

# elementos de eletromagnetismo

3<sup>a</sup> edição

Matthew N. O. Shadiku



## Nota ao estudante

A Teoria Eletromagnética é normalmente considerada por muitos estudantes como um dos cursos mais difíceis no currículo de Física ou de Engenharia Elétrica. Porém, tomando-se algumas precauções, esta má impressão prova-se equivocada. Pela minha experiência, as seguintes sugestões serão úteis para auxiliá-lo(a) a ter o máximo desempenho com o apoio deste livro-texto:

Dê especial atenção à Parte I, sobre *Análise vetorial*, a ferramenta matemática para este curso. Sem o claro entendimento desta seção, você poderá ter problemas no restante do curso.

Não tente memorizar muitas fórmulas. Memorize apenas as fundamentais, que vêm, normalmente, destacadas em uma moldura, e tente deduzir as outras fórmulas a partir dessas. Procure compreender as relações entre as fórmulas. Evidentemente, não existe uma fórmula geral para resolver todos os problemas. Cada fórmula tem algumas limitações em função de seus pressupostos. Atente para esses pressupostos e aplique-as adequadamente.

Procure identificar as palavras-chave ou os termos de uma dada definição ou lei. Saber o significado dessas palavras-chave é essencial para a aplicação adequada da definição ou da lei.

Tente resolver tantos problemas quanto possível. Exercitar é a melhor forma de aprender. A melhor maneira de compreender as fórmulas e de assimilar o conteúdo é através da resolução de problemas. É aconselhável que você resolva, pelo menos, os problemas dos exercícios, que vêm, justamente, em seguida dos exemplos resolvidos. Faça um esquema do problema antes de tentar resolvê-lo matematicamente. Este esquema não apenas facilita a resolução como também auxilia na compreensão do problema porque simplifica e organiza o seu raciocínio. Observe que, a não ser que se estabeleça o contrário, todas as distâncias são dadas em metros. Por exemplo,  $(2, -1, 5)$  de fato significa  $(2\text{ m}, -1\text{ m}, 5\text{ m})$ .

Nas guardas do livro, são apresentadas tabelas com uma lista das potências de dez e das letras gregas usadas com freqüência ao longo do texto. No Apêndice A, apresentam-se fórmulas importantes em Cálculo, Vetores e Análise Complexa. As respostas dos problemas de números ímpares são apresentadas no Apêndice C.

## CONSTANTES FÍSICAS

Grandeza (unidades)	Símbolo	Melhor valor experimental	Valor aproximado sugerido para situações práticas
Permissividade do espaço livre ( $\text{F/m}$ )	$\epsilon_0$	$8,854 \times 10^{-12}$	$\frac{10^{-9}}{36\pi}$
Permeabilidade do espaço livre ( $\text{H/m}$ )	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	$12,6 \times 10^{-7}$
Impedância intrínseca do espaço livre ( $\Omega$ )	$\eta_0$	376,6	$120\pi$
Velocidade da luz no vácuo ( $\text{m/s}$ )	$c$	$2,998 \times 10^8$	$3 \times 10^8$
Carga do elétron ( $\text{C}$ )	$e$	$-1,6030 \times 10^{-19}$	$-1,6 \times 10^{-19}$
Massa do elétron ( $\text{Kg}$ )	$m_e$	$9,1066 \times 10^{-31}$	$9,1 \times 10^{-31}$
Massa do próton ( $\text{Kg}$ )	$m_p$	$1,67248 \times 10^{-27}$	$1,67 \times 10^{-27}$
Massa do nêutron ( $\text{Kg}$ )	$m_n$	$1,6749 \times 10^{-27}$	$1,67 \times 10^{-27}$
Constante de Boltzmann ( $\text{J/K}$ )	$k$	$1,38047 \times 10^{-23}$	$1,38 \times 10^{-23}$
Número de Avogadro ( $\text{Kg-mole}$ )	$N$	$6,0228 \times 10^{26}$	$6 \times 10^{26}$
Constante de Planck ( $\text{J} \cdot \text{s}$ )	$h$	$6,624 \times 10^{-34}$	$6,62 \times 10^{-34}$
Aceleração da gravidade ( $\text{m/s}^2$ )	$g$	9,81	9,8
Constante universal da gravitação ( $\text{m}^2/\text{Kg} \cdot \text{s}^2$ )	$G$	$6,658 \times 10^{-11}$	$6,66 \times 10^{-11}$
Elétron-volt ( $\text{J}$ )	$eV$	$1,6030 \times 10^{-9}$	$1,6 \times 10^{-9}$

### POTÊNCIAS DE DEZ

Potência	Prefixo	Símbolo
$10^{18}$	Exa	E
$10^{15}$	Peta	P
$10^{12}$	Tera	T
$10^9$	Giga	G
$10^6$	Mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecto	h
$10^1$	deca	da
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a

### O ALFABETO GREGO

Letra maiúscula	Letra minúscula	Nome da letra	Letra maiúscula	Letra minúscula	Nome da letra
A	$\alpha$	Alfa	N	$\nu$	Nu
B	$\beta$	Beta	$\Xi$	$\xi$	Xi
$\Gamma$	$\gamma$	Gama	O	$\circ$	Omicron
$\Delta$	$\delta$	Delta	$\Pi$	$\pi$	Pi
E	$\varepsilon$	Epsilon	P	$\rho$	Rho
Z	$\zeta$	Zeta	$\Sigma$	$\sigma, s$	Sigma
H	$\eta$	Eta	$\Tau$	$\tau$	Tau
$\Theta$	$\theta$	Theta	Y	$\upsilon$	Upsilon
I	$\iota$	Iota	$\Phi$	$\phi$	Phi
K	$\kappa$	Kappa	X	$\chi$	Chi
L	$\lambda$	Lambda	$\Psi$	$\psi$	Psi
M	$\mu$	Mu	$\Omega$	$\omega$	Ômega

# Sumário

---

---

## PARTE 1: Análise vetorial

---

<b>1 Álgebra vetorial .....</b>	<b>19</b>
1.1 Introdução .....	19
†1.2 Uma visão prévia do livro .....	19
1.3 Escalares e vetores .....	20
1.4 Vetor unitário .....	21
†1.5 Soma e subtração de vetores .....	22
1.6 Vetor posição e vetor distância .....	23
1.7 Multiplicação vetorial .....	26
1.8 Componentes de um vetor .....	30
Resumo .....	35
Questões de revisão .....	36
Problemas .....	37
<b>2 Sistemas e transformação de coordenadas .....</b>	<b>41</b>
2.1 Introdução .....	41
2.2 Coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) .....	42
2.3 Coordenadas cilíndricas circulares ( $\rho, \phi, z$ ) .....	42
2.4 Coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ ) .....	45
† 2.5 Superfícies de coordenada constante .....	52
Resumo .....	57
Questões de revisão .....	57
Problemas .....	58

---

<b>3 Cálculo vetorial .....</b>	<b>62</b>
3.1 Introdução .....	62
†3.2 Comprimento, área e volume diferenciais .....	62
3.3 Integrais de linha, de superfície e de volume .....	68
3.4 O operador <i>del</i> .....	71
3.5 Gradiente de um escalar .....	72
3.6 Divergência de um vetor e teorema da divergência .....	76
3.7 Rotacional de um vetor e teorema de Stokes .....	82
3.8 Laplaciano de um escalar .....	89
†3.9 Classificação de campos vetoriais .....	91
Resumo .....	94
Questões de revisão .....	95
Problemas .....	98

---

## PARTE 2: Eletrostática

---

<b>4 Campos eletrostáticos .....</b>	<b>107</b>
4.1 Introdução .....	107
4.2 Lei de Coulomb e intensidade de campo .....	108
4.3 Campos elétricos de distribuições contínuas de carga .....	114
4.4 Densidade de fluxo elétrico .....	125
4.5 Lei de Gauss – equação de Maxwell .....	126
4.6 Aplicações da lei de Gauss .....	128
4.7 Potencial elétrico .....	134
4.8 Relação entre o campo elétrico e o potencial elétrico – equação de Maxwell .....	139
4.9 O dipolo elétrico e as linhas de fluxo .....	142
4.10 Densidade de energia em campos eletrostáticos .....	145
Resumo .....	149
Questões de revisão .....	151
Problemas .....	153
<b>5 Campos elétricos em meio material .....</b>	<b>159</b>
5.1 Introdução .....	159
5.2 Propriedades dos materiais .....	159
5.3 Correntes de convecção e de condução .....	160
5.4 Condutores .....	162
5.5 Polarização em dielétricos .....	167
5.6 Constante e rigidez dielétrica .....	171
†5.7 Dielétricos lineares, isotrópicos e homogêneos .....	171
5.8 Equação da continuidade e tempo de relaxação .....	175
5.9 Condições de fronteira .....	177
Resumo .....	185
Questões de revisão .....	186
Problemas .....	188

/

**6 Problemas de valor de fronteira em eletrostática . . . . . 192**

6.1	Introdução . . . . .	192
6.2	Equações de Laplace e de Poisson . . . . .	192
†6.3	Teorema da unicidade . . . . .	193
6.4	Procedimento geral para resolver a equação de Laplace ou a equação de Poisson . . . . .	195
6.5	Resistência e capacitância . . . . .	212
6.6	Método das imagens . . . . .	226
	Resumo . . . . .	231
	Questões de revisão . . . . .	232
	Problemas . . . . .	233

**PARTE 3: Magnetostática****7 Campos magnetostáticos . . . . . 243**

7.1	Introdução . . . . .	243
7.2	Lei de Biot-Savart . . . . .	244
7.3	Lei circuital de Ampère – equação de Maxwell . . . . .	253
7.4	Aplicações da lei de Ampère . . . . .	254
7.5	Densidade de fluxo magnético – equação de Maxwell . . . . .	260
7.6	Equações de Maxwell para campos eletromagnéticos estáticos . . . . .	262
7.7	Potenciais magnéticos escalar e vetorial . . . . .	262
†7.8	Dedução da lei de Biot-Savart e da lei de Ampère . . . . .	267
	Resumo . . . . .	269
	Questões de revisão . . . . .	270
	Problemas . . . . .	273

**8 Forças, materiais e dispositivos magnéticos . . . . . 279**

8.1	Introdução . . . . .	279
8.2	Forças devido aos campos magnéticos . . . . .	279
8.3	Torque e momento magnéticos . . . . .	289
8.4	Dipolo magnético . . . . .	291
8.5	Magnetização em materiais . . . . .	295
†8.6	Classificação dos materiais magnéticos . . . . .	298
8.7	Condições de fronteira magnéticas . . . . .	301
8.8	Indutores e indutâncias . . . . .	306
8.9	Energia magnética . . . . .	308
†8.10	Circuitos magnéticos . . . . .	315
†8.11	Força sobre materiais magnéticos . . . . .	317
	Resumo . . . . .	321
	Questões de revisão . . . . .	323
	Problemas . . . . .	324

---

<b>9 Equações de Maxwell .....</b>	<b>335</b>
9.1 Introdução .....	335
9.2 Lei de Faraday .....	336
9.3 Fem de movimento e fem de transformador .....	337
9.4 Corrente de deslocamento .....	345
9.5 Equações de Maxwell nas formas finais .....	347
†9.6 Potenciais variáveis no tempo .....	350
9.7 Campos harmônicos no tempo .....	352
Resumo .....	362
Questões de revisão .....	363
Problemas .....	365
 PARTE 4: Ondas e aplicações	
<b>10 Propagação de ondas eletromagnéticas .....</b>	<b>371</b>
10.1 Introdução .....	371
†10.2 Ondas em geral .....	372
10.3 Propagação de onda em dielétrico com perdas .....	377
10.4 Ondas planas em dielétricos sem perdas .....	382
10.5 Ondas planas no espaço livre .....	382
10.6 Ondas planas em bons condutores .....	384
10.7 Potência e o vetor de Poynting .....	393
10.8 Reflexão de uma onda plana com incidência normal .....	397
†10.9 Reflexão de uma onda plana com incidência oblíqua .....	406
Resumo .....	416
Questões de revisão .....	418
Problemas .....	419
<b>11 Linhas de transmissão .....</b>	<b>426</b>
11.1 Introdução .....	426
11.2 Parâmetros das linhas de transmissão .....	427
11.3 Equações das linhas de transmissão .....	429
11.4 Impedância de entrada, ROE e potência .....	436
11.5 A carta de Smith .....	443
11.6 Algumas aplicações das linhas de transmissão .....	454
†11.7 Transientes em linhas de transmissão .....	460
†11.8 Linhas de transmissão de microfitas .....	471
Resumo .....	475
Questões de revisão .....	476
Problemas .....	478

<b>12 Guias de onda .....</b>	<b>487</b>
12.1 Introdução .....	487
12.2 Guia de onda retangular .....	487
12.3 Modos transversais magnéticos (TM) .....	492
12.4 Modos transversais elétricos (TE) .....	495
12.5 Propagação da onda no guia .....	505
12.6 Transmissão de potência e atenuação .....	507
†12.7 Corrente e excitação de modos no guia de onda .....	510
12.8 Ressonadores de guia de onda .....	515
Resumo .....	520
Questões de revisão .....	521
Problemas .....	522
<b>13 Antenas .....</b>	<b>526</b>
13.1 Introdução .....	526
13.2 Dipolo hertziano .....	528
13.3 Antena dipolo de meia onda .....	531
13.4 Antena monopolio de quarto de onda .....	535
13.5 Antena pequena em anel .....	536
13.6 Características das antenas .....	540
13.7 Conjuntos de antenas .....	546
†13.8 Área efetiva e equação de Friis .....	555
†13.9 A equação do radar .....	558
Resumo .....	562
Questões de revisão .....	562
Problemas .....	564
<b>14 Tópicos modernos .....</b>	<b>570</b>
14.1 Introdução .....	570
14.2 Microondas .....	570
14.3 Interferência e compatibilidade eletromagnética .....	575
14.4 Fibra ótica .....	580
Resumo .....	585
Questões de revisão .....	586
Problemas .....	587
<b>15 Métodos numéricos .....</b>	<b>590</b>
15.1 Introdução .....	590
†15.2 Plotagem de campo .....	591
15.3 O método das diferenças finitas .....	598
15.4 O método dos momentos .....	610
15.5 O método dos elementos finitos .....	620
Resumo .....	637
Questões de revisão .....	637
Problemas .....	639

<b>Apêndice A .....</b>	<b>650</b>
<b>Apêndice B .....</b>	<b>660</b>
<b>Apêndice C .....</b>	<b>662</b>
<b>Apêndice D .....</b>	<b>682</b>
<b>Índice .....</b>	<b>685</b>

---

PARTE 1

---

## ANÁLISE VETORIAL

# Capítulo 1

## ÁLGEBRA VETORIAL

Em uma vida longa, uma coisa eu aprendi: que toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil e, mesmo assim, é o que temos de mais precioso.

— ALBERT EINSTEIN

### 1.1 INTRODUÇÃO

O Eletromagnetismo (EM) pode ser considerado como o estudo da interação entre cargas elétricas em repouso e em movimento. Envolve a análise, a síntese, a interpretação física e a aplicação de campos elétricos e magnéticos.

**O Eletromagnetismo (EM) é um ramo da Física, ou da Engenharia Elétrica, no qual os fenômenos elétricos e magnéticos são estudados.**

Os princípios do EM se aplicam em várias disciplinas afins, tais como: microondas, antenas, máquinas elétricas, comunicações por satélites, bioeletromagnetismo, plasmas, pesquisa nuclear, fibra ótica, interferência e compatibilidade eletromagnética, conversão eletromecânica de energia, meteorologia por radar e sensoreamento remoto<sup>1,2</sup>. Em Física Médica, por exemplo, a energia eletromagnética, seja na forma de ondas curtas ou de microondas, é utilizada para aquecer tecidos mais profundos e para estimular certas respostas fisiológicas, assim de aliviar a dor em determinadas patologias. Os campos eletromagnéticos são utilizados em aquecedores indutivos para fundir, forjar, recozer, temperar superfícies e para operações de soldagem. Equipamentos para aquecimento de dielétricos utilizam ondas curtas para unir e selar lâminas finas de materiais plásticos. A energia eletromagnética possibilita muitas aplicações novas e interessantes em agricultura. É utilizada, por exemplo, para alterar o sabor de vegetais, reduzindo sua acidez.

Os dispositivos do EM incluem: transformadores, relés elétricos, rádio/TV, telefone, motores elétricos, linhas de transmissão, guias de onda, antenas, fibras ópticas, radares e *lasers*. O projeto desses dispositivos requer um profundo conhecimento das leis e dos princípios do eletromagnetismo.

### <sup>†</sup>1.2 UMA VISÃO PRÉVIA DO LIVRO

O estudo dos fenômenos do eletromagnetismo, feito neste livro, pode ser resumido nas Equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> Para numerosas aplicações de eletrostática, consulte J. H. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*. New York: John Wiley & Sons, 1986.

<sup>2</sup> Para outras áreas de aplicações de EM, consulte, por exemplo, D. Teplitz, ed., *Electromagnetism: Paths To Research*. New York: Plenum Press, 1982.

<sup>†</sup> Este símbolo indica seções que podem ser suprimidas, expostas brevemente ou propostas como atividades extraclasses, caso se pretenda cobrir todo o texto em um só semestre.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

onde  $\nabla$  = o vetor operador diferencial;  
 $\mathbf{D}$  = a densidade de fluxo elétrico;  
 $\mathbf{B}$  = a densidade de fluxo magnético;  
 $\mathbf{E}$  = a intensidade de campo elétrico;  
 $\mathbf{H}$  = a intensidade de campo magnético;  
 $\rho_e$  = a densidade volumétrica de carga;  
e  $\mathbf{J}$  = a densidade de corrente.

Maxwell embasou essas equações em resultados já conhecidos, experimentais e teóricos. Uma olhada rápida nessas equações mostra que devemos operar com grandezas vetoriais. Consequentemente, é lógico que dediquemos algum tempo na Parte I para examinar as ferramentas matemáticas requeridas para esse curso. As derivações das equações (1.1) a (1.4), para condições invariantes no tempo, e o significado físico das grandezas  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  e  $\rho_e$  serão objeto de nosso estudo nas partes II e III. Na parte IV reexaminaremos as equações para o regime de variação temporal e as aplicaremos em nosso estudo de dispositivos do EM encontrados na prática.

### 1.3 ESCALARES E VETORES

A análise vetorial é uma ferramenta matemática pela qual os conceitos do eletromagnetismo (EM) são mais convenientemente expressos e melhor compreendidos. Precisamos, primeiramente, aprender suas regras e técnicas antes de aplicá-las com segurança. Já que muitos estudantes fazem esse curso tendo pequena familiaridade com os conceitos de álgebra vetorial, uma considerável atenção é dada a essa análise neste e nos próximos dois capítulos.<sup>3</sup> Este capítulo introduz os conceitos básicos de álgebra vetorial, considerando apenas coordenadas cartesianas. O capítulo seguinte parte daí e estende esse estudo para outros sistemas de coordenadas.

Uma grandeza pode ser um escalar ou um vetor.

**Um escalar** é uma grandeza que só tem magnitude.

Grandezas como tempo, massa, distância, temperatura, entropia, potencial elétrico e população são escalares.

**Um vetor** é uma grandeza que tem magnitude e orientação.

Grandezas vetoriais incluem velocidade, força, deslocamento e intensidade de campo elétrico. Uma outra categoria de grandezas físicas é denominada de *tensores*, dos quais os escalares e os vetores são casos particulares. Na maior parte do tempo, estaremos trabalhando com escalares e vetores.<sup>4</sup>

Para fazer distinção entre um escalar e um vetor, convenciona-se representar um vetor por uma letra com uma flecha sobre ela, tais como  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , ou por uma letra em negrito, tais como  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Um escalar é simplesmente representado por uma letra, por exemplo:  $A$ ,  $B$ ,  $U$  e  $V$ .

A teoria do EM é essencialmente um estudo de campos particulares.

**Um campo** é uma função que especifica uma grandeza particular em qualquer ponto de uma região.

<sup>3</sup> O leitor que não sente necessidade de revisão de álgebra vetorial pode seguir para o próximo capítulo.

<sup>4</sup> Para um estudo inicial sobre tensores, consulte, por exemplo, A. I. Borisenko e I. E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Application*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1968.

Se a grandeza é um escalar (ou um vetor), o campo é dito um campo escalar (ou vetorial). Exemplos de campos escalares são: a distribuição de temperatura em um edifício, a intensidade de som em um teatro, o potencial elétrico em uma região e o índice de refração em um meio estratificado. A força gravitacional sobre um corpo no espaço e a velocidade das gotas de chuva na atmosfera são exemplos de campos vetoriais.

## 1.4 VETOR UNITÁRIO

Um vetor  $\mathbf{A}$  tem magnitude e orientação. A *magnitude* de  $\mathbf{A}$  é um escalar escrito como  $A$  ou  $|\mathbf{A}|$ . Um *vetor unitário*  $\mathbf{a}_A$  ao longo de  $\mathbf{A}$  é definido como um vetor cuja magnitude é a unidade (isto é, 1) e a orientação é ao longo de  $\mathbf{A}$ , isto é:

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1.5)$$

Observe que  $|\mathbf{a}_A| = 1$ . Dessa forma, podemos escrever  $\mathbf{A}$  como

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a}_A \quad (1.6)$$

o que especifica completamente  $\mathbf{A}$  em termos de sua magnitude  $A$  e sua orientação  $\mathbf{a}_A$ .

Um vetor  $\mathbf{A}$ , em coordenadas cartesianas (ou retangulares), pode ser representado como

$$(A_x, A_y, A_z) \quad \text{ou} \quad A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z \quad (1.7)$$

onde  $A_x, A_y$  e  $A_z$  são denominadas as *componentes* de  $\mathbf{A}$ , respectivamente nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ;  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$  são, respectivamente, os vetores unitários nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Por exemplo,  $\mathbf{a}_x$  é um vetor adimensional de magnitude um na direção e sentido positivo do eixo dos  $x$ . Os vetores unitários  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$  estão representados na Figura 1.1(a), e as componentes de  $\mathbf{A}$ , ao longo dos eixos coordenados, estão mostradas na Figura 1.1(b). A magnitude do vetor  $\mathbf{A}$  é dada por:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.8)$$

e o vetor unitário ao longo de  $\mathbf{A}$  é dado por:

$$\mathbf{a}_A = \frac{A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.9)$$

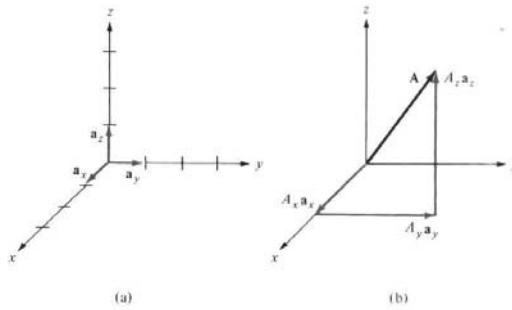


Figura 1.1 (a) Vetores unitários  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$ ; (b) componentes de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$ .

## <sup>†</sup>1.5 SOMA E SUBTRAÇÃO DE VETORES

Dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  podem ser somados para resultar em um outro vetor  $\mathbf{C}$ , isto é:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (1.10)$$

A soma de vetores é feita componente a componente. Dessa forma, se  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  e  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ,

$$\mathbf{C} = (A_x + B_x)\mathbf{a}_x + (A_y + B_y)\mathbf{a}_y + (A_z + B_z)\mathbf{a}_z \quad (1.11)$$

A subtração de vetores é feita de modo similar:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \\ &= (A_x - B_x)\mathbf{a}_x + (A_y - B_y)\mathbf{a}_y + (A_z - B_z)\mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.12)$$

Graficamente, a soma e a subtração de vetores são obtidas tanto pela regra do paralelogramo quanto pela regra do “início de um – final de outro”, como ilustrado nas Figuras 1.2 e 1.3, respectivamente.

As três propriedades básicas da álgebra que são satisfeitas por quaisquer vetores dados  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , estão resumidas na tabela a seguir:

Propriedade	Somam	Multiplicação
Comutativa	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k$
Associativa	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	$k(\ell\mathbf{A}) = (k\ell)\mathbf{A}$
Distributiva	$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$	

onde  $k$  e  $\ell$  são escalares. A multiplicação de um vetor por outro vetor será discutida na Seção 1.7.

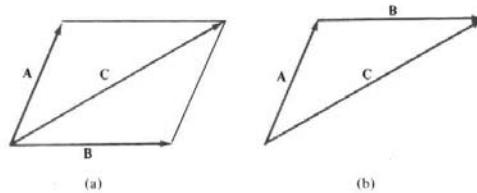


Figura 1.2 Soma de vetores  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ : (a) regra do paralelogramo; (b) regra do “início de um-final de outro”.

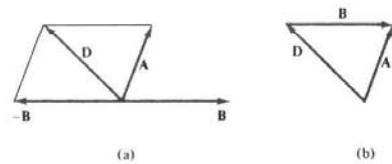


Figura 1.3 Subtração de vetores  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ : (a) regra do paralelogramo; (b) regra do “início de um-final de outro”.

## 1.6 VETOR POSIÇÃO E VETOR DISTÂNCIA

Um ponto  $P$ , em um sistema de coordenadas cartesiano, pode ser representado por  $(x, y, z)$ .

O vetor posição  $\mathbf{r}_P$  (ou raio vetor) de um ponto  $P$  é um vetor que começa na origem  $O$  do sistema de coordenadas e termina no ponto  $P$ , isto é:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{OP} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z \quad (1.13)$$

O vetor posição do ponto  $P$  é útil para definir sua posição no espaço. O ponto  $(3, 4, 5)$ , por exemplo, e seu vetor posição  $3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$  são mostrados na Figura 1.4.

O vetor distância é o deslocamento de um ponto a outro.

Se dois pontos,  $P$  e  $Q$ , são dados por  $(x_P, y_P, z_P)$  e  $(x_Q, y_Q, z_Q)$ , o vetor distância (ou o vetor separação) é o deslocamento de  $P$  a  $Q$ , como mostrado na Figura 1.5, isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{PQ} &= \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P \\ &= (x_Q - x_P)\mathbf{a}_x + (y_Q - y_P)\mathbf{a}_y + (z_Q - z_P)\mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.14)$$

A diferença entre um ponto  $P$  e um vetor  $\mathbf{A}$  deve ser ressaltada. Embora tanto  $P$  quanto  $\mathbf{A}$  possam ser representados da mesma maneira como  $(x, y, z)$  e  $(A_x, A_y, A_z)$ , respectivamente, o ponto  $P$  não é um vetor; somente seu vetor posição  $\mathbf{r}_P$  é um vetor. Entretanto, o vetor  $\mathbf{A}$  pode depender do ponto  $P$ . Por exemplo, se  $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y - xz^2\mathbf{a}_z$  e  $P$  é  $(2, -1, 4)$ , então  $\mathbf{A}$  em  $P$  deveria ser  $-4\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 32\mathbf{a}_z$ . Um campo vetorial é dito *constante* ou *uniforme* se não depende das variáveis de espaço  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Por exemplo, o vetor  $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$  é um vetor uniforme, enquanto que o vetor  $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y - xz^2\mathbf{a}_z$  é não uniforme, porque  $\mathbf{B}$  é o mesmo em qualquer ponto, enquanto  $\mathbf{A}$  varia ponto a ponto.

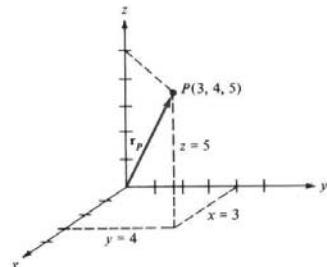


Figura 1.4 Representação gráfica do vetor posição  
 $\mathbf{r}_P = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$

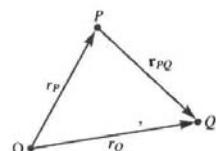


Figura 1.5 Vetor distância  $\mathbf{r}_{PQ}$ .

**EXEMPLO 1.1**

Se  $\mathbf{A} = 10\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$ , determine: (a) a componente de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_y$ ; (b) a magnitude de  $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ; (c) um vetor unitário ao longo de  $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ .

**Solução:**

(a) a componente de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_y$  é  $A_y = -4$ .

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad 3\mathbf{A} - \mathbf{B} &= 3(10, -4, 6) - (2, 1, 0) \\ &= (30, -12, 18) - (2, 1, 0) \\ &= (28, -13, 18)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|3\mathbf{A} - \mathbf{B}| &= \sqrt{28^2 + (-13)^2 + (18)^2} = \sqrt{1277} \\ &= 35,74\end{aligned}$$

(c) Seja  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B} = (10, -4, 6) + (4, 2, 0) = (14, -2, 6)$ .

Um vetor unitário ao longo de  $\mathbf{C}$  é

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = \frac{(14, -2, 6)}{\sqrt{14^2 + (-2)^2 + 6^2}}$$

ou

$$\mathbf{a}_c = 0,9113\mathbf{a}_x - 0,1302\mathbf{a}_y + 0,3906\mathbf{a}_z$$

Observe que  $|\mathbf{a}_c| = 1$ , como esperado.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 1.1**

Dados os vetores  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$ , determine:

- (a)  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ ;
- (b)  $5\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ;
- (c) a componente de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_y$ ;
- (d) um vetor unitário paralelo a  $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

**Resposta:** (a) 7, (b)  $(0, -2, 21)$ , (c) 0, (d)  $\pm(0,9117, 0,2279, 0,3419)$ .

**EXEMPLO 1.2**

Os pontos  $P$  e  $Q$  estão localizados em  $(0, 2, 4)$  e  $(-3, 1, 5)$ . Calcule:

- (a) o vetor posição  $P$ ;
- (b) o vetor distância de  $P$  até  $Q$ ;
- (c) a distância entre  $P$  e  $Q$ ;
- (d) um vetor paralelo a  $PQ$  com magnitude 10.

**Solução:**

$$(a) \mathbf{r}_p = 0\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z = 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

$$(b) \mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_p = (-3, 1, 5) - (0, 2, 4) = (-3, -1, 1) \text{ ou } \mathbf{r}_{PQ} = -3\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

(c) já que  $\mathbf{r}_{PQ}$  é o vetor distância de  $P$  até  $Q$ , a distância entre  $P$  e  $Q$  é a magnitude desse vetor, isto é:

$$d = |\mathbf{r}_{PQ}| = \sqrt{9 + 1 + 1} = 3,317$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} \\ &= \sqrt{9 + 1 + 1} = 3,317 \end{aligned}$$

(d) Seja o vetor requerido  $\mathbf{A}$ , então:

$$\mathbf{A} = A \mathbf{a}_A,$$

onde  $A = 10$  é a magnitude de  $\mathbf{A}$ . Já que  $\mathbf{A}$  é paralelo a  $PQ$ , o vetor unitário deve ser o mesmo de  $\mathbf{r}_{PQ}$  ou  $\mathbf{r}_{QP}$ . Portanto,

$$\mathbf{a}_A = \pm \frac{\mathbf{r}_{PQ}}{|\mathbf{r}_{PQ}|} = \pm \frac{(-3, -1, 1)}{3,317}$$

e

$$\mathbf{A} = \pm \frac{10(-3, -1, 1)}{3,317} = \pm (-9,045\mathbf{a}_x - 3,015\mathbf{a}_y + 3,015\mathbf{a}_z)$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 1.2

Dados os pontos  $P(1, -3, 5)$ ,  $Q(2, 4, 6)$  e  $R(0, 3, 8)$ , determine: (a) os vetores posição de  $P$  e  $R$ , (b) o vetor distância  $\mathbf{r}_{QR}$ , (c) a distância entre  $Q$  e  $R$ .

**Resposta:** (a)  $\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ ,  $3\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$ , (b)  $-2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ .

### EXEMPLO 1.3

Um rio, no qual um barco navega com sua proa apontada na direção do fluxo da água, corre com orientação sudeste a 10 km/h. Um homem caminha sobre o convés a 2 km/h, do lado esquerdo para o lado direito do barco, em direção perpendicular ao seu movimento. Determine a velocidade do homem em relação à terra.

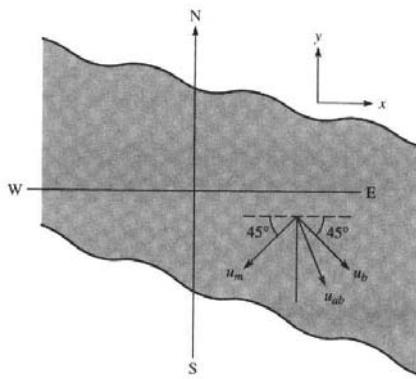


Figura 1.6 Referente ao Exemplo 1.3.

**Solução:**

Considere a Figura 1.6 como ilustração do problema. A velocidade do barco é:

$$\mathbf{u}_b = 10(\cos 45^\circ \mathbf{a}_x - \sin 45^\circ \mathbf{a}_y) \\ = 7,071\mathbf{a}_x - 7,071\mathbf{a}_y \text{ km/h}$$

A velocidade do homem em relação ao barco (velocidade relativa) é:

$$\mathbf{u}_m = 2(-\cos 45^\circ \mathbf{a}_x - \sin 45^\circ \mathbf{a}_y) \\ = -1,414\mathbf{a}_x - 1,414\mathbf{a}_y \text{ km/h}$$

Dessa forma, a velocidade absoluta do homem é:

$$\mathbf{u}_{ab} = \mathbf{u}_m + \mathbf{u}_b = 5,657\mathbf{a}_x - 8,485\mathbf{a}_y \\ |\mathbf{u}_{ab}| = 10,2 \angle -56,3^\circ$$

Isto é, 10,2 km/h a  $56,3^\circ$  do leste para o sul.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 1.3**

Um avião tem uma velocidade em relação ao solo de 350 km/h exatamente na direção oeste. Se houver vento soprando na direção nordeste com velocidade de 40 km/h, calcule a velocidade real do avião no ar e a orientação em que ele se desloca.

**Resposta:** 379,3 km/h;  $4,275^\circ$  do oeste para o norte.

**1.7 MULTIPLICAÇÃO VETORIAL**

Quando dois vetores, **A** e **B**, são multiplicados entre si, o resultado tanto pode ser um escalar quanto um vetor, dependendo de como eles são multiplicados. Dessa forma, existem dois tipos de multiplicação vetorial:

1. produto escalar (ou ponto):  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
2. produto vetorial (ou cruzado):  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

A multiplicação de três vetores **A**, **B** e **C**, entre si, pode resultar em:

3. um produto escalar triplo:  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- ou
4. um produto vetorial triplo:  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

**A. Produto ponto**

O **produto ponto** de dois vetores **A** e **B**, escrito como  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , é definido, geometricamente, como o produto das magnitudes de **A** e **B** e do cosseno do ângulo entre eles.

Assim,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB} \quad (1.15)$$

onde  $\theta_{AB}$  é o menor ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . O resultado de  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  é denominado de *produto escalar*, porque é um escalar, ou de *produto ponto*, devido ao ponto – sinal que identifica a operação. Se  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  e  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , então

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.16)$$

que é obtido multiplicando-se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , componente a componente. Dois vetores,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , são ditos *ortogonais* (ou perpendiculares), um em relação ao outro, se  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Observe que o produto ponto satisfaz as seguintes propriedades:

(i) *Propriedade comutativa:*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.17)$$

(ii) *Propriedade distributiva:*

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A^2 \quad (1.19)$$

(iii)

Observe também que:

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0 \quad (1.20a)$$

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \quad (1.20b)$$

É fácil provar as identidades nas equações (1.17) a (1.20) aplicando a equação (1.15) ou (1.16).

## B. Produto cruzado

O **produto cruzado** de dois vetores,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , escrito como  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , é uma quantidade vetorial cuja magnitude é a área do paralelogramo formado por  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  (ver Figura 1.7) e cuja orientação é dada pelo avanço de um parafuso de rosca direita à medida que  $\mathbf{A}$  gira em direção a  $\mathbf{B}$ .

Assim,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta_{AB} \mathbf{a}_n \quad (1.21)$$

onde  $\mathbf{a}_n$  é um vetor unitário normal ao plano que contém  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . A orientação de  $\mathbf{a}_n$  é tomada como a orientação do polegar da mão direita quando os dedos da mão direita giram de  $\mathbf{A}$  até  $\mathbf{B}$ , como mostrado na Figura 1.8(a). Alternativamente, a orientação de  $\mathbf{a}_n$  é tomada como a orientação do avanço de um parafuso de rosca direita à medida que  $\mathbf{A}$  gira em direção a  $\mathbf{B}$ , como mostrado na Figura 1.8(b).

A multiplicação vetorial da equação (1.21) é denominada *produto cruzado* devido à cruz – sinal que identifica a operação. É também denominada *produto vetorial* porque o resultado é um vetor. Se  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  e  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , então

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.22a)$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z \quad (1.22b)$$

a qual é obtida “cruzando” os termos em permutação cíclica. Daí o nome de produto cruzado.

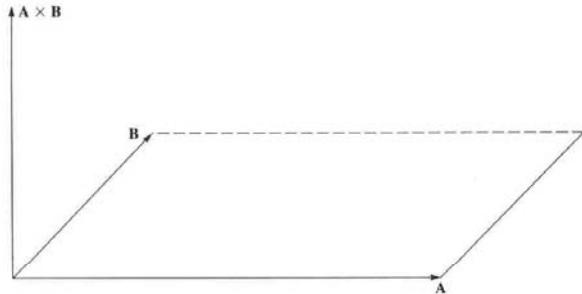


Figura 1.7 O produto de  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{B}$  é um vetor com magnitude igual à área de um paralelogramo e cuja orientação é a indicada.

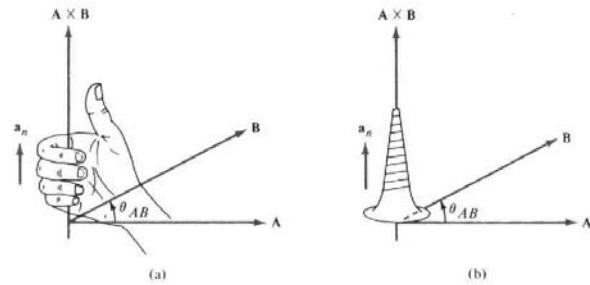


Figura 1.8 Orientação de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  e  $\mathbf{a}_n$  usando: (a) regra da mão direita; (b) regra do parafuso de rosca direita.

Observe que o produto cruzado tem as seguintes propriedades básicas:

(i) Não é comutativo:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.23a)$$

É anticomutativo:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.23b)$$

(ii) Não é associativo:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (1.24)$$

(iii) É distributivo:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.25)$$

(iv)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (1.26)$$

Também observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_y \end{aligned} \quad (1.27)$$

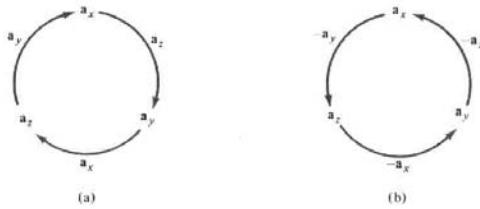


Figura 1.9 Produto cruzado utilizando permutação cíclica: (a) no sentido horário, para resultados positivos; (b) no sentido anti-horário, para resultados negativos.

que são obtidas por permutação cíclica e estão representadas na Figura 1.9. As identidades nas equações (1.25) a (1.27) são facilmente verificadas aplicando a equação (1.21) ou (1.22). Deve ser observado que, ao obter  $\mathbf{a}_n$ , usamos a regra da mão direita, ou do parafuso de rosca direita, porque queremos ser consistentes com nosso sistema de coordenadas representado na Figura 1.1 que é dextrógiro. Um sistema de coordenadas levógiro é aquele em que a regra da mão direita é satisfeita. Isto é,  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k$  é obedecida. Em um sistema levógiro, seguimos a regra da mão esquerda, ou a regra do parafuso de rosca esquerda, e  $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = -\mathbf{a}_k$  é satisfeita. Ao longo desse livro, consideraremos sistemas de coordenadas dextrógiros.

Da mesma forma que a multiplicação de dois vetores nos dá um resultado escalar ou vetorial, a multiplicação de três vetores,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , nos dá um resultado escalar ou vetorial, dependendo de como os vetores são multiplicados. Dessa forma, temos um produto escalar ou vetorial triplo.

### C. Produto escalar triplo

Dados três vetores,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , definimos o produto escalar triplo como

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.28)$$

obtido em permutação cíclica. Se  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  e  $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$ , então  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  é o volume de um paralelepípedo tendo  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  como arestas. Esse volume é facilmente obtido encontrando o determinante de uma matriz  $3 \times 3$ , formada por  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , isto é:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

Já que o resultado dessa multiplicação vetorial é um escalar, a equação (1.28) ou (1.29) é denominada *produto escalar triplo*.

