GSI008 – Sistemas Digitais

Visão Geral da Álgebra de Boole

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
Prof. João Henrique de Souza Pereira

Créditos dos slides para o Prof. Dr. Daniel D. Abdala

Na Aula Anterior ...

- Adição e subtração binária;
- Adição e Subtração no sistema de complemento de 2;
- Multiplicação de números binários;
- Divisão de números binários.

Nesta Aula

- Conceitos básicos da Álgebra Booleana;
- Variáveis e Funções Booleanas;
- Operações E, OU e NÃO;
- Tabelas Verdade;
- Exemplos de Funções Lógicas;
- Operações compostas:
  - NÃO-E;
  - NÃO-OU;
  - OU-Exclusivo;
  - NÃO-OU-Exclusivo;
- Circuitos Lógicos Gerados a partir de Expressões Booleanas;
- Expressões Booleanas Geradas por Circuitos Lógicos;
- Interligação entre Expressões, Circuitos e Tabelas Verdade.

Introdução

- Principal Diferença com relação à Álgebra tradicional reside no fato de que as variáveis e funções podem assumir apenas dois possíveis valores: “**0**” ou “**1**”, ou seja, é um tipo especial de Álgebra que trabalha com números binários;
- Álgebra Booleana é definida por uma 6-upla **$(X,\wedge,\vee,\neg,0,1)$**, que é interpretado como uma variável Booleana, as três possíveis operações e as quantidades válidas;
- Vista anteriormente na disciplina de lógica para computação.

Variáveis e Funções Booleanas

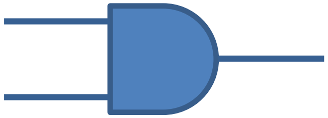
- Variáveis Booleanas, normalmente representadas por letras maiúsculas (A, B, C, D, etc...) podem acomodar apenas dois possíveis valores, ou seja, “0” ou “1”;
- Funções Booleanas, também geralmente representadas por letras maiúsculas (F, G, etc...) representam operações válidas entre variáveis Booleanas.

Álgebra Booleana

- Importante:

Como o conjunto de possíveis valores é discreto e reduzido, é possível listar todos os possíveis valores que uma função booleana pode assumir.

Operação E



A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Primeira das três operações fundamentais da Álgebra Booleana;

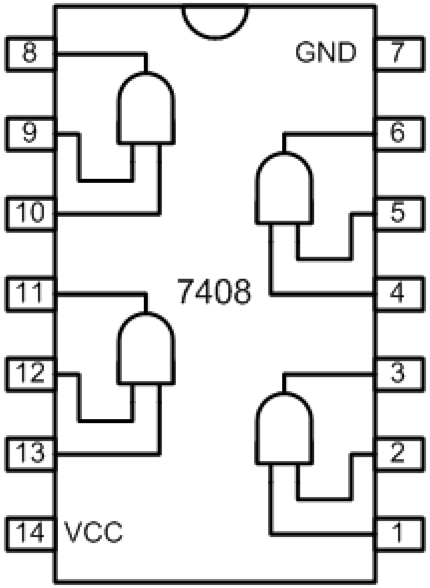
Pode ser interpretada como:

"verdade (1) apenas quando ambos os operadores forem verdadeiros"

- Representa a operação E lógico;
- Representações alternativas:
  - E, AND, ·, ∧
  - Em expressões/funções Booleanas, a ausência de operador significa que o operador E deve ser inferido

Porta E

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



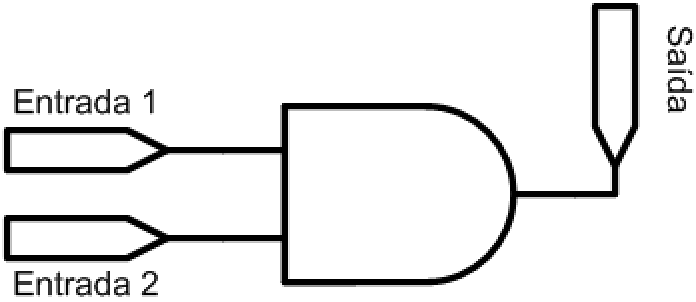
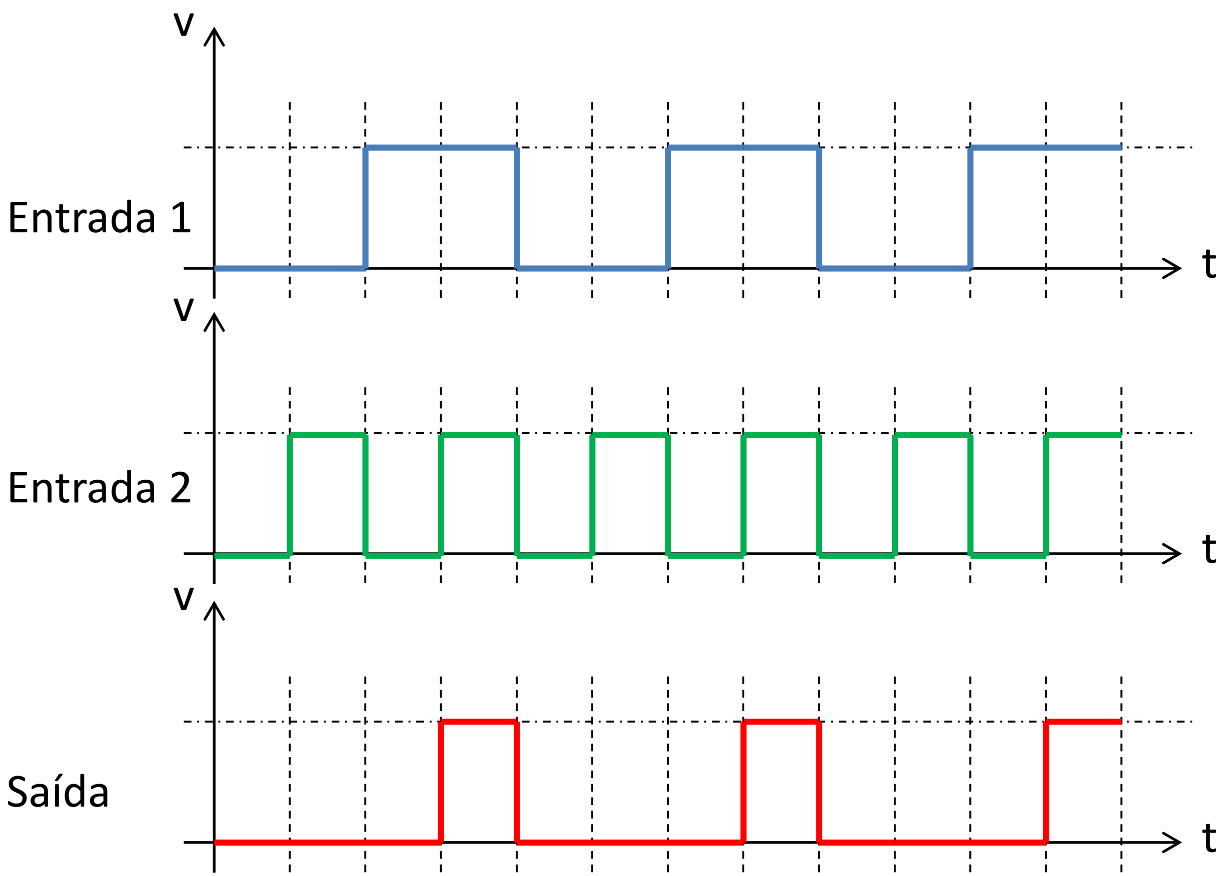
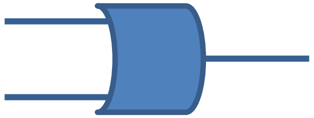


