Lista 5 - Campo Elétrico em Meio Material

Q2

Sabendo que

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

e dados que $J = 15(1 - e^{-1000r})\ a_z$ e o raio do fio valendo $2mm$ podemos simplesmente integrar, posto que $\vec{J}$ e $d\vec{S}$ fazendo 0° entre si.

$$l = \int_0^{2\pi} \int_0^{0.002} 15(1 - e^{-1000r}) r dr d\phi$$

In [23]:
```
from math import *
import sympy as sp
import numpy as np

r,phi,o = sp.symbols('r phi theta')

J = lambda r: 15*(1-sp.exp(-1000*r))

i = sp.integrate(sp.integrate(J(r)*r,(r,0,0.002)),(phi,0,2*sp.pi))
print("I = {:.2e} A".format(i.evalf()))
```

```
I = 1.33e-4 A
```

arrumando as casas decimais

$$I = 0.133\ mA$$

Q4

Sabedno que J podemos sómente integrar o produto vetorial para achar a corrente total

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

onde $dS = r^2 \sin(\theta)\ d\phi\ d\theta\ a_r$ para casca hemisférica de raio $20cm$ no produto escalar a_θ e a_r se anulam

$$I = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^3} 2 \cos\theta r^2 \sin(\theta)\ d\phi\ d\theta$$

In [24]:
```
ds = r**2 * sp.sin(o)
J = (1/r**3)* 2*sp.cos(o)

I = lambda r: sp.integrate(sp.integrate(J*ds,(phi,0,2*sp.pi)),(o,0,sp.pi/2))
I(r).subs(r,0.2).evalf()
```

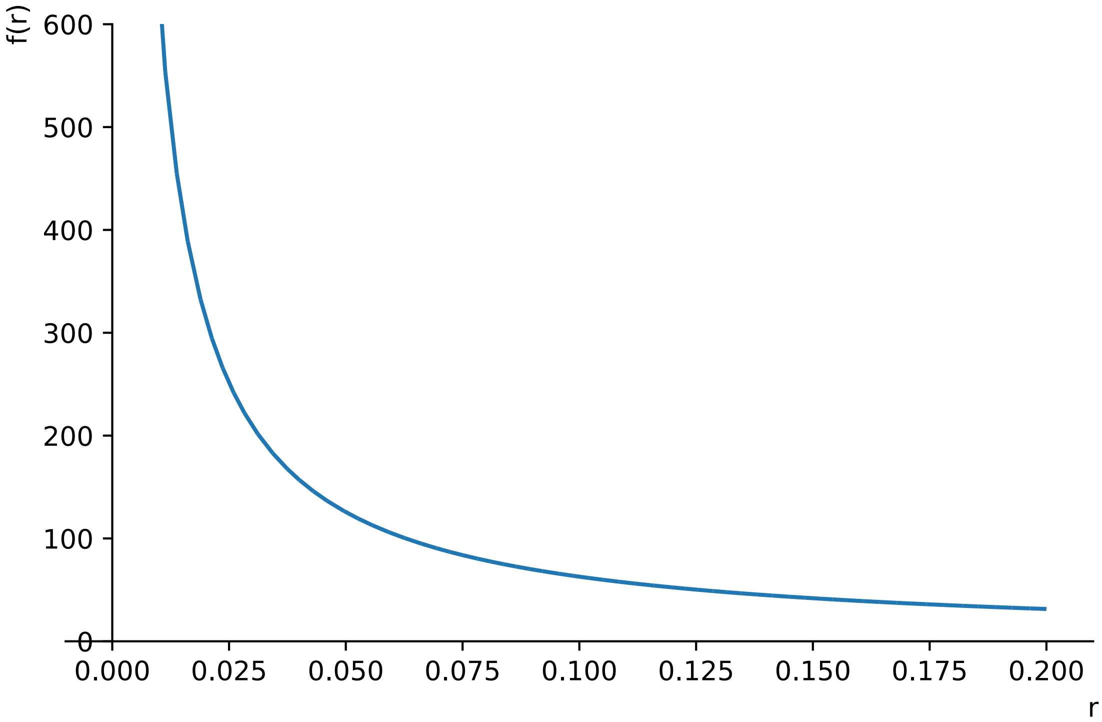
Out[24]: 31.4159265358979

a) Portando

$$I = 31.42A$$

importante notar também que podemos montar um gráfico demonstrando como que o raio influênciaria na corrente.