### D. Produto vetorial triplo

Para os vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , definimos produto vetorial triplo como

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.30)$$

obtido usando a regra “bac – cab”. Deve ser observado que:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (1.31)$$

mas

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (1.32)$$

## 1.8 COMPONENTES DE UM VETOR

Uma aplicação direta do produto vetorial é seu uso para determinar a projeção (ou a componente) de um vetor em uma dada direção. A projeção pode ser escalar ou vetorial. Dado um vetor  $\mathbf{A}$ , definimos a *componente escalar*  $A_B$  de  $\mathbf{A}$  ao longo do vetor  $\mathbf{B}$  como [veja Figura 1.10(a)]

$$A_B = A \cos \theta_{AB} = |\mathbf{A}| |\mathbf{a}_B| \cos \theta_{AB}$$

ou

$$A_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B \quad (1.33)$$

A *componente vetorial*  $\mathbf{A}_B$  de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{B}$  é simplesmente a componente escalar na equação (1.33) multiplicada por um vetor unitário ao longo de  $\mathbf{B}$ , isto é:

$$\mathbf{A}_B = A_B \mathbf{a}_B = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B) \mathbf{a}_B \quad (1.34)$$

Tanto a componente escalar quanto a vetorial de  $\mathbf{A}$  estão representadas na Figura 1.10. Observe, na Figura 1.10(b), que o vetor pode ser decomposto em duas componentes ortogonais: uma componente  $\mathbf{A}_B$  paralela a  $\mathbf{B}$  e a outra ( $\mathbf{A} - \mathbf{A}_B$ ) perpendicular a  $\mathbf{B}$ . De fato, nossa representação cartesiana de um vetor consiste, essencialmente, em decompô-lo em suas três componentes mutuamente ortogonais, como mostrado na Figura 1.10(b).

Consideramos até aqui a soma, a subtração e a multiplicação de vetores. Entretanto, a divisão de vetores  $\mathbf{A}/\mathbf{B}$  não foi considerada porque é indefinida, exceto quando os vetores são paralelos entre si, tal que  $\mathbf{A} = k\mathbf{B}$ , onde  $k$  é uma constante. A diferenciação e a integração de vetores será tratada no Capítulo 3.

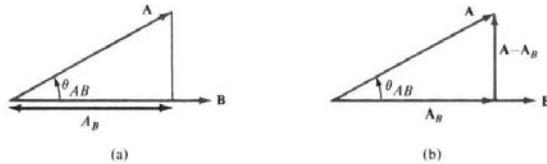


Figura 1.10 Componentes de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{B}$ : (a) componente escalar  $A_B$ ; (b) componente vetorial  $\mathbf{A}_B$ .

### EXEMPLO 1.4

Dados os vetores  $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$ , determine o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

#### Solução:

O ângulo  $\theta_{AB}$  pode ser determinado usando ou o produto ponto ou o produto cruzado.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (3, 4, 1) \cdot (0, 2, -5) \\ = 0 + 8 - 5 = 3$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26} \\ |\mathbf{B}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$\cos \theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{3}{\sqrt{(26)(29)}} = 0,1092 \\ \theta_{AB} = \cos^{-1} 0,1092 = 83,73^\circ$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= (-20 - 2)\mathbf{a}_x + (0 + 15)\mathbf{a}_y + (6 - 0)\mathbf{a}_z \\ &= (-22, 15, 6)\end{aligned}$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(-22)^2 + 15^2 + 6^2} = \sqrt{745}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta_{AB} &= \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{\sqrt{745}}{\sqrt{(26)(29)}} = 0,994 \\ \theta_{AB} &= \cos^{-1} 0,994 = 83,73^\circ\end{aligned}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 1.4

Se  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$ , determine  $\theta_{AB}$ .

**Resposta:**  $120,6^\circ$ .

#### EXEMPLO 1.5

Três campos vetoriais são dados por:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{Q} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

Determine:

- $(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q})$ ;
- $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ ;
- $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ ;
- $\operatorname{sen} \theta_{QR}$ ;
- $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$ ;
- um vetor unitário perpendicular a  $\mathbf{Q}$  e a  $\mathbf{R}$ , simultâneamente;
- a componente de  $\mathbf{P}$  ao longo de  $\mathbf{Q}$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}(a) \quad (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) + \mathbf{Q} \times (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{P} \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \times \mathbf{P} - \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \\ &= 0 + \mathbf{Q} \times \mathbf{P} + \mathbf{Q} \times \mathbf{P} - 0 \\ &= 2\mathbf{Q} \times \mathbf{P} \\ &= 2 \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(1 - 0)\mathbf{a}_x + 2(4 + 2)\mathbf{a}_y + 2(0 + 2)\mathbf{a}_z \\ &= 2\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

(b) O único modo em que  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{P}$  faz sentido é:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) &= (2, -1, 2) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2, -1, 2) \cdot (3, 4, 6) \\ &= 6 - 4 + 12 = 14.\end{aligned}$$

Alternativamente:

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Para encontrar o determinante da matriz  $3 \times 3$ , repetimos as duas primeiras linhas e multiplicamos cruzadamente. Quando a multiplicação cruzada for da direita para a esquerda, o resultado deve ser multiplicado por  $-1$ , como mostrado abaixo. Essa técnica de encontrar o determinante se aplica somente em matrizes  $3 \times 3$ . Dessa maneira,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= +6 + 0 - 2 + 12 - 0 - 2 \\ &= 14\end{aligned}$$

como obtido anteriormente.

(c) Da equação (1.28)

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{P}) = 14$$

ou

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) &= (2, 0, -1) \cdot (5, 2, -4) \\ &= 10 + 0 + 4 \\ &= 14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d) \quad \text{sen } \theta_{QR} &= \frac{|\mathbf{Q} \times \mathbf{R}|}{|\mathbf{Q}| |\mathbf{R}|} = \frac{|(5, 2, -4)|}{|(2, -1, 2)| |(2, -3, 1)|} \\ &= \frac{\sqrt{45}}{3\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = 0,5976\end{aligned}$$

$$(e) \quad \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = (2, 0, -1) \times (5, 2, -4) \\ = (2, 3, 4)$$

Alternativamente, usando a regra "bac - cab":

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) &= \mathbf{Q}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \\ &= (2, -1, 2)(4 + 0 - 1) - (2, -3, 1)(4 + 0 - 2) \\ &= (2, 3, 4)\end{aligned}$$

(f) Um vetor unitário perpendicular a  $\mathbf{Q}$  e a  $\mathbf{R}$ , simultaneamente, é dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\pm \mathbf{Q} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{Q} \times \mathbf{R}|} = \frac{\pm (5, 2, -4)}{\sqrt{45}} \\ &= \pm (0,745, 0,298, -0,596)\end{aligned}$$

Observe que  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q} = 0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}$ . Qualquer uma dessas relações pode ser usada para conferir o valor de  $\mathbf{a}$ .

(g) A componente de  $\mathbf{P}$  ao longo de  $\mathbf{Q}$  é:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_Q &= |\mathbf{P}| \cos \theta_{PQ} \mathbf{a}_Q \\ &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_Q) \mathbf{a}_Q = \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|^2} \\ &= \frac{(4 + 0 - 2)(2, -1, 2)}{(4 + 1 + 4)} = \frac{2}{9}(2, -1, 2) \\ &= 0,4444\mathbf{a}_x - 0,2222\mathbf{a}_y + 0,4444\mathbf{a}_z.\end{aligned}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 1.5

Sejam  $\mathbf{E} = 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{F} = 4\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ . Determine:

- (a) a componente de  $\mathbf{E}$  ao longo de  $\mathbf{F}$ ;
- (b) o vetor unitário ortogonal a  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$ , simultaneamente.

**Resposta:** (a)  $(-0,2837, 0,7092, -0,3546)$ , (b)  $\pm(0,9398, 0,2734, -0,205)$ .

### EXEMPLO 1.6

Obtenha a fórmula dos cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

e a fórmula dos senos,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

usando, respectivamente, o produto ponto e o produto cruzado.

#### Solução:

Considere um triângulo, como mostrado na Figura 1.11. Da figura, observamos que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$$

isto é,

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}a^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A\end{aligned}$$

onde  $A$  é o ângulo entre  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ .

A área de um triângulo é metade do produto entre sua altura e sua base. Portanto:

$$|\frac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\frac{1}{2}\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$$

$$ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$$

Dividindo por  $abc$ , obtém-se:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

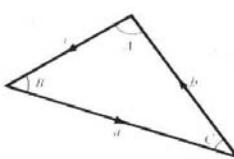


Figura 1.11 Referente ao Exemplo 1.6.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 1.6**

Demonstre que os vetores  $\mathbf{a} = (4, 0, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 3, 4)$  e  $\mathbf{c} = (-5, -3, -3)$  formam os lados de um triângulo. Esse é um triângulo retângulo? Calcule a área desse triângulo.

**Resposta:** Sim; 10,5.

**EXEMPLO 1.7**

Demonstre que os pontos  $P_1(5, 2, -4)$ ,  $P_2(1, 1, 2)$  e  $P_3(-3, 0, 8)$  estão todos sobre uma linha reta. Determine qual a menor distância entre essa linha e o ponto  $P_4(3, -1, 0)$ .

**Solução:**

O vetor distância  $\mathbf{r}_{P_1P_2}$  é dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{P_1P_2} &= \mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1} = (1, 1, 2) - (5, 2, -4) \\ &= (-4, -1, 6)\end{aligned}$$

De maneira similar,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{P_1P_3} &= \mathbf{r}_{P_3} - \mathbf{r}_{P_1} = (-3, 0, 8) - (5, 2, -4) \\ &= (-8, -2, 12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{P_1P_4} &= \mathbf{r}_{P_4} - \mathbf{r}_{P_1} = (3, -1, 0) - (5, 2, -4) \\ &= (-2, -3, 4)\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{P_1P_2} \times \mathbf{r}_{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -4 & -1 & 6 \\ -8 & -2 & 12 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

mostrando que o ângulo entre  $\mathbf{r}_{P_1P_2}$  e  $\mathbf{r}_{P_1P_3}$  é zero ( $\sin \theta = 0$ ). Isso implica que  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  estão sobre a mesma linha reta.

Alternativamente, a equação vetorial da linha reta é facilmente determinada a partir da Figura 1.12(a). Para qualquer ponto  $P$  sobre a linha que une  $P_1$  e  $P_2$ ,

$$\mathbf{r}_{P_1P} = \lambda \mathbf{r}_{P_1P_2}$$

onde  $\lambda$  é uma constante. Portanto, o vetor posição  $\mathbf{r}_P$  do ponto  $P$  deve satisfazer

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{P_1} = \lambda(\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1})$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_P &= \mathbf{r}_{P_1} + \lambda(\mathbf{r}_{P_2} - \mathbf{r}_{P_1}) \\ &= (5, 2, -4) - \lambda(4, 1, -6)\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_P = (5 - 4\lambda, 2 - \lambda, -4 + 6\lambda)$$

Essa é a equação vetorial da linha reta que une  $P_1$  e  $P_2$ . Se  $P_3$  está sobre essa linha, o vetor posição de  $P_3$  deve satisfazer essa equação;  $\mathbf{r}_3$  satisfaz essa equação quando  $\lambda = 2$ .

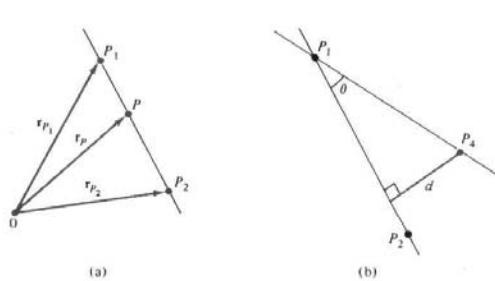


Figura 1.12 Referente ao Exemplo 1.7.

A menor distância entre a linha e o ponto  $P_4(3, -1, 0)$  é a distância perpendicular do ponto até a linha. Da Figura 1.12(b) é evidente que:

$$\begin{aligned} d &= r_{P_4P_1} \operatorname{sen} \theta = |\mathbf{r}_{P_4P_1} \times \mathbf{a}_{P_1P_2}| \\ &= \frac{|(-2, -3, 4) \times (-4, -1, 6)|}{|(-4, -1, 6)|} \\ &= \frac{\sqrt{312}}{\sqrt{53}} = 2,426 \end{aligned}$$

Qualquer ponto sobre a linha pode ser usado como ponto de referência. Dessa forma, em vez de usar  $P_1$  como ponto de referência, poderíamos usar  $P_3$  tal que:

$$d = |\mathbf{r}_{P_4P_3}| \operatorname{sen} \theta' = |\mathbf{r}_{P_4P_3} \times \mathbf{a}_{P_3P_1}|$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 1.7

Se  $P_1$  é  $(1, 2, -3)$  e  $P_2$  é  $(-4, 0, 5)$ , determine:

- (a) a distância  $P_1P_2$ ;
- (b) a equação vetorial da linha  $P_1P_2$ ;
- (c) a menor distância entre a linha  $P_1P_2$  e o ponto  $P_3(7, 1, 2)$ .

**Resposta:** (a) 9,644; (b)  $(1 - 5\lambda)\mathbf{a}_x + 2(1 - \lambda)\mathbf{a}_y + (8\lambda - 3)\mathbf{a}_z$ ; (c) 8,2.

### RESUMO

- Um campo é uma função que especifica uma quantidade no espaço. Por exemplo,  $\mathbf{A}(x, y, z)$  é um campo vetorial, enquanto que  $V(x, y, z)$  é um campo escalar.
- Um vetor  $\mathbf{A}$  é univocamente especificado pela sua magnitude e por um vetor unitário ao longo de sua orientação, isto é,  $\mathbf{A} = A\mathbf{a}_A$ .
- A multiplicação entre dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  resulta em um escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB}$  ou em um vetor  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \operatorname{sen} \theta_{AB}\mathbf{a}_n$ . A multiplicação entre três vetores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  resulta em um escalar  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  ou em um vetor  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ .
- A projeção escalar (ou componente) de um vetor  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$  é  $A_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B$ , enquanto que a projeção vetorial de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$  é  $\mathbf{A}_B = A_B\mathbf{a}_B$ .

## QUESTÕES DE REVISÃO

**1.1** Identifique qual das seguintes grandezas não é um vetor: (a) força, (b) *momentum*, (c) aceleração, (d) trabalho, (e) peso.

**1.2** Qual das seguintes situações não representa um campo escalar?

- (a) Deslocamento de um mosquito no espaço.
- (b) A luminosidade em uma sala de estar.
- (c) A distribuição de temperatura em uma sala de aula.
- (d) A pressão atmosférica em uma dada região.
- (e) A umidade do ar em uma cidade.

**1.3** Os sistemas de coordenadas retangulares, representados na Figura 1.13, são dextrógiros, com exceção de:

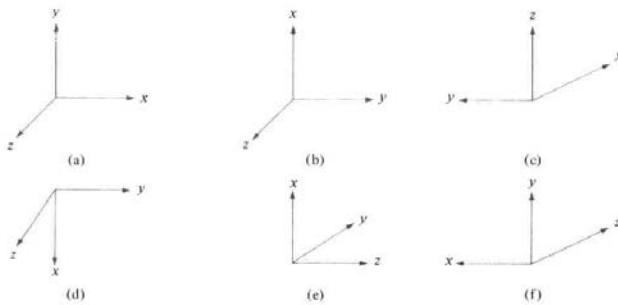


Figura 1.13 Referente à questão de revisão 1.3.

**1.4** Qual das expressões abaixo não está correta?

- (a)  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$
- (b)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{A} = 0$
- (c)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$
- (d)  $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$
- (e)  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$   
onde  $\mathbf{a}_k$  é um vetor unitário.

**1.5** Qual das seguintes identidades não é válida?

- (a)  $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}$
- (b)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- (c)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- (d)  $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
- (e)  $\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B = \cos \theta_{AB}$

**1.6** Quais das seguintes afirmações não têm significado?

- (a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} = 0$
- (b)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + 5 = 2\mathbf{A}$

- (c)  $\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + 2 = 0$   
 (d)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0$

1.7 Sejam  $\mathbf{F} = 2\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{G} = \mathbf{a}_x + G_y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ . Se  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  tem o mesmo vetor unitário,  $G_y$  é:

- |        |        |
|--------|--------|
| (a) 6  | (c) 0  |
| (b) -3 | (d) -6 |

1.8 Dado que  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + \alpha\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ , se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são perpendiculares entre si,  $\alpha$  é igual a:

- |          |       |
|----------|-------|
| (a) -2   | (d) 1 |
| (b) -1/2 | (c) 2 |
| (c) 0    |       |

1.9 A componente de  $6\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$  ao longo de  $3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y$  é:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $-12\mathbf{a}_x - 9\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ |  |
| (b) $30\mathbf{a}_x - 40\mathbf{a}_y$                 |  |
| (c) 10/7  |  |
| (d) 2   |  |
| (e) 10  |  |

1.10 Dado  $\mathbf{A} = -6\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ , a projeção de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_y$  é igual a:

- |         |  |
|---------|--|
| (a) -12 |  |
| (b) -4  |  |
| (c) 3   |  |
| (d) 7   |  |
| (e) 12  |  |

Respostas: 1.1d; 1.2a; 1.3b,e; 1.4b; 1.5a; 1.6b,c; 1.7b; 1.8b; 1.9d; 1.10c.

## PROBLEMAS

1.1 Determine o vetor unitário ao longo da linha que une o ponto  $(2, 4, 4)$  ao ponto  $(-3, 2, 2)$ .

1.2 Sejam  $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ ,  $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{C} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ . (a) Determine  $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ . (b) Calcule  $|\mathbf{A} - 5\mathbf{C}|$ . (c) Para quais valores de  $k$  é  $|\mathbf{k}\mathbf{B}| = 2$ ? (d) Determine  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})/(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ .

1.3 Se

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y + 7\mathbf{a}_z$$

determine:

- (a)  $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$
- (b)  $\mathbf{C} - 4(\mathbf{A} + \mathbf{B})$
- (c)  $\frac{2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}}{|\mathbf{C}|}$
- (d)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - |\mathbf{B}|^2$
- (e)  $\frac{1}{2}\mathbf{B} \times (\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{C})$

- 1.4** Se os vetores posição dos pontos  $T$  e  $S$  são  $3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$  e  $4\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ , respectivamente, determine: (a) as coordenadas de  $T$  e  $S$ ; (b) o vetor distância de  $T$  até  $S$ ; (c) a distância entre  $T$  e  $S$ .

**1.5** Se

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= 5\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \\ \mathbf{C} &= 8\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y\end{aligned}$$

determine os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que  $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} + \mathbf{C}$  seja paralelo ao eixo  $y$ .

**1.6** Dados os vetores

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \alpha\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \\ \mathbf{B} &= 3\mathbf{a}_x + \beta\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z \\ \mathbf{C} &= 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \gamma\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

determine  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , tais que os vetores sejam mutuamente ortogonais.

**1.7** (a) Demonstre que

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = (AB)^2$$

(b) Demonstre que

$$\mathbf{a}_x = \frac{\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z}{\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z}, \quad \mathbf{a}_y = \frac{\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x}{\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z}, \quad \mathbf{a}_z = \frac{\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y}{\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z}$$

**1.8** Dado que

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{Q} = 4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

determine: (a)  $|\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{R}|$ ; (b)  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ ; (c)  $\mathbf{Q} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$ ; (d)  $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$ ; (e)  $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$ ; (f)  $\cos \theta_{PR}$ ; (g)  $\sin \theta_{PQ}$ .

**1.9** Dados os vetores  $\mathbf{T} = 2\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{S} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ , determine: (a) a projeção escalar de  $\mathbf{T}$  sobre  $\mathbf{S}$ ; (b) o vetor projeção de  $\mathbf{S}$  sobre  $\mathbf{T}$ ; (c) o menor ângulo entre  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{S}$ .

**1.10** Se  $\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ , determine: (a) a projeção escalar de  $\mathbf{A}$  sobre  $\mathbf{B}$ ; (b) o vetor projeção de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ ; (c) o vetor unitário perpendicular ao plano contendo  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .

**1.11** Calcule os ângulos que o vetor  $\mathbf{H} = 3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y - 8\mathbf{a}_z$  faz com os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**1.12** Determine o produto escalar triplo de  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  dado que

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

e

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$$

**1.13** Simplifique as seguintes expressões:

- (a)  $\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
- (b)  $\mathbf{A} \times [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]$

**1.14** Demonstre que os sinais de ponto e de vezes podem ser intercambiados no produto escalar triplo, isto é,  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ .

**1.15** Os pontos  $P_1(1, 2, 3)$ ,  $P_2(-5, 2, 0)$  e  $P_3(2, 7, -3)$  formam, no espaço, um triângulo. Calcule a área do triângulo.

**1.16** Os vértices de um triângulo estão localizados em  $(4, 1, -3)$ ,  $(-2, 5, 4)$  e  $(0, 1, 6)$ . Determine os três ângulos desse triângulo.

**1.17** Os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  estão localizados em  $(-1, 4, 8)$ ,  $(2, -1, 3)$  e  $(-1, 2, 3)$ , respectivamente. Determine: (a) a distância entre  $P$  e  $Q$ ; (b) o vetor distância de  $P$  até  $R$ ; (c) o ângulo entre  $QP$  e  $QR$ ; (d) a área do triângulo  $PQR$ ; (e) o perímetro do triângulo  $PQR$ .

**\*1.18** Se  $\mathbf{r}$  é o vetor posição do ponto  $(x, y, z)$  e  $\mathbf{A}$  é um vetor constante, demonstre que:

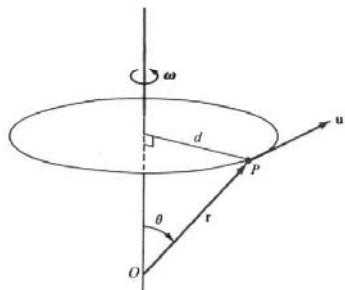
- (a)  $(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = 0$  é a equação de um plano constante.
- (b)  $(\mathbf{r} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r} = 0$  é a equação de uma esfera.
- (c) Demonstre, também, que o resultado da parte (a) é da forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ , onde  $D = -(A_x + B_y + C_z)$ , e que o resultado da parte (b) é da forma  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

**\*1.19** (a) Prove que  $\mathbf{P} = \cos \theta_1 \mathbf{a}_x + \sin \theta_1 \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{Q} = \cos \theta_2 \mathbf{a}_x + \sin \theta_2 \mathbf{a}_y$  são vetores unitários no plano  $xy$ , fazendo, respectivamente, ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  com o eixo dos  $x$ .

- (b) Usando o produto ponto, obtenha a fórmula para  $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ . De maneira similar, obtenha a fórmula para  $\cos(\theta_2 + \theta_1)$ .
- (c) Se  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , determine  $\frac{1}{2}|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$  em função de  $\theta$ .

**1.20** Considere um corpo rígido girando, com uma velocidade angular constante de  $\omega$  radianos por segundo, em torno de um eixo fixo que passa pela origem, como mostrado na Figura 1.14. Seja  $\mathbf{r}$  o vetor distância de  $O$  até  $P$  (ponto no interior do corpo). A velocidade  $\mathbf{u}$  do corpo em  $P$  é dada por  $|\mathbf{u}| = d\omega = |\mathbf{r}| \sin \theta |\omega|$  ou  $\mathbf{u} = \omega \times \mathbf{r}$ . Se o corpo rígido gira a uma velocidade de 3 radianos por segundo em torno de um eixo paralelo a  $\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ , passando pelo ponto  $(2, -3, 1)$ , determine a velocidade do corpo em  $(1, 3, 4)$ .

Figura 1.14 Referente ao Problema 1.20.



\* Um asterisco indica problemas de dificuldade média.

**1.21** Dado  $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x - yz\mathbf{a}_y + yz^2\mathbf{a}_z$ , determine:

- (a) a magnitude de  $\mathbf{A}$  no ponto  $T(2, -1, 3)$ ;
- (b) o vetor distância de  $T$  até  $S$ , caso  $S$  esteja a 5,6 unidades de distância afastado de  $T$  e com a mesma orientação de  $\mathbf{A}$  em  $T$ ;
- (c) o vetor posição de  $S$ .

**1.22**  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  são campos vetoriais dados por  $\mathbf{E} = 2x\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + yz\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{F} = xy\mathbf{a}_x - y^2\mathbf{a}_y + xyz\mathbf{a}_z$ . Determine:

- (a)  $|\mathbf{E}|$  em  $(1, 2, 3)$ ;
- (b) a componente de  $\mathbf{E}$  ao longo de  $\mathbf{F}$  em  $(1, 2, 3)$ ;
- (c) um vetor perpendicular tanto a  $\mathbf{E}$  quanto a  $\mathbf{F}$  em  $(0, 1, -3)$ , cuja magnitude seja um.

# Capítulo 2

## SISTEMAS E TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A educação torna fácil liderar um povo, mas difícil manobrá-lo; fácil governá-lo, mas impossível escravizá-lo.

— HENRY P. BROUHAM

### 2.1 INTRODUÇÃO

Em geral, as quantidades físicas com que trabalhamos no EM são funções do espaço e do tempo. A fim de descrever as variações espaciais dessas quantidades, devemos ser capazes de definir todos os pontos de maneira unívoca no espaço de forma adequada. Isto requer o uso de um sistema de coordenadas apropriado.

Um ponto, ou um vetor, pode ser representado em qualquer sistema de coordenadas curvilíneo, ortogonal ou não-ortogonal.

**Um sistema ortogonal** é aquele em que as coordenadas são mutuamente perpendiculares.

Sistemas não-ortogonais são difíceis de trabalhar e são de pouca ou nenhuma utilidade prática. Exemplos de sistemas de coordenadas ortogonais incluem o sistema cartesiano (ou retangular), o cilíndrico circular, o esférico, o cilíndrico elíptico, o cilíndrico parabólico, o cônicoo, o esferoidal oblongo, o esferoidal achatado e o elipsoidal.<sup>1</sup> Pode-se economizar uma parcela considerável de tempo e de trabalho ao escolher um sistema de coordenadas que mais se adapta a um dado problema. Um problema difícil em um sistema de coordenadas pode ser de fácil solução em um outro sistema.

Neste texto, nos restringiremos aos três mais conhecidos sistemas de coordenadas: o cartesiano, o cilíndrico circular e o esférico. Embora tenhamos considerado o sistema cartesiano no Capítulo 1, o trataremos em detalhe nesse capítulo. Devemos ter em mente que os conceitos abordados no Capítulo 1, e demonstrados para o sistema de coordenadas cartesiano, são igualmente aplicáveis para outros sistemas de coordenadas. Por exemplo, o procedimento para determinar o produto ponto ou o produto cruzado entre dois vetores no sistema cilíndrico é o mesmo que o usado no sistema cartesiano no Capítulo 1.

Alguma vezes, é necessário transformar pontos e vetores de um sistema de coordenadas para outro sistema. As técnicas para operar essa mudança de coordenadas serão apresentadas e ilustradas com exemplos.

<sup>1</sup> Para um estudo introdutório desses sistemas de coordenadas, vide M. R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. New York: McGraw-Hill, 1968, p. 124-130.

## 2.2 COORDENADAS CARTESIANAS (X, Y, Z)

Como mencionado no Capítulo 1, um ponto  $P$  pode ser representado por  $(x, y, z)$ , conforme ilustrado na Figura 1.1. Os intervalos de variação das variáveis coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são:

$$\begin{aligned} -\infty &< x < \infty \\ -\infty &< y < \infty \\ -\infty &< z < \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

Um vetor  $\mathbf{A}$  em coordenadas cartesianas (também conhecida como retangulares) pode ser escrito como:

$$(A_x, A_y, A_z) \quad \text{ou} \quad A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$  são vetores unitários ao longo de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , como mostrado na Figura 1.1.

## 2.3 COORDENADAS CILÍNDRICAS CIRCULARES ( $\rho$ , $\phi$ , $z$ )

Um sistema de coordenadas cilíndrico circular é conveniente quando tratamos problemas com simetria cilíndrica.

Um ponto  $P$ , em coordenadas cilíndricas, é representado por  $(\rho, \phi, z)$ , como mostrado na Figura 2.1. Observe a Figura 2.1 atentamente e verifique como definimos cada uma das variáveis espaciais:  $\rho$  é o raio do cilindro que passa por  $P$  ou é a distância radial a partir do eixo  $z$ ;  $\phi$ , denominado ângulo *azimutal*, é medido a partir do eixo  $x$  no plano  $xy$ ; e  $z$  é o mesmo do sistema cartesiano.

Os intervalos das variáveis são:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < \infty \\ 0 &\leq \phi < 2\pi \\ -\infty &< z < \infty \end{aligned} \quad (2.3)$$

Um vetor  $\mathbf{A}$ , em coordenadas cilíndricas, pode ser escrito como:

$$(A_\rho, A_\phi, A_z) \quad \text{ou} \quad A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{a}_\rho$ ,  $\mathbf{a}_\phi$  e  $\mathbf{a}_z$  são vetores unitários ao longo de  $\rho$ ,  $\phi$ , e  $z$ , como mostrado na Figura 2.1. Observe que  $\mathbf{a}_\phi$  não é dado em graus: ele assume a unidade do vetor unitário de  $\mathbf{A}$ . Por exemplo, se uma força de 10 N age sobre uma partícula em movimento circular, a força pode ser representada como  $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_\phi$  N. Neste caso,  $\mathbf{a}_\phi$  é dada em newtons.

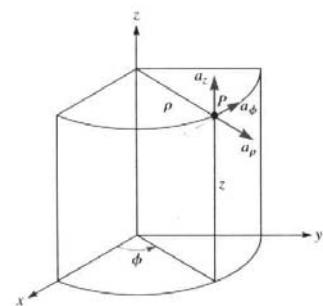


Figura 2.1 Ponto  $P$  e vetor unitário no sistema de coordenadas cilíndricas.

A magnitude de  $\mathbf{A}$  é:

$$|\mathbf{A}| = (A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (2.5)$$

Observe que os vetores unitários  $\mathbf{a}_\rho$ ,  $\mathbf{a}_\phi$  e  $\mathbf{a}_z$  são mutuamente perpendiculares porque nosso sistema de coordenadas é ortogonal;  $\mathbf{a}_\rho$  aponta no sentido de crescimento de  $\rho$ ,  $\mathbf{a}_\phi$  no sentido de crescimento de  $\phi$  e  $\mathbf{a}_z$  no sentido positivo de  $z$ . Assim,

$$\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho = 0 \quad (2.6b)$$

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \quad (2.6c)$$

$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho \quad (2.6d)$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi \quad (2.6e)$$

onde as equações (2.6c) a (2.6e) são obtidas por permutação cíclica (veja Figura 1.9).

As relações entre as variáveis  $(x, y, z)$  do sistema de coordenadas cartesianas e as do sistema de coordenadas cilíndrico  $(\rho, \phi, z)$  são facilmente obtidas, a partir da Figura 2.2, como a seguir:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z} \quad (2.7)$$

ou

$$\boxed{x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z} \quad (2.8)$$

Enquanto a equação (2.7) serve para transformar um ponto dado em coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  para coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ , a equação (2.8) serve para fazer a transformação  $(\rho, \phi, z) \rightarrow (x, y, z)$ .

As relações entre  $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)$  e  $(\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\phi, \mathbf{a}_z)$  são obtidas geometricamente a partir da Figura 2.3:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= \cos \phi \mathbf{a}_\rho - \sin \phi \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_y &= \sin \phi \mathbf{a}_\rho + \cos \phi \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (2.9)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\rho &= \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y \\ y = \rho \sin \phi & \quad \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

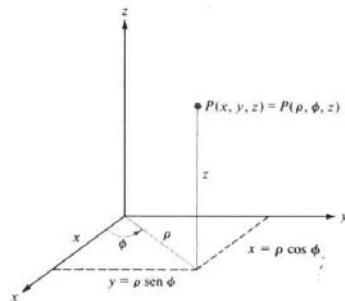


Figura 2.2 Relação entre  $(x, y, z)$  e  $(\rho, \phi, z)$ .

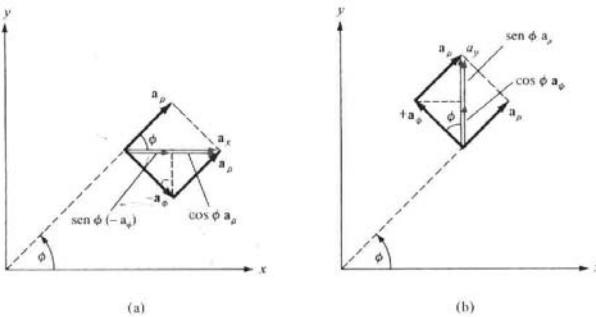


Figura 2.3 Transformação do vetor unitário: (a) componentes de  $\mathbf{a}_r$  no sistema cilíndrico; (b) componentes de  $\mathbf{a}_r$  no sistema cilíndrico.

Finalmente, as relações entre  $(A_x, A_y \text{ e } A_z)$  e  $(A_\rho, A_\phi \text{ e } A_z)$  são obtidas simplesmente substituindo a equação (2.9) na equação (2.2) e agrupando os termos. Assim:

$$\mathbf{A} = (A_x \cos \phi + A_y \sin \phi) \mathbf{a}_\rho + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi) \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (2.11)$$

ou

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \\ A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \\ A_z &= A_z \end{aligned} \quad (2.12)$$

Na forma matricial, a transformação do vetor  $\mathbf{A}$ , de coordenadas cartesianas  $(A_x, A_y \text{ e } A_z)$  em coordenadas cilíndricas  $(A_\rho, A_\phi \text{ e } A_z)$ , é dada por:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A transformação inversa  $(A_\rho, A_\phi \text{ e } A_z) \rightarrow (A_x, A_y \text{ e } A_z)$  é obtida fazendo

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ou diretamente das equações (2.4) e (2.10). Portanto:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Uma maneira alternativa de determinar as equações (2.14) ou (2.15) é usando o produto ponto. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A dedução da 2.16 é deixada como exercício.

## 2.4 COORDENADAS ESFÉRICAS ( $r, \theta, \phi$ )

O sistema de coordenadas esférico é mais apropriado para tratar problemas com simetria esférica. Um ponto  $P$  pode ser representado como  $(r, \theta, \phi)$ , conforme ilustrado na Figura 2.4. Dessa figura, verifica-se que  $r$  é definido como a distância a partir da origem até o ponto  $P$  ou o raio da esfera centrada na origem e que passa por  $P$ ;  $\theta$  (denominado *co-latitude*) é o ângulo entre o eixo  $z$  e o vetor posição de  $P$  e  $\phi$  é medido a partir do eixo  $x$  (o mesmo ângulo azimutal em coordenadas cilíndricas). De acordo com essas definições, os intervalos de variação das variáveis são:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \phi < 2\pi \end{aligned} \quad (2.17)$$

Um vetor  $\mathbf{A}$ , em um sistema de coordenadas esféricas, pode ser escrito como:

$$(A_r, A_\theta, A_\phi) \quad \text{ou} \quad A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_\theta$  e  $\mathbf{a}_\phi$  são vetores unitários ao longo de  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . A magnitude de  $\mathbf{A}$  é:

$$|\mathbf{A}| = (A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2)^{1/2} \quad (2.19)$$

Os vetores unitários  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_\theta$  e  $\mathbf{a}_\phi$  são mutuamente ortogonais;  $\mathbf{a}_r$  orientado segundo o raio ou no sentido de crescimento de  $r$ ,  $\mathbf{a}_\theta$  no sentido de crescimento de  $\theta$  e  $\mathbf{a}_\phi$  no sentido de crescimento de  $\phi$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1 \\ \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_\theta &= \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_r = 0 \\ \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta &= \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi &= \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (2.20)$$

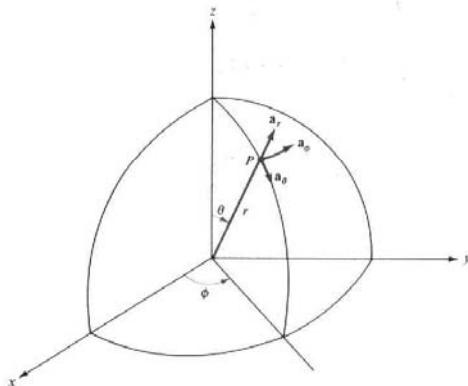


Figura 2.4 Ponto  $P$  e os vetores unitários no sistema de coordenadas esféricas.

As variáveis espaciais ( $x, y, z$ ), no sistema de coordenadas cartesiano, podem ser relacionadas às variáveis ( $r, \theta$  e  $\phi$ ), do sistema de coordenadas esférico. Da Figura 2.5 é fácil perceber que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \quad (2.21)$$

ou

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (2.22)$$

Na equação (2.21), temos a mudança de coordenadas  $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$  e, na equação (2.22), a mudança de coordenadas  $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$ .

Os vetores unitários  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta$  e  $\mathbf{a}_\phi$  são relacionados como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - \sin \phi \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_y &= \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi \\ \mathbf{a}_z &= \cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (2.23)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_y - \sin \theta \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{a}_x + \cos \phi \mathbf{a}_y \end{aligned} \quad (2.24)$$

As componentes do vetor  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  e  $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$  são relacionadas ao substituir a equação (2.23) na equação (2.22) e agrupando os termos. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta) \mathbf{a}_r + (A_x \cos \theta \cos \phi \\ &\quad + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta) \mathbf{a}_\theta + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi) \mathbf{a}_\phi \end{aligned} \quad (2.25)$$

e disso, obtemos:

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta \\ A_\theta &= A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta \\ A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \end{aligned} \quad (2.26)$$

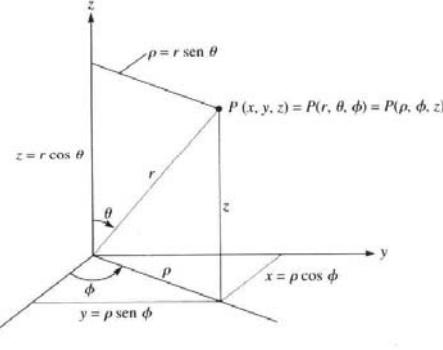


Figura 2.5 Relações entre as variáveis espaciais ( $x, y, z$ ), ( $r, \theta$  e  $\phi$ ) e ( $\rho, \phi, z$ ).

Na forma matricial, a transformação de vetores  $(A_x, A_y, A_z) \rightarrow (A_r, A_\theta, A_\phi)$  é obtida através de:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ -\cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

A transformação inversa  $(A_r, A_\theta, A_\phi) \rightarrow (A_x, A_y, A_z)$  é obtida de forma similar, ou obtida a partir da equação (2.23). Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

De forma alternativa, podemos obter as equações (2.27) e (2.28) usando o produto ponto. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Para melhor entendimento, pode ser elucidativo obter as relações de transformação de um ponto e de um vetor entre as coordenadas cilíndricas e esféricas utilizando as Figuras 2.5 e 2.6 (onde  $\phi$  se mantém constante, uma vez que é comum a ambos os sistemas). Isso será proposto como exercício (veja Problema 2.9). Observe que, na transformação de um ponto ou de um vetor, o ponto ou o vetor não se alteram, apenas são expressos de maneira diferente. Portanto, a magnitude de um vetor, por exemplo, permanece a mesma depois de uma transformação e isso serve como um modo de conferir o resultado da transformação.

A distância entre dois pontos é usualmente necessária na teoria do EM. A distância  $d$ , entre dois pontos com vetores posição  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , é geralmente dada por

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad (2.30)$$

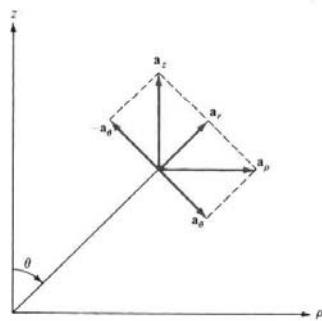


Figura 2.6 Transformações de um vetor unitário para coordenadas cilíndricas e esféricas.

ou

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \text{ (cartesiano)} \quad (2.31)$$

$$d^2 = \rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2 \text{ (cilíndrico)} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} d^2 &= r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \\ &\quad - 2r_1r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \text{ (esférico)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

**EXEMPLO 2.1**

Dado um ponto  $P(-2, 6, 3)$  e o vetor  $\mathbf{A} = ya_x + (x+z)a_y$ , expresse  $P$  e  $\mathbf{A}$  em coordenadas cilíndricas e esféricas. Determine  $\mathbf{A}$  em  $P$  nos sistemas cartesiano, cilíndrico e esférico.