Diagrama de Tempo – E



A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operação OU



A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Segunda operação fundamental;

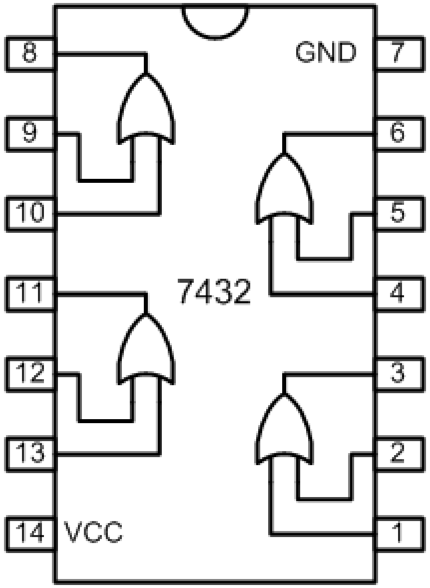
Pode ser interpretada como:

“verdade (1) quando qualquer dos operadores for verdadeiro”

- Representa o OU lógico;
- Representações alternativas:
  - OU, OR, +, V

Porta OU

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



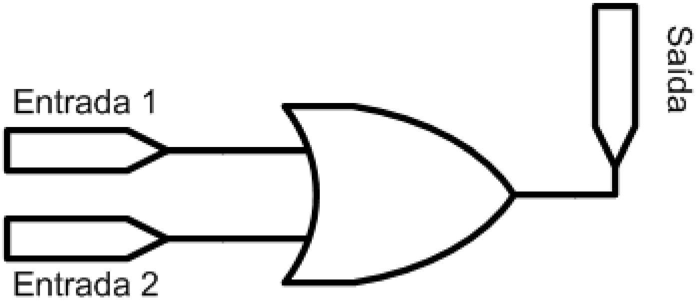
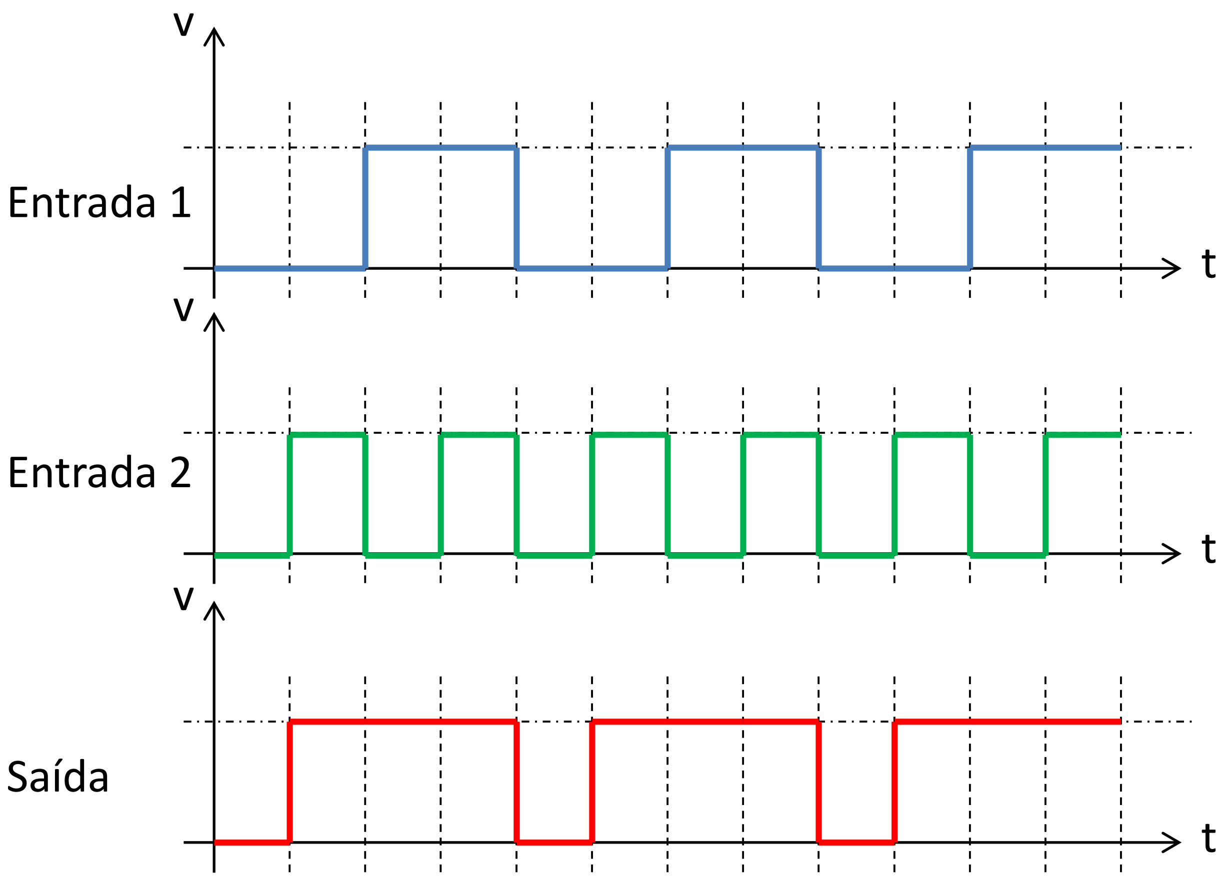
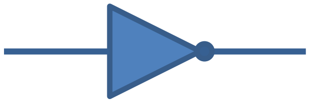