In [25]:
```
sp.plot(I(r),(r,0,0.2), ylim=(0,600))
```



Out[25]: `<sympy.plotting.plot.Plot at 0x2044d29a9d0>`

para a letra b) $0 \leq \theta \leq \pi$ e $r = 0.1$

In [26]:
```
Ib = lambda r: sp.integrate(sp.integrate(J*ds,(phi,0,2*sp.pi)),(o,0,sp.pi))
Ib(r).subs(r,0.1).evalf()
```

Out[26]: 0

Q11

Desprezando o efeito de borda, temos

$$V_0 = -\int E \cdot dl = -\int_0^{\alpha} \left(\frac{D_\phi}{\epsilon_0 \epsilon_r} a_\phi \right) \cdot (r d\phi \, a_\phi)$$

$$V_0 = -\frac{D_\phi \, r\alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

e a carga

$$Q = \int \rho_s dS$$

$$Q = \int_0^h \int^R -r_{2_{r_1}} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0}{r\alpha \, dr \, dz}$$

$$Q = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0 h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Logo no Capacitor teremos

$$C = \frac{Q}{V_0}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

In [27]:
```
e0 = 8.85e-12
er = 4.5
h = 5e-3
r1 = 1e-3
r2 = 30e-3
a = 5*sp.pi/180

C = (e0*er*h/a) * sp.ln(r2/r1)
C.evalf()
```

Out[27]: $7.76086721573698 \cdot 10^{-12}$

$$C = 7.76\ pF$$

Q1

Pela Segunda lei de Ohm

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

onde ρ é a resistividade elétrica do material e sabemos que a condutividade é o inverso da resistividade logo

$$R = \frac{L}{\sigma A}$$

In [28]:
```
L = 1609e3
sig = 5.8e7
D = 1.291e-9

A = sp.pi*(D/2)**2
R = L/(sig*A)

R.evalf()
```

Out[28]: $2.11926704410916 \cdot 10^{16}$

então para calcular a densidade de corrente podemos usar

$$J = \frac{I}{A}$$

In [29]:
```
I = 10
J = I/A
J.evalf()
```

Out[29]: $7.63937156981548 \cdot 10^{18}$

Logo a tensão no fio é:

In [30]:
```
V = R*I
```

```
V.evalf()
```

Out[30]: $2.11926704410916 \cdot 10^{17}$

Olhando para o Campo elétrico agora

In [31]:
```
E = V/L
E.evalf()
```

Out[31]: 131713302927.853

In [32]:
```
print(" R = {:.3e} Ohm \n J = {:.3e} A/m² \n V = {:.3e} V \n E = {:.3e} V/m".format(
```

```
 R = 2.119e+16 Ohm
 J = 7.639e+18 A/m²
 V = 2.119e+17 V
 E = 1.317e+11 V/m
```

Os resultados a cima são bem particulares, por conta do diâmetro do fio se da na ordem de nano metro.