**Solução:**

No ponto  $P$ :  $x = -2$ ,  $y = 6$ ,  $z = 3$ . Portanto:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 36} = 6,32$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{6}{-2} = 108,43^\circ$$

$$z = 3$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{40}}{3} = 64,62^\circ$$

Dessa forma:

$$P(-2, 6, 3) = P(6,32, 108,43^\circ, 3) = P(7, 64,62^\circ, 108,43^\circ)$$

No sistema de coordenadas cartesianas,  $\mathbf{A}$  em  $P$  é dado por:

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

Para o vetor  $\mathbf{A}$ ,  $A_x = y$ ,  $A_y = x + z$ ,  $A_z = 0$ . Por conseguinte, no sistema cilíndrico:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \operatorname{sen} \phi & 0 \\ -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x+z \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$A_\rho = y \cos \phi + (x + z) \operatorname{sen} \phi$$

$$A_\phi = -y \operatorname{sen} \phi + (x + z) \cos \phi$$

$$A_z = 0$$

No entanto,  $x = \rho \cos \phi$  e  $y = \rho \operatorname{sen} \phi$  fazendo as substituições:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z) &= [\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi + (\rho \cos \phi + z) \operatorname{sen} \phi] \mathbf{a}_\rho \\ &\quad + [-\rho \operatorname{sen}^2 \phi + (\rho \cos \phi + z) \cos \phi] \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

Em  $P$ :

$$\rho = \sqrt{40}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{6}{-2}$$

Portanto,

$$\cos \phi = \frac{-2}{\sqrt{40}}, \quad \operatorname{sen} \phi = \frac{6}{\sqrt{40}}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left[ \sqrt{40} \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} \cdot \frac{6}{\sqrt{40}} + \left( \sqrt{40} \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} + 3 \right) \cdot \frac{6}{\sqrt{40}} \right] \mathbf{a}_\rho \\ &\quad + \left[ -\sqrt{40} \cdot \frac{36}{40} + \left( \sqrt{40} \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} + 3 \right) \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} \right] \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{-6}{\sqrt{40}} \mathbf{a}_\rho - \frac{38}{\sqrt{40}} \mathbf{a}_\phi = -0,9487 \mathbf{a}_\rho - 6,008 \mathbf{a}_\phi\end{aligned}$$

De maneira similar, no sistema esférico:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x+z \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}A_r &= y \sin \theta \cos \phi + (x+z) \sin \theta \sin \phi \\A_\theta &= y \cos \theta \cos \phi + (x+z) \cos \theta \sin \phi \\A_\phi &= -y \sin \phi + (x+z) \cos \phi\end{aligned}$$

No entanto,  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  e  $z = r \cos \theta$ . Fazendo as substituições, obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (A_r, A_\theta, A_\phi) \\&= r[\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + (\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \sin \theta \sin \phi] \mathbf{a}_r \\&\quad + r[\sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi + (\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \cos \theta \sin \phi] \mathbf{a}_\theta \\&\quad + r[-\sin \theta \sin^2 \phi + (\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) \cos \phi] \mathbf{a}_\phi\end{aligned}$$

Em  $P$ :

$$r = 7, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{6}{-2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{40}}{3}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{-2}{\sqrt{40}}, \quad \sin \phi = \frac{6}{\sqrt{40}}, \quad \cos \theta = \frac{3}{7}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{40}}{7} \\ \mathbf{A} &= 7 \cdot \left[ \frac{40}{49} \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} \cdot \frac{6}{\sqrt{40}} + \left( \frac{\sqrt{40}}{7} \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7} \right) \cdot \frac{\sqrt{40}}{7} \cdot \frac{6}{\sqrt{40}} \right] \mathbf{a}_r \\ &\quad + 7 \cdot \left[ \frac{\sqrt{40}}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{\sqrt{40}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} + \left( \frac{\sqrt{40}}{7} \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7} \right) \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{\sqrt{40}} \right] \mathbf{a}_\theta \\ &\quad + 7 \cdot \left[ \frac{-\sqrt{40}}{7} \cdot \frac{36}{40} + \left( \frac{\sqrt{40}}{7} \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7} \right) \cdot \frac{-2}{\sqrt{40}} \right] \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{-6}{7} \mathbf{a}_r - \frac{18}{7\sqrt{40}} \mathbf{a}_\theta - \frac{38}{\sqrt{40}} \mathbf{a}_\phi \\ &= -0,8571 \mathbf{a}_r - 0,4066 \mathbf{a}_\theta - 6,008 \mathbf{a}_\phi\end{aligned}$$

Observe que  $|\mathbf{A}|$  é o mesmo nos três sistemas, isto é:

$$|\mathbf{A}(x, y, z)| = |\mathbf{A}(\rho, \phi, z)| = |\mathbf{A}(r, \theta, \phi)| = 6,083$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 2.1**

- (a) Converta os pontos  $P(1, 3, 5)$ ,  $T(0, -4, 3)$  e  $S(-3, -4, -10)$  do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas cilíndrico e para o esférico.
- (b) Transforme o vetor

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{a}_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{yz \mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

para coordenadas cilíndricas e esféricas.

- (c) Determine  $\mathbf{Q}$  em  $T$  nos três sistemas de coordenadas.

**Resposta:** (a)  $P(3,162, 71,56^\circ, 5)$ ,  $P(5,916, 32,31^\circ, 71,56^\circ)$ ,  $T(4, 270^\circ, 3)$ ,  $T(5, 53,13^\circ, 270^\circ)$ ,  $S(5, 233,1^\circ, -10)$ ,  $S(11,18, 153,43^\circ, 233,1^\circ)$

$$(b) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} (\cos \phi \mathbf{a}_\rho - \sin \phi \mathbf{a}_\phi - z \sin \phi \mathbf{a}_z), \sin \theta (\sin \theta \cos \phi - r \cos^2 \theta \sin \phi) \mathbf{a}_r + \sin \theta \cos \theta (\cos \phi + r \sin \theta \sin \phi) \mathbf{a}_\theta - \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

$$(c) 0,8\mathbf{a}_x + 2,4\mathbf{a}_z, 0,8\mathbf{a}_\phi + 2,4\mathbf{a}_z, 1,44\mathbf{a}_r - 1,92\mathbf{a}_\theta + 0,8\mathbf{a}_\phi.$$

**EXEMPLO 2.2**

Expresse o vetor

$$\mathbf{B} = \frac{10}{r} \mathbf{a}_r + r \cos \theta \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\phi$$

em coordenadas cartesianas e cilíndricas. Determine  $\mathbf{B}(-3, 4, 0)$  e  $\mathbf{B}(5, \pi/2, -2)$ .

**Solução:**

Usando a equação (2.28):

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{r} \\ r \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$B_x = \frac{10}{r} \sin \theta \cos \phi + r \cos^2 \theta \cos \phi - \sin \phi$$

$$B_y = \frac{10}{r} \sin \theta \sin \phi + r \cos^2 \theta \sin \phi + \cos \phi$$

$$B_z = \frac{10}{r} \cos \theta - r \cos \theta \sin \theta$$

No entanto,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$  e  $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \cos \theta &= \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \sin \phi &= \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \cos \phi &= \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Substituindo todas essas relações, obtém-se:

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{10\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{z^2 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{10x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{xz^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} - \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \\ B_y &= \frac{10\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{z^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{10y}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{yz^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ B_z &= \frac{10z}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$$

onde  $B_x, B_y$  e  $B_z$  como dados acima.

Em  $(-3, 4, 0)$ ,  $x = -3$ ,  $y = 4$  e  $z = 0$ , tal que

$$B_x = -\frac{30}{25} + 0 - \frac{4}{5} = -2$$

$$B_y = \frac{40}{25} + 0 - \frac{3}{5} = 1$$

$$B_z = 0 - 0 = 0$$

Portanto:

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$$

Para transformação de vetor de coordenadas esféricas para coordenadas cilíndricas (veja Problema 2.9),

$$\begin{bmatrix} B_\rho \\ B_\phi \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{r} \\ r \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$B_\rho = \frac{10}{r} \sin \theta + r \cos^2 \theta$$

$$B_\phi = 1$$

$$B_z = \frac{10}{r} \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta$$

No entanto,  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  e  $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\rho}{z}$

Portanto:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, & \cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ B_\rho &= \frac{10\rho}{\rho^2 + z^2} + \sqrt{\rho^2 + z^2} \cdot \frac{z^2}{\rho^2 + z^2} \\ B_z &= \frac{10z}{\rho^2 + z^2} - \sqrt{\rho^2 + z^2} \cdot \frac{\rho z}{\rho^2 + z^2}\end{aligned}$$

Por conseguinte:

$$\mathbf{B} = \left( \frac{10\rho}{\rho^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\phi + \left( \frac{10z}{\rho^2 + z^2} - \frac{\rho z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \mathbf{a}_z$$

Em  $(5, \pi/2, -2)$ ,  $\rho = 5$ ,  $\phi = \pi/2$  e  $z = -2$ , tal que:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \left( \frac{50}{29} + \frac{4}{\sqrt{29}} \right) \mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\phi + \left( \frac{-20}{29} + \frac{10}{\sqrt{29}} \right) \mathbf{a}_z \\ &= 2,467 \mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\phi + 1,167 \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Observe que, em  $(-3, 4, 0)$ :

$$|\mathbf{B}(x, y, z)| = |\mathbf{B}(\rho, \phi, z)| = |\mathbf{B}(r, \theta, \phi)| = 2,907$$

Esse procedimento pode ser usado para conferir, sempre que possível, a correção do resultado.

### EXERCÍCIO PRÁTICO 2.2

Expresse os seguintes vetores em coordenadas cartesianas:

- (a)  $\mathbf{A} = \rho z \operatorname{sen} \phi \mathbf{a}_\rho + 3\rho \cos \phi \mathbf{a}_\phi + \rho \cos \phi \operatorname{sen} \phi \mathbf{a}_z$
- (b)  $\mathbf{B} = r^2 \mathbf{a}_r + \operatorname{sen} \theta \mathbf{a}_\phi$

**Resposta:** (a)  $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} [(xyz - 3xy) \mathbf{a}_x + (zy^2 + 3x^2) \mathbf{a}_y + xy \mathbf{a}_z]$   
(b)  $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \{[x(x^2 + y^2 + z^2) - y] \mathbf{a}_x + [y(x^2 + y^2 + z^2) + x] \mathbf{a}_y + z(x^2 + y^2 + z^2) \mathbf{a}_z\}$

## 2.5 SUPERFÍCIES DE COORDENADA CONSTANTE

As superfícies nos sistemas coordenados cartesiano, cilíndrico ou esférico são facilmente obtidas ao manter uma das variáveis coordenadas constante, enquanto as demais variam.

No sistema cartesiano, se mantivermos  $x$  constante e deixarmos  $y$  e  $z$  variar, um plano infinito é gerado. Portanto, podemos ter planos infinitos

$$\begin{aligned}x &= \text{constante} \\ y &= \text{constante} \\ z &= \text{constante}\end{aligned}\tag{2.34}$$

os quais são perpendiculares aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, como mostra a Figura 2.7. A interseção entre dois planos é uma linha. Por exemplo,

$$x = \text{constante}, \quad y = \text{constante} \quad (2.35)$$

é a linha  $RPQ$  paralela ao eixo  $z$ . A interseção entre os três planos é um ponto. Por exemplo,

$$x = \text{constante}, \quad y = \text{constante}, \quad z = \text{constante} \quad (2.36)$$

é o ponto  $P(x, y, z)$ . Portanto, podemos definir o ponto  $P$  como a interseção entre os três planos ortogonais infinitos. Se  $P$  é  $(1, -5, 3)$ , então  $P$  é a interseção dos planos  $x = 1$ ,  $y = -5$  e  $z = 3$ .

Superfícies ortogonais, em coordenadas cilíndricas, podem ser geradas da mesma forma. As superfícies

$$\begin{aligned} \rho &= \text{constante} \\ \phi &= \text{constante} \\ z &= \text{constante} \end{aligned} \quad (2.37)$$

estão ilustradas na Figura 2.8, onde é fácil observar que  $\rho = \text{constante}$  é um cilindro circular,  $\phi = \text{constante}$  é um semiplano infinito com as suas bordas ao longo do eixo  $z$  e  $z = \text{constante}$  é o mesmo plano infinito do sistema cartesiano. O encontro de duas superfícies tanto pode ser uma linha quanto um círculo. Portanto,

$$z = \text{constante}, \quad \rho = \text{constante} \quad (2.38)$$

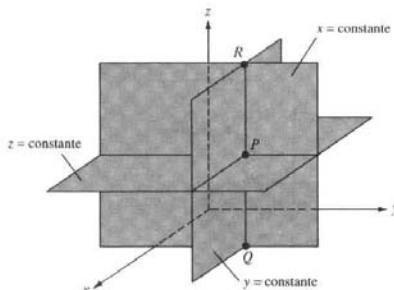


Figura 2.7 Superfícies de  $x$ ,  $y$  e  $z$  constantes.

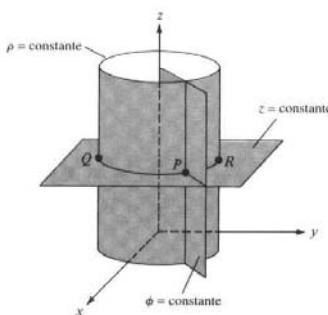


Figura 2.8 Superfícies de  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$  constantes.

é um círculo  $QPR$  de raio  $\rho$ , enquanto  $z = \text{constante}$  e  $\phi = \text{constante}$  é uma linha semi-infinita. Um ponto é a interseção de três superfícies na equação (2.37). Portanto,

$$\rho = 2, \quad \phi = 60^\circ, \quad z = 5 \quad (2.39)$$

é o ponto  $P(2, 60^\circ, 5)$ .

A natureza ortogonal do sistema de coordenadas esféricas fica evidente ao considerarmos as três superfícies

$$\begin{aligned} r &= \text{constante} \\ \theta &= \text{constante} \\ \phi &= \text{constante} \end{aligned} \quad (2.40)$$

que são mostradas na Figura 2.9, onde observamos que  $r = \text{constante}$  é uma esfera com o centro na origem;  $\theta = \text{constante}$  é um cone circular tendo seu eixo sobre o eixo  $z$  e o vértice na origem;  $\phi = \text{constante}$  é um semiplano infinito como no sistema cilíndrico. Uma linha é formada pela interseção de duas superfícies. Por exemplo:

$$r = \text{constante}, \quad \phi = \text{constante} \quad (2.41)$$

é um semicírculo que passa por  $Q$  e  $P$ . A interseção das três superfícies é um ponto. Portanto,

$$r = 5, \quad \theta = 30^\circ, \quad \phi = 60^\circ \quad (2.42)$$

é o ponto  $P(5, 30^\circ, 60^\circ)$ . Observamos que, em geral, um ponto no espaço tridimensional pode ser identificado como a interseção de três superfícies mutuamente ortogonais. Igualmente, um vetor unitário normal à superfície  $n = \pm \mathbf{a}_n$ , onde  $n$  é  $x, y, z, \rho, \phi, r$  ou  $\theta$ . Por exemplo, para o plano  $x = 5$ , o vetor unitário normal é  $\pm \mathbf{a}_x$ , e, para o plano  $\phi = 20^\circ$ , um vetor unitário normal é  $\mathbf{a}_\phi$ .

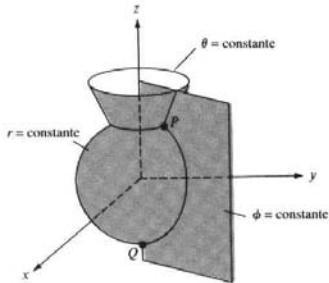


Figura 2.9 Superfícies de  $\rho$ ,  $\theta$  e  $\phi$  constantes.

### EXEMPLO 2.3

Dois campos vetoriais uniformes são dados por  $\mathbf{E} = -5\mathbf{a}_\rho + 10\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{F} = \mathbf{a}_\rho + 2\mathbf{a}_\phi - 6\mathbf{a}_z$ . Calcule:

- (a)  $|\mathbf{E} \times \mathbf{F}|$ ;
- (b) a componente do vetor  $\mathbf{E}$  em  $P(5, \pi/2, 3)$  paralela à linha  $x = 2, z = 3$ ;
- (c) o ângulo que  $\mathbf{E}$  faz com a superfície  $z = 3$  em  $P$ .

**Solução:**

$$(a) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ -5 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-60 - 6)\mathbf{a}_\rho + (3 - 30)\mathbf{a}_\phi + (-10 - 10)\mathbf{a}_z$$

$$= (-66, -27, -20)$$

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{F}| = \sqrt{66^2 + 27^2 + 20^2} = 74,06$$

(b) A linha  $x = 2, z = 3$  é paralela ao eixo  $y$ ; dessa forma, a componente de  $\mathbf{E}$  paralela à essa linha é:

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y$$

Contudo, em  $P(5, \pi/2, 3)$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_y &= \sin \phi \mathbf{a}_\rho + \cos \phi \mathbf{a}_\phi \\ &= \sin \pi/2 \mathbf{a}_\rho + \cos \pi/2 \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\rho \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_\rho)\mathbf{a}_\rho = -5\mathbf{a}_\rho \quad (\text{ou } -5\mathbf{a}_y)$$

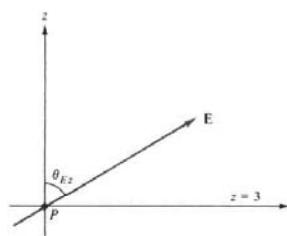
(c) Uma vez que o eixo  $z$  é normal à superfície  $z = 3$ , o ângulo entre o eixo  $z$  e o  $\mathbf{E}$ , como mostrado na Figura 2.10, pode ser determinado usando o produto ponto:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_z &= |\mathbf{E}|(1) \cos \theta_{Ez} \rightarrow 3 = \sqrt{134} \cos \theta_{Ez} \\ \cos \theta_{Ez} &= \frac{3}{\sqrt{134}} = 0,2592 \rightarrow \theta_{Ez} = 74,98^\circ \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo entre  $z = 3$  e  $\mathbf{E}$  é:

$$90^\circ - \theta_{Ez} = 15,02^\circ$$

Figura 2.10 Referente ao Exemplo 2.3(c).



### EXERCÍCIO PRÁTICO 2.3

Considere o campo vetorial:

$$\mathbf{H} = \rho z \cos \phi \mathbf{a}_\rho + e^{-2} \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{a}_\phi + \rho^2 \mathbf{a}_z$$

No ponto  $(1, \pi/3, 0)$ , determine:

- (a)  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_x$ ;
- (b)  $\mathbf{H} \times \mathbf{a}_\theta$ ;

- (c) a componente vetorial de  $\mathbf{H}$  normal à superfície  $\rho = 1$ ;  
 (d) a componente escalar de  $\mathbf{H}$  tangencial a plano  $z = 0$ .

**Resposta:** (a) -0,433; (b) -0,5  $\mathbf{a}_\rho$ ; (c) 0  $\mathbf{a}_\rho$ ; (d) 0,5.

#### EXEMPLO 2.4

Dado um campo vetorial

$$\mathbf{D} = r \operatorname{sen} \phi \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \operatorname{sen} \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta + r^2 \mathbf{a}_\phi$$

Determine:

- (a)  $\mathbf{D}$  em  $P(10, 150^\circ, 330^\circ)$ ;  
 (b) a componente de  $\mathbf{D}$  tangencial à superfície esférica  $r = 10$  em  $P$ ;  
 (c) um vetor unitário em  $P$ , perpendicular à  $\mathbf{D}$  e tangencial ao cone  $\theta = 150^\circ$ .

**Solução:**

- (a) em  $P$ ,  $r = 10$ ,  $\theta = 150^\circ$  e  $\phi = 330^\circ$ . Por conseguinte:

$$\mathbf{D} = 10 \operatorname{sen} 330^\circ \mathbf{a}_r - \frac{1}{10} \operatorname{sen} 150^\circ \cos 330^\circ \mathbf{a}_\theta + 100 \mathbf{a}_\phi = (-5; 0,043; 100)$$

(b) qualquer vetor  $\mathbf{D}$  pode ser decomposto em duas componentes ortogonais:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_t + \mathbf{D}_n$$

onde  $\mathbf{D}_t$  é tangencial a uma dada superfície e  $\mathbf{D}_n$  normal à ela. Nesse caso, uma vez que  $\mathbf{a}_r$  é normal à superfície  $r = 10$ :

$$\mathbf{D}_n = r \operatorname{sen} \phi \mathbf{a}_r = -5 \mathbf{a}_r$$

Portanto,

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D} - \mathbf{D}_n = 0,043 \mathbf{a}_\theta + 100 \mathbf{a}_\phi$$

(c) um vetor em  $P$ , perpendicular à  $\mathbf{D}$  e tangencial ao cone  $\theta = 150^\circ$ , é o mesmo que um vetor perpendicular tanto a  $\mathbf{D}$  quanto a  $\mathbf{a}_\theta$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \times \mathbf{a}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\phi \\ -5 & 0,043 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -100 \mathbf{a}_r - 5 \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

Um vetor unitário ao longo do vetor acima é dado por:

$$\mathbf{a} = \frac{-100 \mathbf{a}_r - 5 \mathbf{a}_\phi}{\sqrt{100^2 + 5^2}} = -0,9988 \mathbf{a}_r - 0,0499 \mathbf{a}_\phi$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 2.4

Se  $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_r + 2\mathbf{a}_\theta - 6\mathbf{a}_\phi$  e  $\mathbf{B} = 4\mathbf{a}_r + 3\mathbf{a}_\phi$ , determine:

- (a)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ;  
 (b)  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ ;  
 (c) a componente vetorial de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_z$  em  $(1, \pi/3, 5\pi/4)$ .

**Resposta:** (a) -6; (b) 34,48; (c) -0,116  $\mathbf{a}_r + 0,201 \mathbf{a}_\theta$ .

- Os três sistemas de coordenadas mais comuns que iremos utilizar ao longo desse livro são o cartesiano (ou retangular), o cilíndrico circular e o esférico.
- Um ponto  $P$  é representado como  $P(x, y, z)$ ,  $P(\rho, \phi, z)$  e  $P(r, \theta, \phi)$  nos sistemas cartesiano, cilíndrico e esférico, respectivamente. Um campo vetorial  $\mathbf{A}$  é representado como  $(A_x, A_y, A_z)$  ou  $A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$  no sistema cartesiano; como  $(A_\rho, A_\phi, A_z)$  ou  $A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$  no sistema cilíndrico e como  $(A_r, A_\theta, A_\phi)$  ou  $A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$  no sistema esférico. É recomendável que as operações matemáticas (adição, subtração, produto, etc.) sejam realizadas no mesmo sistema de coordenadas. Portanto, as conversões de coordenadas de ponto e vetor devem ser feitas sempre que necessário.
- A fixação de uma variável espacial define uma superfície; a fixação de duas define uma linha; a fixação de três define um ponto.
- Um vetor unitário normal à superfície  $n = \text{constante} \pm \mathbf{a}_n$ .

## QUESTÕES DE REVISÃO

**2.1** Os intervalos de variação de  $\theta$  e  $\phi$ , conforme dado na equação (2.17), não são os únicos possíveis. Os listados a seguir são todos alternativas válidas, à exceção de:

- (a)  $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$
- (b)  $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$
- (c)  $-\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi$
- (d)  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi$
- (e)  $0 \leq \theta \leq \pi, -\pi \leq \phi < \pi$
- (f)  $-\pi \leq \theta < \pi, -\pi \leq \phi < \pi$

**2.2** Para o ponto cartesiano  $(-3, 4, -1)$ , qual dessas alternativas é incorreta?

- (a)  $\rho = -5$
- (b)  $r = \sqrt{26}$
- (c)  $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{5}{-1}$
- (d)  $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{4}{-3}$

**2.3** Qual dessas alternativas não é válida no ponto  $(0, 4, 0)$ ?

- (a)  $\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x$
- (b)  $\mathbf{a}_\theta = -\mathbf{a}_z$
- (c)  $\mathbf{a}_r = 4\mathbf{a}_y$
- (d)  $\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_y$

**2.4** Um vetor unitário normal ao cone  $\theta = 30^\circ$  é:

- (a)  $\mathbf{a}_r$ ;
- (b)  $\mathbf{a}_\theta$ ;
- (c)  $\mathbf{a}_\phi$ ;
- (d) nenhuma das alternativas acima.

**2.5** Em qualquer ponto do espaço,  $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\theta = 1$ .

- (a) Verdadeiro.
- (b) Falso.

**2.6** Se  $\mathbf{H} = 4\mathbf{a}_\rho - 3\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z$  em  $(1, \pi/2, 0)$ , a componente de  $\mathbf{H}$  paralela à superfície  $\rho = 1$  é:

- (a)  $4\mathbf{a}_\rho$
- (b)  $5\mathbf{a}_z$

- (c)  $-3\mathbf{a}_\phi$   
 (d)  $-3\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z$   
 (e)  $5\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$

2.7 Dado  $\mathbf{G} = 20\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y + 40\mathbf{a}_z$  em  $(1, \pi/2, \pi/6)$ , a componente de  $\mathbf{G}$ , perpendicular à superfície  $\theta = \pi/2$ , é:

- (a)  $20\mathbf{a}_r$   
 (b)  $50\mathbf{a}_\theta$   
 (c)  $40\mathbf{a}_\phi$   
 (d)  $20\mathbf{a}_r + 40\mathbf{a}_\theta$   
 (e)  $-40\mathbf{a}_r + 20\mathbf{a}_\phi$

**2.8** A interseção entre as superfícies  $\rho = 2$  e  $z = 1$  é:

- (a) um plano infinito;
  - (b) um semiplano infinito;
  - (c) um círculo;
  - (d) um cilindro;
  - (e) um cone.

**2.9** Relacione os itens da coluna da esquerda com os da coluna da direita. Cada resposta pode ser usada uma vez, mais de uma vez ou em nenhuma vez.

- |   |                         |
|---|-------------------------|
| (a) $\theta = \pi/4$                      | (i) plano infinito      |
| (b) $\phi = 2\pi/3$                       | (ii) semiplano infinito |
| (c) $x = -10$                             | (iii) círculo           |
| (d) $r = 1, \theta = \pi/3, \phi = \pi/2$ | (iv) semicírculo        |
| (e) $\rho = 5$                            | (v) linha reta          |
| (f) $\rho = 3, \phi = 5\pi/3$             | (vi) cone               |
| (g) $\rho = 10, z = 1$                    | (vii) cilindro          |
| (h) $r = 4, \phi = \pi/6$                 | (viii) esfera           |
| (i) $r = 5, \theta = \pi/3$               | (ix) cubo               |
|   | (x) ponto               |

**2.10** Uma fatia é descrita por  $z = 0$ ,  $30^\circ < \phi < 60^\circ$ . Qual das seguintes alternativas é incorreta?

- (a) a fatia está no plano  $x - y$ ;
  - (b) é finita;
  - (c) sobre a fatia,  $0 < \rho < \infty$ ;
  - (d) uma normal unitária à fatia  $\mathbf{e} \pm \mathbf{a}_z$ ;
  - (e) a fatia não inclui nem o eixo  $x$ , nem o eixo  $y$ .

**Respostas:** 2.1b; f; 2.2a; 2.3c; 2.4b; 2.5b; 2.6d; 2.7b; 2.8c; 2.9a-(vi), b-(ii), c-(i), d-(x), e-(vii), f-(v), g-(iii), h-(iv), i-(iii), 2.10b.

## PROBLEMAS

**2.1** Expresse os seguintes pontos em coordenadas cartesianas:

- (a)  $P(1, 60^\circ, 2)$   
 (b)  $Q(2, 90^\circ, -4)$   
 (c)  $R(3, 45^\circ, 210^\circ)$   
 (d)  $T(4, \pi/2, \pi/6)$

**2.2** Expresse os seguintes pontos em coordenadas cilíndricas e esféricas:

- (a)  $P(1, -4, -3)$
- (b)  $Q(3, 0, 5)$
- (c)  $R(-2, 6, 0)$

**2.3** (a) Se  $V = xz - xy + yz$ , expresse  $V$  em coordenadas cilíndricas.

- (b) Se  $U = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ , expresse  $U$  em coordenadas esféricas.

**2.4** Transforme os seguintes vetores para coordenadas cilíndricas e esféricas:

- (a)  $\mathbf{D} = (x + z)\mathbf{a}_x$
- (b)  $\mathbf{E} = (y^2 - x^2)\mathbf{a}_x + xyz\mathbf{a}_y + (x^2 - z^2)\mathbf{a}_z$

**2.5** Converta os seguintes vetores para os sistemas cilíndrico e esférico:

$$(a) \mathbf{F} = \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$(b) \mathbf{G} = (x^2 + y^2) \left[ \frac{x\mathbf{a}_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

**2.6** Expresse os seguintes vetores em coordenadas cartesianas:

- (a)  $\mathbf{A} = \rho(z^2 + 1)\mathbf{a}_\rho - \rho z \cos \phi \mathbf{a}_\phi$
- (b)  $\mathbf{B} = 2r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + r \cos \theta \cos \theta \mathbf{a}_\theta - r \sin \phi \mathbf{a}_\phi$

**2.7** Converta os seguintes vetores para o sistema de coordenadas cartesianas:

- (a)  $\mathbf{C} = z \sin \phi \mathbf{a}_\rho - \rho \cos \phi \mathbf{a}_\phi + 2\rho z \mathbf{a}_z$
- (b)  $\mathbf{D} = \frac{\sin \theta}{r^2} \mathbf{a}_r + \frac{\cos \theta}{r^2} \mathbf{a}_\theta$

**2.8** Prove o que segue:

- (a)  $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos \phi$   
 $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \phi$   
 $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = \sin \phi$   
 $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \phi$
- (b)  $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi$   
 $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \phi$   
 $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \sin \theta \sin \phi$   
 $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \sin \phi$   
 $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$   
 $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \theta$

**2.9** (a) Demonstre que a transformação de um ponto do sistema de coordenadas cilíndricas para o sistema de coordenadas esféricas é obtida usando:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\rho}{z}, \quad \phi = \phi$$

ou

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad \phi = \phi$$

- (b) Demonstre que a transformação de um vetor do sistema de coordenadas cilíndricas para o sistema de coordenadas esféricas é obtida usando:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

(Dica: utilize as Figuras 2.5 e 2.6.)

- 2.10** (a) Expresse o campo vetorial

$$\mathbf{H} = xy^2 z \mathbf{a}_x + x^2 y z \mathbf{a}_y + xyz^2 \mathbf{a}_z$$

em coordenadas cilíndricas e esféricas.

- (b) Tanto em sistemas de coordenadas cilíndricas quanto esféricas, determine  $\mathbf{H}$  em  $(3, -4, 5)$ .

- 2.11** Seja  $\mathbf{A} = \rho \cos \theta \mathbf{a}_\rho + \rho z^2 \sin \phi \mathbf{a}_z$

- (a) Transforme  $\mathbf{A}$  para coordenadas retangulares e determine sua magnitude no ponto  $(3, -4, 0)$ .

- (b) Transforme  $\mathbf{A}$  para coordenadas esféricas e determine sua magnitude no ponto  $(3, -4, 0)$ .

- 2.12** A transformação  $(A_\rho, A_\theta, A_z) \rightarrow (A_x, A_y, A_z)$  na equação (2.15) não está completa. Complete-a expressando  $\cos \phi$  e  $\sin \phi$  em termos de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Faça o mesmo para a transformação  $(A_r, A_\theta, A_\phi) \rightarrow (A_x, A_y, A_z)$  na equação (2.28).

- 2.13** No Exercício Prático 2.2, expresse  $\mathbf{A}$  em coordenadas esféricas e  $\mathbf{B}$  em coordenadas cilíndricas. Determine  $\mathbf{A}$  em  $(10, \pi/2, 3\pi/4)$  e  $\mathbf{B}$  em  $(2, \pi/6, 1)$ .

- 2.14** Calcule a distância entre os seguintes pares de pontos:

- (a)  $(2, 1, 5)$  e  $(6, -1, 2)$   
 (b)  $(3, \pi/2, -1)$  e  $(5, 3\pi/2, 5)$   
 (c)  $(10, \pi/4, 3\pi/4)$  e  $(5, \pi/6, 7\pi/4)$

- 2.15** Descreva a interseção entre as seguintes superfícies:

- (a)  $x = 2$ ,  $y = 5$   
 (b)  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $z = 10$   
 (c)  $r = 10$ ,  $\theta = 30^\circ$   
 (d)  $\rho = 5$ ,  $\phi = 40^\circ$   
 (e)  $\phi = 60^\circ$ ,  $z = 10$   
 (f)  $r = 5$ ,  $\phi = 90^\circ$

- 2.16** No ponto  $T(2, 3, -4)$ , expresse  $\mathbf{a}_z$  no sistema esférico e  $\mathbf{a}_r$  no sistema retangular.

- \***2.17** Dados os vetores  $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B} = -5\mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_\phi - 3\mathbf{a}_z$ , determine:

- (a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  em  $P(0, 2, -5)$ ;  
 (b) o ângulo entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  em  $P$ ;  
 (c) a componente escalar de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{B}$  em  $P$ .

- 2.18** Dado  $\mathbf{G} = (x + y^2)\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y + (z^2 + zy)\mathbf{a}_z$ , determine a componente vetorial de  $\mathbf{G}$  ao longo de  $\mathbf{a}_\phi$  no ponto  $P(8, 30^\circ, 60^\circ)$ . Sua resposta deve ser dada em coordenadas cartesianas.

\*2.19 Se  $\mathbf{J} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r - \cos 2\theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \ln r \mathbf{a}_\phi$  aem  $T(2, \pi/2, 3\pi/2)$ , determine a componente vetorial de  $\mathbf{J}$  que seja:

- (a) paralela à  $\mathbf{a}_z$
- (b) normal à superfície  $\phi = 3\pi/2$
- (c) tangencial à superfície esférica  $r = 2$
- (d) paralela à linha  $y = -2, z = 0$

2.20 Seja  $\mathbf{H} = 5\rho \sin \phi \mathbf{a}_\rho - \rho z \cos \phi \mathbf{a}_\phi + 2\rho \mathbf{a}_z$ . No ponto  $P(2, 30^\circ, -1)$ , determine:

- (a) um vetor unitário ao longo de  $\mathbf{H}$ ;
- (b) a componente de  $\mathbf{H}$  paralela à  $\mathbf{a}_r$ ,
- (c) a componente de  $\mathbf{H}$  normal a  $\rho = 2$ ;
- (d) a componente de  $\mathbf{H}$  tangencial a  $\phi = 30^\circ$ .

\*2.21 Seja

$$\mathbf{A} = \rho(z^2 - 1)\mathbf{a}_\rho - \rho z \cos \phi \mathbf{a}_\phi + \rho^2 z^2 \mathbf{a}_z$$

e

$$\mathbf{B} = r^2 \cos \phi \mathbf{a}_r + 2r \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

Calcule em  $T(-3, 4, 1)$ : (a)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ; (b) a componente vetorial de  $\mathbf{A}$  ao longo de  $\mathbf{B}$  em  $T$ , em coordenadas cilíndricas; (c) o vetor unitário perpendicular tanto a  $\mathbf{A}$  quanto a  $\mathbf{B}$  em  $T$ , em coordenadas esféricas.

\*2.22 Uma outra maneira de definir um ponto  $P$  no espaço é através de  $(r, \alpha, \beta, \gamma)$ , onde as variáveis estão indicadas na Figura 2.11. Utilizando essa definição, determine  $(r, \alpha, \beta, \gamma)$  para os seguintes pontos:

- (a)  $(-2, 3, 6)$
- (b)  $(4, 30^\circ, -3)$
- (c)  $(3, 30^\circ, 60^\circ)$

(Dica:  $r$  é o  $r$  de coordenadas esféricas,  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < 2\pi$ .)

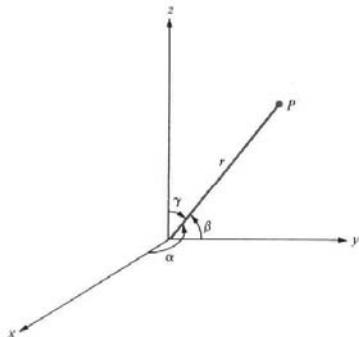


Figura 2.11 Referente ao Problema 2.22.

2.23 Um campo vetorial em um "misto" de variáveis coordenadas é dado por

$$\mathbf{G} = \frac{x \cos \phi}{\rho} \mathbf{a}_x + \frac{2yz}{\rho^2} + \left(1 - \frac{x^2}{\rho^2}\right) \mathbf{a}_z$$

Expresse  $\mathbf{G}$ , de maneira completa, em um sistema esférico.

# Capítulo 3

---

## CÁLCULO VETORIAL

Nenhum homem torna-se verdadeiramente um tolo até que ele pare de fazer perguntas.

—CHARLES P. STEINMETZ

### 3.1 INTRODUÇÃO

---

O Capítulo 1 trata, principalmente, de soma, subtração e multiplicação vetoriais em coordenadas cartesianas. O Capítulo 2 estende esses conceitos para outros sistemas de coordenadas. Este capítulo trata do cálculo vetorial (integração e diferenciação de vetores).

Os conceitos introduzidos neste capítulo fornecem uma linguagem conveniente para expressar certas concepções fundamentais em Eletromagnetismo ou em Matemática em geral. Um estudante pode não se sentir familiarizado com estes conceitos, em princípio – não enxergando “quão importantes” eles são. Tal estudante deve ser orientado para se concentrar em aprender as técnicas matemáticas e esperar pela suas aplicações nos capítulos subsequentes.

### <sup>†</sup>3.2 COMPRIMENTO, ÁREA E VOLUME DIFERENCIAIS

---

O elementos diferenciais de comprimento, área e volume são úteis em cálculo vetorial. Eles são definidos nos sistemas de coordenadas cartesiano, cilíndrico e esférico.

#### A. Coordenadas cartesianas

Da Figura 3.1, observa-se que:

(1) O deslocamento diferencial é dado por:

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \quad (3.1)$$



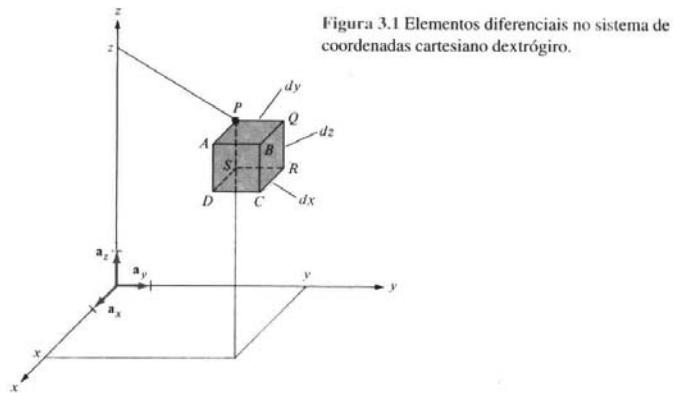


Figura 3.1 Elementos diferenciais no sistema de coordenadas cartesiano dextrógiro.

(2) A área diferencial normal é dada por:

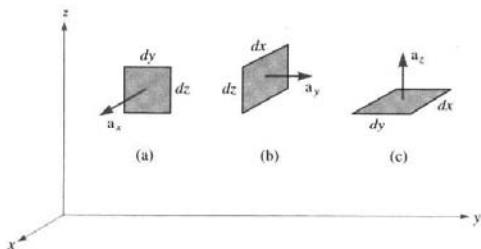
$$d\mathbf{S} = \begin{cases} dy dz \mathbf{a}_x \\ dx dz \mathbf{a}_y \\ dz dy \mathbf{a}_z \end{cases} \quad (3.2)$$

e está ilustrada na Figura 3.2.

(3) O volume diferencial é dado por:

(3.3)

$$dv = dx dy dz$$

Figura 3.2 A área diferencial normal em coordenadas cartesianas:  
(a)  $d\mathbf{S} = dy dz \mathbf{a}_x$ , (b)  $d\mathbf{S} = dx dz \mathbf{a}_y$ , (c)  $d\mathbf{S} = dz dy \mathbf{a}_z$ .

Esses elementos diferenciais são muito importantes, uma vez que eles serão referidos várias vezes ao longo deste livro. O estudante é estimulado não a memorizá-los, mas a aprender como eles são obtidos, a partir da Figura 3.1. Observe, das equações (3.1) a (3.3), que  $d\mathbf{l}$  e  $d\mathbf{S}$  são vetores, enquanto  $dv$  é um escalar. Observe, da Figura 3.1, que, se nos deslocamos do ponto  $P$  até  $Q$  (ou de  $Q$  até  $P$ ), por exemplo,  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y$ , visto que estamos nos deslocando segundo a orientação  $y$ . Se nos deslocamos de  $Q$  para  $S$  (ou de  $S$  para  $Q$ ),  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$ , visto que temos que nos deslocar  $dy$  ao longo de  $y$ ,  $dz$  ao longo de  $z$  e  $dx = 0$  (não há movimento ao longo de  $x$ ). De maneira similar, deslocar-se de  $D$  até  $Q$  significa que  $d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$ . O modo como  $d\mathbf{S}$  é definido é importante. O elemento de superfície (ou de área) diferencial  $d\mathbf{S}$  pode, em geral, ser definido como:

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{a}_n \quad (3.4)$$

onde  $dS$  é a área do elemento de superfície e  $\mathbf{a}_n$  é o vetor unitário normal à superfície  $dS$  (e orientado para fora do volume se  $dS$  é parte de uma superfície que limita esse volume). Se considerarmos a superfície  $ABCD$  na Figura 3.1, por exemplo,  $d\mathbf{S} = dy dz \mathbf{a}_z$ , enquanto que já que para a superfície  $PQRS$ ,  $d\mathbf{S} = -dy dz \mathbf{a}_z$ , já que  $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_z$  é normal à  $PQRS$ .