Diagrama de Tempo – OU



A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Operação NÃO



A	~A
0	1
1	0

- Terceira e última das operações funda-
mentais;

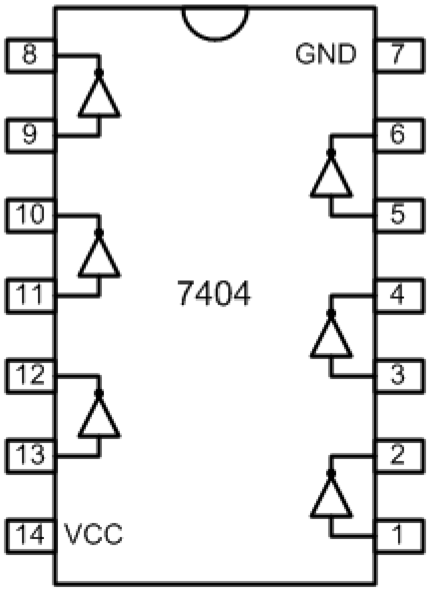
Pode ser interpretada como:

"complemento ou inverso do valor atual"

- Representa o NÃO lógico;
- Representações alternativas:
  - NÃO, NOT, ~, ¬
- Há uma notação muito usada na qual a operação não é representada com uma barra sobre a variável Booleana. Ex: $\overline{A}$

Porta NÃO

A	~A
0	1
1	0



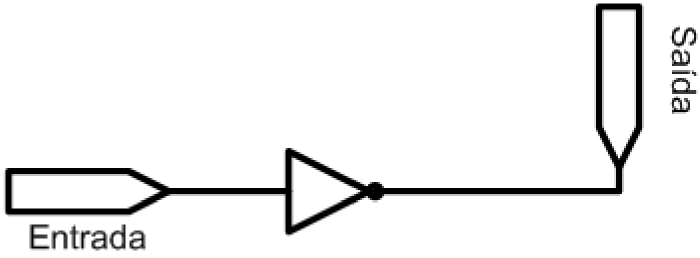
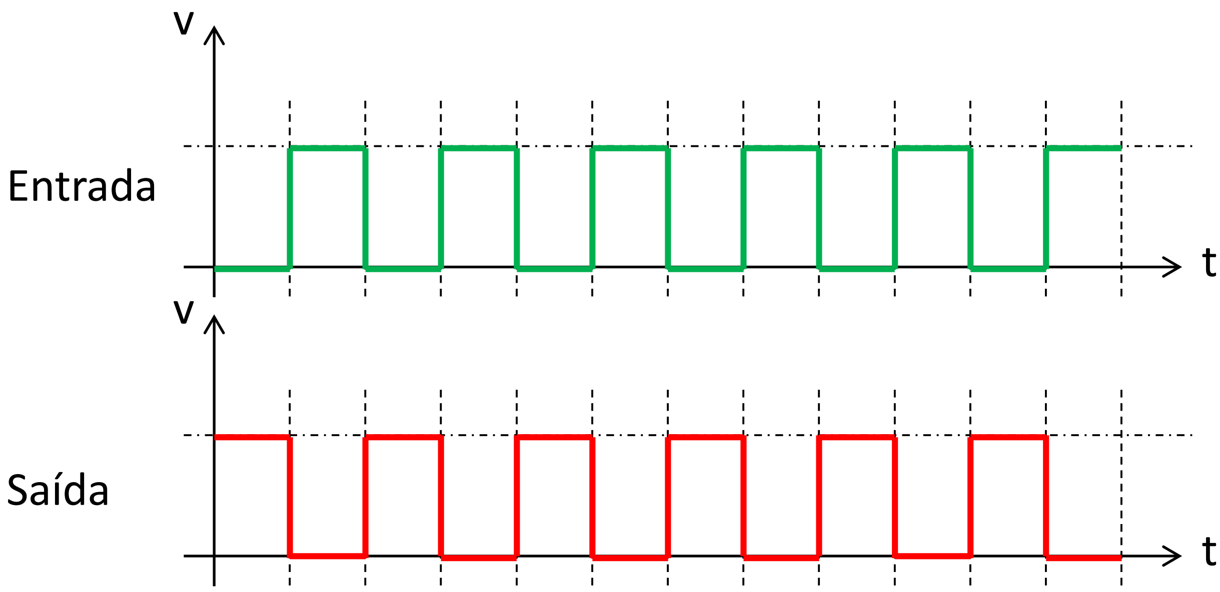


Diagrama de Tempo – NÃO

A	~A
0	1
1	0

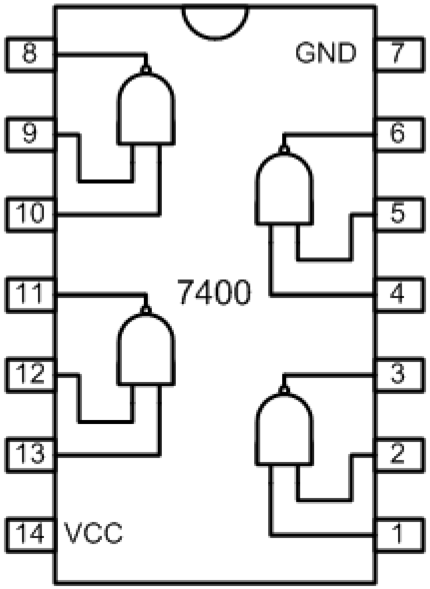


Operações Compostas

- É possível definir algumas operações compostas a partir das operações básicas
- Ex: Em Álgebra tradicional $N^2 = N \times N$
- Em Álgebra Booleana, definem-se as seguintes operações compostas:
  - NAND
  - NOR
  - XOR
  - XNOR

