P1 - Eletromagnetismo

Questão 1

(Corrente e Densidade de Corrente)

O módulo $J(r)$ da densidade de corrente em um certo fio cilíndrico é dado por $J(r) = Br$, onde r é a distância radial a partir do centro do fio em metros e $B = 2 \cdot 10^5 \ A/m^3$.

Qual é a corrente que passa em um anel concêntrico com o fio, com $10\mu m$ de largura, situado a uma distância radial de $1.2mm$ do centro do fio ?

Solução:

A densidade de corrente é dada por

$$J(r) = \frac{di}{dA}$$

Como estamos trabalhando com um fio de seção reta circular, teremos:

$$dA = 2\pi r dr$$

logo

$$di = J(r) \ 2\pi r dr$$

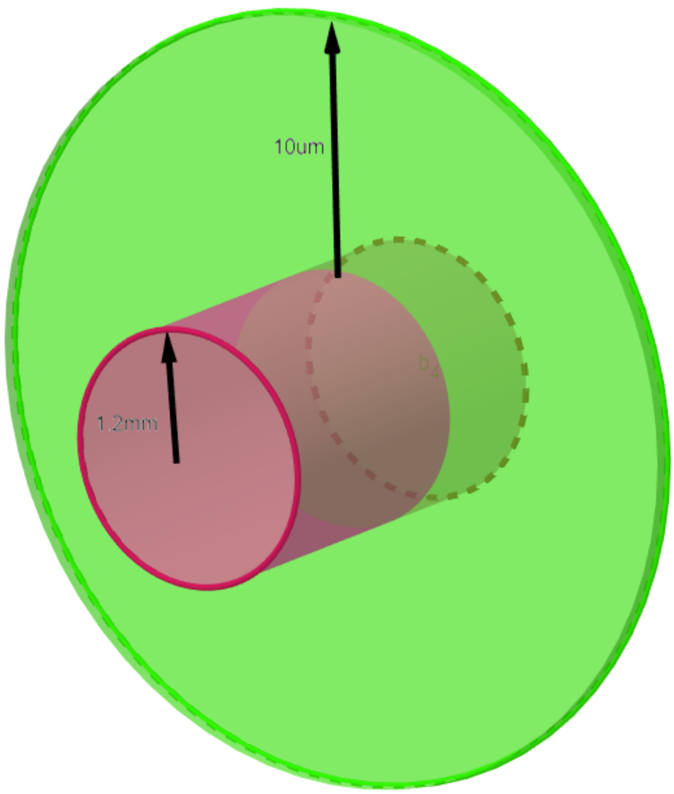
Assim, podemos calcular a correte através da integral:

$$i = \int_a^b 2\pi r J(r) dr$$

onde $a = 1.2 \cdot 10^{-3} m$ é o raio interno do anel e $b = 1.21 \cdot 10^{-3} m$ é o raio externo do anel.

In [48]:
```
from IPython.display import Image
Image("q1.png")
```

Out[48]:



In [50]:
```
from math import *
import sympy as sp
import numpy as np

B = 2e5
a = 1.2e-3
b = 1.21e-3

i, r, J = sp.symbols("i r J")

J = lambda r: B*r

i = sp.integrate(2*sp.pi*r*J(r),(r,a,b))

print("i = {:.5e} A ".format(i.evalf()))
```

```
i = 1.82468e-5 A
```

logo temos que

$$i = 18.25\mu A$$

Questão 2

(Distribuição Contínuas de Carga, Potêncial Elétrico, Campo Elétrico, Carga Elétrica)

Um fio retilíneo fino, de comprimento $2L$, está postado ao longo do eixo cartesiano X, com seu centro na origem. A densidade linear de carga do tal fio é dada por:

$$\rho_L(x) = \frac{\rho_0|x|}{L}$$

onde $\rho_0 = cte = 4$

a) Calcule o potencial eletroestático $V(x=0, y, z=0)$ para um ponto arbitrário no eixo cartesiano y com ordenada $y > 0$. Sendo $V(\infty) = 0$ e $L = 2m$.

b) Calcule, a componente y do vetor campo elétrico $E_y(x=0, y, z=0)$ em tal ponto.

c) Determine, a carga total de tal fio.