O que é importante lembrar a respeito de elementos diferenciais é como expressar  $d\mathbf{l}$  e, a partir dele, como obter  $d\mathbf{S}$  e  $dv$ . Tendo  $d\mathbf{l}$ ,  $d\mathbf{S}$  e  $dv$  podem ser facilmente encontrados a partir dele. Por exemplo,  $d\mathbf{S}$  ao longo de  $\mathbf{a}_z$  pode ser obtido a partir de  $d\mathbf{l}$  na equação (3.1) multiplicando as componentes de  $d\mathbf{l}$  ao longo de  $\mathbf{a}_x$  e de  $\mathbf{a}_y$ ; isto é,  $dy dz \mathbf{a}_z$ . De maneira similar,  $d\mathbf{S}$  ao longo de  $\mathbf{a}_x$  é o produto das componentes de  $d\mathbf{l}$  ao longo de  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$ ; isto é,  $dx dy \mathbf{a}_x$ . Da mesma forma,  $dv$  pode ser obtido a partir de  $d\mathbf{l}$  como o produto das três componentes de  $d\mathbf{l}$ ; isto é,  $dx dy dz$ . O procedimento desenvolvido aqui para coordenadas cartesianas será, em seguida, estendido para outros sistemas de coordenadas.

## B. Coordenadas cilíndricas

Observe da Figura 3.3 que, em coordenadas cilíndricas, os elementos diferenciais podem ser obtidos como segue:

- (1) O deslocamento diferencial é dado por

$$d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \quad (3.5)$$

- (2) A área diferencial normal é dada por

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho \\ &= d\rho dz \mathbf{a}_\phi \\ &= \rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

conforme ilustrado na Figura 3.4.

- (3) O volume diferencial é dado por

$$dv = \rho d\rho d\phi dz \quad (3.7)$$

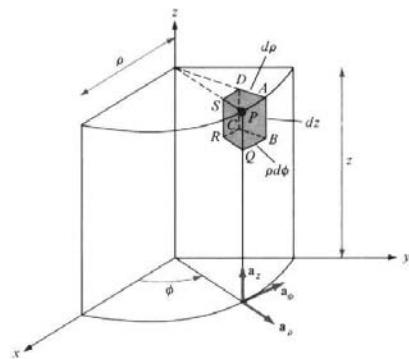


Figura 3.3 Elementos vetoriais em coordenadas cilíndricas.

Conforme mencionado na seção anterior sobre coordenadas cartesianas, só precisamos ter  $d\mathbf{l}$ ;  $d\mathbf{S}$  e  $dv$  podem ser obtidos facilmente a partir de  $d\mathbf{l}$ . Por exemplo,  $d\mathbf{S}$  ao longo de  $\mathbf{a}_z$  é o produto das componentes de  $d\mathbf{l}$  ao longo de  $\mathbf{a}_\rho$  e  $\mathbf{a}_\phi$ ; isto é,  $d\rho \rho d\phi \mathbf{a}_z$ . Da mesma forma,  $dv$  é o produto das três componentes de  $d\mathbf{l}$ ; isto é,  $d\rho \rho d\phi dz$ .

### C. Coordenadas esféricas

Da Figura 3.5, observamos que, em coordenadas cilíndricas,

(1) O deslocamento diferencial é:

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \quad (3.8)$$

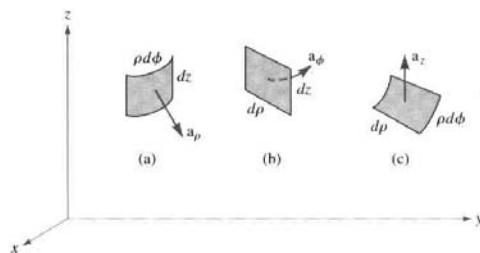


Figura 3.4 Áreas diferenciais normais em coordenadas cilíndricas:  
(a)  $d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$ , (b)  $d\mathbf{S} = d\rho dz \mathbf{a}_\phi$ , (c)  $d\mathbf{S} = \rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z$ .

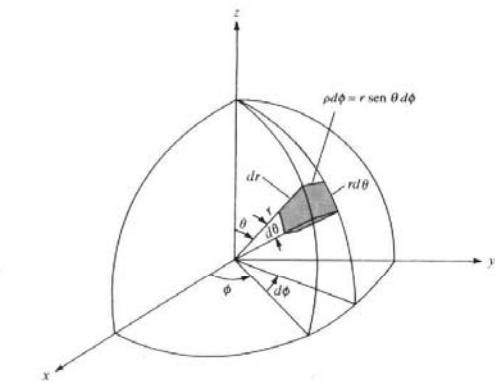


Figura 3.5 Elementos diferenciais no sistema de coordenadas esférico.

(2) A área diferencial normal é:

$$\boxed{d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r \\ r \sin \theta \, dr \, d\phi \, \mathbf{a}_\theta \\ r \, dr \, d\theta \, \mathbf{a}_\phi} \quad (3.9)$$

conforme ilustrado na Figura 3.6.

(3) O volume diferencial é:

$$\boxed{dv = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi} \quad (3.10)$$

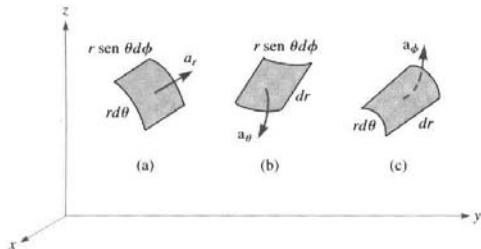


Figura 3.6 As áreas diferenciais normais em coordenadas esféricas:  
 (a)  $d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r$ , (b)  $d\mathbf{S} = r \sin \theta \, dr \, d\phi \, \mathbf{a}_\theta$ ,  
 (c)  $d\mathbf{S} = r \, dr \, d\theta \, \mathbf{a}_\phi$

Novamente, só precisamos ter  $d\mathbf{l}$ , de onde  $d\mathbf{S}$  e  $dv$  são facilmente obtidos. Por exemplo,  $d\mathbf{S}$  ao longo de  $\mathbf{a}_\theta$  é obtido como o produto das componentes de  $d\mathbf{l}$  ao longo de  $\mathbf{a}_r$  e  $\mathbf{a}_\phi$ ; isto é,  $dr \cdot r \sin \theta d\phi$ ; enquanto  $dv$  é o produto das três componentes de  $d\mathbf{l}$ ; isto é,  $dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi$ .

**EXEMPLO 3.1**

Considere o objeto mostrado na Figura 3.7. Determine:

- a distância  $BC$ ;
- a distância  $CD$ ;
- a superfície  $ABCD$ ;
- a superfície  $ABO$ ;
- a superfície  $OFD$ ;
- o volume  $ABDCFO$ .

**Solução:**

Embora os pontos  $A, B, C$  e  $D$  sejam dados em coordenadas cartesianas, é óbvio que o objeto tem simetria cilíndrica. Assim, resolveremos o problema em coordenadas cilíndricas. Os pontos são convertidos do sistema cartesiano para o sistema cilíndrico como segue:

$$A(5, 0, 0) \rightarrow A(5, 0^\circ, 0)$$

$$B(0, 5, 0) \rightarrow B\left(5, \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$C(0, 5, 10) \rightarrow C\left(5, \frac{\pi}{2}, 10\right)$$

$$D(5, 0, 10) \rightarrow D(5, 0^\circ, 10)$$

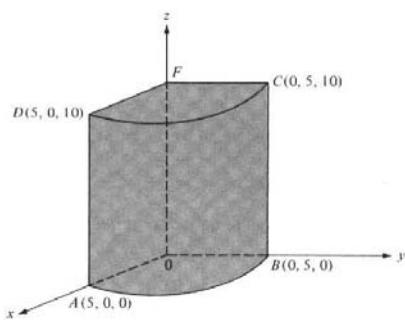
- (a) Ao longo de  $BC$ ,  $dl = dz$ ; assim,

$$BC = \int dl = \int_0^{10} dz = 10$$

- (b) Ao longo de  $CD$ ,  $dl = \rho d\phi$  e  $\rho = 5$ , então

$$CD = \int_0^{\pi/2} \rho d\phi = 5 \phi \Big|_0^{\pi/2} = 2,5\pi$$

Figura 3.7 Referente ao Exemplo 3.1.



(c) Para  $ABCD$ ,  $dS = \rho d\phi dz$ ,  $\rho = 5$ . Assim,

$$\text{área } ABCD = \int dS = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{10} \rho d\phi dz = 5 \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{10} dz \Big|_{\rho=5} = 25\pi$$

(d) Para  $ABO$ ,  $dS = \rho d\phi d\rho$  e  $z = 0$ , então

$$\text{área } ABO = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^5 \rho d\phi d\rho = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^5 \rho d\rho = 6,25\pi$$

(e) Para  $AOFD$ ,  $dS = d\rho dz$  e  $\phi = 0^\circ$ , então

$$\text{área } AOFD = \int_{\rho=0}^5 \int_{z=0}^{10} d\rho dz = 50$$

(f) Para o volume  $ABDCFO$ ,  $dv = \rho d\phi dz d\rho$ . Portanto,

$$v = \int dv = \int_{\rho=0}^5 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{10} \rho d\phi dz d\rho = \int_0^{10} dz \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^5 \rho d\rho = 62,5\pi$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 3.1

Referente a Figura 3.26. Desconsidere os comprimentos diferenciais e imagine que o objeto é parte de uma casca esférica. Isto pode ser descrito como  $3 \leq r \leq 5$ ,  $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ,  $45^\circ \leq \phi \leq 60^\circ$ , onde a superfície  $r = 3$  é delimitada por  $AEHD$ , superfície  $\theta = 60^\circ$  é  $AEFB$  e a superfície  $\phi = 45^\circ$  é  $ABCD$ . Determine:

- (a) a distância  $DH$ ;
- (b) a distância  $FG$ ;
- (c) a área da superfície  $AEHD$ ;
- (d) a área da superfície  $ABDC$ ;
- (e) o volume do objeto.

**Resposta:** (a) 0,7854; (b) 2,618; (c) 1,179; (d) 4,189; (e) 4,276.

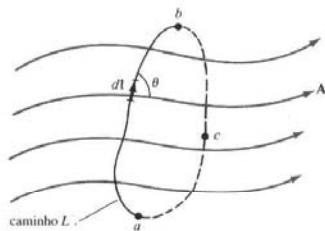
### 3.3 INTEGRAIS DE LINHA, DE SUPERFÍCIE E DE VOLUME

O conceito de integração com que estamos familiarizados agora será estendido aos casos em que o integrando envolve um vetor. Por linha entendemos um caminho ao longo de uma curva no espaço. Utilizaremos os termos *linha*, *curva* e *contorno* alternadamente.

A integral de linha  $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  é a integral da componente tangencial de  $\mathbf{A}$  ao longo da curva  $L$ .

Dado um campo vetorial  $\mathbf{A}$  e uma curva  $L$ , definimos a integral

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b |\mathbf{A}| \cos \theta dl \quad (3.11)$$

Figura 3.8 Caminho de integração do campo vetorial  $\mathbf{A}$ .

como a *integral de linha* de  $\mathbf{A}$  em torno de  $L$  (veja Figura 3.8). Se o caminho de integração é uma curva fechada, tal como  $abca$  na Figura 3.8, a equação (3.11) torna-se uma integral de linha fechada

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.12)$$

que é denominada a *circulação* de  $\mathbf{A}$  em torno de  $L$ .

Dado um campo vetorial  $\mathbf{A}$ , contínuo em uma região contendo uma curva suave  $S$ , definimos *integral de superfície*, ou o *fluxo* de  $\mathbf{A}$  através de  $S$  (veja Figura 3.9), como:

$$\Psi = \int_S |\mathbf{A}| \cos \theta \, dS = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_n \, dS$$

ou simplesmente

$$\boxed{\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}} \quad (3.13)$$

onde, em qualquer ponto sobre  $S$ ,  $\mathbf{a}_n$  é o vetor unitário normal a  $S$ . Para uma superfície fechada (definindo um volume), a equação (3.13) torna-se

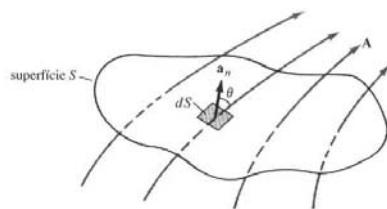
$$\Psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.14)$$

que é referido como o *fluxo líquido* de  $\mathbf{A}$  que sai de  $S$ . Observe que o caminho fechado define uma superfície aberta, enquanto uma superfície fechada define um volume (veja Figuras 3.11 e 3.16).

Definimos a integral

$$\int_v \rho_v \, dv \quad (3.15)$$

como a *integral de volume* do escalar  $\rho_v$  sobre o volume  $v$ . O significado físico de uma integral de linha, de superfície ou de volume depende da natureza das quantidades físicas representadas por  $\mathbf{A}$  ou por  $\rho_v$ . Observe que  $d\mathbf{l}$ ,  $d\mathbf{S}$  e  $dv$  são definidos como na Seção 3.2.

Figura 3.9 O fluxo de um campo vetorial  $\mathbf{A}$  através da superfície  $S$ .

**EXEMPLO 3.2**

Dado  $\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x - xz\mathbf{a}_y - y^2\mathbf{a}_z$  determine a circulação  $\mathbf{F}$  em torno do caminho (fechado) mostrado na Figura 3.10.

**Solução:**

A circulação de  $\mathbf{F}$  em torno de  $L$  é dada por

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \left( \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

na qual o caminho é particionado nos segmentos numerados de 1 a 4, como mostrado na Figura 3.10.

Para o segmento 1,  $y = 0 = z$

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x, \quad d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x$$

Note que  $d\mathbf{l}$  é sempre considerado ao longo de  $+a_x$ , de forma que a orientação dada pelo segmento 1 é dada pelos limites de integração. Portanto,

$$\int_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^0 = -\frac{1}{3}$$

Para o segmento 2,  $x = 0 = z$ ,  $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{a}_z$ ,  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y$ ,  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . Assim,

$$\int_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Para o segmento 3,  $y = 1$ ,  $\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x - xz\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$  e  $d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x + dz \mathbf{a}_z$ , então

$$\int_3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int (x^2 dx - dz)$$

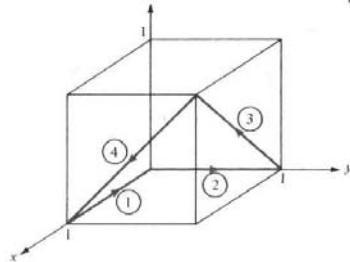
Porém, sobre 3,  $z = x$ ; isto é,  $dx = dz$ . Assim,

$$\int_3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{3} - x \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

Para o segmento 4,  $x = 1$ , então  $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x - za_y - y^2\mathbf{a}_z$  e  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$ . Assim,

$$\int_4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int (-z dy - y^2 dz)$$

Figura 3.10 Referente ao Exemplo 3.2.



Porém, sobre 4,  $z = y$ ; isto é,  $dz = dy$ , então

$$\int_4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^0 (-y - y^2) dy = -\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_1^0 = \frac{5}{6}$$

Agrupando as expressões anteriores, obtemos:

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

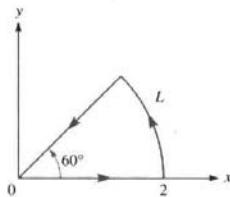


Figura 3.11 Referente ao Exercício 3.2.

### EXERCÍCIO PRÁTICO 3.2

Calcule a circulação de

$$\mathbf{A} = \rho \cos \phi \mathbf{a}_\rho + z \sin \phi \mathbf{a}_z$$

em torno da borda  $L$  da fatia definida por  $0 \leq \rho \leq 2$ ,  $0 \leq \phi \leq 60^\circ$ ,  $z = 0$  e mostrada na Figura 3.11.

**Resposta:** 1.

## 3.4 O OPERADOR DEL\*

O operador *del*, escrito  $\nabla$ , é o operador diferencial com caráter vetorial. Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (3.16)$$

Esse operador diferencial, também conhecido como *operador gradiente*, não é um vetor em si mesmo, mas, quando ele opera sobre uma função escalar, por exemplo, resulta em um vetor. O operador é útil para definir:

1. o gradiente de um escalar  $V$ , escrito como  $\nabla V$ ;
2. o divergente de um vetor  $\mathbf{A}$ , escrito como  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ;
3. o rotacional de um vetor  $\mathbf{A}$ , escrito como  $\nabla \times \mathbf{A}$ ;
4. o laplaciano de um escalar  $V$ , escrito como  $\nabla^2 V$ .

Cada uma dessas operações será definida, em detalhe, nas seções subsequentes. Antes de fazê-lo, é conveniente obter expressões para o operador *del* ( $\nabla$ ) em coordenadas cilíndricas e esféricas. Isso é facilmente obtido utilizando as fórmulas de conversão das Seções 2.3 e 2.4.

\* N. de T. Também conhecido como operador *nabla*.

Para obter  $\nabla$  em termos de  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$ , lembremos da equação (2.7) que<sup>1</sup>

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen} \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.18)$$

Substituindo as equações (3.17) e (3.18) na equação (3.16) e fazendo uso da equação (2.9), obtemos  $\nabla$  em coordenadas cilíndricas:

$$\boxed{\nabla = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}} \quad (3.19)$$

De maneira similar, para obter  $\nabla$  em termos de  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , utilizamos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}$$

Para obter

$$\frac{\partial}{\partial x} = \operatorname{sen} \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{sen} \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \operatorname{sen} \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.22)$$

Substituindo as equações (3.20) a (3.22) na equação (3.16) e usando a equação (2.23), obtém-se  $\nabla$  em coordenadas esféricas:

$$\boxed{\nabla = \mathbf{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}} \quad (3.23)$$

Observe que, nas equações (3.19) e (3.23), os vetores unitários são colocados à direita dos operadores diferenciais porque os vetores unitários dependem dos ângulos.

### 3.5 GRADIENTE DE UM ESCALAR

O gradiente de um campo escalar  $V$  é um vetor que representa a magnitude e a orientação da máxima taxa espacial de variação de  $V$ .

Uma expressão matemática para o gradiente pode ser obtida calculando-se a diferença no campo  $dV$  entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  da Figura 3.12, em que  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_i$  são contornos sobre os quais  $V$  é constante. Desse cálculo,

<sup>1</sup> Um modo mais geral de obter  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ,  $\nabla \times \mathbf{A}$ ,  $\nabla V$  e  $\nabla^2 V$  é utilizando coordenadas curvilíneas. Veja, por exemplo, M. R. Spiegel, *Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1959, p. 135–165.

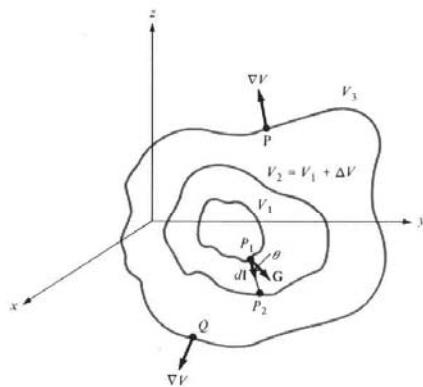


Figura 3.12 Gradiente de um escalar.

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por conveniência, seja

$$\mathbf{G} = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (3.25)$$

Então,

$$dV = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = G \cos \theta dl$$

ou

$$\frac{dV}{dl} = G \cos \theta \quad (3.26)$$

Onde  $d\mathbf{l}$  é o deslocamento diferencial de  $P_1$  até  $P_2$  e  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{G}$  e  $d\mathbf{l}$ . Da equação (3.26) observamos que  $dV/dl$  é um máximo quando  $\theta = 0$ ; isto é, quando  $d\mathbf{l}$  está com a mesma orientação de  $\mathbf{G}$ . Assim,

$$\left. \frac{dV}{dl} \right|_{\max} = \frac{dV}{dn} = G \quad (3.27)$$

onde  $dV/dn$  é a derivada normal. Portanto,  $\mathbf{G}$  tem sua magnitude e orientação coincidindo com a máxima taxa de variação de  $V$ . Por definição,  $\mathbf{G}$  é o gradiente de  $V$ . Portanto:

$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (3.28)$$

Ao usar a equação (3.28) em combinação com as equações (3.16), (3.19) e (3.23), o gradiente de  $V$  pode ser expresso em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. Em coordenadas cartesianas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

Em coordenadas cilíndricas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (3.29)$$

Em coordenadas esféricas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (3.30)$$

As seguintes relações envolvendo gradiente, que são facilmente comprovadas, devem ser destacadas:

$$(a) \nabla(V + U) = \nabla V + \nabla U \quad (3.31a)$$

$$(b) \nabla(VU) = V\nabla U + U\nabla V \quad (3.31b)$$

$$(c) \nabla \left[ \frac{V}{U} \right] = \frac{U\nabla V - V\nabla U}{U^2} \quad (3.31c)$$

$$(d) \nabla V^n = nV^{n-1}\nabla V \quad (3.31d)$$

onde  $U$  e  $V$  representam escalares e  $n$  é um inteiro.

Observe também as seguintes propriedades fundamentais do gradiente de um campo escalar  $V$ :

1. a magnitude de  $\nabla V$  é igual à máxima taxa de variação de  $V$  por unidade de distância;
2.  $\nabla V$  aponta na orientação de máxima taxa de variação de  $V$ ;
3.  $\nabla V$ , em qualquer ponto, é perpendicular à superfície de  $V$  constante que passa através desse ponto (veja pontos  $P$  e  $Q$  na Figura 3.12);
4. a projeção (ou componente) de  $\nabla V$  na orientação de um vetor unitário  $\mathbf{a}$  é  $\nabla V \cdot \mathbf{a}$  e é denominada de *derivada direcional* de  $V$  ao longo de  $\mathbf{a}$ . Essa é a taxa de variação de  $V$  segundo a orientação de  $\mathbf{a}$ . Por exemplo,  $dV/dl$  na equação (3.26) é a derivada direcional de  $V$  ao longo de  $P_1P_2$  na Figura 3.12. Portanto, o gradiente de uma função escalar  $V$  fornece tanto a orientação segundo a qual  $V$  varia mais rapidamente quanto a magnitude da máxima derivada direcional de  $V$ ;
5. se  $\mathbf{A} = \nabla V$ ,  $V$  é denominado o potencial escalar de  $\mathbf{A}$ .

### EXEMPLO 3.3

Determine o gradiente dos seguintes campos escalares:

$$(a) V = e^{-z} \sin 2x \cosh y$$

$$(b) U = \rho^2 z \cos 2\phi$$

$$(c) W = 10r \sin^2 \theta \cos \phi$$

**Solução:**

$$(a) \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ = 2e^{-z} \cos 2x \cosh y \mathbf{a}_x + e^{-z} \sin 2x \operatorname{senh} y \mathbf{a}_y - e^{-z} \sin 2x \cosh y \mathbf{a}_z$$

$$(b) \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ = 2\rho z \cos 2\phi \mathbf{a}_\rho - 2\rho z \sin 2\phi \mathbf{a}_\phi + \rho^2 \cos 2\phi \mathbf{a}_z$$

$$(c) \nabla W = \frac{\partial W}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \\ = 10 \sin^2 \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + 10 \sin \theta \cos 2\theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - 10 \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 3.3**

Determine o gradiente dos seguintes campos escalares:

- (a)  $U = x^2y + xyz$
- (b)  $V = \rho z \sin \phi + z^2 \cos^2 \phi + \rho^2$
- (c)  $f = \cos \theta \sin \phi \ln r + r^2 \phi$

**Resposta:** (a)  $y(2x + z)\mathbf{a}_x + x(x + z)\mathbf{a}_y + xyz\mathbf{a}_z$

$$(b) (z \sin \phi + 2\rho)\mathbf{a}_\rho + (z \cos \phi - \frac{z^2}{\rho} \sin 2\phi)\mathbf{a}_\phi +$$

$$(\rho \sin \phi + 2z \cos^2 \phi)\mathbf{a}_z$$

$$(c) \left( \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} + 2r\phi \right) \mathbf{a}_r - \frac{\sin \theta \sin \phi}{r} \ln r \mathbf{a}_\theta +$$

$$\left( \frac{\cot \theta}{r} \cos \phi \ln r + r \operatorname{cossec} \theta \right) \mathbf{a}_\phi$$

**EXEMPLO 3.4**

Dado  $W = x^2y^2 + xyz$ , determine  $\nabla W$  e a derivada direcional  $dW/dl$  segundo a orientação dada por  $3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$  em  $(2, -1, 0)$ .

$$\begin{aligned} \text{Solução:} \quad \nabla W &= \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ &= (2xy^2 + yz)\mathbf{a}_x + (2x^2y + xz)\mathbf{a}_y + (xy)\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Em  $(2, -1, 0)$ :  $\nabla W = 4\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$

Assim,

$$\frac{dW}{dl} = \nabla W \cdot \mathbf{a}_l = (4, -8, -2) \cdot \frac{(3, 4, 12)}{13} = -\frac{44}{13}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 3.4**

Dado  $\Phi = xy + yz + xz$ , determine o gradiente  $\Phi$  no ponto  $(1, 2, 3)$  e a derivada direcional de  $\Phi$  no mesmo ponto, orientada em direção ao ponto  $(3, 4, 4)$ .

**Resposta:**  $5\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z, 7$ .

**EXEMPLO 3.5**

Determine o ângulo segundo o qual a linha  $x = y = 2z$  intercepta o elipsóide  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ .

**Solução:**

Suponha que a linha e o elipsóide se encontrem segundo um ângulo  $\psi$ , como mostrado na Figura 3.13. A linha  $x = y = 2z$  pode ser representada por

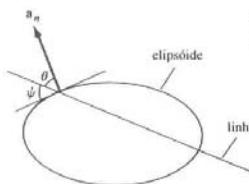


Figura 3.13 Referente ao Exemplo 3.5; plano de interseção de uma linha com um elipsóide.

$$\mathbf{r}(\lambda) = 2\lambda \mathbf{a}_x + 2\lambda \mathbf{a}_y + \lambda \mathbf{a}_z$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro. Onde a linha e o elipsóide se encontram,

$$(2\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + 2\lambda^2 = 10 \rightarrow \lambda = \pm 1$$

Considerando  $\lambda = 1$  nesse caso, o ponto de interseção é  $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ . Neste ponto,  $\mathbf{r} = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ .

A superfície do elipsóide é definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 10$$

O gradiente de  $f$  é

$$\nabla f = 2x \mathbf{a}_x + 2y \mathbf{a}_y + 4z \mathbf{a}_z$$

Em  $(2, 2, 1)$ ,  $\nabla f = 4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ . Assim, um vetor unitário normal ao elipsóide no ponto de interseção é:

$$\mathbf{a}_n = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \pm \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{3}}$$

Escolhendo o sinal positivo nesse caso, o ângulo entre  $\mathbf{a}_n$  e  $\mathbf{r}$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{r}|} = \frac{2 + 2 + 1}{\sqrt{3} \sqrt{9}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \operatorname{sen} \psi$$

Assim,  $\psi = 74,21^\circ$ . Como  $\lambda$  e  $\mathbf{a}_n$  podem ser + ou -, temos, na realidade, quatro possibilidades de ângulos, dados por  $\operatorname{sen} \psi = \pm 5/(3\sqrt{3})$ .

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 3.5

Calcule o ângulo entre as normais às superfícies  $x^2y + z = 3$  e  $x \log z - y^2 = -4$  no ponto de interseção  $(-1, 2, 1)$ .

**Resposta:**  $73,4^\circ$ .

### 3.6 DIVERGÊNCIA DE UM VETOR E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Na Seção 3.3, observamos que o fluxo líquido de um campo vetorial  $\mathbf{A}$  que flui para fora de uma superfície fechada  $S$  é obtido da integral  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ . Definiremos, então, a divergência de  $\mathbf{A}$  como o fluxo líquido que flui para fora de uma superfície incremental fechada, por unidade de volume encerrado pela superfície.

**A divergência de  $\mathbf{A}$  em um dado ponto  $P$**  é o fluxo que sai, por unidade de volume, à medida que o volume se reduz à zero em torno de  $P$ .

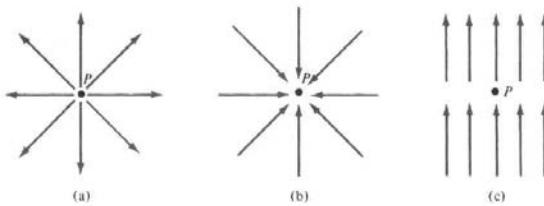


Figura 3.14 Ilustração da divergência de um campo vetorial  $P$ : (a) divergência positiva, (b) divergência negativa, (c) divergência zero.

Assim,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (3.32)$$

onde  $\Delta v$  é o volume encerrado pela superfície fechada  $S$  na qual  $P$  está localizado. Fisicamente, podemos considerar a divergência de um campo vetorial  $A$ , em um dado ponto, como uma medida de quanto o campo diverge ou emana desse ponto. A Figura 3.14(a) mostra que a divergência de um campo vetorial em um ponto  $P$  é positiva porque o vetor diverge (ou se “espalha” a partir de) em  $P$ . Na Figura 3.14(b) o campo vetorial tem divergência negativa (ou convergência) em  $P$  e, na Figura 3.14(c), um campo vetorial tem divergência zero em  $P$ . A divergência de um campo vetorial pode ser vista como, simplesmente, o limite da intensidade da fonte de campo por unidade de volume (ou densidade da fonte); é positiva em um ponto-fonte e negativa em um ponto-sumidouro, ou zero em um ponto nem sumidouro nem fonte.

Podemos obter uma expressão para  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ , em coordenadas cartesianas, a partir da definição na equação (3.32). Suponhamos que se queira calcular a divergência de um campo vetorial  $\mathbf{A}$  em um ponto  $P(x_o, y_o, z_o)$ , considerando que esse ponto esteja encerrado em uma superfície fechada com um volume diferencial como na Figura 3.15. A integral de superfície na equação (3.32) é obtida da seguinte forma:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left( \int_{\text{frente}} + \int_{\text{trás}} + \int_{\text{esquerda}} + \int_{\text{direita}} + \int_{\text{superior}} + \int_{\text{inferior}} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.33)$$

Uma expansão de  $A_x$  em série de Taylor, em três dimensões, em torno de  $P$ , é

$$\begin{aligned} A_x(x, y, z) &= A_x(x_o, y_o, z_o) + (x - x_o) \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P + (y - y_o) \frac{\partial A_x}{\partial y} \Big|_P \\ &\quad + (z - z_o) \frac{\partial A_x}{\partial z} \Big|_P + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para a face anterior,  $x = x_o + dx/2$  e  $d\mathbf{S} = dy dz \mathbf{a}_x$ . Então,

$$\int_{\text{frente}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dy dz \left[ A_x(x_o, y_o, z_o) + \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P \right] + \text{termos de ordem superior}$$

Para a face posterior,  $x = x_o - dx/2$ ,  $d\mathbf{S} = dy dz (-\mathbf{a}_x)$ . Então,

$$\int_{\text{atrás}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -dy dz \left[ A_x(x_o, y_o, z_o) - \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P \right] + \text{termos de ordem superior}$$

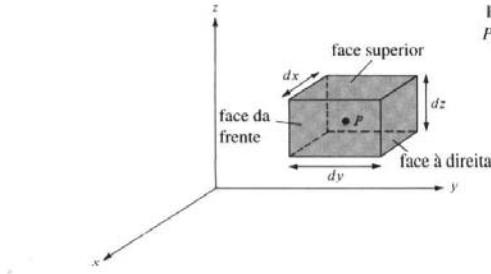


Figura 3.15 Cálculo de  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$ .

Assim,

$$\int_{\text{frente}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{trás}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx dy dz \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_P + \text{termos de ordem superior} \quad (3.35)$$

Segundo passos semelhantes, obtemos

$$\int_{\text{esquerda}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{direita}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx dy dz \frac{\partial A_y}{\partial y} \Big|_P + \text{termos de ordem superior} \quad (3.36)$$

e

$$\int_{\text{superior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{inferior}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx dy dz \frac{\partial A_z}{\partial z} \Big|_P + \text{termos de ordem superior} \quad (3.37)$$

Substituindo as equações (3.35) a (3.37) na equação (3.33), observando que  $\Delta v = dx dy dz$ , obtemos

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Big|_{\text{em } P} \quad (3.38)$$

porque os termos de ordem superior desaparecem a medida que  $\Delta v \rightarrow 0$ . Portanto a divergência de  $\mathbf{A}$  em um ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$ , em um sistema de coordenadas cartesiano, é dada por

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \quad (3.39)$$

Expressões similares para  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  em outro sistema de coordenadas, podem ser diretamente obtidas da equação (3.32) ou pela transformação da equação (3.39) para um sistema de coordenadas apropriado. Em coordenadas cilíndricas, substituindo as equações (2.15), (3.17) e (3.18) na equação (3.39) obtém-se:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}} \quad (3.40)$$

Substituindo as equações (2.28) e (3.20) a (3.22) na equação (3.39), obtemos a divergência de  $\mathbf{A}$  em coordenadas esféricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (3.41)$$

Observe as seguintes propriedades da divergência de um campo vetorial:

1. resulta em um campo escalar (porque envolve um produto escalar);
2. a divergência de um escalar  $V$ ,  $\operatorname{div} V$ , não faz sentido;
3.  $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
4.  $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$

A partir da definição da divergência de  $\mathbf{A}$  na equação (3.32), não é difícil compreender que

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv \quad (3.42)$$

Esse é o chamado *teorema da divergência*, também conhecido como *teorema de Gauss-Ostrogradsky*.

**O teorema da divergência** estabelece que o fluxo total de um campo vetorial  $\mathbf{A}$  que sai de uma superfície fechada  $S$  é igual a integral de volume da divergência de  $\mathbf{A}$ .

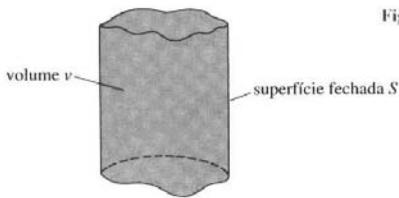
Para demonstrar o teorema da divergência, subdividimos o volume  $v$  em um grande número de pequenas células. Se a  $k$ -ésima tem volume  $\Delta v_k$  e limitada por uma superfície  $S_k$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_k \oint_{S_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_k \frac{\oint_{S_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v_k} \Delta v_k \quad (3.43)$$

Já que o fluxo para fora de uma célula invade as células vizinhas, há cancelamento em cada superfície interna, tal que a soma das integrais de superfície sobre as  $S_k$ 's é igual a integral de superfície sobre  $S$ . Tomando o limite do lado direito da equação (3.43) e incorporando a equação (3.32):

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv \quad (3.44)$$

que é o teorema da divergência. O teorema se aplica em qualquer volume  $v$  limitado pela superfície fechada  $S$ , tal como mostrado na Figura 3.16, desde que se considere  $\mathbf{A}$  e  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  funções contínuas na região.

Figura 3.16 Volume  $v$  limitado pela superfície  $S$ .

Com um pouco de experiência, ficará evidente que o cálculo das integrais de volume é mais fácil do que o das integrais de superfície. Por essa razão, para determinar o fluxo de  $\mathbf{A}$  através de uma superfície fechada, determinamos o lado direito da equação (3.42), em vez de determinarmos o lado esquerdo.

### EXEMPLO 3.6

Determine a divergência dos seguintes campos vetoriais:

- $\mathbf{P} = x^2yz \mathbf{a}_x + xz \mathbf{a}_z$
- $\mathbf{Q} = \rho \operatorname{sen} \phi \mathbf{a}_\rho + \rho^2 z \mathbf{a}_\phi + z \cos \phi \mathbf{a}_z$
- $\mathbf{T} = \frac{1}{r^2} \cos \theta \mathbf{a}_r + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \theta \mathbf{a}_\phi$

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \nabla \cdot \mathbf{P} &= \frac{\partial}{\partial x} P_x + \frac{\partial}{\partial y} P_y + \frac{\partial}{\partial z} P_z \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y} (0) + \frac{\partial}{\partial z} (xz) \\
 &= 2xyz + x \\
 \text{(b)} \quad \nabla \cdot \mathbf{Q} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho Q_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\phi + \frac{\partial}{\partial z} Q_z \\
 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \operatorname{sen} \phi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho^2 z) + \frac{\partial}{\partial z} (z \cos \phi) \\
 &= 2 \operatorname{sen} \phi + \cos \phi \\
 \text{(c)} \quad \nabla \cdot \mathbf{T} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (T_\phi) \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \operatorname{sen}^2 \theta \cos \phi) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \theta) \\
 &= 0 + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} 2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \phi + 0 \\
 &= 2 \cos \theta \cos \phi
 \end{aligned}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 3.6

Determine a divergência dos seguintes campos vetoriais e os calcule nos pontos especificados.

- $\mathbf{A} = yza_x + 4xya_y + ya_z$  em  $(1, -2, 3)$
- $\mathbf{B} = \rho z \operatorname{sen} \phi \mathbf{a}_\rho + 3\rho z^2 \cos \phi \mathbf{a}_\phi$  em  $(5, \pi/2, 1)$
- $\mathbf{C} = 2r \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + r^{1/2} \mathbf{a}_\phi$  em  $(1, \pi/6, \pi/3)$

**Resposta:** (a)  $4x, 4$ ; (b)  $(2 - 3z)z \operatorname{sen} \phi, -1$ ; (c)  $6 \cos \theta \cos \phi, 2,598$ .

**EXEMPLO 3.7**

Se  $\mathbf{G}(r) = 10e^{-2z}(\rho \mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_z)$ , determine o fluxo de  $\mathbf{G}$  para fora de toda superfície de um cilindro  $\rho = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Confira o resultado utilizando o teorema da divergência.

**Solução:**

Se  $\Psi$  é o fluxo de  $\mathbf{G}$  através da superfície, como mostrada na Figura 3.17, então

$$\Psi = \oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \Psi_t + \Psi_b + \Psi_s$$

onde  $\Psi_t$ ,  $\Psi_b$  e  $\Psi_s$  são os fluxos através da tampa superior, da tampa inferior e da superfície lateral do cilindro, como mostrado na Figura 3.17.

Para  $\Psi_t$ ,  $z = 1$ ,  $d\mathbf{S} = \rho \, d\rho \, d\phi \, \mathbf{a}_z$ . Assim,

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{-2z} \rho \, d\rho \, d\phi = 10e^{-2} (2\pi) \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= 10\pi e^{-2} \end{aligned}$$

Para  $\Psi_b$ ,  $z = 0$  e  $d\mathbf{S} = \rho \, d\rho \, d\phi (-\mathbf{a}_z)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \Psi_b &= \int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^0 \rho \, d\rho \, d\phi = -10(2\pi) \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= -10\pi \end{aligned}$$

Para  $\Psi_s$ ,  $\rho = 1$ ,  $d\mathbf{S} = \rho \, dz \, d\phi \, \mathbf{a}_\rho$ . Assim,

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{z=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{-2z} \rho^2 \, dz \, d\phi = 10(1)^2 (2\pi) \frac{e^{-2z}}{-2} \Big|_0^1 \\ &= 10\pi(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

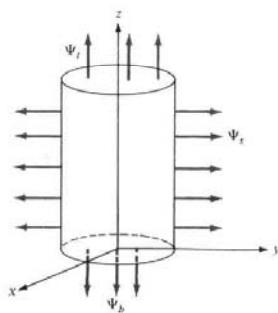
Então,

$$\Psi = \Psi_t + \Psi_b + \Psi_s = 10\pi e^{-2} - 10\pi + 10\pi(1 - e^{-2}) = 0$$

De outra forma, já que  $S$  é uma superfície fechada, podemos aplicar o teorema da divergência:

$$\Psi = \oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{G}) \, dv$$

Figura 3.17 Referente ao Exemplo 3.7.



No entanto,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{G} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho G_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} G_\phi + \frac{\partial}{\partial z} G_z \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 10e^{-2z}) - 20e^{-2z} = 0\end{aligned}$$

demonstrando que  $\mathbf{G}$  não tem fonte. Assim,

$$\Psi = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{G}) dv = 0$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 3.7

Determine o fluxo de  $\mathbf{D} = \rho^2 \cos^2 \phi \mathbf{a}_\rho + z \sin \phi \mathbf{a}_\phi$  sobre a superfície fechada do cilindro  $0 \leq z \leq 1$ ,  $\rho = 4$ . Verifique o teorema da divergência para esse caso.

**Resposta:**  $64\pi$ .

## 3.7 ROTACIONAL DE UM VETOR E TEOREMA DE STOKES

Na Seção 3.3, definimos a circulação de um campo vetorial  $\mathbf{A}$  em torno de um caminho fechado  $L$  como a integral  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ .

O **rotacional** de  $\mathbf{A}$  é um vetor axial (ou girante), cuja magnitude é a máxima circulação de  $\mathbf{A}$  por unidade de área, à medida que a área tende a zero, e cuja orientação é perpendicular à essa área, quando a mesma está orientada de modo a se obter a máxima circulação.<sup>2</sup>

Isto é,

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right)_{\text{máx}} \mathbf{a}_n \quad (3.45)$$

onde a área  $\Delta S$  é limitada pela curva  $L$  e  $\mathbf{a}_n$  é o vetor unitário normal à superfície  $\Delta S$  e é determinado utilizando a regra da mão direita.