Porta NÃO E

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



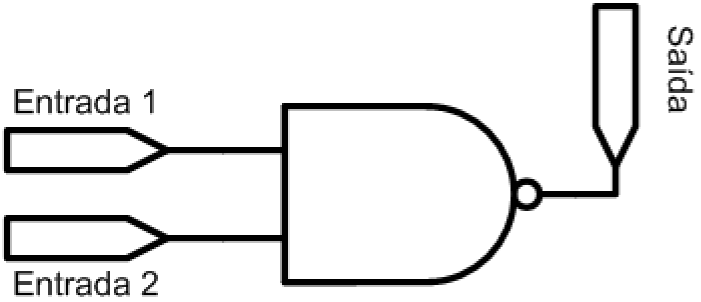
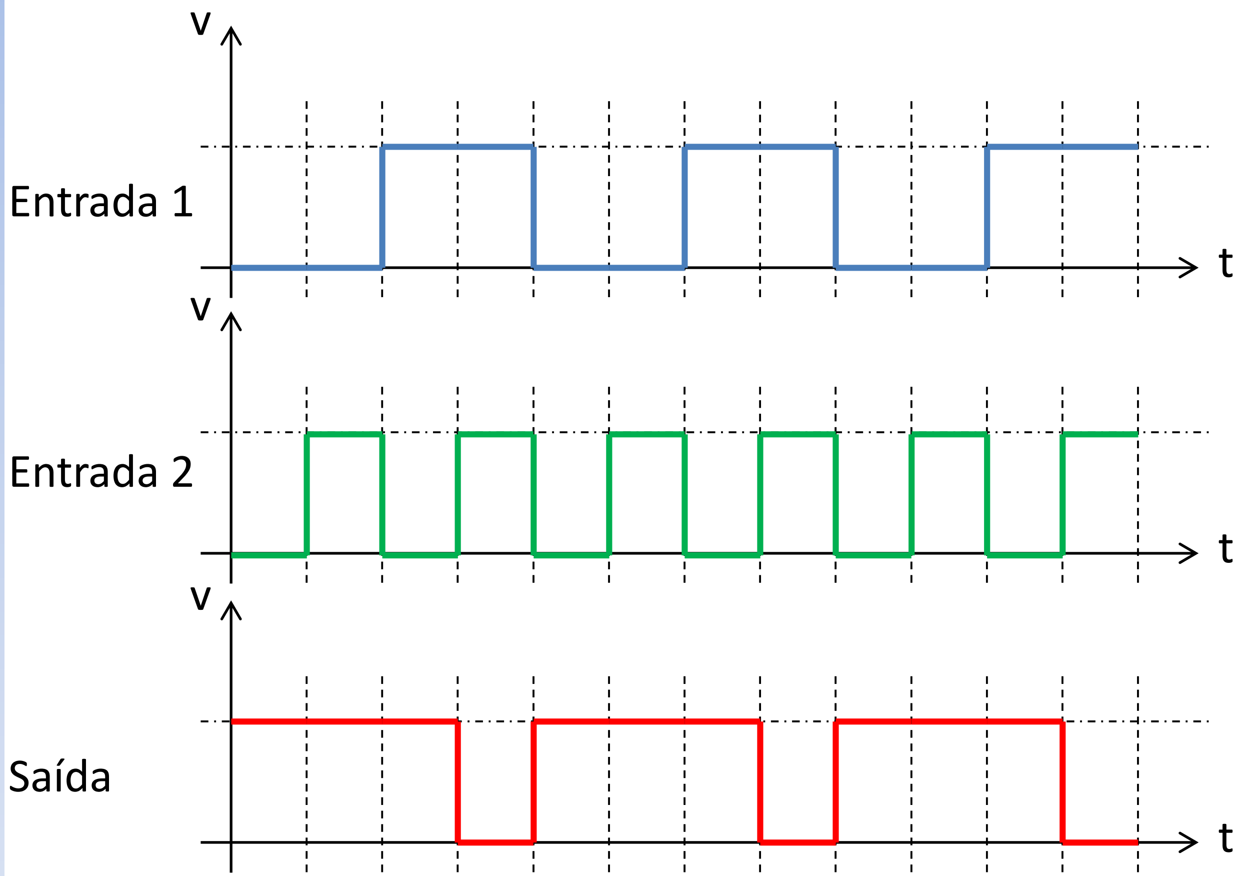