Solução:

Calculando o potencial, vamos calcular somando os potenciais infinitesimais em cada partícula do fio no ponto $(0, y, 0)$ com $y > 0$ $V = \int_{fio} dV$

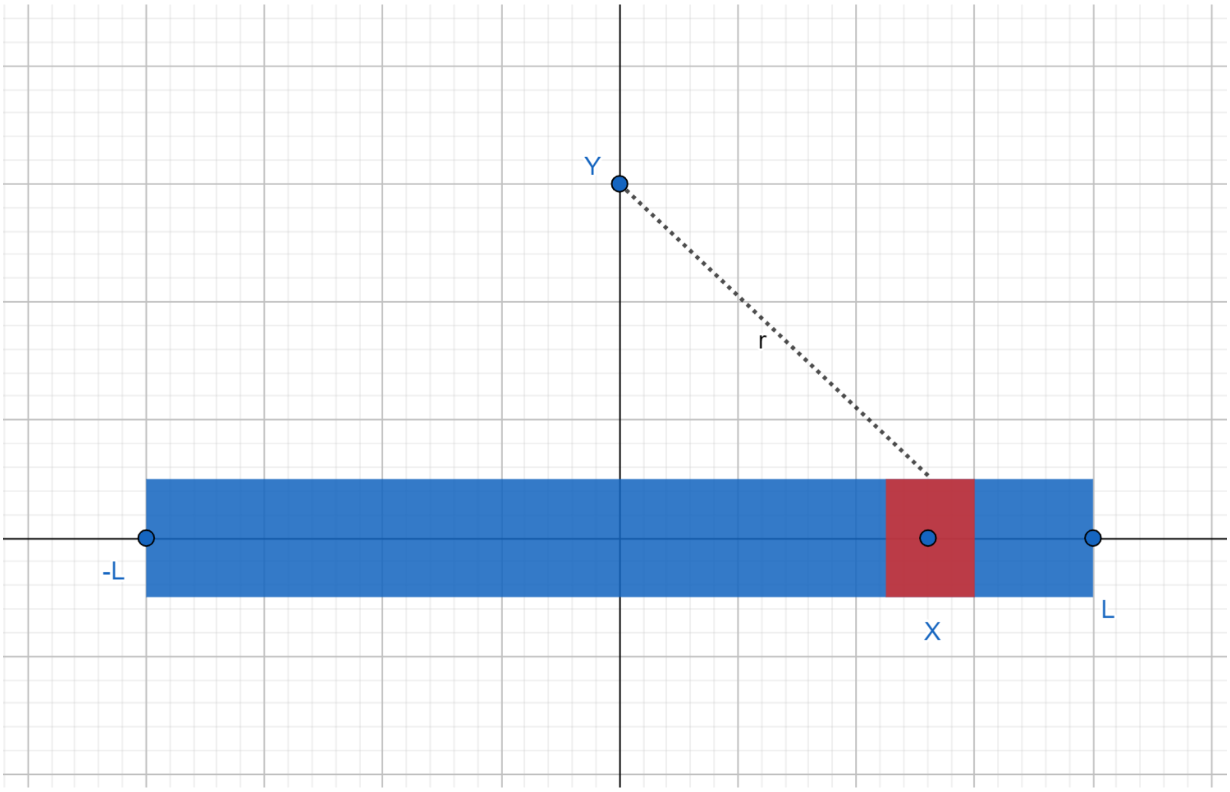
$$dV = k\frac{dq}{r}$$

onde podemos trocar o diferencial das cargas por densidade

$$dq = \rho_L(x)dx$$

In [52]:
```
Image("q2.png")
```

Out[52]:



Logo vamos ter

$$V = \int_{fio} k\frac{\rho_L(x)}{r}dx$$

$$V = \int_{-L}^{L} k\frac{\rho_0|x|}{L\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

tirando tudo que é constante da integral ficaremos com

$$V = k\frac{\rho_0}{L}\cdot\int_{-L}^{L}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$$