Para obter uma expressão para  $\nabla \times \mathbf{A}$ , a partir da definição na equação (3.45), considere a área diferencial no plano  $yz$  como na Figura 3.18. A integral de linha na equação (3.45) é obtida da seguinte forma:

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left( \int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.46)$$

Expandindo as componentes de campo com uma série de Taylor em torno do ponto central  $P(x_0, y_0, z_0)$ , como na equação (3.34), resolve-se a equação (3.46). No lado  $ab$  do contorno da Figura 3.18,  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y$  e  $z = z_0 - dz/2$ , então:

<sup>2</sup> Devido à natureza rotacional, alguns autores utilizam o termo  $\text{rot } \mathbf{A}$  para designar o rotacional de  $\mathbf{A}$ .

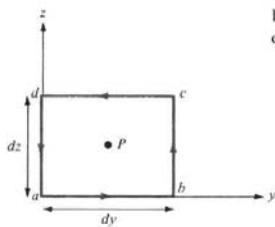


Figura 3.18 Contorno usado para determinar a componente  $x$  de  $\nabla \times \mathbf{A}$  no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$

$$\int_{ab} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dy \left[ A_y(x_0, y_0, z_0) - \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_P \right] \quad (3.47)$$

No lado  $bc$ ,  $d\mathbf{l} = dz \mathbf{a}_z$  e  $y = y_0 + dy/2$ , então

$$\int_{bc} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dz \left[ A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_P \right] \quad (3.48)$$

No lado  $cd$ ,  $d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y$  e  $z = z_0 + dz/2$ , então

$$\int_{cd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dy \left[ A_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_P \right] \quad (3.49)$$

No lado  $da$ ,  $d\mathbf{l} = dz \mathbf{a}_z$  e  $y = y_0 - dy/2$ , então

$$\int_{da} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dz \left[ A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \Big|_P \right] \quad (3.50)$$

Substituindo as equações (3.47) a (3.50) na equação (3.46), e observando que  $\Delta S = dy dz$ , temos que

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \oint_L \frac{\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

ou

$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (3.51)$$

As componentes  $x$  e  $y$  do rotacional de  $\mathbf{A}$  podem ser encontradas da mesma maneira. Obtemos:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (3.52a)$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (3.52b)$$

A definição de  $\nabla \times \mathbf{A}$  na equação (3.45) independe do sistema de coordenadas. No sistema de coordenadas cartesiano, o rotacional  $\mathbf{A}$  é encontrado, com facilidade, fazendo:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (3.53)$$

ou

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathbf{a}_x + \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathbf{a}_y + \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathbf{a}_z} \quad (3.54)$$

Aplicando, na equação (3.54), as técnicas apresentadas no Capítulo 2 para transformação de coordenadas, obtemos o rotacional de  $\mathbf{A}$  em coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

ou

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{a}_\rho + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z} \quad (3.55)$$

e, em coordenadas esféricas,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

ou

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial (A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi} \quad (3.56)$$

Observe as seguintes propriedades do rotacional:

1. o rotacional de um campo vetorial é um outro campo vetorial;
2. o rotacional de um campo escalar  $V$ ,  $\nabla \times V$ , não faz sentido;
3.  $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ ;
4.  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ ;
5.  $\nabla \times (V \mathbf{A}) = V \nabla \times \mathbf{A} + V \mathbf{A} \times \nabla V$ ;
6. a divergência do rotacional de um campo vetorial é zero, isto é,  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ ;
7. o rotacional do gradiente de um campo vetorial é zero, isto é,  $\nabla \times \nabla V = 0$ .

Outras propriedades do rotacional encontram-se no Apêndice A.

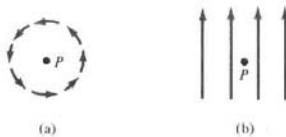


Figura 3.19 Ilustração de um rotacional: (a) rotacional em  $P$  aponta para fora da página; (b) rotacional em  $P$  é zero.

O significado físico do rotacional de um campo vetorial fica evidente na equação (3.45). O rotacional fornece o máximo valor da circulação do campo por unidade de área (ou densidade de circulação) e indica a orientação ao longo da qual seu máximo valor ocorre. O rotacional de um campo vetorial  $\mathbf{A}$ , em um ponto  $P$ , pode ser considerado como uma medida da circulação do campo, ou, em outras palavras, de quanto esse campo gira em torno de  $P$ . Por exemplo, a Figura 3.19(a) mostra que o rotacional de um campo vetorial em torno de  $P$  é orientado para fora da página. A Figura 3.19(b) mostra um campo vetorial com rotacional zero.

Ainda, da definição do rotacional de  $\mathbf{A}$ , na equação (3.45), podemos esperar que

$$\left\{ \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \right\} \quad (3.57)$$

Este é o *teorema de Stokes*.

**O teorema de Stokes** estabelece que a circulação de um campo vetorial  $\mathbf{A}$  em torno de um caminho (fechado)  $L$  é igual à integral de superfície do rotacional de  $\mathbf{A}$  sobre a superfície aberta  $S$ , limitada por  $L$  (veja Figura 3.20), desde que  $\mathbf{A}$  e  $\nabla \times \mathbf{A}$  sejam contínuos sobre  $S$ .

A demonstração do teorema de Stokes é semelhante à do teorema da divergência. A superfície  $S$  é subdividida em um grande número de células, como mostra a Figura 3.21. Se a  $k$ -ésima célula tem uma área superficial  $\Delta S_k$  e é limitada pelo caminho  $L_k$ ,

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \frac{\oint_{L_k} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_k} \Delta S_k \quad (3.58)$$

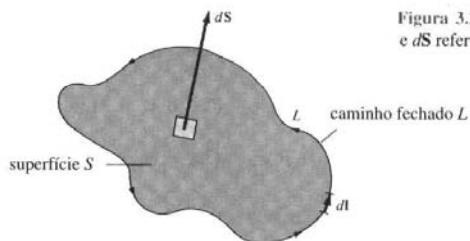


Figura 3.20 Estabelecendo o significado de  $d\mathbf{l}$  e  $d\mathbf{S}$  referidos no teorema de Stokes.

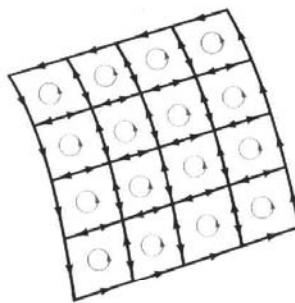


Figura 3.21 Ilustração do teorema de Stokes.

Conforme mostrado na Figura 3.21, há cancelamento em todos os caminhos internos, de tal modo que o somatório das integrais de linha em torno dos  $L_k$  é igual à integral de linha em torno do caminho  $L$ . Portanto, tomando o limite do lado direito da equação (3.58) quando  $\Delta S_k \rightarrow 0$  e incorporando a equação (3.45), obtém-se

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

que é o teorema de Stokes.

A orientação de  $d\mathbf{l}$  e  $d\mathbf{S}$ , na equação (3.57), deve ser escolhida usando-se a regra da mão direita ou do parafuso de rosca direita. Ao usar a regra da mão direita, se posicionarmos os dedos ao longo de  $d\mathbf{l}$ , o polegar indicará a orientação de  $d\mathbf{S}$  (veja Figura 3.20). Observe que, enquanto o teorema da divergência relaciona a integral de superfície com uma integral de volume, o teorema de Stokes relaciona uma integral de linha (circulação) com uma integral de superfície.

### EXEMPLO 3.8

Determine o rotacional de cada um dos campos vetoriais do Exemplo 3.6.

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \nabla \times \mathbf{P} &= \left( \frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left( \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left( \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \\
 &= (0 - 0) \mathbf{a}_x + (x^2 y - z) \mathbf{a}_y + (0 - x^2 z) \mathbf{a}_z \\
 &= (x^2 y - z) \mathbf{a}_y - x^2 z \mathbf{a}_z \\
 \text{(b)} \quad \nabla \times \mathbf{Q} &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_z}{\partial \phi} - \frac{\partial Q_\phi}{\partial z} \right] \mathbf{a}_\rho + \left[ \frac{\partial Q_\rho}{\partial z} - \frac{\partial Q_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho Q_\phi) - \frac{\partial Q_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z \\
 &= \left( \frac{-z}{\rho} \operatorname{sen} \phi - \rho^2 \right) \mathbf{a}_\rho + (0 - 0) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} (3\rho^2 z - \rho \cos \phi) \mathbf{a}_z \\
 &= -\frac{1}{\rho} (z \operatorname{sen} \phi + \rho^3) \mathbf{a}_\rho + (3\rho z - \cos \phi) \mathbf{a}_z \\
 \text{(c)} \quad \nabla \times \mathbf{T} &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (T_\phi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} T_\theta \right] \mathbf{a}_r \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} T_r - \frac{\partial}{\partial r} (r T_\phi) \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r T_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} T_r \right] \mathbf{a}_\phi \\
 &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r \operatorname{sen} \theta \cos \phi) \right] \mathbf{a}_r \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta) \right] \mathbf{a}_\theta \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \phi) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \right] \mathbf{a}_\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{r \sin \theta} (\cos 2\theta + r \sin \theta \sin \phi) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} (0 - \cos \theta) \mathbf{a}_\theta \\
 &\quad + \frac{1}{r} \left( 2r \sin \theta \cos \phi + \frac{\sin \theta}{r^2} \right) \mathbf{a}_\phi \\
 &= \left( \frac{\cos 2\theta}{r \sin \theta} + \sin \phi \right) \mathbf{a}_r - \frac{\cos \theta}{r} \mathbf{a}_\theta + \left( 2 \cos \phi + \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \mathbf{a}_\phi
 \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 3.8**

Determine o rotacional de cada um dos campos vetoriais do Exercício 3.6 e o calcule em cada um dos pontos indicados.

- Resposta:** (a)  $\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (4y - z)\mathbf{a}_z, \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - 11\mathbf{a}_z;$   
 (b)  $-6\rho z \cos \phi \mathbf{a}_\rho + \rho \sin \phi \mathbf{a}_\phi + (6z - 1)z \cos \phi \mathbf{a}_z, 5\mathbf{a}_\phi;$   
 (c)  $\frac{\cot \theta}{r^{1/2}} \mathbf{a}_r - \left( 2 \cot \theta \sin \phi + \frac{3}{2r^{1/2}} \right) \mathbf{a}_\theta + 2 \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_\phi;$   
 $1,732 \mathbf{a}_r - 4,5 \mathbf{a}_\theta + 0,5 \mathbf{a}_\phi.$

**EXEMPLO 3.9**

Se  $\mathbf{A} = \rho \cos \phi \mathbf{a}_\rho + \sin \phi \mathbf{a}_\phi$ , determine  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  ao longo do caminho, como mostrado na Figura 3.22. Confira esse resultado utilizando o teorema de Stokes.

**Solução:**

Seja

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left[ \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

onde o caminho  $L$  foi dividido nos segmentos  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  e  $da$ , como mostrado na Figura 3.22. Ao longo de  $ab$ ,  $\rho = 2$  e  $d\mathbf{l} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$ . Assim,

$$\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\phi=60^\circ}^{30^\circ} \rho \sin \phi d\phi = 2(-\cos \phi) \Big|_{60^\circ}^{30^\circ} = -(\sqrt{3} - 1)$$

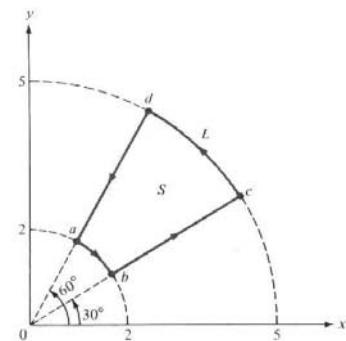


Figura 3.22 Referente ao Exemplo 3.9.

Ao longo de  $bc$ ,  $\phi = 30^\circ$  e  $d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{a}_\rho$ . Assim,

$$\int_b^c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\rho=2}^5 \rho \cos \phi \, d\rho = \cos 30^\circ \frac{\rho^2}{2} \Big|_2^5 = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

Ao longo de  $cd$ ,  $\rho = 5$  e  $d\mathbf{l} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$ . Assim,

$$\int_c^d \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} \rho \sin \phi \, d\phi = 5(-\cos \phi) \Big|_{30^\circ}^{60^\circ} = \frac{5}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Ao longo de  $da$ ,  $\phi = 60^\circ$  e  $d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{a}_\rho$ . Assim,

$$\int_d^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\rho=5}^2 \rho \cos \phi \, d\rho = \cos 60^\circ \frac{\rho^2}{2} \Big|_5^2 = -\frac{21}{4}$$

Agrupando todos esses termos, tem-se

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\sqrt{3} + 1 + \frac{21\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} - \frac{21}{4} \\ = \frac{27}{4}(\sqrt{3} - 1) = 4,941$$

Utilizando o teorema de Stokes (porque  $L$  é um caminho fechado)

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Contudo,  $d\mathbf{S} = \rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \mathbf{a}_\phi \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \mathbf{a}_z \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \\ = (0 - 0)\mathbf{a}_\rho + (0 - 0)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}(1 + \rho) \sin \phi \mathbf{a}_z$$

Assim,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} \int_{\rho=2}^5 \frac{1}{\rho} (1 + \rho) \sin \phi \rho d\rho d\phi \\ = \int_{30^\circ}^{60^\circ} \sin \phi \, d\phi \int_2^5 (1 + \rho) d\rho \\ = -\cos \phi \Big|_{30^\circ}^{60^\circ} \left( \rho + \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_2^5 \\ = \frac{27}{4}(\sqrt{3} - 1) = 4,941$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 3.9

Utilize o teorema de Stokes para conferir seus resultados do Exercício Prático 3.2.

**Resposta:** 1.

**EXEMPLO 3.10**

Para um campo vetorial  $\mathbf{A}$ , demonstre explicitamente que  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ ; isto é, que a divergência do rotacional de qualquer vetor é zero.

**Solução:**

Essa identidade vetorial, bem como a que será mostrada a seguir no Exercício Prático 3.10, é muito útil em EM. Por simplicidade, consideraremos  $\mathbf{A}$  em coordenadas cartesianas.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right), -\left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

porque  $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$ , e assim por diante.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 3.10**

Para um campo escalar  $V$ , demonstre que  $\nabla \times \nabla V = 0$ ; isto é, que o rotacional do gradiente de qualquer campo escalar se anula.

**Resposta:** a demonstração.

**3.8 LAPLACIANO DE UM ESCALAR**

Por razões de ordem prática, é oportuno introduzir o conceito de um operador que é a composição dos operadores de gradiente e de divergência. Esse operador é conhecido como o *laplaciano*.

O **laplaciano** de um campo escalar  $V$ , escrito como  $\nabla^2 V$ , é o divergente do gradiente de  $V$ .

Portanto, em coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned}\text{Laplaciano } V &= \nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right] \cdot \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right] \quad (3.59)\end{aligned}$$

isto é,

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} \quad (3.60)$$

Observe que o laplaciano de um campo escalar é um outro campo escalar.

O laplaciano de  $V$  em outros sistemas de coordenadas pode ser obtido a partir da equação (3.60), fazendo a transformação de coordenadas. Em coordenadas cilíndricas,

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} \quad (3.61)$$

e em coordenadas esféricas,

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}} \quad (3.62)$$

Um campo escalar  $V$  é dito *harmônico* em uma dada região quando o seu laplaciano se anula nessa região. Em outras palavras, se a igualdade

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.63)$$

for satisfeita nessa região, a solução para  $V$  na equação (3.63) é harmônica (isto é, na forma de seno ou cosseno). A equação (3.63) é denominada *equação de Laplace*. Resolver essa equação será nosso principal objetivo no Capítulo 6.

Consideramos, até aqui, apenas o laplaciano de um escalar. Já que o operador laplaciano  $\nabla^2$  é um operador escalar, é possível definir também o laplaciano de um vetor  $\mathbf{A}$ . Nesse contexto,  $\nabla^2 \mathbf{A}$  não deve ser interpretado como o divergente do gradiente de  $\mathbf{A}$ , o que não faz sentido. Na verdade,  $\nabla^2 \mathbf{A}$  deve ser entendido como o gradiente do divergente de  $\mathbf{A}$  subtraído do rotacional do rotacional de  $\mathbf{A}$ . Isto é,

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})} \quad (3.64)$$

Essa equação pode ser empregada para determinar o  $\nabla^2 \mathbf{A}$  em qualquer sistema de coordenadas. No sistema cartesiano (e unicamente nesse sistema), a equação (3.64) torna-se

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \quad (3.65)$$

### EXEMPLO 3.11

Encontre o laplaciano dos campos escalares do Exemplo 3.3, isto é:

- (a)  $V = e^{-z} \sin 2x \cosh y$
- (b)  $U = \rho^2 z \cos 2\phi$
- (c)  $W = 10r \sin^2 \theta \cos \phi$

#### Solução:

O laplaciano, no sistema de coordenadas cartesianas, pode ser determinado tomando a primeira derivada da função e, em seguida, a segunda derivada.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (2e^{-z} \cos 2x \cosh y) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{-z} \cos 2x \sinh y) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} (-e^{-z} \sin 2x \cosh y) \\
 &= -4e^{-z} \sin 2x \cosh y + e^{-z} \sin 2x \cosh y + e^{-z} \sin 2x \cosh y \\
 &= -2e^{-z} \sin 2x \cosh y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\
 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (2\rho^2 z \cos 2\phi) - \frac{1}{\rho^2} 4\rho^2 z \cos 2\phi + 0 \\
 &= 4z \cos 2\phi - 4z \cos 2\phi \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & \nabla^2 W = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (10r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \phi) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (10r \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \phi) \\
 &\quad - \frac{10r \operatorname{sen}^2 \theta \cos \phi}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\
 &= \frac{20 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \phi}{r} + \frac{20r \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \phi}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \\
 &\quad + \frac{10r \operatorname{sen} 2\theta \cos \theta \cos \phi}{r^2 \operatorname{sen} \theta} - \frac{10 \cos \phi}{r} \\
 &= \frac{10 \cos \phi}{r} (2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \cos 2\theta + 2 \cos^2 \theta - 1) \\
 &= \frac{10 \cos \phi}{r} (1 + 2 \cos 2\theta)
 \end{aligned}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 3.11

Determine o laplaciano dos campos escalares do Exercício Prático 3.3, isto é,

- (a)  $U = x^2y + xyz$
- (b)  $V = \rho z \operatorname{sen} \phi + z^2 \cos^2 \phi + \rho^2$
- (c)  $f = \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi \ln r + r^2 \phi$

**Resposta:** (a)  $2y$ , (b)  $4 + 2 \cos^2 \phi - \frac{2z^2}{\rho^2} \cos 2\phi$ , (c)  $\frac{1}{r^2} \cos \theta \operatorname{sen} \phi (1 - 2 \ln r \operatorname{cossec}^2 \theta \ln r) + 6\phi$ .

## 3.9 CLASSIFICAÇÃO DE CAMPOS VETORIAIS

Um campo vetorial é univocamente caracterizado pelo seu divergente e seu rotacional. Nem só o divergente, nem o rotacional, individualmente, são suficientes para descrever completamente o campo. Todos os campos vetoriais podem ser classificados em termos da anulação ou não-anulação de seu divergente ou de seu rotacional, como segue:

- (a)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$
- (b)  $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$
- (c)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$
- (d)  $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$

A Figura 3.23 ilustra campos típicos dessas quatro categorias.

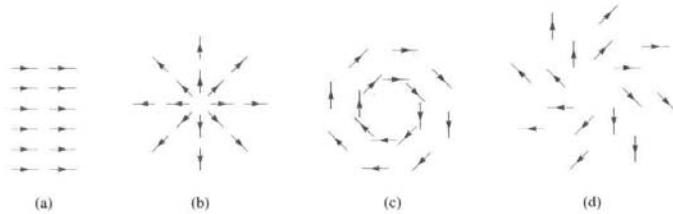


Figura 3.23 Campos típicos com divergente e rotacional nulos ou não nulos.

- (a)  $\mathbf{A} = k\mathbf{a}_x$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ;
- (b)  $\mathbf{A} = kr$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3k$ ,  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ;
- (c)  $\mathbf{A} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{A} = 2\mathbf{k}$ ;
- (d)  $\mathbf{A} = \mathbf{k} \times \mathbf{r} + cr$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3c$ ,  $\nabla \times \mathbf{A} = 2\mathbf{k}$ .

Um campo vetorial  $\mathbf{A}$  é dito **solenoidal** (ou **não-divergente**) se  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .

Esse campo não é nem fonte nem sumidouro de fluxo. Do teorema da divergência:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = 0 \quad (3.66)$$

Assim, as linhas de fluxo de  $\mathbf{A}$ , que entram em qualquer superfície fechada, devem sair dela. Exemplos de campos solenoidais são: fluidos incompressíveis, campos magnéticos e densidade de corrente de condução sob condições estacionárias. Em geral, o campo do rotacional de  $\mathbf{F}$  (para qualquer  $\mathbf{F}$ ) é puramente solenoidal porque  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ , como demonstrado no Exemplo 3.10. Portanto, um campo solenoidal  $\mathbf{A}$  pode ser sempre expresso em termos de um outro vetor  $\mathbf{F}$ , isto é,

se	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$ e $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$	então
----	---	-------

(3.67)

Um campo vetorial  $\mathbf{A}$  é dito **irrotacional** (ou **potencial**) se  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ .

Isto é, um vetor *sem rotacional* é irrotacional.<sup>3</sup> A partir do teorema de Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.68)$$

Portanto, em um campo irrotacional  $\mathbf{A}$ , a circulação de  $\mathbf{A}$  em torno de um caminho fechado é identicamente zero. Isso implica que a integral de linha de  $\mathbf{A}$  independe do caminho escolhido. Portanto, um campo irrotacional é também conhecido como um *campo conservativo*. Exemplos de campos irrotacionais incluem o campo eletrostático e o campo gravitacional. Em geral, o campo do gradiente de  $V$  (para qualquer escalar  $V$ ) é puramente irrotacional já que (veja, Exercício 3.10):

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad (3.69)$$

<sup>3</sup> De fato, o rotacional é algumas vezes conhecido como rotação e o rotacional de  $A$  é escrito como  $\text{rot } A$  em alguns livros-texto. Essa é uma das razões para usarmos o termo *irrotacional*.

Dessa forma, um campo irrotacional  $\mathbf{A}$  pode ser sempre expresso em termos de um campo escalar  $V$ , isto é,

se	$\nabla \times \mathbf{A} = 0$	(3.70)
então	$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = -\nabla V$	

Por essa razão,  $\mathbf{A}$  pode ser chamado de campo *potencial* e  $V$  de potencial escalar de  $\mathbf{A}$ . O sinal negativo na equação (3.70) foi inserido por razões da Física que ficarão claras no Capítulo 4.

Um vetor  $\mathbf{A}$  é univocamente descrito dentro de uma região por seu divergente e seu rotacional. Se

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho_v \quad (3.71a)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}_s \quad (3.71b)$$

$\rho_v$  pode ser considerado como a densidade de fonte de  $\mathbf{A}$  e  $\boldsymbol{\rho}_s$  a densidade de circulação de  $\mathbf{A}$ . Qualquer vetor  $\mathbf{A}$  que satisfaça a equação (3.71) tanto com  $\rho_v$  quanto com  $\boldsymbol{\rho}_s$  se anulando no infinito pode ser expresso como a soma de dois vetores: um irrotacional (rotacional zero) e outro solenoidal (divergência zero). Esse é o denominado *teorema de Helmholtz*. Portanto, podemos escrever:

$$\mathbf{A} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.72)$$

Se fizermos  $\mathbf{A}_r = -\nabla V$  e  $\mathbf{A}_s = \nabla \times \mathbf{B}$ , é evidente do Exemplo 3.10 e do Exercício 3.10 que  $\nabla \times \mathbf{A}_r = 0$  e  $\nabla \times \mathbf{A}_s = 0$ , demonstrando que  $\mathbf{A}_r$  é irrotacional e  $\mathbf{A}_s$  é solenoidal. Finalmente, fica claro, das equações (3.64) e (3.71), que qualquer campo vetorial tem um laplaciano que satisfaz

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \rho_v - \nabla \times \boldsymbol{\rho}_s \quad (3.73)$$

### EXEMPLO 3.12

Demonstre que o campo vetorial  $\mathbf{A}$  é conservativo se  $\mathbf{A}$  possuir uma das seguintes propriedades:

- (a) a integral de linha da componente tangencial de  $\mathbf{A}$  ao longo do caminho que se estende do ponto  $P$  até o ponto  $Q$  é independente do caminho;
- (b) a integral de linha da componente tangencial de  $\mathbf{A}$  em torno de qualquer caminho fechado é zero.

#### Solução:

- (a) Se  $\mathbf{A}$  é conservativo,  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ . Então existe um potencial  $V$  tal que:

$$\mathbf{A} = -\nabla V = -\left[ \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right]$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_P^Q \left[ \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right] \\ &= - \int_P^Q \left[ \frac{\partial V}{\partial x} ds + \frac{\partial V}{\partial y} ds + \frac{\partial V}{\partial z} ds \right] ds \\ &= - \int_P^Q \frac{dV}{ds} ds = - \int_P^Q dV \end{aligned}$$

ou

$$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = V(P) - V(Q)$$

demonstrando que a integral de linha depende somente dos pontos inicial e final da curva. Portanto, para um campo conservativo,  $\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  é simplesmente a diferença de potencial entre os pontos extremos do caminho.

(b) Se o caminho é fechado, isto é, se  $P$  e  $Q$  coincidem, então:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = V(P) - V(P) = 0$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 3.12

Demonstre que  $\mathbf{B} = (y + z \cos xz)\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + x \cos xz \mathbf{a}_z$  é conservativo, sem calcular nenhuma integral.

**Resposta:** a demonstração.

### RESUMO

1. Os deslocamentos diferenciais nos sistemas cartesiano, cilíndrico e esférico são, respectivamente:

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \\ d\mathbf{l} &= d\rho \mathbf{a}_\rho + \rho d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \\ d\mathbf{l} &= dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

Observe que  $d\mathbf{l}$  é sempre considerado com orientação positiva, e a orientação do deslocamento é indicada nos limites de integração.

2. As áreas diferenciais normais nos três sistemas de coordenadas são, respectivamente:

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= dy dz \mathbf{a}_x \\ &\quad dx dz \mathbf{a}_y \\ &\quad dx dy \mathbf{a}_z \\ d\mathbf{S} &= \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho \\ &\quad d\rho dz \mathbf{a}_\phi \\ &\quad \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z \\ d\mathbf{S} &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r \\ &\quad r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta \\ &\quad r dr d\theta \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

Observe que  $d\mathbf{S}$  pode estar com orientação negativa ou positiva, dependendo da superfície considerada.

3. Os volumes diferenciais nos três sistemas são:

$$\begin{aligned} dv &= dx dy dz \\ dv &= \rho d\rho d\phi dz \\ dv &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

4. A integral de linha do vetor  $\mathbf{A}$  ao longo do caminho  $L$  é dada por  $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ . Se o caminho é fechado, a integral de linha torna-se a circulação de  $\mathbf{A}$  em torno de  $L$ , isto é,  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ .
5. O fluxo ou integral de superfície de um vetor  $\mathbf{A}$  através da superfície  $S$  é definido como  $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ . Quando a superfície  $S$  é fechada, a integral de superfície torna-se o fluxo líquido de  $\mathbf{A}$  através de  $S$ , apontando para fora, isto é,  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ .
6. A integral de volume de um escalar  $\rho_v$  sobre um volume  $v$  é definida como  $\int_v \rho_v dv$ .
7. A diferenciação vetorial é obtida utilizando o operador diferencial com caráter vetorial  $\nabla$ . O gradiente de um campo escalar  $V$  é denotado por  $\nabla V$ , a divergência de um campo vetorial  $\mathbf{A}$  por  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ , o rotacional de  $\mathbf{A}$  por  $\nabla \times \mathbf{A}$  e o laplaciano de  $V$  por  $\nabla^2 V$ .
8. O teorema da divergência,  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv$ , relaciona uma integral de linha sobre um caminho fechado à uma integral de superfície.
9. O teorema de Stokes,  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ , relaciona uma integral de linha sobre um caminho fechado à uma integral de superfície.
10. Se a equação de Laplace,  $\nabla^2 V = 0$ , é satisfeita por um campo escalar  $V$  em uma dada região,  $V$  é dito harmônico naquela região.
11. Um campo vetorial é solenoide se  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ; é irrotacional ou conservativo se  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ .
12. Um resumo das operações de cálculo vetorial nos três sistemas de coordenadas é fornecido nas guardas finais deste livro.
13. As identidades vetoriais  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$  e  $\nabla \times \nabla V = 0$  são muito úteis em EM. Outras identidades vetoriais estão no Apêndice A.10.

## QUESTÕES DE REVISÃO

**3.1** Considere o volume diferencial da Figura 3.24 e relate os itens da coluna da esquerda com os da coluna da direita.

- |                                  |                            |
|----------------------------------|----------------------------|
| (a) $d\mathbf{l}$ de $A$ até $B$ | (i) $dy dz \mathbf{a}_x$   |
| (b) $d\mathbf{l}$ de $A$ até $D$ | (ii) $-dx dz \mathbf{a}_y$ |
| (c) $d\mathbf{l}$ de $A$ até $E$ | (iii) $dx dy \mathbf{a}_z$ |
| (d) $d\mathbf{S}$ da face $ABCD$ | (iv) $-dx dy \mathbf{a}_z$ |
| (e) $d\mathbf{S}$ da face $AEHD$ | (v) $dx \mathbf{a}_x$      |
| (f) $d\mathbf{S}$ da face $DCGH$ | (vi) $dy \mathbf{a}_y$     |
| (g) $d\mathbf{S}$ da face $ABFE$ | (vii) $dz \mathbf{a}_z$    |

**3.2** Para o volume diferencial na Figura 3.25, relate os itens da lista da esquerda com os da lista da direita.

- |                                  |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $d\mathbf{l}$ de $E$ até $A$ | (i) $-\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$ |
| (b) $d\mathbf{l}$ de $B$ até $A$ | (ii) $-dp dz \mathbf{a}_\phi$        |
| (c) $d\mathbf{l}$ de $D$ até $A$ | (iii) $-\rho dp d\phi \mathbf{a}_z$  |
| (d) $d\mathbf{S}$ da face $ABCD$ | (iv) $\rho dp d\phi \mathbf{a}_z$    |
| (e) $d\mathbf{S}$ da face $AEHD$ | (v) $dp \mathbf{a}_\rho$             |
| (f) $d\mathbf{S}$ da face $ABFE$ | (vi) $\rho d\phi \mathbf{a}_\phi$    |
| (g) $d\mathbf{S}$ da face $DCGH$ | (vii) $dz \mathbf{a}_z$              |

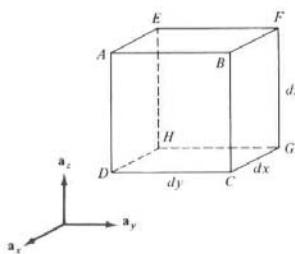


Figura 3.24 Referente a Questão de Revisão 3.1.

**3.3** Um volume diferencial em coordenadas esféricas é mostrado na Figura 3.26. Para o elemento de volume, relacione os itens da coluna da esquerda com os da coluna da direita.

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| (a) $dI$ de $A$ até $D$ | (i) $-r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$ |
| (b) $dI$ de $E$ até $A$ | (ii) $-r \sin \theta dr d\phi \mathbf{a}_\theta$  |
| (c) $dI$ de $A$ até $B$ | (iii) $r dr d\theta \mathbf{a}_\phi$              |
| (d) $dS$ da face $EFGH$ | (iv) $dr \mathbf{a}_r$                            |
| (e) $dS$ da face $AEHD$ | (v) $r d\theta \mathbf{a}_\theta$                 |
| (f) $dS$ da face $ABFE$ | (vi) $r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$        |

**3.4** Se  $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ , é o vetor posição do ponto  $(x, y, z)$  e  $r = |\mathbf{r}|$ , qual das seguintes igualdades é incorreta?

- (a)  $\nabla r = \mathbf{r}/r$
- (b)  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 1$
- (c)  $\nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 6$
- (d)  $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

**3.5** Qual das seguintes operações não faz sentido?

- (a) grad div
- (b) div rot
- (c) grad rot
- (d) rot grad
- (e) div rot

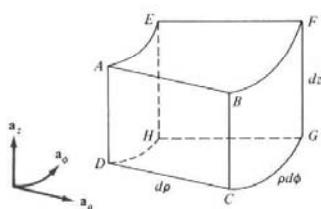


Figura 3.25 Referente a Questão de Revisão 3.2.

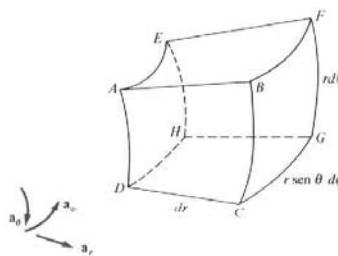


Figura 3.26 Referente a Questão de Revisão 3.3  
(e também referente ao Exercício Prático 3.1).

**3.6** Qual das seguintes operações resulta em zero?

- (a) grad div
- (b) div grad
- (c) rot grad
- (d) rot rot

**3.7** Dado um campo  $\mathbf{A} = 3x^2yz\mathbf{a}_r + x^3z\mathbf{a}_\theta + (x^3y - 2z)\mathbf{a}_\phi$ , pode-se afirmar que  $\mathbf{A}$  é:

- (a) Harmônico
- (b) Não-divergente
- (c) Solenoideal
- (d) Rotacional
- (e) Conservativo

**3.8** A densidade de corrente superficial  $\mathbf{J}$ , em um guia de onda retangular, está representada na Figura 3.27. Observa-se na figura que  $\mathbf{J}$  diverge na parede superior do guia, enquanto não diverge na parede lateral do guia.

- (a) Verdadeiro.
- (b) Falso.

**3.9** O teorema de Stokes é aplicável somente quando existe um caminho fechado e o campo vetorial e suas derivadas são contínuas ao longo desse caminho.

- (a) Verdadeiro.
- (b) Falso.
- (c) Não necessariamente verdadeiro ou falso.

**3.10** Se um campo vetorial  $\mathbf{Q}$  é solenoideal, qual das igualdades é verdadeira?

- (a)  $\oint_L \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{l} = 0$
- (b)  $\oint_S \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} = 0$
- (c)  $\nabla \times \mathbf{Q} = 0$
- (d)  $\nabla \times \mathbf{Q} \neq 0$
- (e)  $\nabla^2 \mathbf{Q} = 0$

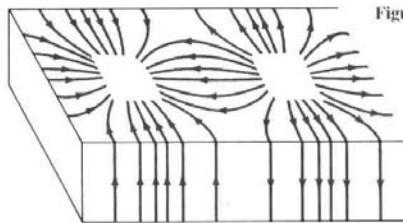


Figura 3.27 Referente a Questão de Revisão 3.8.

*Respostas:* 3.1a-(vi), b-(vii), c-(v), d-(i), e-(ii), f-(iv), g-(iii); 3.2a-(vi), b-(v), c-(vii), d-(ii), e-(i), f-(iv), g-(iii); 3.3a-(v), b-(vi), c-(iv), d-(iii), e-(i), f-(ii); 3.4b; 3.5c; 3.6c; 3.7e; 3.8a; 3.9a; 3.10b.

### PROBLEMAS

**3.1** Utilizando o comprimento diferencial  $dL$ , determine o comprimento de cada uma das seguintes curvas:

- (a)  $\rho = 3, \pi/4 < \phi < \pi/2, z = \text{constante}$
- (b)  $r = 1, \theta = 30^\circ, 0 < \phi < 60^\circ$
- (c)  $r = 4, 30^\circ < \theta < 90^\circ, \phi = \text{constante}$

**3.2** Calcule as áreas das seguintes superfícies, utilizando a área da superfície diferencial  $dS$ :

- (a)  $\rho = 2, 0 < z < 5, \pi/3 < \phi < \pi/2$
- (b)  $z = 1, 1 < \rho < 3, 0 < \phi < \pi/4$
- (c)  $r = 10, \pi/4 < \theta < 2\pi/3, 0 < \phi < 2\pi$
- (d)  $0 < r < 4, 60^\circ < \theta < 90^\circ, \phi = \text{constante}$

**3.3** Utilize o volume diferencial  $dv$  para determinar os volumes das seguintes regiões:

- (a)  $0 < x < 1, 1 < y < 2, -3 < z < 3$
- (b)  $2 < \rho < 5, \pi/3 < \phi < \pi, -1 < z < 4$
- (c)  $1 < r < 3, \pi/2 < \theta < 2\pi/3, \pi/6 < \phi < \pi/2$

**3.4** Dado que  $\rho_s = x^2 + xy$ , calcule  $\int_S \rho_s dS$  sobre a região  $y \leq x^2, 0 < x < 1$ .

**3.5** Dado que  $\mathbf{H} = x^2 \mathbf{a}_x + y^2 \mathbf{a}_y$ , calcule  $\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ , considere  $L$  ao longo da curva  $y = x^2$ , de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

**3.6** Encontre o volume de um cone, seccionado de uma esfera de raio  $r = a$ , limitado por  $\theta = \alpha$ . Calcule o volume quando  $\alpha = \pi/3$  e  $\alpha = \pi/2$ .

**3.7** Se a integral  $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  for considerada como o trabalho realizado para deslocar uma partícula de  $A$  até  $B$ , encontre o trabalho realizado pelo campo de força:

$$\mathbf{F} = 2xy \mathbf{a}_x + (x^2 - z^2) \mathbf{a}_y - 3xz^2 \mathbf{a}_z$$

sobre uma partícula que se desloca de  $A(0, 0, 0)$  até  $B(2, 1, 3)$  ao longo:

- (a) do segmento  $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0) \rightarrow (2, 1, 0) \rightarrow (2, 1, 3)$
- (b) da linha reta entre  $(0, 0, 0)$  até  $(2, 1, 3)$

**3.8** Se

$$\mathbf{H} = (x - y) \mathbf{a}_x + (x^2 + zy) \mathbf{a}_y - 5yz \mathbf{a}_z$$

calcule  $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  ao longo do contorno da Figura 3.28.

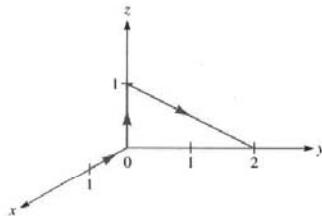


Figura 3.28 Referente ao Problema 3.8.

**3.9** Se  $V = (x+y)z$ , calcule  $\oint_S V dS$ , onde  $S$  é a superfície de uma fatia cilíndrica definida por  $0 < \phi < \pi/2$ ,  $0 < z < 2$  e  $dS$  é normal à essa superfície.

**3.10** Seja  $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y - y\mathbf{a}_z$ . Calcule  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  sobre:

- (a) uma região retangular dada por  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ ;
- (b) uma região cilíndrica dada por  $\rho \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 5$ ;
- (c) uma região esférica dada por  $r \leq 4$ .

**3.11** A aceleração de uma partícula é dada por  $\mathbf{a} = 2.4\mathbf{a}_z$  m/s<sup>2</sup>. A posição inicial da partícula é  $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ , enquanto sua velocidade inicial é  $\mathbf{v} = -2\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z$  m/s. (a) Determine a posição da partícula no tempo  $t = 1$ . (b) Determine a velocidade da partícula como uma função do tempo  $t$ .

**3.12** Encontre o gradiente dos seguintes campos escalares:

- (a)  $U = 4xz^2 + 3yz$
- (b)  $W = 2\rho(z^2 + 1)\cos\phi$
- (c)  $H = r^2 \cos\phi \cos\theta$

**3.13** Determine o gradiente dos seguintes campos e calcule seu valor nos pontos especificados:

- (a)  $V = e^{(2x+3y)} \cos 5z$ ,  $(0, 1, -0.2, 0.4)$
- (b)  $T = 5\rho e^{-2z} \sin\phi$ ,  $(2, \pi/3, 0)$
- (c)  $Q = \frac{\sin\theta \sin\phi}{r^2}$ ,  $(1, \pi/6, \pi/2)$

**3.14** Determine o vetor unitário normal à  $S(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$  no ponto  $(1, 3, 0)$ .

**3.15** A temperatura em um auditório é dada por  $T = x^2 + y^2 - z$ . Um mosquito localizado em  $(1, 1, 2)$ , dentro do auditório, deseja voar em uma orientação tal que ele se aqueça o mais rápido possível. Em qual orientação ele deve voar?

**3.16** Encontre a divergência e o rotacional dos seguintes vetores:

- (a)  $\mathbf{A} = e^{xy}\mathbf{a}_x + \sin xy\mathbf{a}_y + \cos^2 xz\mathbf{a}_z$
- (b)  $\mathbf{B} = \rho z^2 \cos\phi \mathbf{a}_\rho + z \sin^2\phi \mathbf{a}_z$
- (c)  $\mathbf{C} = r \cos\theta \mathbf{a}_r - \frac{1}{r} \sin\theta \mathbf{a}_\theta + 2r^2 \sin\theta \mathbf{a}_\phi$

**3.17** Calcule  $\nabla \times \mathbf{A}$  e  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$  se:

- (a)  $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x + y^2z\mathbf{a}_y - 2xz\mathbf{a}_z$
- (b)  $\mathbf{A} = \rho^2 z\mathbf{a}_\rho + \rho^3 \mathbf{a}_\phi + 3\rho z^2 \mathbf{a}_z$
- (c)  $\mathbf{A} = \frac{\sin\phi}{r^2} \mathbf{a}_r - \frac{\cos\phi}{r^2} \mathbf{a}_\theta$

- 3.18** Considere o vetor fluxo de calor  $\mathbf{H} = k\nabla T$ , onde  $T$  é a temperatura e  $k$  é a condutividade térmica. Mostre que, onde

$$T = 50 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cosh \frac{\pi y}{2}$$

então  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ .