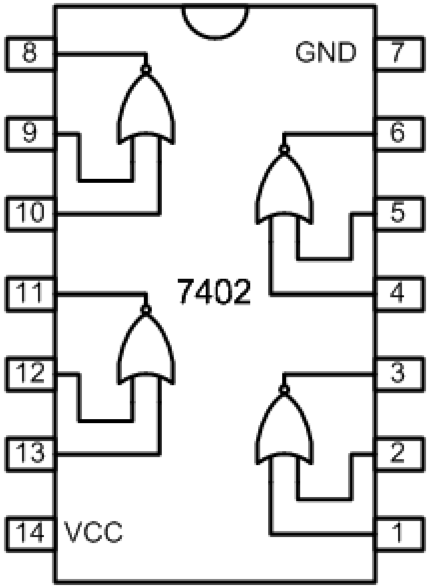
Diagrama de Tempo – NÃO E



A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Porta NÃO OU

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



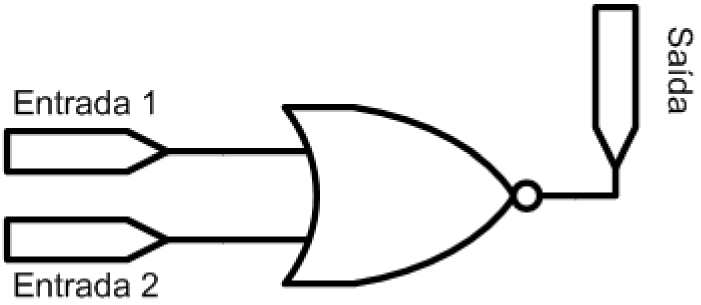
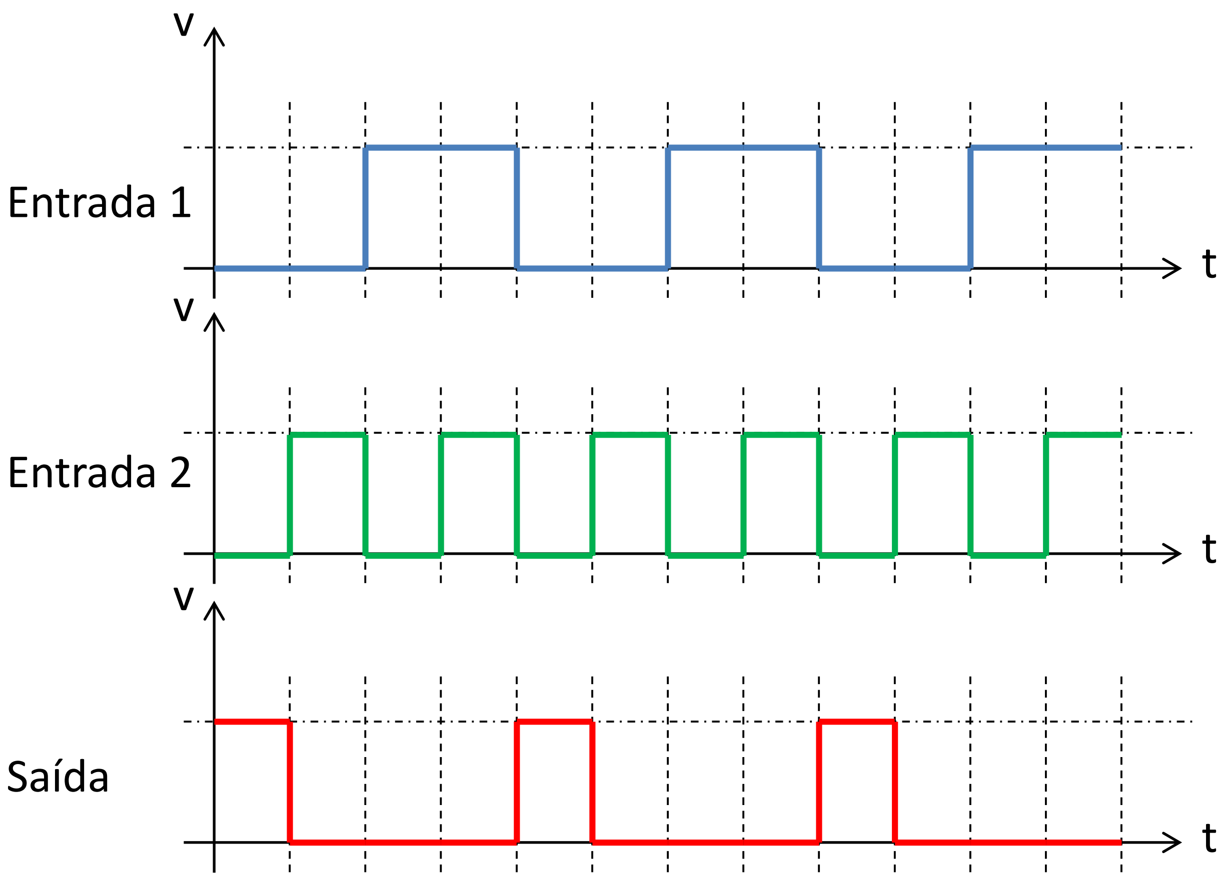