In [54]:
```
L, x, y, rho0, k,V= sp.symbols("L x y rho_0 k V")
e0 = 8.85e-12
L = 2
rho0 = 4
k = 1/(4*sp.pi*e0)

I = sp.integrate(abs(x)/(sp.sqrt(x**2 + y**2)),(x,-L,L))

V = (k*rho0/L) * I

V.evalf(4)
```

Out[54]: $7.194\cdot10^{10}\left(0.25y^2+1\right)^{0.5} - 3.597\cdot10^{10}\left(y^2\right)^{0.5}$

Tendo a tensão podemos calcular a componente y do campo elétrico. Dado que :

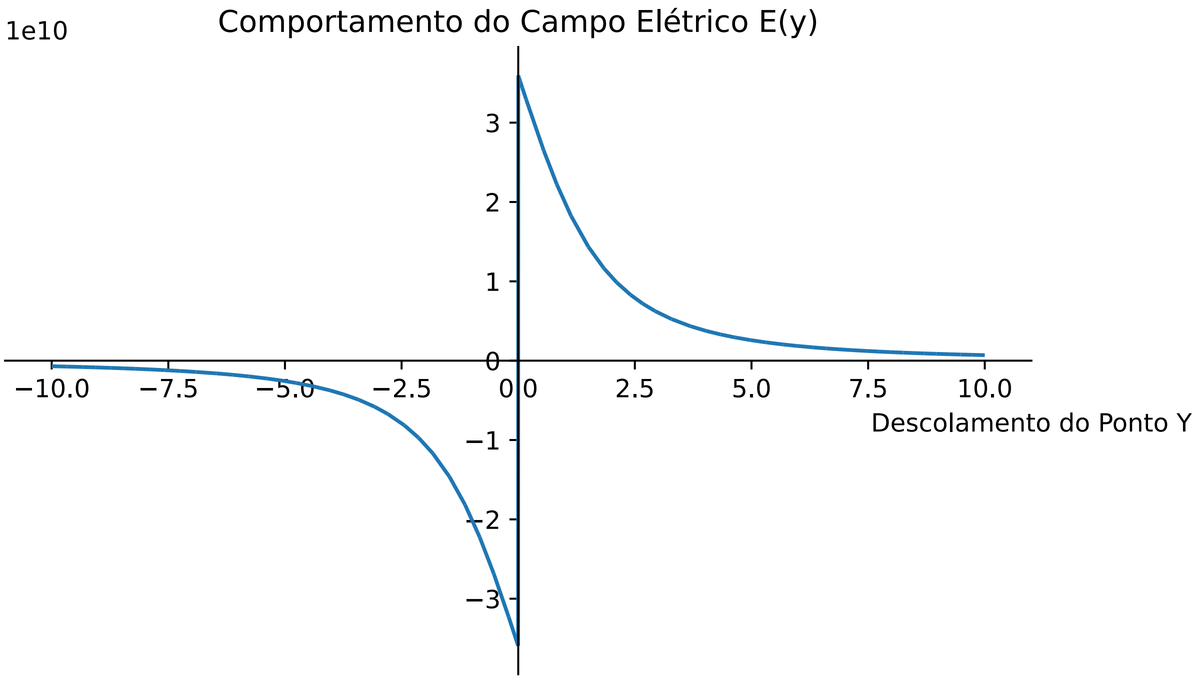
$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

In [56]:
```
Ey = lambda y: - V.diff(y)
Ey(y).evalf(4)
```

Out[56]: $-\frac{1.798\cdot10^{10}y}{\left(0.25y^2+1\right)^{0.5}} + \frac{3.597\cdot10^{10}\left(y^2\right)^{0.5}}{y}$

In [58]:
```
sp.plot(Ey(y),(y,-10,10), title= "Comportamento do Campo Elétrico E(y)", xlabel = "D
```