- 3.19** (a) Demonstre que

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$$

onde  $V$  é um campo escalar e  $\mathbf{A}$  é um campo vetorial.

- (b) Calcule  $\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{A})$  quando  $\mathbf{A} = 2x\mathbf{a}_y + 3y\mathbf{a}_z - 4z\mathbf{a}_x$  e  $V = xyz$ .

- 3.20** (a) Verifique a identidade

$$\nabla \times (\mathbf{V}\mathbf{A}) = V(\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla V \times \mathbf{A}$$

onde  $V$  e  $\mathbf{A}$  são, respectivamente, campo escalar e campo vetorial.

- (b) Calcule  $\nabla \times (\mathbf{V}\mathbf{A})$  quando  $V = \frac{1}{r^2}$  e  $\mathbf{A} = r \cos \theta \mathbf{a}_r + r \operatorname{sen} \theta \mathbf{a}_\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \phi \mathbf{a}_\phi$ .

- 3.21** Se  $U = xz - x^2y + y^2z^2$ , calcule  $\operatorname{div} \operatorname{grad} U$ .

- 3.22** Demonstre que  $\nabla \ln \rho = \nabla \times \phi \mathbf{a}_z$ .

- 3.23** Prove que  $\nabla \phi = \nabla \times \left( \frac{r \nabla \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right)$ .

- 3.24** Calcule  $\nabla V$ ,  $\nabla \cdot \nabla V$  e  $\nabla \times \nabla V$  se:

- (a)  $V = 3x^2y + xz$
- (b)  $V = \rho z \cos \phi$
- (c)  $V = 4r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \phi$

- 3.25** Se  $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{T} = 2zy\mathbf{a}_x + xy^2\mathbf{a}_y + x^2yz\mathbf{a}_z$ , determine:

- (a)  $(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{T}$
- (b)  $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{T}$
- (c)  $\nabla \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{T})$
- (d)  $(\mathbf{r} \cdot \nabla)r^2$

- 3.26** Se  $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$  é o vetor posição do ponto  $(x, y, z)$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  e  $n$  é um inteiro, mostre que

- (a)  $\nabla \cdot r^n \mathbf{r} = (n+3)r^{n-1}$
- (b)  $\nabla \times r^n \mathbf{r} = 0$

- 3.27** Considerando  $\mathbf{r}$  e  $r$  do problema anterior, prove que:

- (a)  $\nabla(\ln r) = \frac{\mathbf{r}}{r}$
- (b)  $\nabla^2(\ln r) = \frac{1}{r^2}$

- 3.28** Para cada um dos seguintes campos escalares, determine  $\nabla^2 V$ :

- (a)  $V_1 = x^3 + y^3 + z^3$
- (b)  $V_2 = \rho z^2 \operatorname{sen} 2\phi$
- (c)  $V_3 = r^2(1 + \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi)$

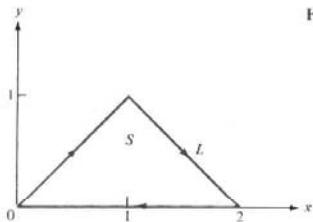


Figura 3.29 Referente ao Problema 3.31.

**3.29** Encontre o laplaciano dos seguintes campos escalares e calcule seu valor nos pontos indicados:

- (a)  $U = x^3y^2e^{xz}, (1, -1, 1)$
- (b)  $V = \rho^2z(\cos \phi + \sin \phi), (5, \pi/6, -2)$
- (c)  $W = e^{-r} \sin \theta \cos \phi, (1, \pi/3, \pi/6)$

**3.30** Se  $V = x^2y^2z^2$  e  $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x + xz^2\mathbf{a}_y - y^2z^2\mathbf{a}_z$ , encontre (a)  $\nabla^2V$ ; (b)  $\nabla^2\mathbf{A}$ ; (c)  $\text{grad div } \mathbf{A}$ ; (d)  $\text{rot rot } \mathbf{A}$ .

\* **3.31** Dado  $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y$ , encontre:

- (a)  $\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  onde  $L$  é da Figura 3.29.
- (b)  $\int_S (\nabla \times \nabla) \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $S$  é a área limitada por  $L$ .
- (c) O teorema de Stokes é satisfeito para esse caso?

**3.32** Seja  $\mathbf{D} = 2\rho z^2\mathbf{a}_\rho + \rho \cos^2 \phi \mathbf{a}_z$ . Calcule:

- (a)  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$
- (b)  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv$

na região definida por  $0 \leq \rho \leq 5, -1 \leq z \leq 1, 0 < \phi < 2\pi$ .

**3.33** Se  $\mathbf{F} = x^2\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y + (z^2 - 1)\mathbf{a}_z$  encontre  $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $S$  é definido por  $\rho = 2, 0 < z < 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

**3.34** (a) Dado que  $\mathbf{A} = xy\mathbf{a}_x + yz\mathbf{a}_y + xz\mathbf{a}_z$ , calcule  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $S$  é a superfície de um cubo, definido por  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ .

(b) Resolva novamente a parte (a) considerando que  $S$  permaneça o mesmo e  $\mathbf{A} = yz\mathbf{a}_x + xz\mathbf{a}_y + xy\mathbf{a}_z$ .

**3.35** Verifique o teorema da divergência

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv$$

para cada um dos seguintes casos:

- (a)  $\mathbf{A} = xy^2\mathbf{a}_x + y^3\mathbf{a}_y + y^2z\mathbf{a}_z$  e  $S$  é a superfície de um cuboide, definido por  $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$ ;
- (b)  $\mathbf{A} = 2\rho z\mathbf{a}_\rho + 3z \sin \phi \mathbf{a}_\phi - 4\rho \cos \phi \mathbf{a}_z$  e  $S$  é a superfície da fatia, definida por  $0 < \rho < 2, 0 < \phi < 45^\circ, 0 < z < 5$ ;
- (c)  $\mathbf{A} = r^2\mathbf{a}_r + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta$  e  $S$  é a superfície de um quarto de uma esfera, definida por  $0 < r < 3, 0 < \phi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2$ .

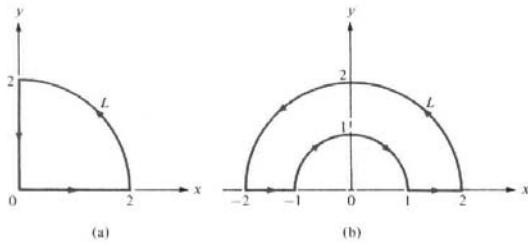


Figura 3.30 Referente ao Problema 3.37.

**3.36** O momento da inércia em torno do eixo  $z$  de um corpo rígido é proporcional a

$$\int_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Expresse esse momento como o fluxo de algum campo vetorial  $\mathbf{A}$  através da superfície do corpo.

\***3.37** Seja  $\mathbf{A} = \rho \sin \phi \mathbf{a}_\rho + \rho^2 \mathbf{a}_\phi$ . Calcule  $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  dado que

- (a)  $L$  é o contorno da Figura 3.30(a).
- (b)  $L$  é o contorno da Figura 3.30(b).

**3.38** Calcule o fluxo total do vetor

$$\mathbf{F} = \rho^2 \sin \phi \mathbf{a}_\rho + z \cos \phi \mathbf{a}_\phi + \rho z \mathbf{a}_z$$

que sai através de um cilindro ôco, definido por  $2 \leq \rho \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 5$ .

**3.39** Encontre o fluxo do rotacional do campo

$$\mathbf{T} = \frac{1}{r^2} \cos \theta \mathbf{a}_r + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \theta \mathbf{a}_\phi$$

através do hemisfério  $r = 4$  e  $z \leq 0$ .

\*\***3.40** Um campo vetorial é dado por

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} [(x - y)\mathbf{a}_x + (x + y)\mathbf{a}_y]$$

Calcule as seguintes integrais:

- (a)  $\oint_L \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{l}$  onde  $L$  é a borda circular do volume na forma de uma casquinha de sorvete, mostrado na Figura 3.31.
- (b)  $\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $S_1$  é a superfície no topo desse volume.
- (c)  $\int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S}$ , onde  $S_2$  é a superfície da lateral cônica desse volume.
- (d)  $\int_{S_1} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S}$ .
- (e)  $\int_{S_2} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S}$ .
- (f)  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{Q} dv$ .

Como os resultados nos itens (a) até (f) podem ser comparados entre si?

\*\* Asteriscos duplos indicam problemas mais difíceis.

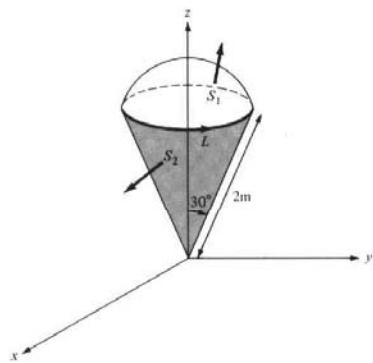


Figura 3.31 Volume na forma de uma casquinha de sorvete, referente ao Problema 3.40.

\*3.41 Um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo que atravessa o seu centro com uma velocidade angular  $\omega$ . Se  $\mathbf{u}$  é a velocidade em qualquer ponto no corpo, mostre que  $\omega = 1/2 \nabla \times \mathbf{u}$ .

3.42 Sejam  $U$  e  $V$  campos escalares, mostre que

$$\oint_L U \nabla V \cdot d\mathbf{l} = - \oint_L V \nabla U \cdot d\mathbf{l}$$

3.43 Mostre que

$$\int r^n dv = \frac{1}{n+3} \oint r^n \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

onde  $\mathbf{r}$ ,  $r$  e  $n$  são definidos como no Problema 3.26.

3.44 Dado o campo vetorial

$$\mathbf{G} = (16xy - z)\mathbf{a}_x + 8x^2\mathbf{a}_y - x\mathbf{a}_z$$

- (a)  $\mathbf{G}$  é irrotacional (ou conservativo)?
- (b) Encontre o fluxo líquido de  $\mathbf{G}$  através do cubo  $0 < x, y, z < 1$ .
- (c) Determine a circulação de  $\mathbf{G}$  no contorno do quadrado  $z = 0, 0 < x, y < 1$ .

Considere o sentido anti-horário.

3.45 Se o campo vetorial

$$\mathbf{T} = (\alpha xy + \beta z^3)\mathbf{a}_x + (3x^2 - \gamma z)\mathbf{a}_y + (3xz^2 - y)\mathbf{a}_z$$

é rotacional, determine  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Encontre  $\nabla \cdot \mathbf{T}$  em  $(2, -1, 0)$ .

---

PARTE **2**

---

## ELETROSTÁTICA

# Capítulo 4

## CAMPOS ELETROSTÁTICOS

Arrisque-se: se você vencer, será feliz; se perder, será sábio.

— PETER KREEFT

### 4.1 INTRODUÇÃO

Tendo dominado algumas ferramentas matemáticas essenciais para esse curso, estamos agora preparados para estudar os conceitos básicos do EM. Começaremos com os conceitos fundamentais que são aplicáveis a campos elétricos estáticos (ou invariáveis no tempo) no espaço livre (ou vácuo). Um campo eletrostático é gerado por uma distribuição de cargas estáticas. Um exemplo típico é o campo encontrado no interior de tubos de raios catódicos.

Antes de começarmos nosso estudo de eletrostática, talvez seja útil examinarmos, brevemente, a sua importância. A eletrostática é um tema fascinante que se desenvolveu em diversas áreas de aplicação. Transmissão de energia elétrica, aparelhos de raios X e proteção contra descargas elétricas atmosféricas estão associados a campos elétricos muito intensos, e é necessário ter conhecimento de eletrostática para entendê-los e ser capaz de projetar equipamentos adequados. Os dispositivos utilizados em eletrônica do estado sólido têm seu funcionamento baseado na eletrostática. Afí incluem-se resistores, capacitores e componentes ativos, como os transistores bipolares e os de efeito de campo, nos quais o controle do movimento dos elétrons é feito por campos eletrostáticos. Praticamente, todos os dispositivos periféricos de computadores, com exceção da memória magnética, baseiam-se em campos eletrostáticos. *Mouses* do tipo *touch pads*, teclados capacitivos, tubos de raios catódicos, mostradores de cristal líquido e impressoras eletrostáticas são exemplos típicos. Na Medicina, os diagnósticos são muitas vezes obtidos com a ajuda da eletrostática, incorporada em eletrocardiogramas, eletroencéfalogramas e outros tipos de registros de órgãos com atividade elétrica, incluindo olhos, ouvidos e estômago. Na indústria, a eletrostática é utilizada de várias maneiras, como em pintura eletrostática, eletrodeposição, usinagem eletromecânica e em processos de separação de pequenas partículas. A eletrostática é usada em agricultura na seleção de grãos, na pulverização de plantações, na medição do nível de umidade da produção armazenada, na fiação de algodão e também para aumentar a velocidade dos processos de cozimento do pão e da defumação da carne.<sup>1,2</sup>

Começaremos nosso estudo da eletrostática investigando as duas leis fundamentais que governam os campos eletrostáticos: (1) lei de Coulomb e (2) lei de Gauss. Ambas são baseadas em resultados experimentais e são interdependentes. Embora a lei de Coulomb seja aplicável na determinação do campo elétrico devido a qualquer configuração de cargas, é mais fácil usar a lei de Gauss quando a distribuição de cargas é simétrica. A partir da lei de Coulomb, o conceito de intensidade de campo elétrico será introduzido e aplicado a casos envolvendo cargas pontuais, distribuições de cargas em linha, em superfícies e em volume. Casos especiais que podem ser resolvidos, com muito esforço, usando a lei de Coulomb serão facilmente resolvidos aplicando-se a lei de Gauss. Ao longo de nossa discussão neste capítulo, assumiremos que o campo elétrico está no vácuo ou no espaço livre. O caso de campo elétrico em um meio material será tratado no próximo capítulo.

<sup>1</sup> Para várias aplicações de eletrostática, veja J. M. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics*. New York: John Wiley & Sons, 1986; A. D. Moore, ed., *Electrostatics and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1973; e C. E. Jowett, *Electrostatics in the Electronics Environment*. New York: John Wiley & Sons, 1976.

<sup>2</sup> Uma história interessante sobre a mágica da eletrostática é encontrada em B. Bolton, *Electromagnetism and Its Applications*. London: Van Nostrand, 1980, p. 2.

## 4.2 LEI DE COULOMB E INTENSIDADE DE CAMPO

A lei de Coulomb é uma lei experimental, formulada em 1785 pelo coronel francês Charles Augustin de Coulomb. A lei trata da força que uma carga pontual exerce sobre outra carga pontual. Por *carga pontual* entendemos uma carga que está localizada sobre um corpo cujas dimensões são muito menores que outras dimensões relevantes. Por exemplo, uma coleção de cargas elétricas sobre a cabeça de um alfinete pode ser considerada como uma carga pontual. Geralmente, as cargas são medidas em coulombs (C). Um coulomb, que é, aproximadamente, equivalente a  $6 \times 10^{18}$  elétrons, é uma unidade muito grande de cargas porque a carga de um elétron  $e = -1,6019 \times 10^{-19}$  C.

**A Lei de Coulomb** estabelece que a força  $F$  entre duas cargas pontuais  $Q_1$  e  $Q_2$  é:

1. ao longo da linha que une as cargas;
2. diretamente proporcional ao produto das cargas  $Q_1 Q_2$ ;
3. inversamente proporcional ao quadrado da distância  $R$  entre elas.<sup>3</sup>

Matematicamente,

$$F = \frac{k Q_1 Q_2}{R^2} \quad (4.1)$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade. Em unidades do SI, cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  são em coulombs (C), a distância  $R$  é em metros (m) e a força em newtons (N) tal que  $k = 1/4 \pi \epsilon_0$ . A constante  $\epsilon_0$  é chamada de *permissividade do espaço livre* (em farads por metro) e tem o valor

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8,854 \times 10^{-12} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m} \\ k &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ m/F} \end{aligned}} \quad (4.2)$$

Dessa maneira, a equação (4.1) pode ser escrita como

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (4.3)$$

Se duas cargas pontuais  $Q_1$  e  $Q_2$  estão localizadas em pontos cujos vetores posição são, respectivamente,  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , então a força  $\mathbf{F}_{12}$  sobre a carga  $Q_2$  devida a carga  $Q_1$ , mostrada na Figura 4.1, é dada por

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_{R_{12}}} \quad (4.4)$$

onde

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (4.5a)$$

$$R = |\mathbf{R}_{12}| \quad (4.5b)$$

$$\mathbf{a}_{R_{12}} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R} \quad (4.5c)$$

<sup>3</sup> Maiores detalhes sobre a verificação experimental da lei de Coulomb pode ser encontrado em W. F. Magie, *A Source Book in Physics*, Cambridge: Harvard Univ. Press, 1963, p. 408-420.

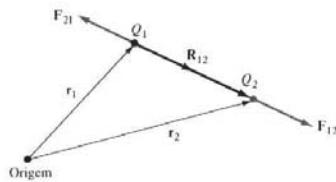


Figura 4.1 Vetor força coulombiana sobre as cargas pontuais  $Q_1$  e  $Q_2$ .

Substituindo a equação (4.5) na equação (4.4), podemos reescrever a equação (4.4) como

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{R}_{12} \quad (4.6a)$$

ou

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (4.6b)$$

É importante notar que

- Conforme mostrado na Figura 4.1, a força  $\mathbf{F}_{21}$  sobre a carga  $Q_1$  devido a carga  $Q_2$  é dada por

$$\mathbf{F}_{21} = |\mathbf{F}_{12}| \mathbf{a}_{R_{21}} = |\mathbf{F}_{12}| (-\mathbf{a}_{R_{12}})$$

ou

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (4.7)$$

já que

$$\mathbf{a}_{R_{21}} = -\mathbf{a}_{R_{12}}$$

- Cargas de mesmo sinal se repelem, enquanto cargas de sinal contrário se atraem. Ilustração na Figura 4.2.
- A distância  $R$  entre os corpos carregados  $Q_1$  e  $Q_2$  deve ser bem maior que as dimensões lineares dos corpos, isto é,  $Q_1$  e  $Q_2$  devem ser cargas pontuais.
- $Q_1$  e  $Q_2$  devem ser estáticas (cargas em repouso).
- $Q_1$  e  $Q_2$  devem ser levados em consideração na equação (4.4).

Se tivermos mais do que duas cargas pontuais, podemos usar o *princípio da superposição* para determinar a força sobre uma determinada carga. O princípio estabelece que se houver  $n$  cargas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  localizadas, respectivamente, em pontos cujos vetores posição  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ , a força resultante  $\mathbf{F}$  sobre uma carga  $Q$  localizada no ponto  $\mathbf{r}$  é dada pela soma vetorial das forças exercidas sobre  $Q$  devido a cada uma das cargas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ . Portanto:

$$\mathbf{F} = \frac{QQ_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{QQ_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \dots + \frac{QQ_N(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|^3}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{Q_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}} \quad (4.8)$$



Figura 4.2 (a), (b) Cargas de mesmo sinal se repelem; (c) cargas de sinais contrários se atraem.

Agora, podemos introduzir o conceito de *intensidade de campo elétrico*.

O vetor **intensidade de campo elétrico**  $\mathbf{E}$  é dado pela força por unidade de carga imersa nesse campo elétrico.

Assim,

$$\mathbf{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad (4.9)$$

ou simplesmente

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad (4.10)$$

A intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  está, obviamente, na mesma direção da força  $\mathbf{F}$  e é medido em newtons/coulomb ou em volts/metro. A intensidade de campo elétrico em um ponto cujo vetor posição é  $\mathbf{r}$ , devido a uma carga pontual localizada em  $\mathbf{r}'$ , é obtida a partir das equações (4.6) e (4.10), como

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R = \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.11)$$

Para  $N$  cargas pontuais  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  localizadas em  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , a intensidade de campo elétrico no ponto  $\mathbf{r}$  é obtida das equações (4.8) e (4.10) como

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{Q_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \dots + \frac{Q_N(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|^3}$$

ou

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{Q_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (4.12)$$

#### EXEMPLO 4.1

Duas cargas pontuais de 1 mC e -2 mC estão localizadas em  $(3, 2, -1)$  e  $(-1, -1, 4)$ , respectivamente. Calcule a força elétrica sobre uma carga de 10 nC, localizada em  $(0, 3, 1)$ , e a intensidade do campo elétrico nesse ponto.

**Solução:**

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{k=1,2} \frac{QQ_k}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R = \sum_{k=1,2} \frac{QQ_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{10^{-3}[(0, 3, 1) - (3, 2, -1)]}{|(0, 3, 1) - (3, 2, -1)|^3} - \frac{2,10^{-3}[(0, 3, 1) - (-1, -1, 4)]}{|(0, 3, 1) - (-1, -1, 4)|^3} \right\} \\ &= \frac{10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{4\pi} \left[ \frac{(-3, 1, 2)}{(9 + 1 + 4)^{3/2}} - \frac{2(1, 4, -3)}{(1 + 16 + 9)^{3/2}} \right] \\ &= 9 \cdot 10^{-2} \left[ \frac{(-3, 1, 2)}{14\sqrt{14}} + \frac{(-2, -8, 6)}{26\sqrt{26}} \right] \\ \mathbf{F} &= -6,507 \mathbf{a}_x - 3,817 \mathbf{a}_y + 7,506 \mathbf{a}_z \text{ mN} \end{aligned}$$

No ponto (0, 3, 1),

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\mathbf{F}}{Q} \\ &= (-6,507, -3,817, 7,506) \cdot \frac{10^{-3}}{10 \cdot 10^{-9}} \\ \mathbf{E} &= -650,7\mathbf{a}_x - 381,7\mathbf{a}_y + 750,6\mathbf{a}_z \text{ kV/m}\end{aligned}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.1

Dois cargas pontuais de 5 nC e -2 nC estão localizadas em (2, 0, 4) e (-3, 0, 5), respectivamente.

- (a) Determine a força sobre uma carga pontual de 1 nC localizada em (1, -3, 7).
- (b) Encontre o campo elétrico  $\mathbf{E}$  em (1, -3, 7).

**Resposta:** (a)  $-1,004\mathbf{a}_x - 1,284\mathbf{a}_y + 1,4\mathbf{a}_z$  nN,  
 (b)  $-1,004\mathbf{a}_x - 1,284\mathbf{a}_y + 1,4\mathbf{a}_z$  V/m.

### EXEMPLO 4.2

Dois cargas pontuais de mesma massa  $m$  e carga  $Q$  estão suspensas em um ponto comum por dois fios de massa desprezível e comprimento  $l$ . Demonstre que, na situação de equilíbrio, o ângulo de inclinação  $\alpha$  de cada um dos fios em relação à vertical é dado por

$$Q^2 = 16\pi\epsilon_0 mg l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

Se  $\alpha$  é muito pequeno, demonstre que

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 mg l^2}}$$

#### Solução:

Considere o sistema de cargas mostrado na Figura 4.3, onde  $F_e$  é a força elétrica ou coulombiana,  $T$  é a tensão mecânica em cada fio e  $mg$  é o peso de cada carga. Em A ou B

$$T \operatorname{sen} \alpha = F_e$$

$$T \cos \alpha = mg$$

Por isso,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F_e}{mg} = \frac{1}{mg} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Mas

$$r = 2l \operatorname{sen} \alpha$$

Portanto,

$$Q^2 \cos \alpha = 16\pi\epsilon_0 mg l^2 \operatorname{sen}^3 \alpha$$

ou

$$Q^2 = 16\pi\epsilon_0 mg l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

conforme solicitado. Quando  $\alpha$  é muito pequeno

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \approx \operatorname{sen} \alpha$$

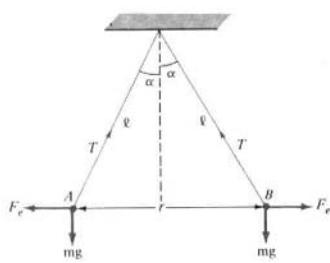


Figura 4.3 Partículas carregadas suspensas; referente ao Exemplo 4.2

e, então,

$$Q^2 = 16\pi\epsilon_0 m g \ell^2 \alpha^3$$

ou

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 m g \ell^2}}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.2

Três pequenas esferas idênticas, de massa  $m$ , estão suspensas, a partir de um mesmo ponto, por fios de massa desprezível e de igual comprimento  $\ell$ . Uma carga  $Q$  é dividida igualmente entre as esferas, e essas, no equilíbrio, se posicionam nos vértices de um triângulo equilátero horizontal de lado  $d$ . Demonstre que

$$Q^2 = 12\pi\epsilon_0 m g d^3 \left[ \ell^2 - \frac{d^2}{3} \right]^{-1/2}$$

onde  $g$  = aceleração da gravidade.

**Resposta:** a demonstração.

#### EXEMPLO 4.3

Uma aplicação prática da eletrostática é na separação eletrostática de sólidos. Por exemplo, o minério de fosfato da Flórida, que consiste de pequenas partículas de quartzo e de rocha de fosfato, pode ser separado em seus componentes aplicando um campo elétrico uniforme, como mostrado na Figura 4.4. Supondo velocidade e deslocamento iniciais das partículas zero, determine a separação entre elas após caírem 80 cm. Considere  $E = 500$  kV/m e  $Q/m = 9 \mu\text{C/kg}$  tanto para as partículas carregadas positivamente como para as partículas carregadas negativamente.

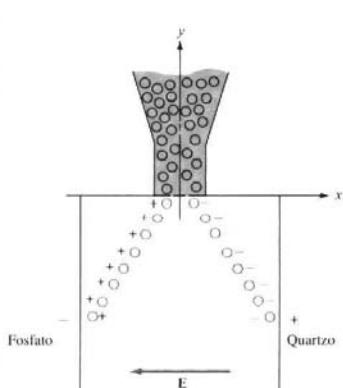


Figura 4.4 Separação eletrostática de sólidos; referente ao exemplo 4.3.

#### Solução:

Desconsiderando a força coulombiana entre as partículas, a força eletrostática, devido ao campo elétrico  $E$ , age horizontalmente, enquanto que a força gravitacional age verticalmente sobre as partículas. Assim,

$$QE = m \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{a}_x$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Q}{m} E$$

Integrando duas vezes, tem-se

$$x = \frac{Q}{2m} Et^2 + c_1 t + c_2$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração. Da mesma maneira,

$$-mg = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

Integrando duas vezes, obtemos

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_3 t + c_4$$

Já que o deslocamento inicial é zero,

$$x(t=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$y(t=0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

Também, devido à velocidade inicial ser zero,

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

Assim,

$$x = \frac{QE}{2m} t^2 \quad y = -\frac{1}{2} gt^2$$

Quando  $y = -80 \text{ cm} = -0,8 \text{ m}$

$$t^2 = \frac{0,8 \times 2}{9,8} = 0,1633$$

c

$$x = 1/2 \times 9 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^5 \times 0,1633 = 0,3673 \text{ m}$$

A separação entre as partículas é de  $2x = 73,47 \text{ cm}$ .

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.3

Um canhão de íons emite íons positivos de Césio, a partir de um eletrodo em formato de cunha, para dentro de uma região descrita por  $x > |y|$ . Considere o campo elétrico de  $\mathbf{E} = -400\mathbf{a}_x + 200\mathbf{a}_y \text{ kV/m}$ . Considere, ainda, que os íons têm uma única carga eletrônica dada por  $e = -1,6019 \times 10^{-19} \text{ C}$  e massa  $m = 2,22 \times 10^{-25} \text{ kg}$  e se deslocam no vácuo, a partir do repouso (velocidade inicial zero). Se as emissões estão confinadas em  $-40 \text{ cm} < y < 40 \text{ cm}$ , determine o maior valor de  $x$  que pode ser alcançado.

**Resposta:** 0,8 m.

### 4.3 CAMPOS ELÉTRICOS DE DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGA

Até agora temos considerado somente forças e campos elétricos de cargas pontuais; isto é, essencialmente cargas que ocupam um pequeno espaço físico. É também possível termos distribuições contínuas de carga ao longo de uma linha, sobre uma superfície ou em um volume, como ilustrado na Figura 4.5.

É usual denotar a densidade de cargas linear, superficial e volumétrica por  $\rho_L$  (em C/m),  $\rho_S$  (em C/m<sup>2</sup>) e  $\rho_V$  (em C/m<sup>3</sup>), respectivamente. Essa notação não deve ser confundida com  $\rho$  (sem índice subscrito) usado para denotar a distância radial no sistema de coordenadas cilíndricas.

O elemento de carga  $dQ$  e a carga total  $Q$  associados a tais distribuições são obtidos, observada a Figura 4.5, como a seguir:

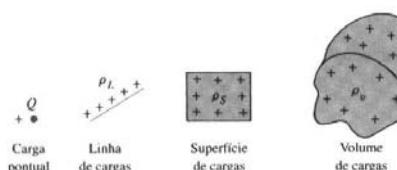


Figura 4.5 Várias distribuições de carga e elementos de carga.

$$dQ = \rho_L dl \rightarrow Q = \int_L \rho_L dl \quad (\text{linha de cargas}) \quad (4.13\text{a})$$

$$dQ = \rho_S dS \rightarrow Q = \int_S \rho_S dS \quad (\text{superfície de cargas}) \quad (4.13\text{b})$$

$$dQ = \rho_V dv \rightarrow Q = \int_V \rho_V dv \quad (\text{volume de cargas}) \quad (4.13\text{c})$$

A intensidade de campo elétrico devido a cada uma dessas distribuições  $\rho_L$ ,  $\rho_S$  e  $\rho_V$ , pode ser obtida a partir da soma das contribuições elementares de campo devido a cada um dos numerosos pontos de carga que constituem a distribuição. Dessa forma, substituindo  $Q$  na equação (4.11) pela carga elemental  $dQ = \rho_L dl$ ,  $\rho_S dS$  ou  $\rho_V dv$  e integrando, obtemos

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (\text{linha de carga}) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (\text{superfície de carga}) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_V dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (\text{volume de carga}) \quad (4.16)$$

Deve ser observado que  $R^2$  e  $\mathbf{a}_R$  variam à medida que as integrais nas equações (4.13) a (4.16) são calculadas. A seguir, aplicaremos essas fórmulas para algumas distribuições de carga.

### A. Linha de carga

Considere uma linha de carga com uma densidade uniforme de carga  $\rho_L$ , estendendo-se de  $A$  até  $B$ , ao longo do eixo  $z$ , como mostra a Figura 4.6. O elemento de carga  $dQ$  associado ao elemento de comprimento da linha  $dl = dz$  é dado por

$$dQ = \rho_L dl = \rho_L dz$$

e, por isso, a carga total  $Q$  é dada por

$$Q = \int_{z_A}^{z_B} \rho_L dz \quad (4.17)$$

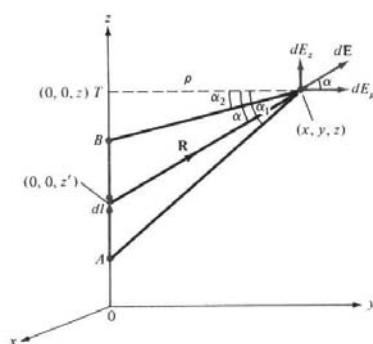


Figure 4.6 Cálculo do campo elétrico  $\mathbf{E}$  devido a uma linha de cargas.

A intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  em um ponto arbitrário qualquer  $P(x, y, z)$  pode ser determinada utilizando a equação (4.14). É importante saber identificar cada termo nas equações (4.14) a (4.16) e substitui-lo adequadamente para uma dada distribuição. Costuma-se denotar o ponto de interesse<sup>4</sup> por  $(x, y, z)$  e o ponto fonte (origem do campo) por  $(x', y', z')$ . Dessa maneira, a partir da Figura 4.6,

$$dl = dz'$$

$$\mathbf{R} = (x, y, z) - (0, 0, z') = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z$$

ou

$$\mathbf{R} = \rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z$$

$$R^2 = |\mathbf{R}|^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Substituindo todas essas relações na equação (4.14), obtemos

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' \quad (4.18)$$

Para calcular o valor do campo, é conveniente definir  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , mostrados na Figura 4.6.

$$R = [\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2} = \rho \sec \alpha$$

$$z' = OT - \rho \operatorname{tg} \alpha, \quad dz' = -\rho \sec^2 \alpha d\alpha$$

Por isso, a equação (4.18) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{-\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha [\cos \alpha \mathbf{a}_\rho + \sin \alpha \mathbf{a}_z] d\alpha}{\rho^2 \sec^2 \alpha} \\ &= -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos \alpha \mathbf{a}_\rho + \sin \alpha \mathbf{a}_z] d\alpha \end{aligned} \quad (4.19)$$

Assim, para uma *linha finita de cargas*,

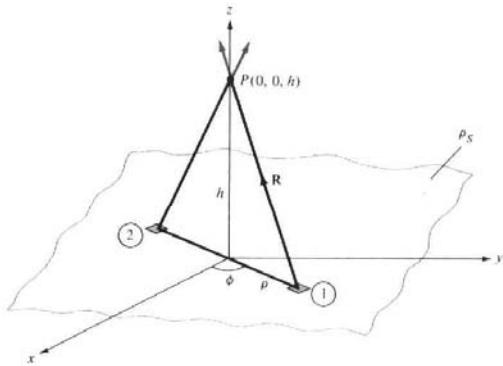
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} [-(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)\mathbf{a}_\rho + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)\mathbf{a}_z] \quad (4.20)$$

No caso especial de uma *linha infinita de carga*, o ponto  $B$  situa-se em  $(0, 0, \infty)$  e o ponto  $A$  em  $(0, 0, -\infty)$ , de forma que  $\alpha_1 = \pi/2$  e  $\alpha_2 = -\pi/2$ ; a componente do campo na direção  $z$  desaparece e a equação (4.20) assume o seguinte aspecto

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho} \quad (4.21)$$

Note que a equação (4.21) é obtida considerando-se a linha infinita de cargas no eixo  $z$ , de forma que  $\rho$  e  $\mathbf{a}_\rho$  têm o significado convencional, em coordenadas cilíndricas. Se a linha não estiver sobre o eixo  $z$ ,  $\rho$  deve ser entendido como a distância, tomada perpendicularmente à linha, da distribuição de carga até o ponto de interesse e  $\mathbf{a}_\rho$  deve ser entendido como o vetor unitário ao longo dessa direção perpendicular.

<sup>4</sup> Ponto de interesse é o ponto no qual se quer calcular o campo.

Figura 4.7 Determinação do campo elétrico  $\mathbf{E}$  devido a uma lâmina de cargas.

### B. Superfície de carga

Considere uma lâmina infinita de carga, no plano  $xy$  com uma densidade uniforme de carga  $\rho_s$ . A carga associada a uma área elementar  $dS$  é dada por:

$$dQ = \rho_s dS$$

e, portanto, a carga total é

$$Q = \int \rho_s dS \quad (4.22)$$

A partir da equação (4.15), a contribuição da superfície elementar 1 (mostrada na Figura 4.7) para o campo  $\mathbf{E}$  no ponto  $P(0, 0, h)$  é

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (4.23)$$

Da figura 4.7,

$$\mathbf{R} = \rho(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z, \quad R = |\mathbf{R}| = [\rho^2 + h^2]^{1/2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad dQ = \rho_s dS = \rho_s \rho d\phi d\rho$$

Substituindo essas relações na equação (4.23), tem-se:

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_s \rho d\phi d\rho [-\rho \mathbf{a}_\rho + h \mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + h^2]^{3/2}} \quad (4.24)$$

Devido à simetria da distribuição de cargas, para cada elemento 1 existe um elemento correspondente 2 cuja contribuição ao longo de  $\mathbf{a}_\rho$  se cancela com a contribuição do elemento 1, como mostrado na Figura 4.7. Dessa forma, as contribuições para  $E_\rho$  se cancelam e  $\mathbf{E}$  passa a ter só componente ao longo de  $z$ . Isso pode ser mostrado matematicamente substituindo  $\mathbf{a}_\rho$  por  $\cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y$ . A integração de  $\cos \phi$  ou de  $\sin \phi$  no intervalo  $0 < \phi < 2\pi$  resulta em zero. Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \int d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{h\rho \, d\rho \, d\phi}{[\rho^2 + h^2]^{3/2}} \mathbf{a}_z \\
 &= \frac{\rho_S h}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^{\infty} [\rho^2 + h^2]^{-3/2} \frac{1}{2} d(\rho^2) \mathbf{a}_z \\
 &= \frac{\rho_S h}{2\epsilon_0} \left\{ -[\rho^2 + h^2]^{-1/2} \right\} \Big|_0^{\infty} \mathbf{a}_z \\
 \mathbf{E} &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

isto é,  $\mathbf{E}$  tem somente componentes ao longo de  $z$  se a carga está distribuída no plano  $xy$ . Em geral, para uma *lâmina infinita* de carga, temos

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n} \tag{4.26}$$

onde  $\mathbf{a}_n$  é um vetor unitário normal à lâmina. A partir das equações (4.25) ou (4.26), nota-se que o campo elétrico é normal à lâmina e é surpreendentemente independente da distância entre a placa e o ponto de observação  $P$ . Em um capacitor de placas paralelas, o campo elétrico existente entre as duas placas carregadas com cargas iguais e opostas é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n + \frac{-\rho_S}{2\epsilon_0} (-\mathbf{a}_n) = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \mathbf{a}_n \tag{4.27}$$

### C. Volume de carga

Seja uma distribuição volumétrica de carga com densidade uniforme de carga  $\rho_v$ , como mostrado na Figura 4.8. A carga  $dQ$  associada ao elemento de volume  $dv$  é

$$dQ = \rho_v dv$$

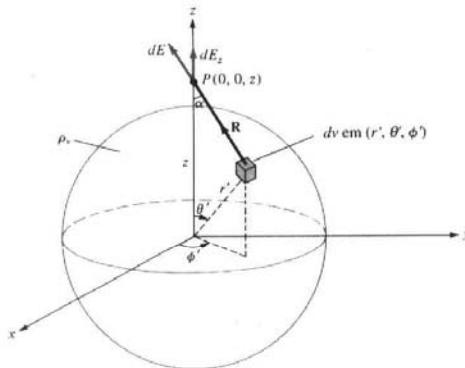


Figura 4.8 Determinação do campo elétrico  $\mathbf{E}$  devido à distribuição volumétrica de carga.

e, assim, a carga total na esfera de raio  $a$  é

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho_v dv = \rho_v \int dv \\ &= \rho_v \frac{4\pi a^3}{3} \end{aligned} \quad (4.28)$$

O campo elétrico  $d\mathbf{E}$  em  $P(0, 0, z)$  devido ao volume de carga elementar é

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

onde  $\mathbf{a}_R = \cos \alpha \mathbf{a}_z + \sin \alpha \mathbf{a}_\rho$ . Devido à simetria da distribuição de cargas, as contribuições às componentes  $E_x$  e  $E_y$  cancelam-se. Resta apenas a componente  $E_z$ , dada por

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_z = \int dE \cos \alpha = \frac{\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dv \cos \alpha}{R^2} \quad (4.29)$$

Novamente, temos que derivar expressões para  $dv$ ,  $R^2$  e  $\cos \alpha$ .

$$dv = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \quad (4.30)$$

Aplicando a regra dos cossenos na Figura 4.8, temos

$$\begin{aligned} R^2 &= z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta' \\ r'^2 &= z^2 + R^2 - 2zR \cos \alpha \end{aligned}$$

É conveniente calcular a integral na equação (4.29) em termos de  $R$  e  $r'$ . Por isso expressamos  $\cos \theta'$ ,  $\cos \alpha$  e  $\sin \theta' d\theta'$  em termos de  $R$  e  $r'$ , isto é:

$$\cos \alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR} \quad (4.31a)$$

$$\cos \theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'} \quad (4.31b)$$

Diferenciando a equação (4.31 b) em relação a  $\theta'$ , mantendo  $z$  e  $r'$  fixos, obtemos

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{R dR}{z r'} \quad (4.32)$$

Substituindo as equações (4.30) a (4.32) na equação (4.29), obtém-se

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_v}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^a \int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{R dR}{z r'} dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR} \frac{1}{R^2} \\ &= \frac{\rho_v 2\pi}{8\pi\epsilon_0 z^2} \int_{r'=0}^a \int_{R=z-r'}^{z+r'} r' \left[ 1 + \frac{z^2 - r'^2}{R^2} \right] dR dr' \\ &= \frac{\rho_v \pi}{4\pi\epsilon_0 z^2} \int_0^a r' \left[ R - \frac{(z^2 - r'^2)}{R} \right]_{z-r'}^{z+r'} dr' \\ &= \frac{\rho_v \pi}{4\pi\epsilon_0 z^2} \int_0^a 4r'^2 dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{1}{3} \left( \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v \right) \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \mathbf{a}_z \quad (4.33)$$

Esse é o resultado para  $\mathbf{E}$  no ponto  $P(0, 0, z)$ . Devido à simetria da distribuição de cargas, o campo elétrico em  $P(r, \theta, \phi)$  é obtido a partir da equação (4.33), tal que

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (4.34)$$

o qual é idêntico ao campo elétrico produzido, no mesmo ponto, por uma carga pontual  $Q$  localizada na origem ou no centro da distribuição esférica de carga. A razão disto ficará evidente ao estudarmos a lei de Gauss na Seção 4.5.