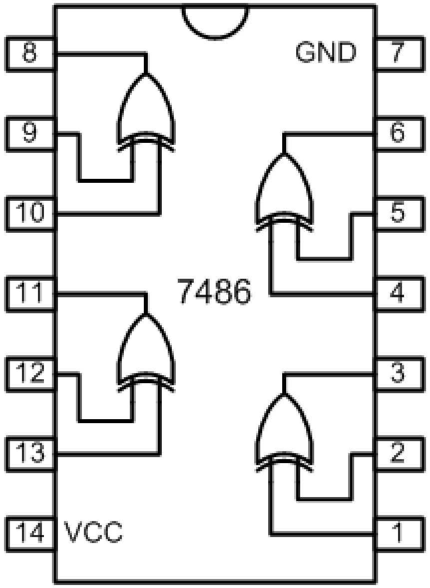
Diagrama de Tempo – NÃO OU



A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Porta XOU

A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



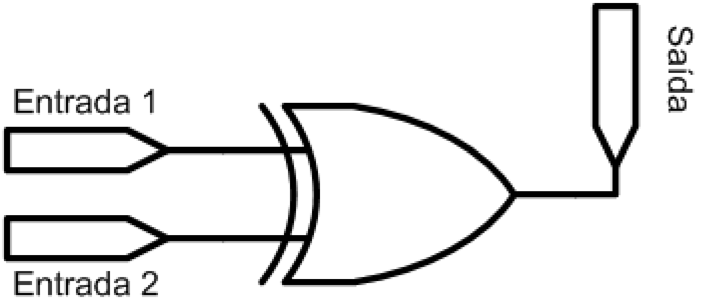
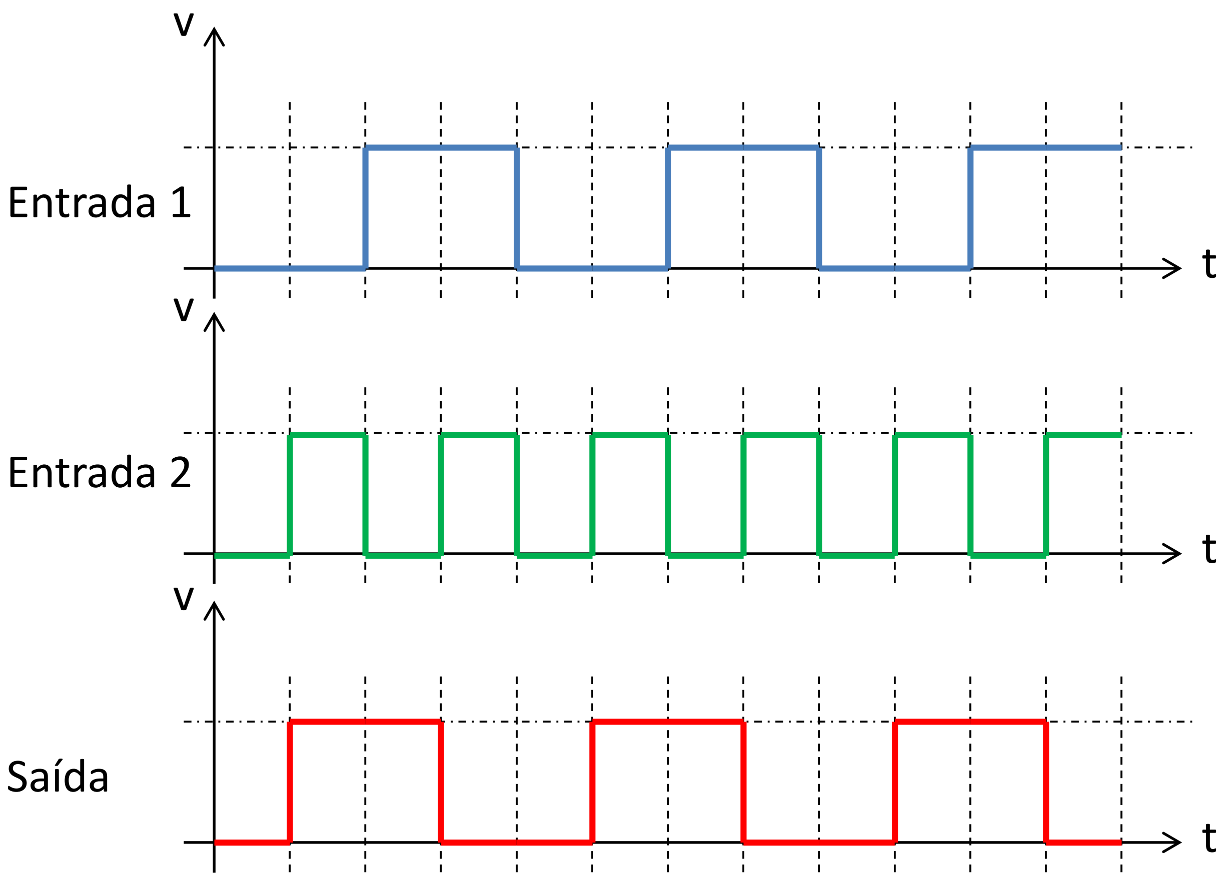
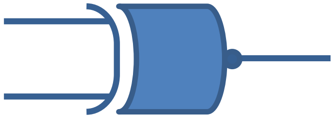


Diagrama de Tempo – XOU



A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operação NÃO OU-Exclusivo



A	B	$A \otimes B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Pode ser interpretada como:

  "verdade (1) quando os dois operadores forem iguais"

- $F(A,B) = (\overline{A} \cdot \overline{B}) + (A \cdot B) = A \otimes B$

Precedência de Operadores

- Existem apenas três operadores fundamentais: (**¬,∧,∨**)
- Sua precedência segue a orientação da esquerda para a direita, sendo o operador mais a esquerda o mais significativo
- Os símbolos “**(**“ e ”**)**” podem ser utilizados para alterar a precedência entre operações

Exemplos de Funções Booleanas

- $F(A,B) = A \cdot B$
- $F(A,B) = A+B$
- $F(A,B) = \overline{A} \cdot B$
- $F(A,B,C) = A \cdot B \cdot C$
- $F(A,B) = (\overline{A} \cdot B)+(\overline{B} \cdot A)$

Parênteses são usados para redefinir a ordem de avaliação de expressões Booleanas, tal como na Álgebra tradicional.

Tabelas Verdade

- Listagem sistemática de TODOS os possíveis valores que uma função Booleana pode assumir.
- Ex: F(A,B,C) = A·B·C

A	B	C	A·B	A·B·C
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Outro Exemplo

- $F(A,B) = (\overline{A} \cdot B)+(\overline{B} \cdot A)$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot B$	$\overline{B} \cdot A$	$(\overline{A} \cdot B)+(\overline{B} \cdot A)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

Outro Exemplo

- $F(A,B,C) = A \cdot \overline{B} \cdot C$

A	B	C	$\overline{B}$	$A \cdot \overline{B}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Mais um Exemplo

- $F(A,B,C) = (A\cdot\overline{B})\cdot(C+\overline{A})$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A\cdot\overline{B}$	$C+\overline{A}$	$(A\cdot\overline{B})\cdot(C+\overline{A})$
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0

Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

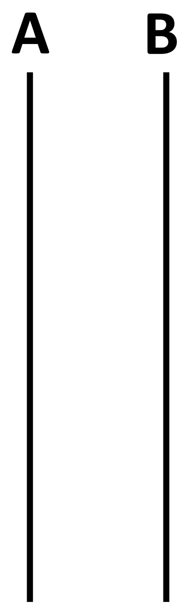
- Há uma correlação direta entre circuitos lógicos e expressões Booleanas;
- Ex: Dada a Função Booleana abaixo, construa o circuito lógico que a implementa:

$$F(A,B) = (\overline{A} \cdot B) + (A \cdot \overline{B})$$

- Passo 1: identificar as entradas
  - As entradas do circuito sempre encontram-se na assinatura da função **F(A,B)**. Caso a assinatura não seja dada, basta identificar todas as variáveis distintas.

Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

- Desenhe as entradas no topo de linhas paralelas verticais. Desenhe uma linha para cada entrada



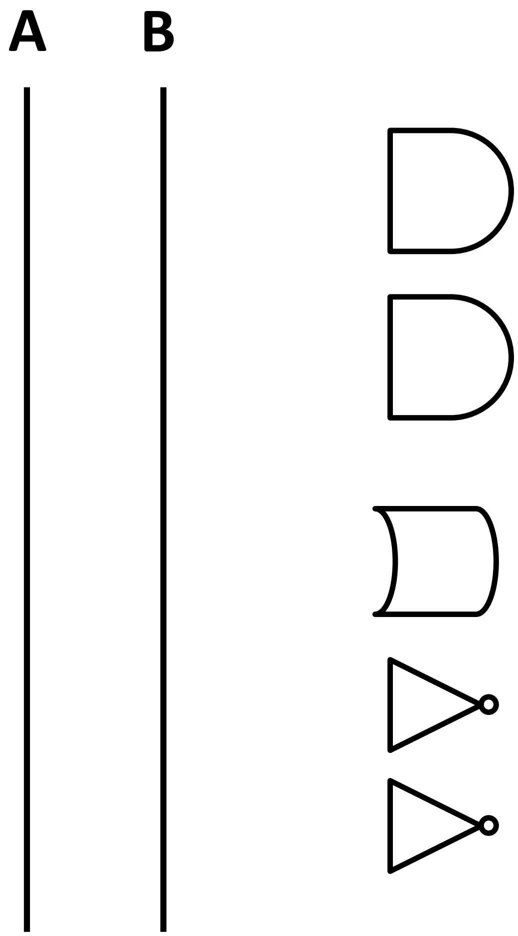
Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

- A seguir, identifique todas as operações lógicas da expressão

$$F(A,B) = (\overline{A} \cdot B) + (A \cdot \overline{B})$$

- Cada operação identificada será traduzida diretamente para uma porta lógica;
- A seguir, desenhe todas as portas lógicas identificadas.

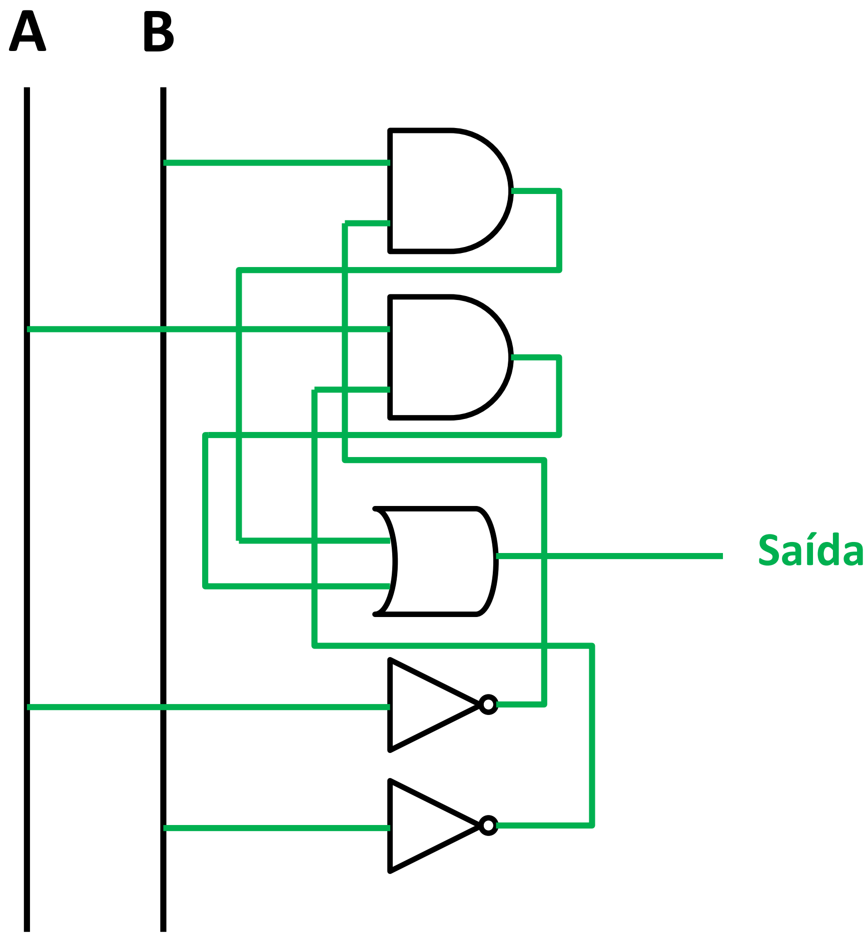
Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas



- A seguir, comece a ligar as portas lógicas;
- Obedeça a precedência entre operadores e respeite os parênteses
- Negações de variáveis são sempre seguras para serem ligadas primeiro

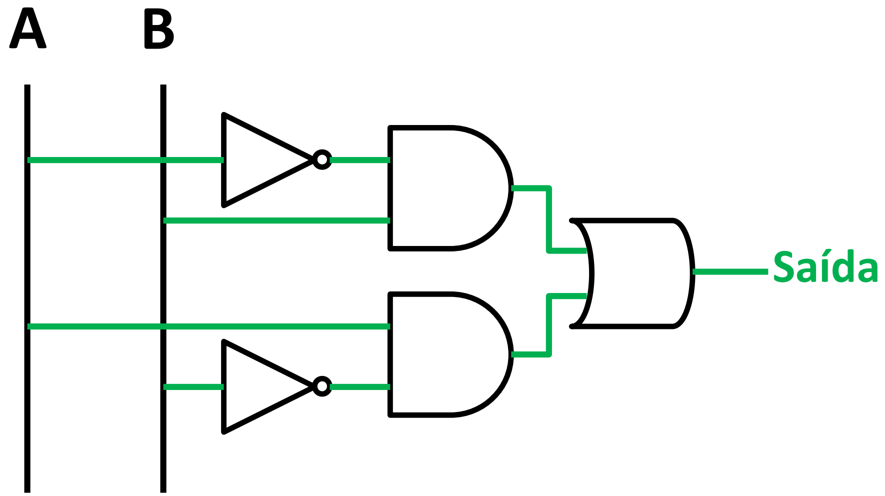
Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