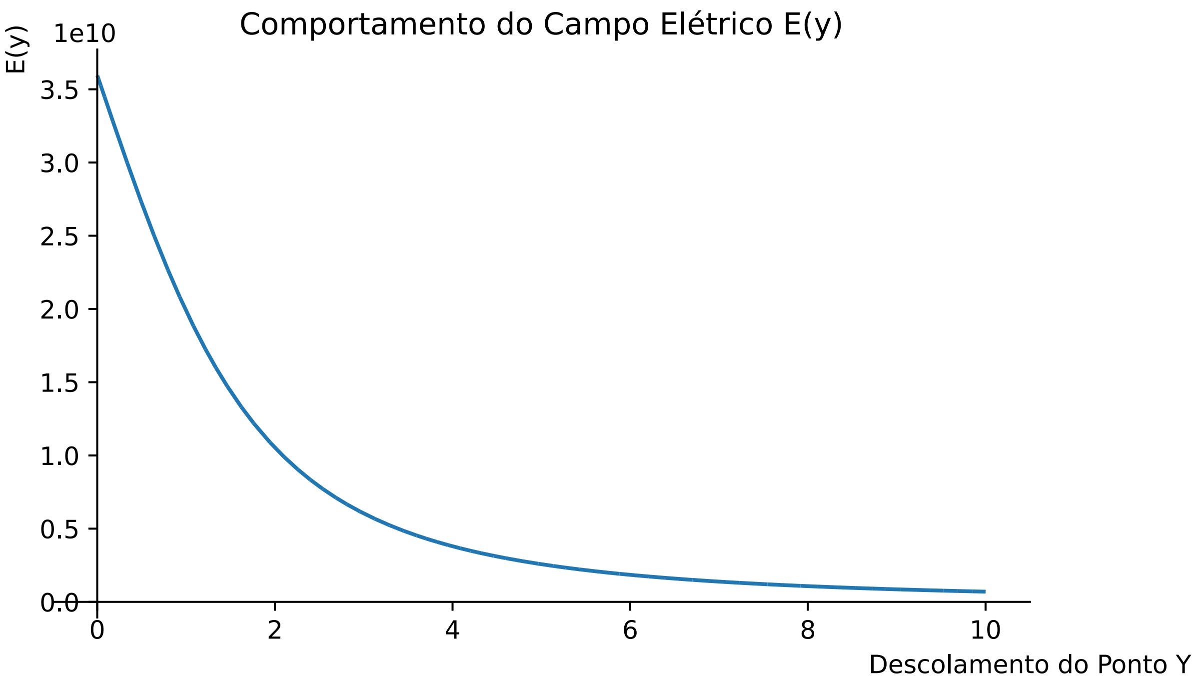


Out[58]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x18764149b50>

Podemos interpretar com o gráfico, que conforme o ponto Y vai se afastando da distribuição linear de carga, o Campo Elétrico também vai caindo com as dadas proporções. A assintota da parte negativa, no 3 quadrante, poderia indicar que estamos botando o ponto Y a uma distância abaixo da origem na distribuição de carga, acaba acarretando no mesmo comportamento de decaimento do Campo, sindo Simétrico.

Porém como queremos uma análise para $y > 0$, teremos:

In [60]:
```
sp.plot(Ey(y),(y,0,10), title= "Comportamento do Campo Elétrico E(y)", xlabel = "Des
```



Out[60]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x18763ae6a30>

Para obter a carga total agora, basta integrar a densidade na barra toda:

$$Q = \int_{-L}^{L} \rho_0 \frac{|x|}{L} dx$$

In [61]:
```
Q = rho0/L * sp.integrate(abs(x),(x,-L,L))
Q
```

Out[61]: 8.0

$$Q = 8C$$

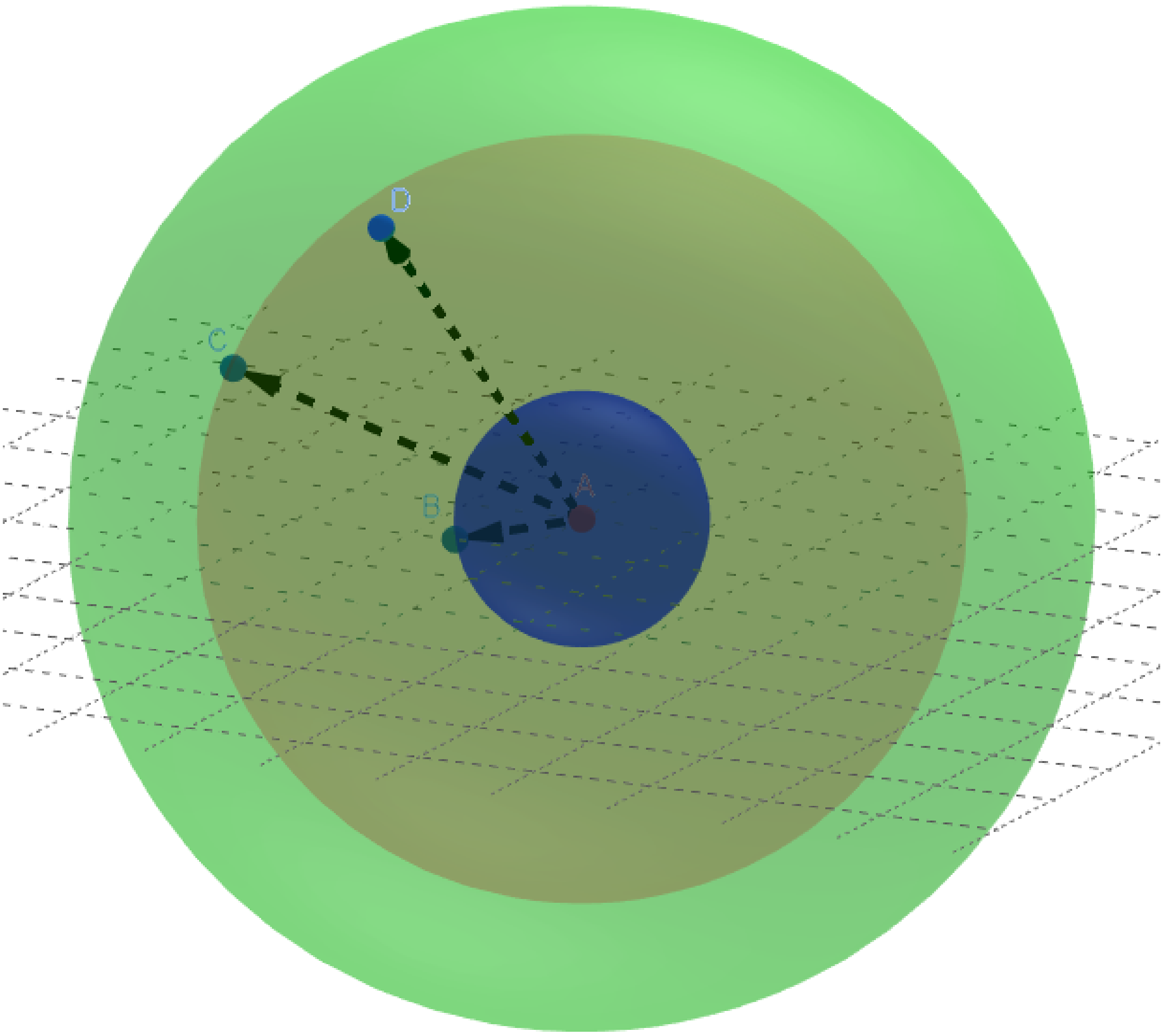
Questão 3

(Lei de Gauss, Campo Elétrico, Distribuição de Carga)

Esboce um gráfico para o campo elétrico em função do raio r nas gaussiana azul e verde no desenho abaixo, para modelar a Simétria Esférica da esfera vermelha maciça com cargas uniformemente distribuídas.

In [62]:
```
Image("q3quest.png")
```

Out[62]:



Solução:

Para calcular o campo elétrico dentro da esfera Vermelha, ou seja, na gaussiana Azul vamos usar a lei de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