Q3

Supondo que a é o raio interno e b é o raio do encapsulamento coaxial podemos começar nossa dedução a partir da densidade de corrente

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi r l}$$

de modo que:

$$E = \frac{I}{2\pi\sigma r l}$$

A diferença de potencial entre os condutores é

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{I}{2\pi\sigma r l} dr$$

$$V_{ab} = \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln\frac{b}{a}$$

Sabendo a tensão e a corrente podemos aplicar a lei de Ohm e

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln\frac{b}{a}$$

Q5

Olhando para uma superfície esférica de raio $a < r < b$ e aplicando a relação de densidade e corrente

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

A corrente tem distribuição radial, por tando o produto vetorial sai com 0° em seus fatores.

$$I = J \cdot S = J 4\pi r^2$$

logo a densidade de corrente pode ser expressada por

$$J = \frac{I}{4\pi r^2}$$

Q7

Sabendo que

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$

In [33]:
```
er1 = 1.5
er2 = 3.5
A = 1 # Área total do capacitor é 2, então a metade é de um dielétrico
d = 1e-3

C = lambda er: (e0*er*A)/d

C = C(er1) + C(er2)
C
```

Out[33]: 4.4249999999999996e-08

$$C = 44.3\ nF$$

Q8

Usando a reção de densidade do fluxo de campo e a solução de um problema já conhecido $V = Ay + B$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = -\nabla V = -Aa_y$$

$$A = -\frac{D}{\epsilon_0}$$

In [34]:
```
D = 253e-9
A = - D/e0
A
```

Out[34]: -28587.570621468927

logo $A = -2.86 * 10^4 V/m$

para $y = 0.01$ sabemos que o potêncial é nulo

$$V = Ay + B$$

In [35]:
```
B = sp.Symbol("B")
y = 0.01
sp.solve(A*y+B,B)[0].evalf(5) #não era necessario,mas...
```

Out[35]: 285.88

temos então que $B = 285.88$ Podemos montar a nossa equação

$$V = -2.86 * 10^4 y + 285.88 \ \ [V]$$

Logo vamos calcular o potencial em $y = 0$ e $y = 0.02$

In [36]:
```
B = 285.88
V = lambda y: A*y+B

print(" y = 0.00 temos {} \n y = 0.02 temos {:.5}".format(V(0),V(0.02)))
```

```
y = 0.00 temos 285.88
y = 0.02 temos -285.87
```

Q10

Potencial cosntate em ϕ e z sendo assim a

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

Logo

$$V = A\ln r + B$$

Sabendo que em $V = 0V$ temos $r = 1mm$ e $V = 150V$ temos $r = 20mm$ podemos encontrar os coeficientes A e B

In [37]:
```
sp.var('A,B')
V2 = 150
V = lambda r: A*sp.ln(r)+B

v1 = sp.solve((V(0.02)-V2,V(0.001)), A,B)
v1
```

Out[37]: `{A: 50.0712301043001, B: 345.879804078109}`

Logo

$$V = 50.07\ln r + 345.87 \ \ [V]$$

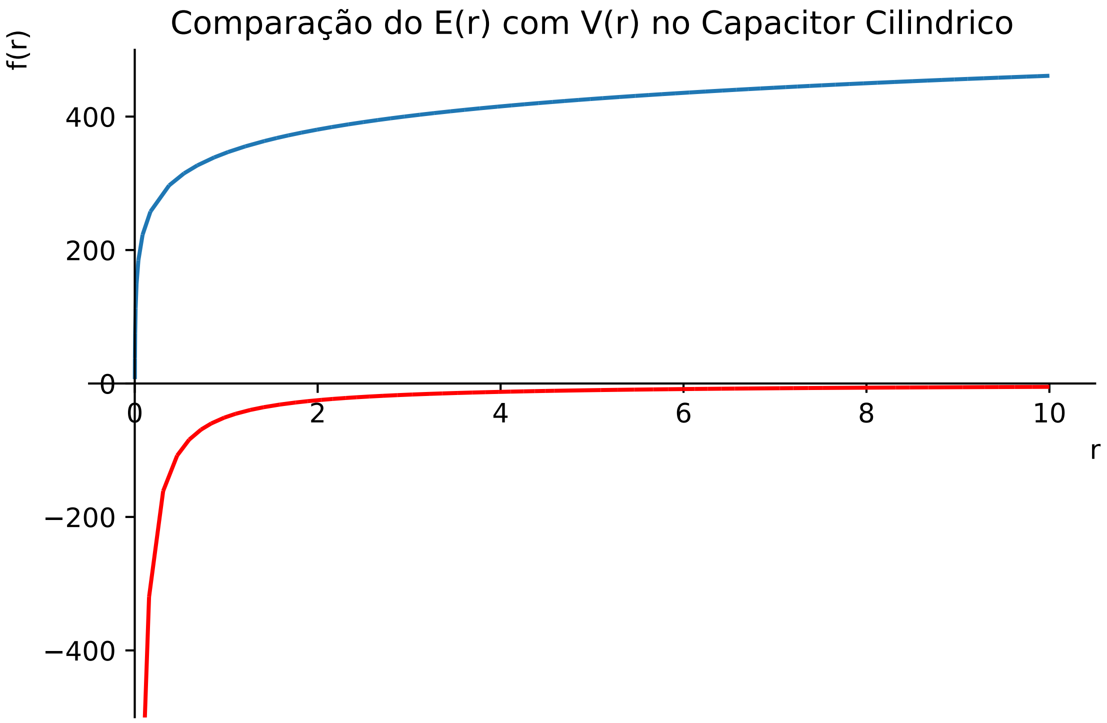
E sabendo que $E = -\nabla V$ podemos escrever a função de campo elétrico

