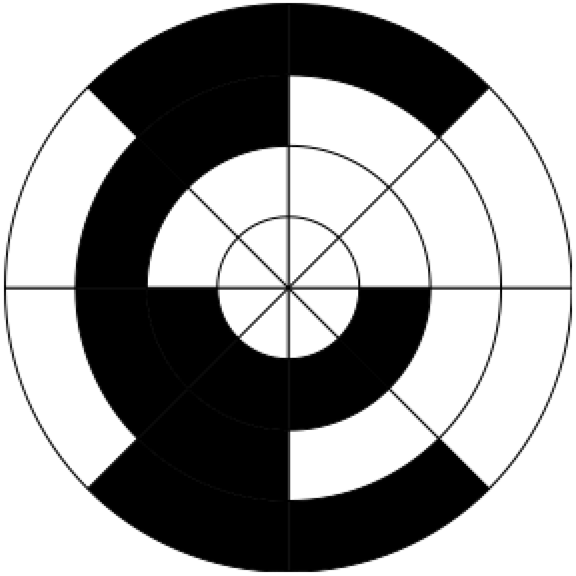


Tabela ASCII

000 (nul)	016 ► (dle)	032 sp	048 0	064 @	080 P	096 `	112 p
001 ☺ (soh)	017 ◄ (dc1)	033 !	049 1	065 A	081 Q	097 a	113 q
002 ☻ (stx)	018 ↕ (dc2)	034 "	050 2	066 B	082 R	098 b	114 r
003 ♥ (etx)	019 ‼ (dc3)	035 #	051 3	067 C	083 S	099 c	115 s
004 ♦ (eot)	020 ¶ (dc4)	036 $	052 4	068 D	084 T	100 d	116 t
005 ♣ (enq)	021 § (nak)	037 %	053 5	069 E	085 U	101 e	117 u
006 ♠ (ack)	022 ▬ (syn)	038 &	054 6	070 F	086 V	102 f	118 v
007 • (bel)	023 ↨ (etb)	039 '	055 7	071 G	087 W	103 g	119 w
008 ◘ (bs)	024 ↑ (can)	040 (	056 8	072 H	088 X	104 h	120 x
009 (tab)	025 ↓ (em)	041)	057 9	073 I	089 Y	105 i	121 y
010 (lf)	026 (eof)	042 *	058 :	074 J	090 Z	106 j	122 z
011 ♂ (vt)	027 ← (esc)	043 +	059 ;	075 K	091 [	107 k	123 {
012 ♀ (np)	028 ∟ (fs)	044 ,	060 <	076 L	092 \	108 l	124 |
013 (cr)	029 ↔ (gs)	045 -	061 =	077 M	093]	109 m	125 }
014 ♫ (so)	030 ▲ (rs)	046 .	062 >	078 N	094 ^	110 n	126 ~
015 ☼ (si)	031 ▼ (us)	047 /	063 ?	079 O	095 _	111 o	127 ⌂

Tabela ASCII

128	Ç	143	Å	158	₧	172	¼	186	║	200	╚	214	╓	228	Σ	242	≥
129	ü	144	É	159	ƒ	173	¡	187	╗	201	╔	215	╫	229	σ	243	≤
130	é	145	æ	160	á	174	«	188	╝	202	╩	216	╪	230	µ	244	⌠
131	â	146	Æ	161	í	175	»	189	╜	203	╦	217	┘	231	τ	245	⌡
132	ä	147	ô	162	ó	176	░	190	╛	204	╠	218	┌	232	Φ	246	÷
133	à	148	ö	163	ú	177	▒	191	┐	205	═	219	█	233	Θ	247	≈
134	å	149	ò	164	ñ	178	▓	192	└	206	╬	220	▄	234	Ω	248	°
135	ç	150	û	165	Ñ	179	│	193	┴	207	╧	221	▌	235	δ	249	∙
136	ê	151	ù	166	ª	180	┤	194	┬	208	╨	222	▐	236	∞	250	·
137	ë	152	ÿ	167	º	181	╡	195	├	209	╤	223	▀	237	φ	251	√
138	è	153	Ö	168	¿	182	╢	196	─	210	╥	224	α	238	ε	252	^{n}
139	ï	154	Ü	169	⌐	183	╖	197	┼	211	╙	225	ß	239	∩	253	^{2}
140	î	155	¢	170	¬	184	╕	198	╞	212	╘	226	Γ	240	≡	254	■
141	ì	156	£	171	½	185	╣	199	╟	213	╒	227	π	241	±	255	
142	Ä	157	¥														

Pro Lar

- Leitura: (Tocci) 6.2 (pgs. 254-259)
- Leitura: (Capuano) 1.2.3 até 1.2.3.4 (pgs. 22-27)
- Exercícios: (Capuano): E={1.2.3.1, 1.2.3,5}
- Leitura: (Tocci) 2.4-2.8 (pgs. 31-38)
- Leitura: (Capuano) 5.13 até 5.1.6 (pgs. 142-144)
- Exercícios: (Tocci): E={2.19 – 2.26 }

Bibliografia Comentada

- TOCCI, R. J., WIDMER, N. S., MOSS, G. L. **Sistemas Digitais – Princípios e Aplicações**. 11ª Ed. Pearson Prentice Hall, São Paulo, S.P., 2011, Brasil.

- CAPUANO, F. G., IDOETA, I. V. **Elementos de Eletrônica Digital**. 40ª Ed. Editora Érica.
- São Paulo. S.P. 2008. Brasil.