$F(A,B) = (\overline{A} \cdot B) + (A \cdot \overline{B})$



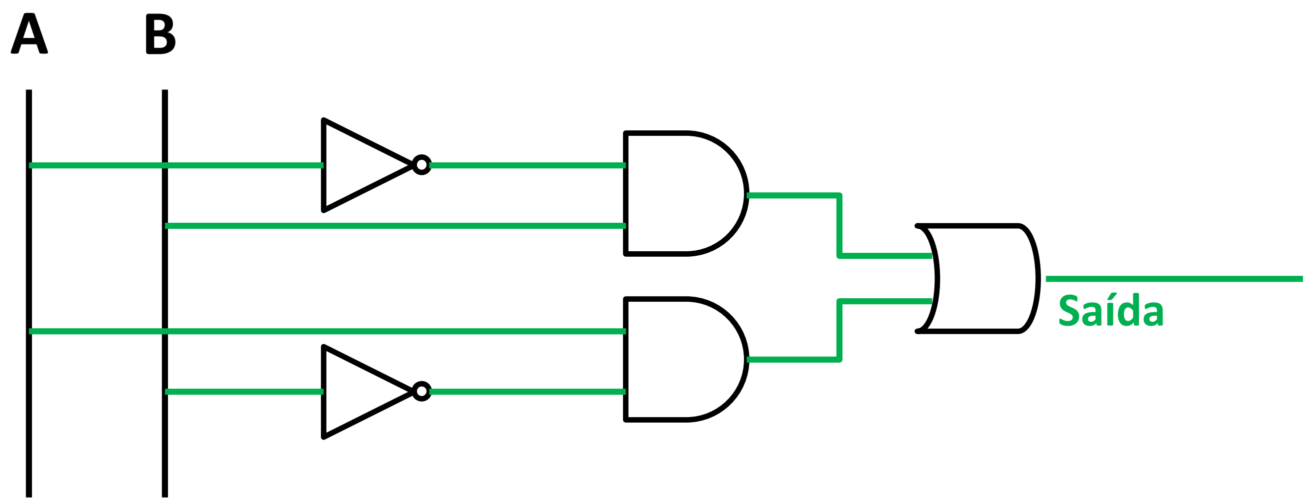
Circuitos Lógicos a Partir de Expressões Booleanas

- A seguir, reorganize a ordem das portas de modo que a disposição geral do circuito fique mais clara.
- Tente minimizar o número de ligações se cruzando.

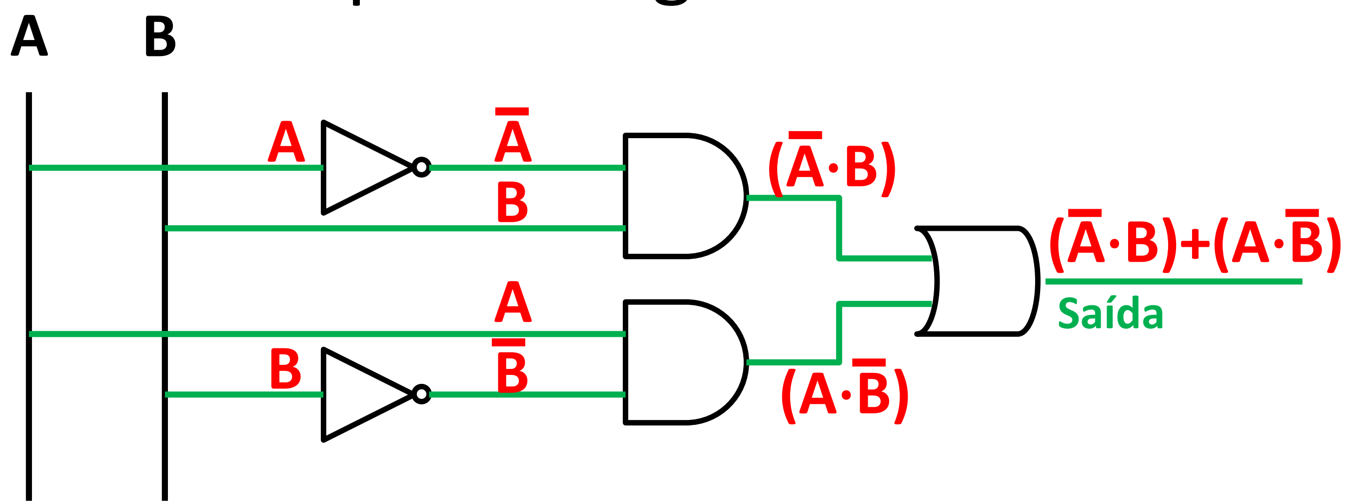


Expressões Booleanas a Partir de Circuitos Lógicos

- Primeiramente redesenhamos o circuito de modo que possamos escrever sobre as conexões.



- A seguir, propague as entradas para as entradas das portas lógicas.



- Por fim, escreva a função Booleana, como sendo a saída → **$F(A,B) = (\bar{A}\cdot B)+(A\cdot\bar{B})$**

Interligação entre Expressões, Circuitos e Tabelas Verdade

- Na aula passada, vimos que a partir de uma expressão Booleana, podemos levantar sua tabela verdade;
- Na aula de hoje, vimos que a partir de uma expressão Booleana podemos levantar o seu circuito lógico e vice-versa;
- Na realidade, Tabelas Verdade, Função Booleana e Circuito Lógico nada mais são do que diferentes maneiras de se olhar para o mesmo problema.

Pro Lar

- Leitura: (Tocci) 3 – 3.7 (pgs. 48 – 62)
- Leitura: (Capuano) 2 – 2.2.6 (pgs. 44 – 52)
- Exercícios: (Tocci)   E={3.1 – 3.15}

Exercício

Demonstre via tabela da verdade que:

$$F(A,B) = (\bar{A}\cdot\bar{B})+(A\cdot B) = \overline{(\bar{A}\cdot B)+(\bar{B}\cdot A)} = A \otimes B = \overline{A \oplus B}$$

Bibliografia Comentada

- TOCCI, R. J., WIDMER, N. S., MOSS, G. L. **Sistemas Digitais – Princípios e Aplicações**. 11ª Ed. Pearson Prentice Hall, São Paulo, S.P., 2011, Brasil.

- CAPUANO, F. G., IDOETA, I. V. **Elementos de Eletrônica Digital**. 40ª Ed. Editora Érica.
- São Paulo. S.P. 2008. Brasil.