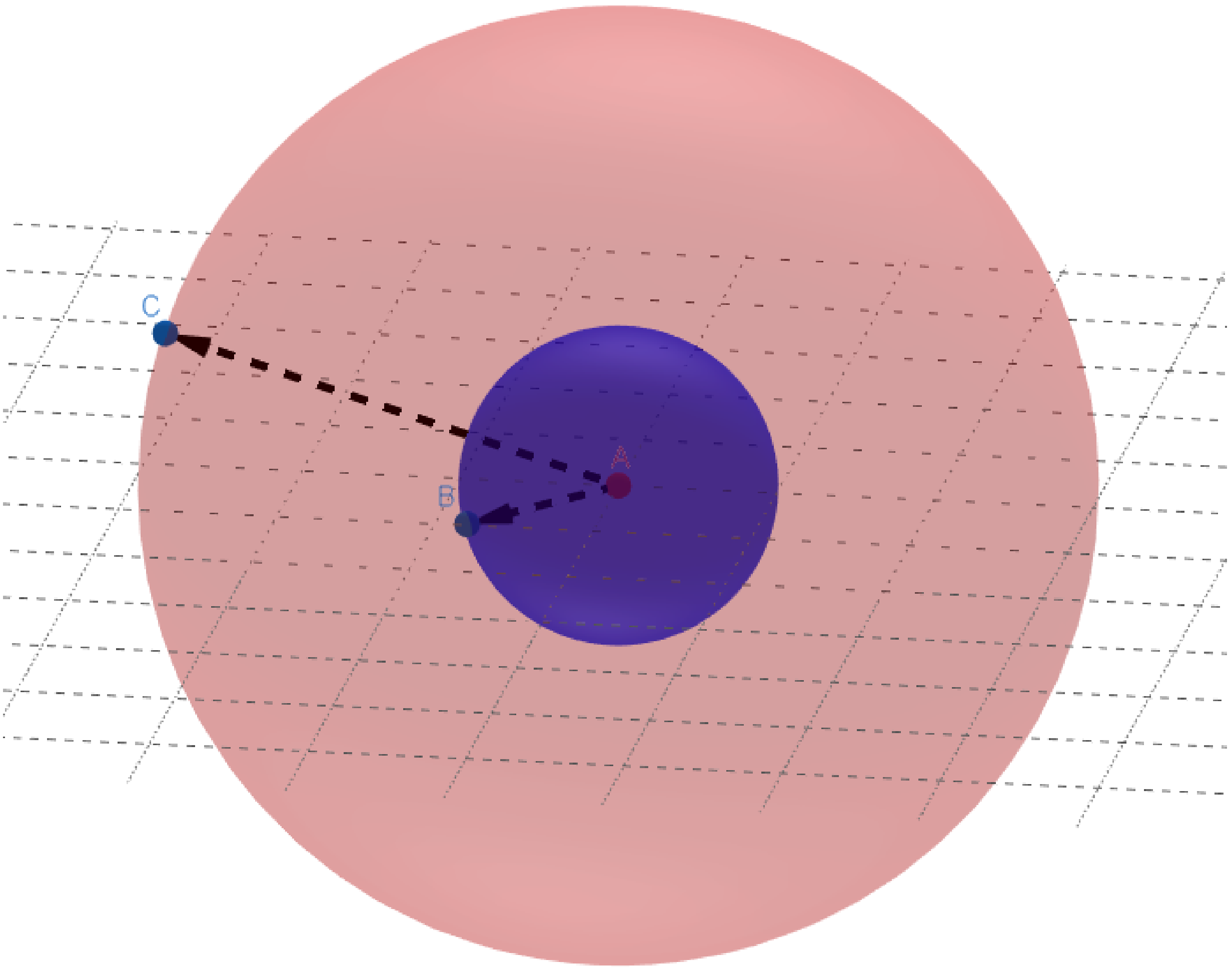
A simétria esférica é radial, isso faz com que o vetor campo elétrico faça 0° ou 180° com o vetor $d\vec{A}$, afentando então somente o sinal do campo elétrico uma vez que o $\cos 0^\circ = 1$ e $\cos 180^\circ = -1$, vamos adotar aqui uma distribuição de cargas positivas, logo $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ ambos saindo da esfera, fazendo 0°.