In [38]:
```
v2 = lambda r : v1[A]*sp.ln(r) + v1[B]
E = lambda r: - v2(r).diff(r)
E(r)
```

Out[38]: $-\frac{50.0712301043001}{r}$

$$E = -\frac{50.07}{r}a_r \ \ [V/m]$$

In [39]:
```
p = sp.plot(v2(r),E(r),(r,0,10),ylim=(-500,500), title = "Comparação do E(r) com V(r
p[1].line_color = 'red'
p.show()
```



Q12

Contando que o capacitor cilindrico inteiro sejá dado por

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln\frac{b}{a}}$$

olhando para a figura podemos visualizar que o capacitor em destaque é a α parte de um inteiro, ficando claro então que sua formatação pode ser posta como

$$C = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln\frac{b}{a}}$$

Sendo b o raio maior e a o raio menor.

In [40]:
```
a,L = sp.symbols('alpha L')
r2 = 2.5e-2
r1 = 2e-2
er1 = 2
er2 = 5

C = lambda er: a*(e0*er*L)/(sp.ln(r2/r1))

C1 = C(er1)
C1
```

Out[40]: $7.93211360837245 \cdot 10^{-11} L\alpha$

In [41]:
```
C2 = C(er2)
C2
```

Out[41]: $1.98302840209311 \cdot 10^{-10} L\alpha$

Como

$$C_1 V_1 = C_2 V_2$$

podemos aplicar o divisor de tesão uma vez que sabemos que a fonte de entrada é de $100V$

In [42]:
```
V = 100
V1 = (C2/(C1+C2)) * V
V2 = (C1/(C1+C2)) * V
print("V1 = {:.4} V e V2 = {:.4} V".format(V1,V2))
```

```
V1 = 71.43 V e V2 = 28.57 V
```

Q9

Dado o campo elétrico como

$$E = \frac{k}{r^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

e

$$dV = \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

sabendo ambos são radiais

$$dV = E\cdot dr$$

substituindo

$$V = \int_a^b \frac{k}{r^2}\frac{ab}{b-a}\,dr$$

In [43]:
```
a,b,r = sp.symbols("a b r")
sp.var('k')
E = lambda r,k: (k/r**2)*((a*b)/(b-a))

V = sp.integrate(E(r,k),(r,a,b))
V.simplify()
```

Out[43]: k

In [44]:
```
V.subs(k,1/(4*sp.pi*e0)).simplify().evalf(4)
```

Out[44]: $8.992\cdot 10^{9}$

Portanto,

$$V = 8.992\cdot 10^{9}\ V$$