#### EXEMPLO 4.4

Um anel circular de raio  $a$  está carregado com uma distribuição uniforme de carga  $\rho_L$  C/m e está no plano  $xy$  com seu eixo coincidindo com o eixo  $z$ .

- (a) Demonstre que:

$$\mathbf{E}(0, 0, h) = \frac{\rho_L ah}{2\epsilon_0 [h^2 + a^2]^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

- (b) Para quais valores de  $h$  o  $\mathbf{E}$  tem valor máximo?  
(c) Se a carga total do anel for  $Q$ , determine  $\mathbf{E}$  para  $a \rightarrow 0$ .

#### Solução:

- (a) Considere o sistema mostrado na Figura 4.9. Novamente, o ponto-chave para determinar  $\mathbf{E}$  a partir da equação (4.14) é explicitar cada termo dessa equação. Nesse caso

$$dl = a d\phi, \quad \mathbf{R} = a(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = [a^2 + h^2]^{1/2}, \quad \mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

ou

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R^2} = \frac{-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z}{[a^2 + h^2]^{3/2}}$$

Por isso,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z)}{[a^2 + h^2]^{3/2}} a d\phi$$

Por simetria, as contribuições na direção  $\mathbf{a}_\rho$  se cancelam. Isso fica evidente se observarmos que, para cada elemento  $dl$ , existe um elemento correspondente em posição diametralmente oposta que gera um campo de igual valor  $dE_\rho$ , mas com orientação oposta tal que essas duas contribuições se cancelam entre si. Dessa forma, restam só as componentes ao longo de  $z$ . Isto é

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{4\pi\epsilon_0 [h^2 + a^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{2\epsilon_0 [h^2 + a^2]^{3/2}}$$

conforme solicitado.

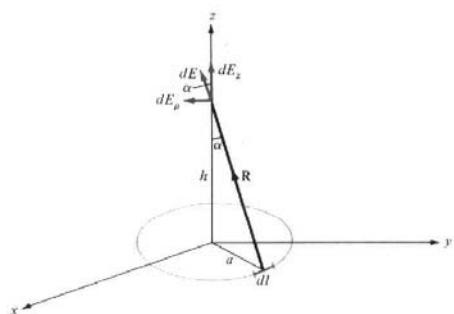


Figura 4.9 Anel carregado; referente ao Exemplo 4.4.

(b)

$$\frac{d|\mathbf{E}|}{dh} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{[h^2 + a^2]^{3/2}(1) - \frac{3}{2}(h)2h[h^2 + a^2]^{1/2}}{[h^2 + a^2]^3} \right\}$$

Para  $\mathbf{E}$  máximo,  $\frac{d|\mathbf{E}|}{dh} = 0$ , o que implica

$$\begin{aligned} [h^2 + a^2]^{1/2}[h^2 + a^2 - 3h^2] &= 0 \\ a^2 - 2h^2 &= 0 \quad \text{ou} \quad h = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(c) Como a carga está uniformemente distribuída, a densidade de carga da linha é dada por

$$\rho_L = \frac{Q}{2\pi a}$$

tal que

$$\mathbf{E} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0[h^2 + a^2]^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

Como  $a \rightarrow 0$ ,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \mathbf{a}_z$$

ou, em geral

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_R$$

que é o mesmo de uma carga pontual, como o esperado.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 4.4**

Um disco circular de raio  $a$  está uniformemente carregado com  $\rho_s \text{ C/m}^2$ . Considere o disco no plano  $z = 0$  com seu eixo ao longo de  $z$ ,

- (a) demonstre que, em um ponto  $(0, 0, h)$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{h}{[h^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \mathbf{a}_z$$

- (b) a partir disso, determine o campo  $\mathbf{E}$  devido a uma lâmina infinita de cargas colocada sobre o plano  $z = 0$ .

- (c) Se  $a \ll h$ , demonstre que  $\mathbf{E}$  é similar ao campo de uma carga pontual.

**Resposta:** (a) a demonstração; (b)  $\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z$ ; (c) a demonstração.

**EXEMPLO 4.5**

Uma lâmina finita  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , sobre o plano  $z = 0$ , tem uma densidade de carga dada por  $\rho_s = xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2} \text{ nC/m}^2$ . Determine

- (a) a carga total na lâmina;  
 (b) o campo elétrico em  $(0, 0, 5)$ ;  
 (c) a força experimentada por uma carga de  $-1 \text{ mC}$  localizada em  $(0, 0, 5)$ .

**Solução:**

$$(a) Q = \int \rho_s dS = \int_0^1 \int_0^1 xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2} dx dy \text{ nC}$$

Já que  $x dx = 1/2 d(x^2)$ , integramos em relação a  $x^2$  (ou fazemos uma mudança de variáveis:  $x^2 = u$ , tal que  $x dx = du/2$ ).

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \int_0^1 y \int_0^1 (x^2 + y^2 + 25)^{3/2} d(x^2) dy \text{ nC} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y \frac{2}{5} (x^2 + y^2 + 25)^{5/2} \Big|_0^1 dy \\ &= \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{1}{2} [(y^2 + 26)^{5/2} - (y^2 + 25)^{5/2}] d(y^2) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{7} [(y^2 + 26)^{7/2} - (y^2 + 25)^{7/2}] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{35} [(27)^{7/2} + (25)^{7/2} - 2(26)^{7/2}] \\ Q &= 33,15 \text{ nC} \end{aligned}$$

$$(b) \mathbf{E} = \int \frac{\rho_S dS \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \int \frac{\rho_S dS (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

onde  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (0, 0, 5) - (x, y, 0) = (-x, -y, 5)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{10^{-9} xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2} (-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) dx dy}{4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} (x^2 + y^2 + 25)^{3/2}} \\ &= 9 \left[ - \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y dy \mathbf{a}_x - \int_0^1 x dx \int_0^1 y^2 dy \mathbf{a}_y + 5 \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy \mathbf{a}_z \right] \\ &= 9 \left( \frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{5}{4} \right) \\ &= (-1.5, -1.5, 11.25) \text{ V/m} \end{aligned}$$

$$(c) \mathbf{F} = q\mathbf{E} = (1.5, 1.5, -11.25) \text{ mN}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.5

Uma placa quadrada descrita por  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ ,  $z = 0$  está carregada com  $12|y| \text{ mC/m}^2$ . Determine a carga total na placa e a intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  em  $(0, 0, 10)$ .

**Resposta:** 192 mC; 16,46  $\text{a}_z \text{ MV/m}$ .

#### EXEMPLO 4.6

Os planos  $x = 2$  e  $y = -3$  estão carregados com  $10 \text{ nC/m}^2$  e  $15 \text{ nC/m}^2$ , respectivamente. Se a linha  $x = 0, z = 2$  estiver carregada com  $10\pi \text{ nC/m}$ , determinar  $\mathbf{E}$  em  $(1, 1, -1)$  devido às três distribuições de carga.

**Solução:**

Seja

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

onde  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{E}_3$  são, respectivamente, as contribuições ao campo  $\mathbf{E}$  no ponto  $(1, 1, -1)$  devido à lâmina infinita 1, à lâmina infinita 2 e à linha infinita 3, como mostrado na Figura 4.10(a). Usando as equações (4.26) e (4.21), tem-se

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{S_1}}{2\epsilon_0} (-\mathbf{a}_x) = -\frac{10 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \mathbf{a}_x = -180\pi \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho_{S_2}}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_y = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \mathbf{a}_y = 270\pi \mathbf{a}_y$$

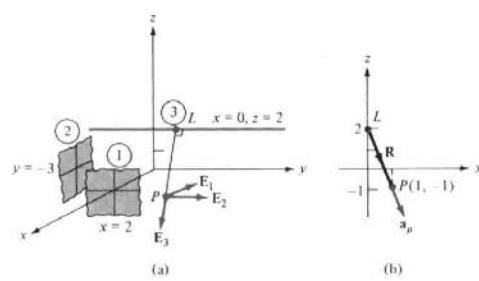


Figura 4.10 Exemplo 4.6: (a) três distribuições de carga; (b) determinação de  $\rho$  e  $\mathbf{a}_\rho$  no plano  $y = 1$ .

e

$$\mathbf{E}_3 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

onde  $\mathbf{a}_\rho$  (não é o  $\mathbf{a}_\rho$  convencional do sistema de coordenadas cilíndrico, mas tem um significado semelhante) é um vetor unitário ao longo de  $LP$ , perpendicular à linha de cargas, e  $\rho$  é o comprimento de  $LP$  determinado a partir da Figura 4.10(b). A Figura 4.10(b) resulta da Figura 4.10(a) se considerarmos o plano  $y = 1$  sobre o qual está o vetor  $\mathbf{E}_3$ . Da Figura 4.10(b), o vetor distância de  $L$  a  $P$  é

$$\mathbf{R} = -3\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_x$$

$$\rho = |\mathbf{R}| = \sqrt{10}, \quad \mathbf{a}_\rho = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \mathbf{a}_x - \frac{3}{\sqrt{10}} \mathbf{a}_z$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3 &= \frac{10\pi \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \cdot \frac{1}{10} (\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z) \\ &= 18\pi(\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

Assim, somando  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{E}_3$ , obtemos o campo total como

$$\mathbf{E} = -162\pi\mathbf{a}_x + 270\pi\mathbf{a}_y - 54\pi\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Note que, para obter  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_\rho$  ou  $\mathbf{a}_n$ , necessários para determinar  $\mathbf{F}$  ou  $\mathbf{E}$ , devemos ir da carga (cujo vetor posição é  $\mathbf{r}'$ ) até o ponto de interesse (cujo vetor posição é  $\mathbf{r}$ ); portanto,  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_\rho$  ou  $\mathbf{a}_n$ , qualquer um deles, é um vetor unitário ao longo de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Observe isso, atentamente, nas Figuras 4.6 a 4.10.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.6

No Exemplo 4.6, se a linha  $x = 0, z = 2$  girar  $90^\circ$  em torno do ponto  $(0, 2, 2)$ , de tal modo que ela passe a ser descrita por  $x = 0, y = 2$ , determine  $\mathbf{E}$  no ponto  $(1, 1, -1)$ .

**Resposta:**  $-282,7 \mathbf{a}_x + 564,5 \mathbf{a}_y \text{ V/m}$ .

## 4.4 DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO

O fluxo devido ao campo elétrico  $\mathbf{E}$  pode ser calculado usando a definição geral de fluxo na equação (3.13). Por razões de ordem prática, no entanto, a grandeza obtida dessa forma não é considerada como a definição mais utilizada de fluxo em eletrostática. Também, as equações (4.11) a (4.16) mostram que a intensidade de campo elétrico depende do meio no qual está imersa a carga fonte do campo (nesse capítulo, consideramos espaço livre). Suponhamos um novo campo vetorial  $\mathbf{D}$ , independente do meio, e definido por

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.35)$$

Definiremos *fluxo elétrico*  $\Psi$  em termos de  $\mathbf{D}$  usando a equação (3.13), ou seja:

$$\Psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.36)$$

Em unidades SI, uma linha de fluxo elétrico se inicia em uma carga de  $+1\text{ C}$  e termina em uma carga de  $-1\text{ C}$ . Por isso, o fluxo elétrico é medido em coulombs. Portanto, o campo vetorial  $\mathbf{D}$  é denominado *densidade de fluxo elétrico* e é medido em coulombs por metro quadrado. Por razões históricas, a densidade de fluxo elétrico é também denominada *deslocamento elétrico*.

Da equação (4.35) fica evidente que todas as fórmulas para calcular  $\mathbf{E}$ , obtidas a partir da lei de Coulomb, nas Seções 4.2 e 4.3, podem ser usadas para calcular  $\mathbf{D}$ , observando que devemos multiplicá-las por  $\epsilon_0$ . Por exemplo, para uma lâmina infinita carregada a partir das equações (4.26) e (4.35), obtemos

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_s}{2} \mathbf{a}_n \quad (4.37)$$

e para uma distribuição de cargas em um volume, a partir das equações (4.16) e (4.35), obtemos

$$\mathbf{D} = \int \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R \quad (4.38)$$

Observe, a partir das equações (4.37) e (4.38), que  $\mathbf{D}$  é só função da carga e da posição, ou seja,  $\mathbf{D}$  é independente do meio.

### EXEMPLO 4.7

Determine  $\mathbf{D}$  em  $(4, 0, 3)$  se houver uma carga pontual de  $-5\pi\text{ mC}$  em  $(4, 0, 0)$  e uma linha de cargas de  $3\pi\text{ mC/m}$  ao longo do eixo  $y$ .

**Solução:**

Seja  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_Q + \mathbf{D}_L$ , onde  $\mathbf{D}_Q$  e  $\mathbf{D}_L$  são densidades de fluxo devida à carga pontual e à linha de cargas, respectivamente, como mostrado na Figura 4.11:

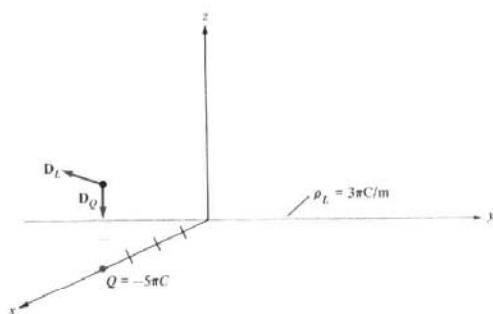
$$\mathbf{D}_Q = \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R = \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

onde  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (4, 0, 3) - (4, 0, 0) = (0, 0, 3)$ . Donde,

$$\mathbf{D}_Q = \frac{-5\pi \cdot 10^{-3}(0, 0, 3)}{4\pi |(0, 0, 3)|^3} = -0,138 \mathbf{a}_z \text{ mC/m}^2$$

E, também,

$$\mathbf{D}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho$$

Figura 4.11 Densidade de fluxo  $\mathbf{D}$  devido à carga pontual e à uma linha infinita de cargas.

Nesse caso

$$\mathbf{a}_p = \frac{(4, 0, 3) - (0, 0, 0)}{|(4, 0, 3) - (0, 0, 0)|} = \frac{(4, 0, 3)}{5}$$

$$\rho = |(4, 0, 3) - (0, 0, 0)| = 5$$

Portanto,

$$\mathbf{D}_L = \frac{3\pi}{2\pi(25)} (4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z) = 0,24\mathbf{a}_x + 0,18\mathbf{a}_z \text{ mC/m}^2$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_Q + \mathbf{D}_L \\ &= 240\mathbf{a}_x + 42\mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2 \end{aligned}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.7

Uma carga pontual de 30 nC está localizada na origem, enquanto que um plano em  $y = 3$  está carregado com  $10 \text{ nC/m}^2$ . Determine  $\mathbf{D}$  em  $(0, 4, 3)$ .

**Resposta:**  $5,076\mathbf{a}_y + 0,0573\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$ .

## 4.5 LEI DE GAUSS – EQUAÇÃO DE MAXWELL

A lei de Gauss<sup>5</sup> constitui-se em uma das leis fundamentais do eletromagnetismo.

**A lei de Gauss** estabelece que o fluxo elétrico total  $\Psi$  através de qualquer superfície fechada é igual à carga total encerrada por essa superfície.

Dessa maneira,

<sup>5</sup> Karl Friedrich Gauss (1777–1855), matemático alemão, desenvolveu o teorema da divergência, apresentado na Seção 3.6, popularmente conhecido como Teorema de Gauss. Foi o primeiro físico a medir quantidades elétricas e magnéticas em unidades absolutas. Para maiores detalhes das medidas de Gauss, consulte W. F. Magie, *A Source Book in Physics*, Cambridge: Harvard Univ. Press, 1963, p. 519–524.

$$\Psi = Q_{\text{enc}} \quad (4.39)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \Psi &= \oint_S d\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \text{carga total encerrada } Q = \int_v \rho_v dv \end{aligned} \quad (4.40)$$

ou

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v dv \quad (4.41)$$

Aplicando o teorema da divergência à integral de superfície da equação (4.41):

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv \quad (4.42)$$

Comparando entre si as duas integrais de volume das equações (4.41) e (4.42), obtém-se

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (4.43)$$

a qual é a primeira das quatro *equações de Maxwell* a serem determinadas. A equação (4.43) estabelece que a densidade volumétrica de carga é igual à divergência da densidade de fluxo elétrico. Isto não deveria ser surpresa pelo modo como definimos divergência de um vetor na equação (3.32) e pelo fato que  $\rho_v$ , em um ponto é, simplesmente, a carga por unidade de volume nesse ponto.

Note que:

1. As equações (4.41) e (4.43) são, basicamente, formas diferentes de expressar a lei de Gauss. A equação (4.41) é a forma integral, enquanto que a equação (4.43) é a forma diferencial ou pontual da lei de Gauss.

2. A lei de Gauss é uma forma alternativa de estabelecer a lei de Coulomb. A aplicação adequada do teorema da divergência à lei de Coulomb resulta na lei de Gauss.

3. A lei de Gauss se apresenta como uma maneira fácil de se determinar  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{D}$  para distribuições simétricas de carga, tais como uma carga pontual, uma linha infinita de cargas, uma superfície cilíndrica infinita de cargas e uma distribuição esférica de cargas. Uma distribuição contínua de cargas tem uma simetria retangular se depende só de  $x$  (ou  $y$ , ou  $z$ ); simetria cilíndrica se depende só de  $\rho$ , ou simetria esférica se depende só de  $r$  (independente de  $\theta$  e  $\phi$ ). Convém salientar que se a distribuição de cargas for simétrica, ou não, a lei de Gauss permanece válida. Por exemplo, considere a distribuição de cargas da Figura 4.12, onde  $v_1$  e  $v_2$  são superfícies (ou volumes) fechadas. O fluxo total que sai de  $v_1$  é  $10 - 5 = 5$  nC porque somente as cargas 10 nC e -5 nC estão encerradas em  $v_1$ . Embora as cargas 20 nC e 15 nC fora de  $v_1$  contribuam para o fluxo que atravessa  $v_1$ , o fluxo líquido que atravessa  $v_1$ , de acordo com a lei de Gauss, não sofre contribuição dessas cargas externas. De maneira similar, o fluxo total que sai de  $v_2$  é zero porque não existe carga encerrada em  $v_2$ . Observamos que a lei de Gauss,  $\Psi = Q_{\text{encerrado}}$ , é válida mesmo que a distribuição de cargas não seja simétrica. No entanto, não podemos utilizar a lei de Gauss para determinar  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{D}$  quando a distribuição de cargas não for simétrica. Nesse caso, devemos recorrer à lei de Coulomb para determinar  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{D}$ .

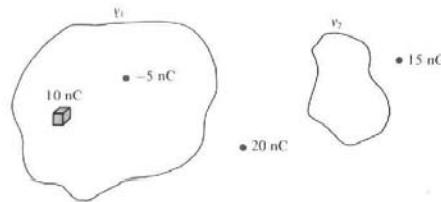


Figura 4.12 Ilustração da lei de Gauss. O fluxo saindo de  $v_1$  é 5 nC e o fluxo saindo de  $v_2$  é 0 C.

## 4.6 APLICAÇÕES DA LEI DE GAUSS

O método de aplicar a lei de Gauss para determinar o campo elétrico começa pela verificação da existência de simetria. Uma vez identificada a existência de distribuição simétrica de cargas, construímos uma superfície matemática fechada (conhecida como *superfície gaussiana*). Essa superfície é escolhida de forma que o vetor  $\mathbf{D}$  seja normal ou tangencial à superfície gaussiana. Quando  $\mathbf{D}$  for normal à superfície,  $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D dS$ . Quando  $\mathbf{D}$  for tangencial à superfície,  $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ . Dessa maneira, devemos escolher uma superfície que seja compatível com a simetria exibida pela distribuição de cargas. Aplicaremos essas ideias básicas aos casos seguintes.

### A. Carga pontual

Suponha uma carga pontual  $Q$  posicionada na origem. Para determinar  $\mathbf{D}$  no ponto  $P$ , é fácil enxergar que a escolha de uma superfície esférica contendo  $P$  irá satisfazer as condições de simetria. Assim, nesse caso, uma superfície esférica centrada na origem é a superfície gaussiana, como mostrado na Figura 4.13.

Já que, nesse caso,  $\mathbf{D}$  é, em qualquer lugar, normal à superfície gaussiana e constante sobre ela, isto é,  $\mathbf{D} = D_r \mathbf{a}_r$ , aplicando-se a lei de Gauss ( $\Psi' = Q_{encerrada}$ ) obtém-se

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r 4\pi r^2 \quad (4.44)$$

onde  $\oint dS = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi r^2$  é a área da superfície gaussiana. Dessa forma,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (4.45)$$

conforme esperado a partir das equações (4.11) e (4.35).

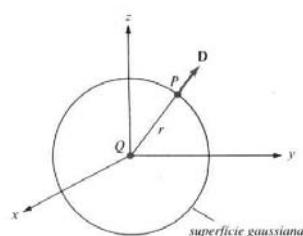


Figura 4.13 Superfície gaussiana em torno de uma carga pontual.

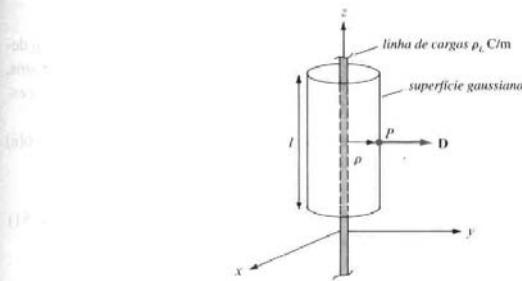


Figura 4.14 Superfície gaussiana em torno de uma linha infinita de cargas.

### B. Linha infinita de carga

Suponha uma linha infinita de carga uniformemente distribuída com  $\rho_L \text{ C/m}$ , ao longo do eixo  $z$ . Para determinar  $\mathbf{D}$  em um ponto  $P$ , escolhemos uma superfície cilíndrica que contém  $P$ , para satisfazer as condições de simetria, como mostrado na Figura 4.14. Dessa forma,  $\mathbf{D}$  é constante sobre a superfície gaussiana cilíndrica e normal à mesma, isto é,  $\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$ . Se aplicarmos a lei de Gauss a um trecho arbitrário  $l$  da linha

$$\rho_L l = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_\rho \oint dS = D_\rho 2\pi\rho l \quad (4.46)$$

onde  $\oint dS = 2\pi\rho l$  é a área da superfície gaussiana. Note que a integral  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ , quando calculada nas tampas superior e inferior do cilindro, é zero, já que  $\mathbf{D}$  não tem componente ao longo de  $z$ . Isto significa dizer que  $\mathbf{D}$  é tangencial a essas superfícies. Portanto,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho \quad (4.47)$$

como esperado a partir das equações (4.21) e (4.35).

### C. Lâmina infinita de cargas

Considere uma lámina infinita, com distribuição uniforme de cargas dada por  $\rho_S \text{ C/m}^2$ , no plano  $z = 0$ . Para determinar  $\mathbf{D}$  no ponto  $P$ , escolhemos como superfície gaussiana uma caixa retangular cortada simetricamente pela lámina de cargas e com duas de suas faces paralelas à lámina, como mostra a Figura 4.15. Como  $\mathbf{D}$  é normal à lámina,  $\mathbf{D} = D_z \mathbf{a}_z$ , e, aplicando a lei de Gauss, obtemos:

$$\rho_S \int dS = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_z \left[ \int_{\text{superior}} dS + \int_{\text{inferior}} dS \right] \quad (4.48)$$

Observe que  $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$  calculada nas laterais da caixa é zero porque  $\mathbf{D}$  não tem componentes ao longo de  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$ . Se as tampas superior e inferior da caixa têm, cada uma delas, área  $A$ , a equação (4.48) assume a seguinte forma

$$\rho_S A = D_z (A + A) \quad (4.49)$$

e, dessa forma,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_S}{2} \mathbf{a}_z$$

ou

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z \quad (4.50)$$

conforme esperado a partir da equação (4.25).

#### D. Esfera uniformemente carregada

Considera uma esfera de raio  $a$  com uma distribuição uniforme de carga dada por  $\rho_v \text{ C/m}^3$ . Para determinar  $\mathbf{D}$  em qualquer ponto, construímos superfícies gaussianas considerando os seguintes casos, separadamente:  $r \leq a$  e  $r \geq a$ . Já que a carga tem simetria esférica, fica evidente que a superfície esférica é uma superfície gaussiana apropriada.

Para  $r \leq a$ , a carga total encerrada pela superfície esférica de raio  $r$ , como mostrado na Figura 4.16(a) é,

$$\begin{aligned} Q_{\text{enc}} &= \int \rho_v dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^r r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho_v \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned} \quad (4.51)$$

e

$$\begin{aligned} \Psi &= \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= D_r 4\pi r^2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Donde, como  $\Psi = Q_{\text{encerrada}}$  resulta

$$D_r 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_v$$

ou

$$\mathbf{D} = \frac{r}{3} \rho_v \mathbf{a}_r \quad 0 < r \leq a \quad (4.53)$$

Para  $r \geq a$ , a superfície gaussiana é mostrada na Figura 4.16(b). A carga encerrada por essa superfície é a carga total distribuída na esfera, isto é,

$$\begin{aligned} Q_{\text{enc}} &= \int \rho_v dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho_v \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned} \quad (4.54)$$

enquanto

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 \quad (4.55)$$

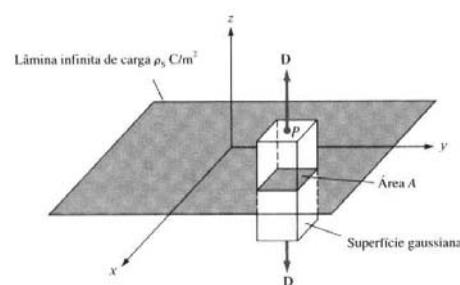


Figura 4.15 Superfície gaussiana para uma lâmina plana infinita de carga.

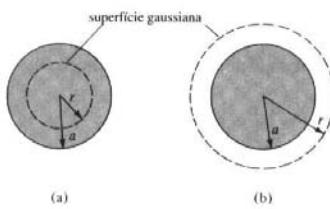


Figura 4.16 Superfície gaussiana para uma esfera, uniformemente carregada quando: (a)  $r \geq a$  e (b)  $r \leq a$ .

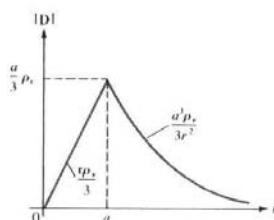


Figura 4.17 Gráfico de  $|D|$  em função de  $r$  para uma esfera uniformemente carregada.

mesmo resultado da equação (4.52). Conseqüentemente,

$$D_r 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_v$$

ou

$$\mathbf{D} = \frac{a^3}{3r^2} \rho_v \mathbf{a}_r \quad r \geq a \quad (4.56)$$

Assim, a partir das equações (4.53) e (4.56),  $\mathbf{D}$ , em qualquer ponto, é dado por

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{r}{3} \rho_v \mathbf{a}_r & 0 < r \leq a \\ \frac{a^3}{3r^2} \rho_v \mathbf{a}_r & r \geq a \end{cases} \quad (4.57)$$

e  $|\mathbf{D}|$  varia com a distância  $r$ , como mostrado no gráfico da Figura 4.17.

Observe, a partir das equações (4.44), (4.46), (4.48) e (4.52), que a habilidade em extrair  $\mathbf{D}$  das integrais é a chave para encontrar  $\mathbf{D}$  usando a lei de Gauss. Em outras palavras,  $\mathbf{D}$  deve ser constante sobre a superfície gaussiana (para facilitar essas integrações).

#### EXEMPLO 4.8

Sabendo que  $\mathbf{D} = z\rho \cos^2 \phi \mathbf{a}_z$  C/m<sup>2</sup>, calcule a densidade de cargas em  $(1, \pi/4, 3)$  e a carga total encerrada no cilindro de raio 1 m com  $-2 \leq z \leq 2$  m.

**Solução:**

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \cos^2 \phi$$

Em  $(1, \pi/4, 3)$ ,  $\rho_v = 1 \cdot \cos^2(\pi/4) = 0,5 \text{ C/m}^3$ . A carga total encerrada no cilindro pode ser determinada de duas maneiras diferentes.

**Método 1:** esse método está embasado diretamente na definição de carga total em um volume.

$$\begin{aligned} Q &= \int_v \rho_v dv = \int_v \rho \cos^2 \phi \rho d\phi d\rho dz \\ &= \int_{z=-2}^2 dz \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \int_{\rho=0}^1 \rho^2 d\rho = 4(\pi)(1/3) \\ &= \frac{4\pi}{3} \text{ C} \end{aligned}$$

**Método 2:** alternativamente, podemos usar a lei de Gauss.

$$\begin{aligned} Q &= \Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[ \int_s + \int_t + \int_b \right] \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \Psi_s + \Psi_t + \Psi_b \end{aligned}$$

Onde  $\Psi_s$ ,  $\Psi_t$  e  $\Psi_b$  são, respectivamente, os fluxos através das superfícies lateral (*sides*), da tampa superior (*top side*) e da tampa inferior (*bottom side*) do cilindro (veja Figura 3.17). Uma vez que  $\mathbf{D}$  não tem componente ao longo de  $\mathbf{a}_\rho$ ,  $\Psi_s = 0$ , para  $\Psi_t$ ,  $d\mathbf{S} = \rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z$ , então

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} z\rho \cos^2 \phi \rho d\phi d\rho \Big|_{z=2} = 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)\pi = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

e, para  $\Psi_b$ ,  $d\mathbf{S} = -\rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z$ , então

$$\begin{aligned} \Psi_b &= - \int_{\rho=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} z\rho \cos^2 \phi \rho d\phi d\rho \Big|_{z=-2} = 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$Q = \Psi = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ C}$$

conforme obtido anteriormente.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.8

Se  $\mathbf{D} = (2y^2 + z) \mathbf{a}_x + 4xy \mathbf{a}_y + xz \mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$ , determine

- (a) a densidade volumétrica de cargas em  $(-1, 0, 3)$ ;
- (b) o fluxo através de um cubo definido por  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  e  $0 \leq z \leq 1$ ;
- (c) a carga total encerrada no cubo.

**Resposta:** (a)  $-4 \text{ C/m}^3$ , (b)  $2 \text{ C}$ , (c)  $2 \text{ C}$ .

**EXEMPLO 4.9**

Uma distribuição de cargas, com simetria esférica, tem densidade dada por:

$$\rho_v = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{R}, & 0 \leq r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Determine  $\mathbf{E}$  em um ponto qualquer.

**Solução:**

A distribuição de cargas é semelhante à da Figura 4.16. Como existe simetria, podemos aplicar a lei de Gauss para determinar  $\mathbf{E}$ .

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} = \int \rho_v dv$$

(a) Para  $r < R$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 E_r 4\pi r^2 &= Q_{\text{enc}} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr \\ &= \int_0^r 4\pi r^2 \frac{\rho_0 r}{R} dr = \frac{\rho_0 \pi r^4}{R} \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R} \mathbf{a}_r$$

(b) Para  $r > R$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 E_r 4\pi r^2 &= Q_{\text{enc}} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr \\ &= \int_0^R \frac{\rho_0 r}{R} 4\pi r^2 dr + \int_R^r 0 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \pi \rho_0 R^3 \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 4.9**

Uma distribuição de cargas no espaço livre tem  $\rho_v = 2r \text{ nC/m}^3$  para  $0 \leq r \leq 10 \text{ m}$  e é zero em todos os outros pontos do espaço. Determine  $\mathbf{E}$  em  $r = 2 \text{ m}$  e  $r = 12 \text{ m}$ .

**Resposta:**  $226 \mathbf{a}_r \text{ V/m}$ ;  $3,927 \mathbf{a}_r \text{ kV/m}$ .

## 4.7 POTENCIAL ELÉTRICO

A partir das discussões nas seções precedentes, conclui-se que a intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  devido a uma distribuição de carga pode ser obtido a partir da lei de Coulomb, no caso geral, ou a partir da lei de Gauss, quando a distribuição de carga tem uma simetria. Uma outra maneira de determinar esse campo  $\mathbf{E}$  é a partir do potencial elétrico escalar  $V$  a ser definido nesta seção. Em certo sentido, este modo de determinar  $\mathbf{E}$  é mais fácil porque é menos trabalhoso operar com escalares do que com vetores.

Suponha que queremos movimentar uma carga pontual  $Q$ , de um ponto  $A$  para um ponto  $B$ , em um campo elétrico  $\mathbf{E}$ , como mostrado na Figura 4.18. A partir da lei de Coulomb, conclui-se que a força sobre  $Q$  é dada por  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$  tal que o *trabalho realizado* para provocar um deslocamento  $d\mathbf{l}$  da carga é dado por:

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.58)$$

O sinal negativo indica que o trabalho é feito por um agente externo. Dessa maneira, o trabalho total realizado, ou a energia potencial necessária, para movimentar  $Q$  de  $A$  para  $B$  é

$$W = -Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.59)$$

Ao dividir  $W$  por  $Q$  na equação (4.59), resulta no valor da energia potencial por unidade de carga. Essa quantidade, denotada por  $V_{AB}$ , é conhecida por *diferença de potencial* entre os pontos  $A$  e  $B$ . Assim:

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.60)$$

Observe que:

1. ao determinar  $V_{AB}$ ,  $A$  é o ponto inicial e  $B$  é o ponto final;
2. se  $V_{AB}$  é negativo, existe uma perda de energia potencial ao movimentarmos  $Q$  de  $A$  até  $B$ . Isso significa que o trabalho é feito pelo campo. Entretanto, se  $V_{AB}$  é positivo, existe um ganho em energia potencial no movimento; isto é, um agente externo é responsável por esse trabalho;
3.  $V_{AB}$  é independente da trajetória realizada (será mostrado um pouco mais adiante);
4.  $V_{AB}$  é medido em joules por coulomb, ou mais comumente em volts (V).

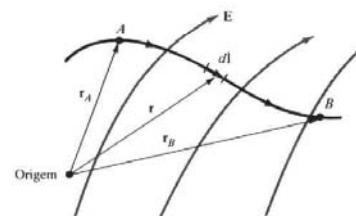


Figura 4.18 Deslocamento de uma carga pontual  $Q$  em um campo eletrostático  $\mathbf{E}$ .

Exemplificando, se o campo  $\mathbf{E}$  na Figura 4.18 é devido a uma carga pontual  $Q$  localizada na origem, então,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (4.61)$$

de forma que a equação (4.60) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} V_{AB} &= - \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \end{aligned} \quad (4.62a)$$

ou

$$V_{AB} = V_B - V_A \quad (4.62b)$$

onde  $V_B$  e  $V_A$  são os *potenciais* (ou *potenciais absolutos*) nos pontos  $B$  e  $A$ , respectivamente. Assim, a diferença de potencial  $V_{AB}$  pode ser considerada como o potencial de  $B$  em relação a  $A$ . Em problemas envolvendo cargas pontuais, é costume considerar um ponto no infinito como a referência, isto é, consideramos que o potencial no infinito é zero. Dessa forma, se  $V_A = 0$  quando  $r_A \rightarrow \infty$  na equação (4.62), o potencial em qualquer ponto ( $r_B - r$ ) devido a uma carga pontual  $Q$  localizada na origem é dado por:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.63)$$

Note, a partir da equação (4.62a), que, pelo fato de  $\mathbf{E}$  apontar na direção radial, qualquer contribuição ao potencial devido ao deslocamento nas direções  $\theta$  ou  $\phi$  é descartada pelo produto-ponto  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E \cos \theta \, dl = E \, dr$ . Portanto, a diferença de potencial  $V_{AB}$  é independente da trajetória, como afirmado anteriormente.

**O potencial em qualquer ponto é a diferença de potencial entre esse ponto e um ponto escolhido no qual o potencial é arbitrado como zero.**

Em outras palavras, considerando potencial zero no infinito, o potencial a uma distância  $r$  da carga pontual é o trabalho realizado, por unidade de carga, por um agente externo, ao deslocar uma carga teste do infinito até esse ponto. Dessa forma:

$$V = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.64)$$

Se a carga pontual  $Q$  na equação (4.63) não está localizada na origem, mas em um ponto cujo vetor posição é  $\mathbf{r}'$ , o potencial  $V(x, y, z)$  ou, simplesmente  $V(\mathbf{r})$ , em  $\mathbf{r}$  torna-se:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.65)$$

Consideramos, até agora, o potencial elétrico devido a uma carga pontual. As mesmas considerações se aplicam a outros tipos de distribuição de cargas porque qualquer distribuição de cargas pode ser considerada como constituída de cargas pontuais. O princípio da superposição, que aplicamos para campos elétricos, aplica-se também a potenciais. Para  $n$  cargas pontuais  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , localizadas em pontos com vetores posição  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ , o potencial em  $\mathbf{r}$  é dado por

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

ou

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \quad (\text{ponto de cargas}) \quad (4.66)$$

Para distribuições contínuas de cargas, substituímos  $Q_k$  na equação (4.66) pelo elemento de carga  $\rho_l dl$ ,  $\rho_s dS$  ou  $\rho_v dv$  e a soma se transforma em uma integração, tal que o potencial em  $\mathbf{r}$  pode ser escrito como

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_l(\mathbf{r}')dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{linha de carga}) \quad (4.67)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{superfície de carga}) \quad (4.68)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{volume de carga}) \quad (4.69)$$

onde as coordenadas-linha são usadas para denotar a localização do ponto-fonte; as demais se referem à localização do ponto de interesse (ponto no qual  $V$  vai ser calculado).

É preciso destacar que:

1. Ao obter as equações (4.63) a (4.69), o ponto de potencial zero (referência) foi escolhido, arbitrariamente, no infinito. Se qualquer outro ponto for escolhido como referência, a equação (4.65), por exemplo, torna-se

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C \quad (4.70)$$

onde  $C$  é uma constante determinada no ponto de referência escolhido. O mesmo raciocínio se aplica às equações (4.63) a (4.69).

2. O potencial em um ponto pode ser determinado de duas maneiras distintas, dependendo do que for conhecido: a distribuição de cargas ou o campo elétrico  $\mathbf{E}$ . Se a distribuição de cargas for conhecida, usamos uma das equações (4.65) a (4.70), dependendo da distribuição de cargas. Se  $\mathbf{E}$  for conhecido, simplesmente usamos

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + C \quad (4.71)$$

A diferença de potencial  $V_{AB}$  pode ser determinada, genericamente, a partir de:

$$V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{W}{Q} \quad (4.72)$$

#### EXEMPLO 4.10

Duas cargas pontuais  $-4 \mu\text{C}$  e  $5 \mu\text{C}$  estão localizadas em  $(2, -1, 3)$  e em  $(0, 4, -2)$ , respectivamente. Determine o potencial em  $(1, 0, 1)$ , considerando potencial zero no infinito.

**Solução:**

Seja

$$Q_1 = -4 \mu\text{C}, \quad Q_2 = 5 \mu\text{C}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + C_0$$

Se  $V(\infty) = 0$ ,  $C_0 = 0$ ,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |(1, 0, 1) - (2, -1, 3)| = |(-1, 1, -2)| = \sqrt{6}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = |(1, 0, 1) - (0, 4, -2)| = |(1, -4, 3)| = \sqrt{26}$$

Donde

$$V(1, 0, 1) = \frac{10^{-6}}{4\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi}} \left[ \frac{-4}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{26}} \right]$$

$$= 9 \times 10^3 (-1,633 + 0,9806)$$

$$= -5,872 \text{ kV}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.10

Se uma carga pontual de  $3 \mu\text{C}$  estiver localizada na origem, além das duas cargas do exemplo 4.10, determine o potencial em  $(-1, 5, 2)$ , considerando que  $V(\infty) = 0$ .

**Resposta:** 10,23 kV.

#### EXEMPLO 4.11

Uma carga pontual de  $5 \text{ nC}$  está localizada em  $(-3, 4, 0)$ , enquanto que uma linha em  $y = 1$  e  $z = 1$  está carregada uniformemente com  $2 \text{ nC/m}$ .

- (a) Se  $V = 0 \text{ V}$  em  $O(0, 0, 0)$ , determine  $V$  em  $A(5, 0, 1)$ .
- (b) Se  $V = 100 \text{ V}$  em  $B(1, 2, 1)$ , determine  $V$  em  $C(-2, 5, 3)$ .
- (c) Se  $V = -5 \text{ V}$  em  $O$ , determine  $V_{BC}$ .