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi\, r^2}$$

Calculando $r \leq R$:

In [63]:
```
Image("q3r.png")
```

Out[63]:



A gaussiana Azul é englobada apenas pela esfera carregada, então vamos usar a densidade volumétrica de carga.

$$\rho_v = \frac{Q_{int}}{V_{int}}$$

$$Q = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

Substituindo na expressão do campo elétrico, teremos:

$$E_1 = \left(\rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \; 4\pi r^2}$$

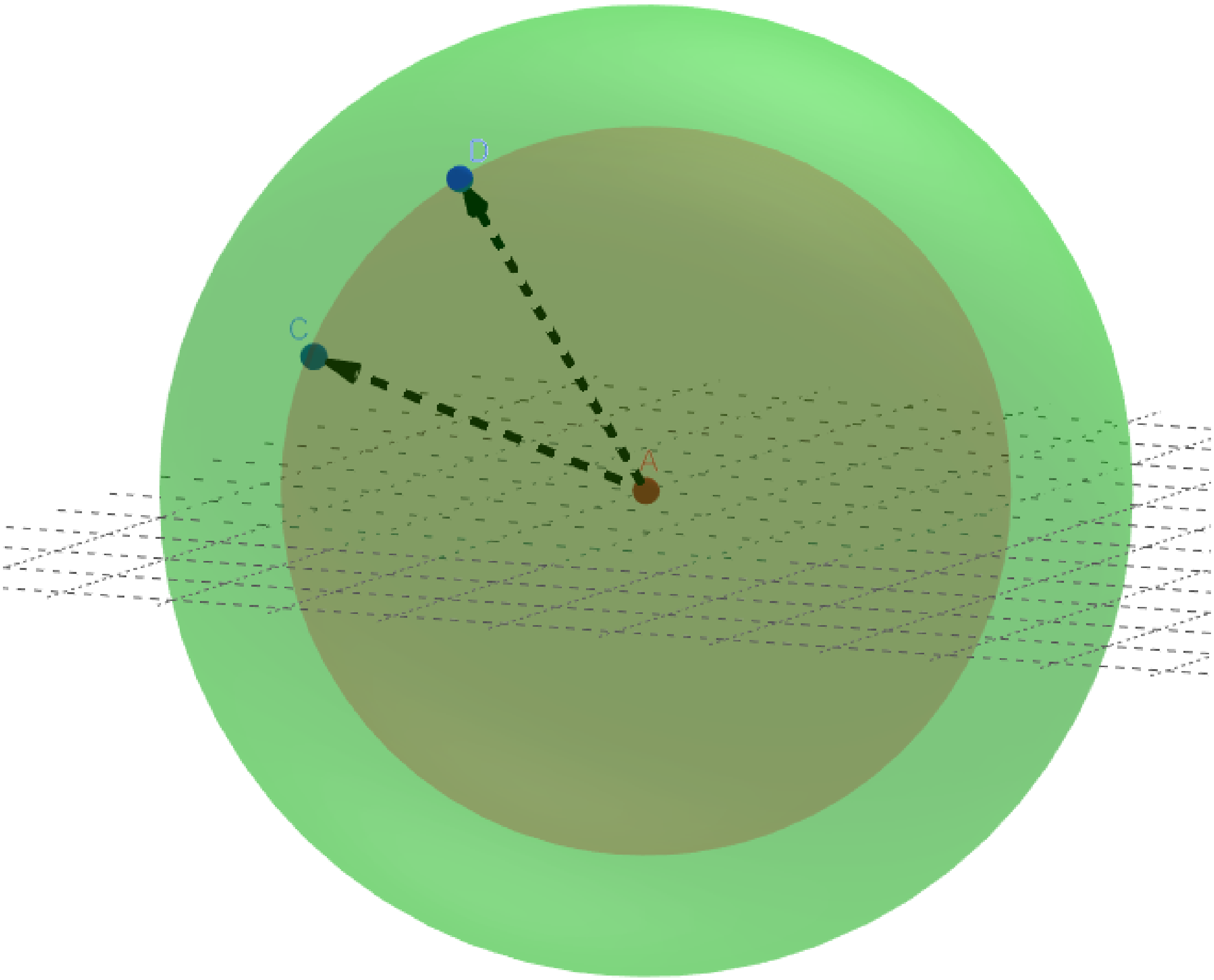
Simplificando

$$E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r$$

Calculando agora a gaussiana Verde $r \geq R$:

In [64]:
```
Image("q3rr.png")
```

Out[64]:



A gaussiana nesse caso, engloba a esfera carregada. Dessa forma, a carga interna será:

$$Q = \rho \frac{4\pi R^3}{3}$$

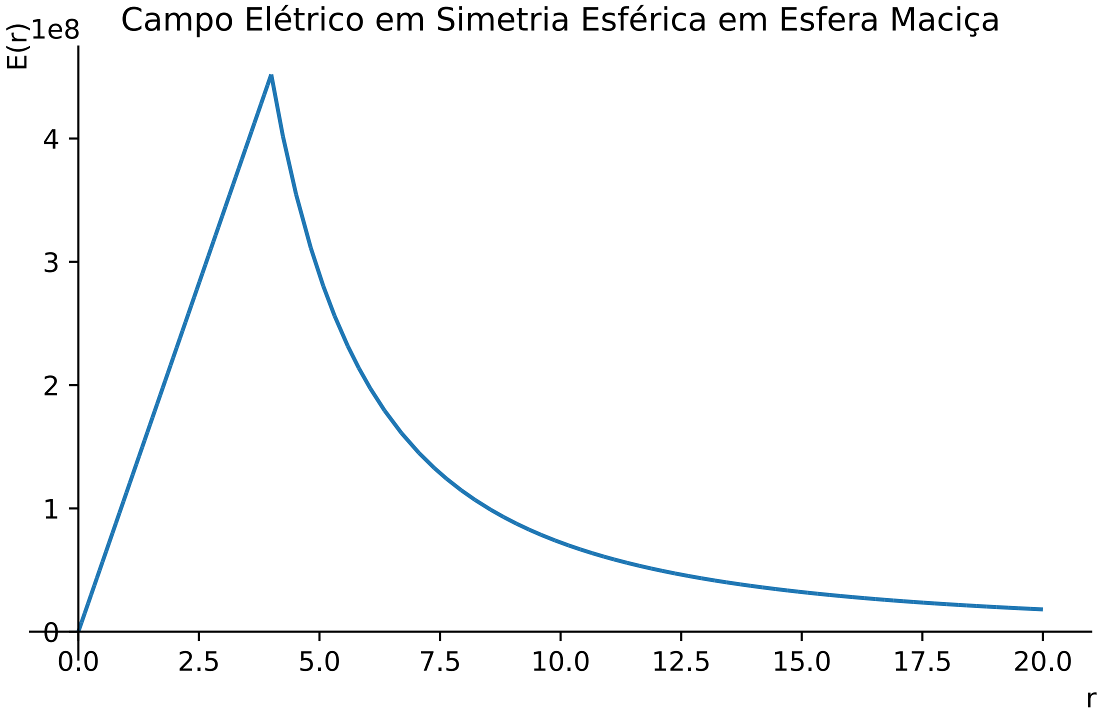
onde R é o raio da esfera vermelha, a esfera carregada e ρ é a densidade volumétrica. Substituindo na expressão de campo elétrico

$$E_2 = \left(\rho \frac{4\pi R^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \; 4\pi r^2}$$

Simplificando

$$E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2}$$

In [59]:
```
R = sp.symbols("R")
#valores hipteticos para conseguir ver o comportamento do gráfico
rho = 3e-3
R = 4
E1 = lambda r: rho/(3*e0) * r
E2 = lambda r: rho/(3*e0) * (R**3)/(r**2)
sp.plot((E1(r),(r,0,R)),(E2(r),(r,R,20)),title = "Campo Elétrico em Simetria Esféric
```



Out[59]: `<sympy.plotting.plot.Plot at 0x187634647c0>`

Podemos observar que no primeiro momento temos uma reta, isso porque a função E_1 é linear, e no segundo momento em E_2 temos que o campo cai com o quadrado da distância, em um experimento mental, podemos entender que do centro da esfera maciça até o máximo comprimento do raio R, que nesse caso foi de $4m$, temos um o campo elétrico crescente e linear, a partir do momento que pegamos um ponto externo a esfera e vamos distanciando ele, teremos que o campo elétrico irá diminuir com o quadrado dessa distância.