#### Solução:

Seja o potencial em um ponto qualquer dado por

$$V = V_Q + V_L$$

onde  $V_Q$  e  $V_L$  são as contribuições ao  $V$ , nesse ponto, devido à carga pontual e à linha de cargas, respectivamente. Para a carga pontual,

$$V_Q = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

Para a linha infinita de cargas:

$$V_L = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho \cdot d\rho \mathbf{a}_\rho$$

$$= - \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + C_2$$

Portanto,

$$V = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

Onde  $C = C_1 + C_2 = \text{constante}$ ;  $\rho$  é a distância perpendicular da linha  $y = 1$  e  $z = 1$  ao ponto de interesse; e  $r$  é a distância da carga pontual ao ponto de interesse.

(a) Se  $V = 0$  em  $O(0, 0, 0)$  e  $V$  em  $A(5, 0, 1)$  deve ser determinado, precisamos primeiro obter os valores de  $\rho$  e  $r$  em  $O$  e em  $A$ . Determinar  $r$  é fácil; usamos a equação (2.31). Para determinar  $\rho$  para qualquer ponto  $(x, y, z)$ , utilizamos o fato de que  $\rho$  é a distância perpendicular do ponto  $(x, y, z)$  à linha  $y = 1$  e  $z = 1$ , paralela ao eixo  $x$ . Portanto,  $\rho$  é a distância entre  $(x, y, z)$  e  $(x, 1, 1)$ , porque o vetor distância entre esses dois pontos é perpendicular a  $\mathbf{a}_x$ . Assim:

$$\rho = |(x, y, z) - (x, 1, 1)| = \sqrt{(y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Aplicando essa equação para  $\rho$  e a equação (2.31) para  $r$ , nos pontos  $O$  e  $A$ , obtemos:

$$\rho_O = |(0, 0, 0) - (0, 1, 1)| = \sqrt{2}$$

$$r_O = |(0, 0, 0) - (-3, 4, 0)| = 5$$

$$\rho_A = |(5, 0, 1) - (5, 1, 1)| = 1$$

$$r_A = |(5, 0, 1) - (-3, 4, 0)| = 9$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V_O - V_A &= -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_O}{\rho_A} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_A} \right] \\ &= \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \ln \frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{5 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \left[ \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right] \\ 0 - V_A &= -36 \ln \sqrt{2} + 45 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

ou

$$V_A = 36 \ln \sqrt{2} - 4 = 8,477 \text{ V}$$

Observe que evitamos calcular a constante  $C$  subtraíndo um potencial do outro, não importando qual deles é subtraído do outro.

(b) Se  $V = 100$  V em  $B(1, 2, 1)$  e  $V$  em  $C(-2, 5, 3)$  deve ser determinado, fazemos

$$\rho_B = |(1, 2, 1) - (1, 1, 1)| = 1$$

$$r_B = |(1, 2, 1) - (-3, 4, 0)| = \sqrt{21}$$

$$\rho_C = |(-2, 5, 3) - (-2, 1, 1)| = \sqrt{20}$$

$$r_C = |(-2, 5, 3) - (-3, 4, 0)| = \sqrt{11}$$

$$\begin{aligned} V_C - V_B &= -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_O}{\rho_B} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B} \right] \\ V_C - 100 &= -36 \ln \frac{\sqrt{20}}{1} + 45 \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{21}} \right] \\ &= -50,175 \text{ V} \end{aligned}$$

ou

$$V_C = 49,825 \text{ V}$$

(c) Para determinar a diferença de potencial entre dois pontos, não necessitamos estabelecer uma referência de potencial, caso uma referência comum for considerada.

$$\begin{aligned} V_{BC} &= V_C - V_B = 49,825 - 100 \\ &= -50,175 \text{ V} \end{aligned}$$

como obtido na parte (b).

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.11

Uma carga pontual de 5 nC está localizada na origem. Se  $V = 2\text{V}$  em  $(0, 6, -8)$ , determine:

- (a) o potencial em  $A(-3, 2, 6)$ ;
- (b) o potencial em  $B(1, 5, 7)$ ;
- (c) a diferença de potencial  $V_{AB}$ .

**Resposta:** (a) 3,929 V; (b) 2,696 V; (c) -1,233 V.

## 4.8 RELAÇÃO ENTRE O CAMPO ELÉTRICO E O POTENCIAL ELÉTRICO – EQUAÇÃO DE MAXWELL

Conforme mostrado na seção precedente, a diferença de potencial entre dois pontos A e B independe da trajetória percorrida. Por essa razão,

$$V_{BA} = -V_{AB}$$

isto é,  $V_{BA} + V_{AB} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

ou

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.73)$$

Isso mostra que a integral de linha de  $\mathbf{E}$  ao longo de uma trajetória fechada, como mostrado na Figura 4.19, deve ser zero. Fisicamente, isso implica que não é realizado trabalho ao se movimentar uma carga, ao longo de uma trajetória fechada, no interior de um campo eletrostático. Aplicando o teorema de Stokes na equação (4.73), resulta em

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

ou

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (4.74)$$

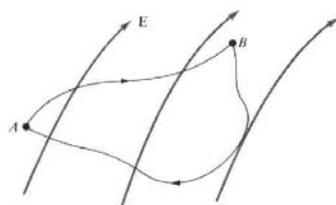


Figura 4.19 Natureza conservativa do campo eletrostático.

Qualquer campo vetorial que satisfaça as equações (4.73) ou (4.74) é considerado conservativo, ou irrotacional, conforme discutido na Seção 3.8. Assim, um campo eletrostático é um campo conservativo. As equações (4.73) ou (4.74) são referidas como *equação de Maxwell* para campos eletrostáticos (a segunda equação de Maxwell a ser obtida nesse texto). A equação (4.73) é a forma integral e a equação (4.74) é a forma diferencial. Ambas descrevem a natureza conservativa do campo eletrostático.

Partindo de nossa definição de potencial,  $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , segue que

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

Mas

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Comparando as duas expressões para  $dV$ , obtemos:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (4.75)$$

Assim,

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \quad (4.76)$$

isto é, o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é o gradiente de  $V$ . O sinal negativo mostra que a direção de  $\mathbf{E}$  é oposta à direção em que  $V$  cresce.  $\mathbf{E}$  está orientado dos níveis mais altos para os níveis mais baixos de  $V$ . Já que o rotacional do gradiente de uma função escalar é sempre zero ( $\nabla \times \nabla V = 0$ ), a equação (4.74), obviamente, implica que  $\mathbf{E}$  deve ser o gradiente de alguma função escalar. Dessa forma, a equação (4.76) poderia ter sido obtida da equação (4.74).

A equação (4.76) mostra um outro caminho para obter o campo  $\mathbf{E}$ , independente do uso da lei de Coulomb ou da lei de Gauss. Isto é, se o campo potencial  $V$  é conhecido, o  $\mathbf{E}$  pode ser encontrado usando a equação (4.76). Pode parecer surpreendente que uma única função  $V$  possa conter toda a informação expressa pelas três componentes de  $\mathbf{E}$ . Porém, nesse caso, as três componentes de  $\mathbf{E}$  não são independentes uma das outras. Elas estão explicitamente relacionadas pela condição  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ . O que essa formulação do potencial faz é explorar essa propriedade tirando dela o máximo proveito e, dessa forma, reduzindo um problema vetorial a um problema escalar.

#### EXEMPLO 4.12

Dado o potencial  $V = \frac{10}{r^2} \sin \theta \cos \phi$ ,

- (a) determine a densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$  em  $(2, \pi/2, 0)$ ;
- (b) calcule o trabalho realizado ao se movimentar uma carga de  $10 \mu\text{C}$  do ponto  $A(1, 30^\circ, 120^\circ)$  até o ponto  $B(4, 90^\circ, 60^\circ)$ .

**Solução:**

(a)  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$

Mas

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V = -\left[ \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right] \\ &= \frac{20}{r^3} \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r - \frac{10}{r^3} \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta + \frac{10}{r^3} \sin \phi \mathbf{a}_\phi\end{aligned}$$

Em  $(2, \pi/2, 0)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} (r = 2, \theta = \pi/2, \phi = 0) = \epsilon_0 \left( \frac{20}{8} \mathbf{a}_r - 0 \mathbf{a}_\theta + 0 \mathbf{a}_\phi \right) \\ &= 2.5 \epsilon_0 \mathbf{a}_r \text{ C/m}^2 = 22.1 \text{ a}_r \text{ pC/m}^2\end{aligned}$$

(b) O trabalho realizado pode ser encontrado de duas maneiras, usando  $\mathbf{E}$  ou  $V$ .**Método 1:**

$$W = -Q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{ou} \quad -\frac{W}{Q} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

e como o campo eletrostático é conservativo, o caminho de integração é irrelevante. Consequentemente, o trabalho realizado para movimentar  $Q$  de  $A(1, 30^\circ, 120^\circ)$  até  $B(4, 90^\circ, 60^\circ)$  é o mesmo que o realizado para movimentar  $Q$  de  $A$  até  $A'$ , de  $A'$  até  $B'$  e de  $B'$  até  $B$ , onde:

$$\begin{array}{ll} A(1, 30^\circ, 120^\circ) & B(4, 90^\circ, 60^\circ) \\ \downarrow d\mathbf{l} = dr \mathbf{a}_r & \uparrow d\mathbf{l} = r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi \\ A'(4, 30^\circ, 120^\circ) & \rightarrow B'(4, 90^\circ, 120^\circ). \end{array}$$

Isto é, em vez de movimentar a carga  $Q$  diretamente de  $A$  até  $B$ , a carga é movimentada de  $A \rightarrow A'$ ,  $A' \rightarrow B'$  e de  $B' \rightarrow B$ , tal que somente uma variável se altera por vez. Isso torna a integral de linha muito mais fácil de calcular. Assim,

$$\begin{aligned}-\frac{W}{Q} &= -\frac{1}{Q} (W_{AA'} + W_{A'B'} + W_{B'B}) \\ &= \left( \int_{AA'} + \int_{A'B'} + \int_{B'B} \right) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{r=1}^4 \frac{20 \sin \theta \cos \phi}{r^3} dr \Big|_{\theta=30^\circ, \phi=120^\circ} \\ &\quad + \int_{\theta=30^\circ}^{90^\circ} \frac{-10 \cos \theta \cos \phi}{r^3} r d\theta \Big|_{r=4, \phi=120^\circ} \\ &\quad + \int_{\phi=120^\circ}^{60^\circ} \frac{10 \sin \phi}{r^3} r \sin \theta d\phi \Big|_{r=4, \theta=90^\circ} \\ &= 20 \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{-1}{2} \right) \left[ \frac{1}{2r^2} \Big|_{r=1}^4 \right] \\ &\quad - \frac{10}{16} \frac{(-1)}{2} \sin \theta \Big|_{30^\circ}^{90^\circ} + \frac{10}{16} (1) \left[ -\cos \phi \Big|_{120^\circ}^{60^\circ} \right] \\ -\frac{W}{Q} &= \frac{-75}{32} + \frac{5}{32} - \frac{10}{16}\end{aligned}$$

ou

$$W = \frac{45}{16} Q = 28,125 \mu\text{J}$$

**Método 2:**Já que  $V$  é conhecido, esse método é muito mais fácil.

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = QV_{AB} \\ &= Q(V_B - V_A) \\ &= 10 \left( \frac{10}{16} \operatorname{sen} 90^\circ \cos 60^\circ - \frac{10}{1} \operatorname{sen} 30^\circ \cos 120^\circ \right) \cdot 10^{-6} \\ &= 10 \left( \frac{10}{32} - \frac{-5}{2} \right) \cdot 10^{-6} \\ &= 28,125 \mu\text{J} \end{aligned}$$

como obtido anteriormente.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 4.12**Dado  $\mathbf{E} = (3x^2 + y) \mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y \text{ kV/m}$ , determine o trabalho realizado ao movimentar uma carga de  $-2 \mu\text{C}$  do ponto  $(0, 5, 0)$  até o ponto  $(2, -1, 0)$  usando a trajetória:

- (a)  $(0, 5, 0) \rightarrow (2, 5, 0) \rightarrow (2, -1, 0)$ ;  
 (b)  $y = 5 - 3x$ .

**Resposta:** (a)  $12 \text{ mJ}$ , (b)  $12 \text{ mJ}$ .**4.9 O DIPOLO ELÉTRICO E AS LINHAS DE FLUXO**

Tem-se um **dipolo elétrico** quando duas cargas pontuais de igual magnitude e sinais opostos estão separadas por uma pequena distância.

A importância do campo devido a um dipolo elétrico ficará evidente nos próximos capítulos.

Considere o dipolo mostrado na Figura 4.20. O potencial em um ponto  $P(r, \theta, \phi)$  é dado por

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right] \quad (4.77)$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  são as distâncias entre  $P$  e  $+Q$  e entre  $P$  e  $-Q$ , respectivamente. Se  $r \gg d$ ,  $r_2 - r_1 \approx d \cos \theta$ ,  $r_1 r_2 \approx r^2$  a equação (4.77) torna-se

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} \quad (4.78)$$

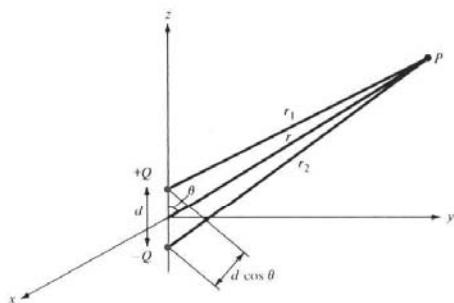


Figura 4.20 Um dipolo elétrico.

Já que  $d \cos \theta = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r$ , onde  $\mathbf{d} = d \mathbf{a}_z$ , se definirmos

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad (4.79)$$

como *momento de dipolo*, a equação (4.78) pode ser escrita como

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.80)$$

Note que o momento de dipolo  $\mathbf{p}$  está orientado de  $-Q$  a  $+Q$ . Se o centro do dipolo não está na origem, mas em  $\mathbf{r}'$ , a equação (4.80) torna-se

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.81)$$

O campo elétrico devido ao dipolo com centro na origem, mostrado na Figura 4.20, pode ser obtido diretamente das equações (4.76) e (4.78) como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V = -\left[ \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta \right] \\ &= \frac{Qd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_r + \frac{Qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_\theta \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \quad (4.82)$$

onde  $p = |\mathbf{p}| = Qd$ .

Observe que uma carga pontual é um *monopolo* e seu campo elétrico varia inversamente com  $r^2$ , enquanto seu campo potencial varia inversamente com  $r$  [veja equações (4.61) e (4.63)]. Das equações (4.80) e (4.82), observamos que o campo elétrico devido ao dipolo varia inversamente com  $r^3$ , enquanto seu potencial varia inversamente com  $r^2$ . Os campos elétricos devido a multipolos de ordens sucessivamente superiores (tais como um *quadrupolo*, que consiste de dois dipolos, ou um *octupolo*, que consiste de dois quadrupolos) varia inversamente com  $r^4, r^5, r^6, \dots$ , enquanto seus potenciais correspondentes variam inversamente com  $r^3, r^4, r^5, \dots$ .

O conceito de *linhas de fluxo elétrico* (ou *linhas de força elétrica*, como são algumas vezes denominadas) foi introduzido por Michael Faraday (1791–1867), na sua investigação experimental, como uma maneira de visualizar o campo elétrico.

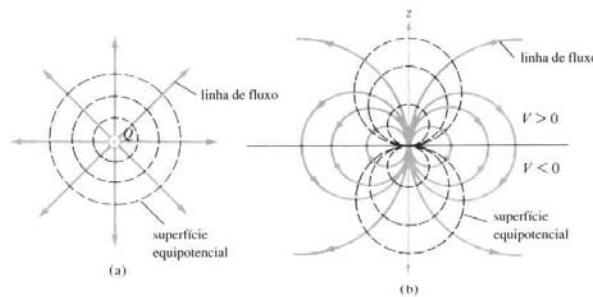


Figura 4.21 Superfícies equipotenciais para (a) uma carga pontual e (b) para um dipolo elétrico.

**Uma linha de fluxo elétrico** é uma trajetória ou uma linha imaginária desenhada de tal modo que sua orientação em qualquer ponto é a orientação do campo elétrico nesse ponto.

Em outras palavras, são as linhas para as quais o vetor densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$  é tangencial em cada ponto.

Qualquer superfície na qual o potencial elétrico é o mesmo em toda a sua extensão é conhecida como uma *superfície equipotencial*. A interseção de uma superfície equipotencial e um plano resulta em uma trajetória ou uma linha conhecida como *linha equipotencial*. Nenhum trabalho é realizado ao movimentar uma carga de um ponto a outro ao longo de uma linha ou superfície equipotencial ( $V_A - V_B = 0$ ) e, por essa razão,

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.83)$$

sobre a linha ou sobre a superfície. A partir da equação (4.83), podemos concluir que as linhas de força ou linhas de fluxo (ou a direção de  $\mathbf{E}$ ) são sempre normais às superfícies equipotenciais. Exemplos de superfícies equipotenciais para carga pontual e para um dipolo são mostrados na Figura 4.21. Note, a partir desses exemplos, que a direção de  $\mathbf{E}$  é perpendicular às linhas equipotenciais em qualquer lugar.

Veremos a importância das superfícies equipotenciais quando discutirmos a presença de corpos condutores em campos elétricos. Por agora basta dizer que esses corpos são volumes equipotenciais.

Uma aplicação típica de mapeamento de campo (linhas de fluxo e superfícies equipotenciais) é encontrada no diagnóstico de doenças cardíacas. O coração humano bate em resposta a uma diferença de potencial de campo elétrico interna. O coração pode ser caracterizado como um dipolo com um mapa de campo similar ao da Figura 4.21(b). Tal mapa de campo é útil para detectar posição anormal do coração.<sup>6</sup> Na Seção 15.2, discutiremos uma técnica numérica para fazer mapeamento de campo.

### EXEMPLO 4.13

Dois dipolos com momentos de dipolo  $-5\mathbf{a}_z$  nC/m e  $9\mathbf{a}_z$  nC/m estão localizados nos pontos  $(0, 0, -2)$  e  $(0, 0, 3)$ , respectivamente. Determine o potencial na origem.

**Solução:**

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^2 \frac{\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{r}_k}{4\pi\epsilon_0 r_k^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3} \right] \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Para mais informações sobre esse assunto, ver R. Plonsey, *Bioelectric Phenomena*. New York: Mc Graw-Hill, 1969.

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= -5\mathbf{a}_z, & \mathbf{r}_1 &= (0, 0, 0) - (0, 0, -2) = 2\mathbf{a}_z, & r_1 &= |\mathbf{r}_1| = 2 \\ \mathbf{p}_2 &= 9\mathbf{a}_z, & \mathbf{r}_2 &= (0, 0, 0) - (0, 0, 3) = -3\mathbf{a}_z, & r_2 &= |\mathbf{r}_2| = 3\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} \left[ \frac{-10}{2^3} - \frac{27}{3^3} \right] \cdot 10^{-9} \\ &= -20,25 \text{ V}\end{aligned}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.13

Um dipolo elétrico de  $100 \text{ a}_z \text{ pC} \cdot \text{m}$  está localizado na origem. Determine  $V$  e  $\mathbf{E}$  nos pontos:  
(a)  $(0, 0, 10)$ ;  
(b)  $(1, \pi/3, \pi/2)$ .

**Resposta:** (a)  $9 \text{ mV}$ ,  $1,8 \text{ a}_z \text{ mV/m}$ ; (b)  $0,45 \text{ V}$ ,  $0,9 \text{ a}_z + 0,7794\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$ .

## 4.10 DENSIDADE DE ENERGIA EM CAMPOS ELETROSTÁTICOS

Para determinar a energia armazenada em um arranjo de cargas, precisamos, em primeiro lugar, determinar a quantidade de trabalho necessário para reunir essas cargas. Suponhamos que se posicione três cargas pontuais  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  em uma região do espaço inicialmente vazia, região sombreada na Figura 4.22. Não há necessidade de se realizar trabalho para transferir  $Q_1$  do infinito até  $P_1$  porque o espaço, inicialmente, está livre de cargas e não há campo elétrico presente [da equação (4.59),  $W = 0$ ]. O trabalho realizado para transferir  $Q_2$  do infinito até  $P_2$  é igual ao produto de  $Q_2$  pelo potencial  $V_{21}$  em  $P_2$  devido a  $Q_1$ . De modo similar, o trabalho realizado para posicionar  $Q_3$  em  $P_3$  é igual a  $Q_3(V_{32} + V_{31})$ , onde  $V_{32}$  e  $V_{31}$  são os potenciais em  $P_3$  devido a  $Q_2$  e  $Q_1$ , respectivamente. Portanto, o trabalho total realizado para posicionar as três cargas é:

$$\begin{aligned}W_E &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= 0 + Q_2 V_{21} + Q_3 (V_{31} + V_{32})\end{aligned}\quad (4.84)$$

Se as cargas fossem posicionadas na ordem reversa,

$$\begin{aligned}W_E &= W_3 + W_2 + W_1 \\ &= 0 + Q_2 V_{23} + Q_1 (V_{12} + V_{13})\end{aligned}\quad (4.85)$$

onde  $V_{23}$  é o potencial em  $P_2$  devido a  $Q_3$  e  $V_{12}$  e  $V_{13}$  são, respectivamente, os potenciais em  $P_1$  devido a  $Q_2$  e a  $Q_3$ . Somando as equações (4.84) e (4.85), obtém-se

$$\begin{aligned}2W_E &= Q_1(V_{12} + V_{13}) + Q_2(V_{21} + V_{23}) + Q_3(V_{31} + V_{32}) \\ &= Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3\end{aligned}$$

ou

$$W_E = \frac{1}{2} (Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3)\quad (4.86)$$

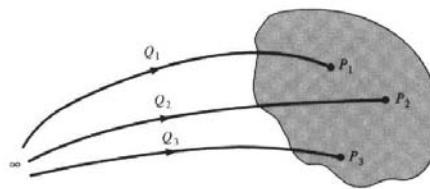


Figura 4.22 Arranjo de cargas.

onde  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  são os potenciais totais em  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , respectivamente. Em geral, se houver  $n$  cargas pontuais, a equação (4.86) torna-se:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k V_k \quad (\text{em joules}) \quad (4.87)$$

Se, ao invés de cargas pontuais, a região tiver uma distribuição contínua de cargas, o somatório na equação (4.87) torna-se uma integral, isto é:

$$W_E = \frac{1}{2} \int \rho_L V dl \quad (\text{linha de carga}) \quad (4.88)$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \rho_S V dS \quad (\text{superfície de carga}) \quad (4.89)$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \rho_v V dv \quad (\text{volume de carga}) \quad (4.90)$$

Já que  $\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$ , a equação (4.90) pode ser reescrita como:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv \quad (4.91)$$

Ainda, para qualquer vetor  $\mathbf{A}$  e escalar  $V$ , as identidades

$$\nabla \cdot V\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \nabla V + V(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

ou

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})V = \nabla \cdot V\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla V \quad (4.92)$$

são válidas. Aplicando a identidade da equação (4.92) na equação (4.91), obtém-se:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v (\nabla \cdot V\mathbf{D}) dv - \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv \quad (4.93)$$

Aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo do lado direito dessa equação, temos:

$$W_E = \frac{1}{2} \oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv \quad (4.94)$$

Da Seção 4.9, relembramos que  $V$  varia com  $1/r$  e  $\mathbf{D}$  com  $1/r^2$  para cargas pontuais;  $V$  varia com  $1/r^2$  e  $\mathbf{D}$  com  $1/r^3$  para dipolos e assim por diante. Portanto,  $V\mathbf{D}$  no primeiro termo do lado direito da equação (4.94) deve variar pelo menos com  $1/r^3$ , enquanto  $dS$  varia com  $r^2$ . Conseqüentemente, a primei-

ra integral na equação (4.94) deve tender a zero à medida que a superfície  $S$  torna-se cada vez maior. Por essa razão, a equação (4.94) reduz-se a

$$W_E = -\frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv = \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv \quad (4.95)$$

e já que  $\mathbf{E} = -\nabla V$  e  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dv} \quad (4.96)$$

Disso, podemos definir a densidade de energia eletrostática  $w_E$  (em J/m<sup>3</sup>) como

$$w_E = \frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon_0} \quad (4.97)$$

de forma que a equação (4.95) possa ser escrita como

$$W_E = \int w_E dv \quad (4.98)$$

#### EXEMPLO 4.14

Três cargas pontuais – 1 nC, 4 nC e 3 nC estão localizadas em (0, 0, 0), (0, 0, 1) e (1, 0, 0), respectivamente. Determine a energia interna do sistema.

**Solução:**

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= 0 + Q_2 V_{21} + Q_3 (V_{31} + V_{32}) \\ &= Q_2 \cdot \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |(0,0,1) - (0,0,0)|} \\ &\quad + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1}{|(1,0,0) - (0,0,0)|} + \frac{Q_2}{|(1,0,0) - (0,0,1)|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + \frac{Q_2 Q_3}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{10^{-9}}{\frac{36\pi}{36\pi}} \left( -4 - 3 + \frac{12}{\sqrt{2}} \right) \cdot 10^{-18} \\ &= 9 \left( \frac{12}{\sqrt{2}} - 7 \right) \text{nJ} = 13,37 \text{nJ} \end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 Q_k V_k = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3) \\ &= \frac{Q_1}{2} \left[ \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(1)} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0(1)} \right] + \frac{Q_2}{2} \left[ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(1)} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2})} \right] \\ &\quad + \frac{Q_3}{2} \left[ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(1)} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2})} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + \frac{Q_2 Q_3}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= 9 \left( \frac{12}{\sqrt{2}} - 7 \right) \text{nJ} = 13,37 \text{nJ}
 \end{aligned}$$

como obtido anteriormente.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 4.14

As cargas pontuais  $Q_1 = 1 \text{ nC}$ ,  $Q_2 = -2 \text{ nC}$ ,  $Q_3 = 3 \text{ nC}$  e  $Q_4 = -4 \text{ nC}$  estão posicionadas, uma por vez e nessa ordem, nos pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, -1)$  e  $(0, 0, 1)$ , respectivamente. Calcule a energia armazenada no sistema depois do posicionamento de cada uma das cargas.

**Resposta:**  $0$ ;  $-18 \text{ nJ}$ ;  $-29,18 \text{ nJ}$ ;  $-68,27 \text{ nJ}$ .

#### EXEMPLO 4.15

Uma distribuição de carga com simetria esférica tem densidade

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_0, & 0 \leq r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Determine  $V$  em qualquer ponto e a energia armazenada na região  $r < R$ .

##### Solução:

O campo  $\mathbf{D}$  já foi determinado na Seção 4.6D usando a Lei de Gauss.

(a) Para  $r \geq R$ ,  $\mathbf{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$ .

Sendo  $\mathbf{E}$  conhecido,  $V$  é determinado por:

$$\begin{aligned}
 V &= - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr \\
 &= \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1, \quad r \geq R
 \end{aligned}$$

Uma vez que  $V(r = \infty) = 0$ ,  $C_1 = 0$ .

(b) Para  $r \leq R$ ,  $\mathbf{E} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_r$ .

Donde,

$$\begin{aligned}
 V &= - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int r dr \\
 &= - \frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + C_2
 \end{aligned}$$

Da parte (a)  $V(r = R) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0}$ . Portanto,

$$\frac{R^2 \rho_0}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0 R^3}{6\epsilon_0} + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{R^2 \rho_0}{2\epsilon_0}$$

e

$$V = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

Assim, a partir de (a) e (b)

$$V = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r}, & r \geq R \\ \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2), & r \leq R \end{cases}$$

(c) A energia armazenada é dada por

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dv$$

Para  $r \leq R$ ,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_r$$

Portanto,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\rho_0^2}{9\epsilon_0^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr \\ &= \frac{\rho_0^2}{18\epsilon_0} 4\pi \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^R = \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{45\epsilon_0} \text{ J} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 4.15**Se  $V = x - y + 2z$  V, determine  $\mathbf{E}$  em (1, 2, 3) e a energia eletrostática armazenada em um cubo de lado 2 m, centrado na origem.**Resposta:**  $-3 \mathbf{a}_x - 2 \mathbf{a}_y$  V/m; 0,2358 nJ.**RESUMO**

1. As duas leis fundamentais para campos eletrostáticos (lei de Coulomb e lei de Gauss) são apresentadas nesse capítulo. A lei da força de Coulomb estabelece que

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

2. Tendo por base a lei de Coulomb, definimos a intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  como força por unidade de carga, isto é:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R = \frac{Q \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (\text{somente para cargas pontuais})$$

3. Para uma distribuição contínua de cargas, a carga total é dada por

$$Q = \int \rho_L dl \quad \text{para uma linha de carga}$$

$$Q = \int \rho_S dS \quad \text{para uma superfície de carga}$$

$$Q = \int \rho_v dv \quad \text{para um volume de carga}$$

O campo  $\mathbf{E}$  devido a uma distribuição contínua de cargas é obtido, a partir da fórmula para a carga pontual, substituindo  $Q$  por  $dQ = \rho_L dl$ ,  $dQ = \rho_S dS$  ou  $dQ = \rho_v dv$  e integrando sobre a linha, a superfície ou o volume, respectivamente.

4. Para uma linha infinita de carga,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$

e, para uma lâmina infinita de carga:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n$$

5. A densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$  está relacionada com a intensidade de campo elétrico (no espaço livre) na forma de

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

O fluxo elétrico através da superfície  $S$  é expresso por

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

6. A lei de Gauss estabelece que o fluxo elétrico líquido que penetra uma superfície fechada é igual a carga elétrica total envolvida por essa superfície, isto é,  $\Psi = Q_{encerrado}$ . Portanto,

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc} = \int \rho_v dv$$

ou

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (\text{primeira das equações de Maxwell a ser obtida})$$

Quando a distribuição de cargas é simétrica tal que a superfície gaussiana (onde  $\mathbf{D} = D_n \mathbf{a}_n$  é constante) possa ser definida, a lei de Gauss é útil para determinar  $\mathbf{D}$ , isto é,

$$D_n \oint dS = Q_{enc} \quad \text{ou} \quad D_n = \frac{Q_{enc}}{S}$$

7. O trabalho total realizado, ou a energia potencial elétrica, para movimentar uma carga pontual  $Q$  de um ponto  $A$  até um ponto  $B$ , em um campo elétrico  $\mathbf{E}$ , é

$$W = -Q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

8. O potencial em  $\mathbf{r}$ , devido a uma carga pontual  $Q$  em  $\mathbf{r}'$ , é

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C$$

onde  $C$  é dado em um ponto de referência de potencial; por exemplo:  $C = 0$  se  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ . Para determinar o potencial devido a uma distribuição contínua de carga, substituímos  $Q$  na fórmula para carga pontual por  $dQ = \rho_L dl$ ,  $dQ = \rho_S dS$  ou  $dQ = \rho_V dv$  e integramos sobre uma linha, uma superfície ou um volume, respectivamente.

9. Se a distribuição de carga não é conhecida, mas a intensidade de campo  $\mathbf{E}$  é dada, determinamos o potencial usando:

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + C$$

10. A diferença de potencial  $V_{AB}$ , o potencial em  $B$  em relação ao potencial em  $A$ , é dada por:

$$V_{AB} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{W}{Q} = V_B - V_A$$

11. Já que o campo eletrostático é conservativo (o trabalho líquido realizado ao longo de uma trajetória fechada em um campo estático  $\mathbf{E}$  é zero),

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

ou

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{segunda equação de Maxwell a ser obtida})$$

12. Dado um campo potencial, o campo elétrico correspondente é determinado usando:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

13. Para um dipolo elétrico centrado em  $\mathbf{r}'$ , com momento de dipolo  $\mathbf{p}$ , o potencial em  $\mathbf{r}$  é dado por:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

14. O vetor  $\mathbf{D}$  é tangencial às linhas de fluxo elétrico em cada ponto. Uma superfície equipotencial (ou linha) é uma superfície (ou linha) em que  $V = \text{constante}$ . Em cada ponto, a linha equipotencial é ortogonal à linha de fluxo elétrico.

15. A energia eletrostática devida a  $n$  cargas pontuais é:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k V_k$$

Para uma distribuição contínua de cargas em um volume,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_v \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 dv$$

## QUESTÕES DE REVISÃO

- 4.1 Duas cargas pontuais  $Q_1 = 1 \text{ nC}$  e  $Q_2 = 2 \text{ nC}$  estão distantes uma da outra. Quais das seguintes afirmações são incorretas?

- (a) A força sobre  $Q_1$  é repulsiva.

- (b) A força sobre  $Q_2$  é igual em magnitude à força sobre  $Q_1$ .
- (c) À medida que a distância entre as cargas diminui, a força sobre  $Q_1$  aumenta linearmente.
- (d) A força sobre  $Q_2$  é ao longo da linha que une as cargas.
- (e) Uma carga pontual  $Q_3 = -3 \text{ nC}$  localizada no ponto médio entre  $Q_1$  e  $Q_2$  experimenta uma força resultante nula.

**4.2** O plano  $z = 10 \text{ m}$  tem uma distribuição de cargas de  $20 \text{ nC/m}^2$ . A intensidade de campo elétrico na origem é:

- (a)  $-10 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$
- (b)  $-18\pi \mathbf{a}_z \text{ V/m}$
- (c)  $-72\pi \mathbf{a}_z \text{ V/m}$
- (d)  $-360\pi \mathbf{a}_z \text{ V/m}$

**4.3** As cargas pontuais  $30 \text{ nC}$ ,  $-20 \text{ nC}$  e  $10 \text{ nC}$  estão localizadas em  $(-1, 0, 2)$ ,  $(0, 0, 0)$  e  $(1, 5, -1)$ , respectivamente. O fluxo total que sai de um cubo de  $6 \text{ m}$  de aresta, centrado na origem, é:

- (a)  $-20 \text{ nC}$
- (b)  $10 \text{ nC}$
- (c)  $20 \text{ nC}$
- (d)  $30 \text{ nC}$
- (e)  $60 \text{ nC}$

**4.4** A densidade de fluxo elétrico sobre uma superfície esférica  $r = b$  é a mesma tanto para uma carga pontual  $Q$  localizada na origem, quanto para uma carga  $Q$  uniformemente distribuída sobre uma superfície  $r = a$  ( $a < b$ ).

- (a) Sim.
- (b) Não.
- (c) Não necessariamente.

**4.5** O trabalho realizado pela força  $\mathbf{F} = 4 \mathbf{a}_x - 3 \mathbf{a}_y + 2 \mathbf{a}_z \text{ N}$  para provocar, em uma carga de  $1 \text{ nC}$ , o deslocamento de  $10 \mathbf{a}_x + 2 \mathbf{a}_y - 7 \mathbf{a}_z \text{ m}$  é de:

- (a)  $103 \text{ nJ}$
- (b)  $60 \text{ nJ}$
- (c)  $64 \text{ nJ}$
- (d)  $20 \text{ nJ}$

**4.6** Dizer que um campo eletrostático é conservativo *não significa* dizer que:

- (a) O campo é o gradiente de um potencial escalar.
- (b) A circulação desse campo é identicamente zero.
- (c) O rotacional desse campo é identicamente zero.
- (d) O trabalho realizado em uma trajetória fechada no interior desse campo é zero.
- (e) A diferença de potencial entre quaisquer dois pontos é zero.

**4.7** Suponha que exista um campo elétrico uniforme no interior da sala em que você está trabalhando, tal que as linhas de força são horizontais e perpendiculares a uma das paredes. À medida que você caminha em direção à parede da qual as linhas de força emergem, você está caminhando na direção dos:

- (a) Pontos de potencial mais alto?
- (b) Pontos de potencial mais baixo?
- (c) Pontos de mesmo potencial (linha equipotencial)?

- 4.8** Uma carga  $Q$  é uniformemente distribuída em uma esfera de raio  $a$ . Considerando o potencial no infinito como zero, o potencial em  $r = b < a$  é dado por:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & -\int_a^b \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} dr \\ \text{(b)} \quad & -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ \text{(c)} \quad & -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^b \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} dr \\ \text{(d)} \quad & -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} dr \end{aligned}$$

- 4.9** Um campo potencial é dado por  $V = 3x^2y - yz$ . Qual das afirmações a seguir não é verdadeira?

- (a) No ponto  $(1, 0, -1)$   $V$  e  $\mathbf{E}$  são nulos.
- (b)  $x^2y = 1$  é uma linha equipotencial no plano  $xy$ .
- (c) A superfície equipotencial  $V = -8$  passa pelo ponto  $P(2, -1, 4)$ .
- (d) O campo elétrico em  $P$  é  $12\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 8\mathbf{a}_z$  V/m.
- (e) A normal unitária à superfície equipotencial  $V = -8$  em  $P$  é dado por  $-0,83\mathbf{a}_x + 0,55\mathbf{a}_y + 0,07\mathbf{a}_z$ .

- 4.10** Um campo potencial elétrico é produzido pelas cargas pontuais  $1\ \mu\text{C}$  e  $4\ \mu\text{C}$ , localizadas nos pontos  $(-2, 1, 5)$  e  $(1, 3, -1)$ , respectivamente. A energia armazenada no campo é de:

- (a)  $2,57\ \text{mJ}$
- (b)  $5,14\ \text{mJ}$
- (c)  $10,28\ \text{mJ}$
- (d) Nenhuma das respostas acima.

*Respostas: 4.1c, e; 4.2d; 4.3b; 4.4a; 4.5d; 4.6e; 4.7a; 4.8c; 4.9a; 4.10b.*

### PROBLEMAS

- 4.1** Duas cargas pontuais  $Q_1 = 5\ \text{mC}$  e  $Q_2 = -4\ \text{mC}$  estão localizadas nos pontos  $(3, 2, 1)$  e  $(-4, 0, 6)$ , respectivamente. Determine a força sobre  $Q_1$ .
- 4.2** Cinco cargas pontuais idênticas de  $15\ \mu\text{C}$  cada estão localizadas no centro e nos cantos de um quadrado definido por  $-1 < x, y < 1$  e  $z = 0$ .
- (a) Determine a força sobre uma carga pontual de  $10\ \mu\text{C}$  localizada em  $(0, 0, 2)$ .
  - (b) Calcule a intensidade de campo elétrico em  $(0, 0, 2)$ .
- 4.3** Duas cargas pontuais  $Q_1$  e  $Q_2$  estão localizadas em  $(4, 0, -3)$  e  $(2, 0, 1)$ , respectivamente. Se  $Q_2 = 4\ \text{nC}$ , determine  $Q_1$  tal que:
- (a) O campo  $\mathbf{E}$  em  $(5, 0, 6)$  não tenha componente em  $z$ .
  - (b) A força sobre uma carga de teste em  $(5, 0, 6)$  não tenha componente em  $x$ .
- 4.4** As cargas  $+Q$  e  $+3Q$  estão separadas por uma distância de  $2\ \text{m}$ . Uma terceira carga está localizada em uma posição tal que o sistema eletrostático está em equilíbrio. Determine a localização e o valor da terceira carga em termos de  $Q$ .
- 4.5** Determine a carga total:
- (a) Sobre uma linha dada por  $0 < x < 5\ \text{m}$ , se  $\rho_L = 12x^2\ \text{mC/m}$ .
  - (b) Sobre um cilindro dado por  $\rho = 3$ ,  $0 < z < 4\ \text{m}$ , se  $\rho_S = \rho z^2\ \text{nC/m}^2$ .
  - (c) Dentro de uma esfera com  $r = 4\ \text{m}$ , se  $\rho_r = \frac{10}{r \sin \theta}\ \text{C/m}^3$ .

- 4.6** Calcule a carga total devido às distribuições de carga referidas por A, B e C na Figura 4.23.
- 4.7** Determine  $\mathbf{E}$  em  $(5, 0, 0)$  devido à distribuição de carga referida por A na Figura 4.23.
- 4.8** Devido à distribuição de carga referida por B na Figura 4.23,
- Determine  $\mathbf{E}$  no ponto  $(0, 0, 3)$  se  $\rho_s = 5 \text{ mC/m}^2$ .
  - Determine  $\mathbf{E}$  no ponto  $(0, 0, 3)$  se  $\rho_s = 5 \sin \phi \text{ mC/m}^2$ .
- 4.9** Um disco circular de raio  $a$  está carregado com uma distribuição de carga dada por  $\rho_s = 1/\rho \text{ C/m}^2$ . Calcule o potencial em  $(0, 0, h)$ .
- 4.10** Um anel dado por  $y^2 + z^2 = 4$  e  $x = 0$  está carregado com uma distribuição uniforme de carga de  $5 \mu\text{C/m}$ .
- Determine  $\mathbf{D}$  em  $P(3, 0, 0)$ .
  - Se duas cargas pontuais idênticas  $Q$  forem colocadas em  $(0, -3, 0)$  e  $(0, 3, 0)$ , nas proximidades do anel, determine o valor de  $Q$  tal que  $\mathbf{D} = 0$  em  $P$ .
- \*4.11** (a) Demonstre que o campo elétrico no ponto  $(0, 0, h)$ , devido ao retângulo descrito por  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$  e  $z = 0$ , carregado com uma distribuição uniforme de carga  $\rho_s \text{ C/m}^2$ , é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\pi \epsilon_0} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{ab}{h(a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}} \right] \mathbf{a}_z$$

- (b) Se  $a = 2$ ,  $b = 5$  e  $\rho_s = 10^{-5}$ , determine a carga total sobre o retângulo e a intensidade de campo elétrico em  $(0, 0, 10)$ .

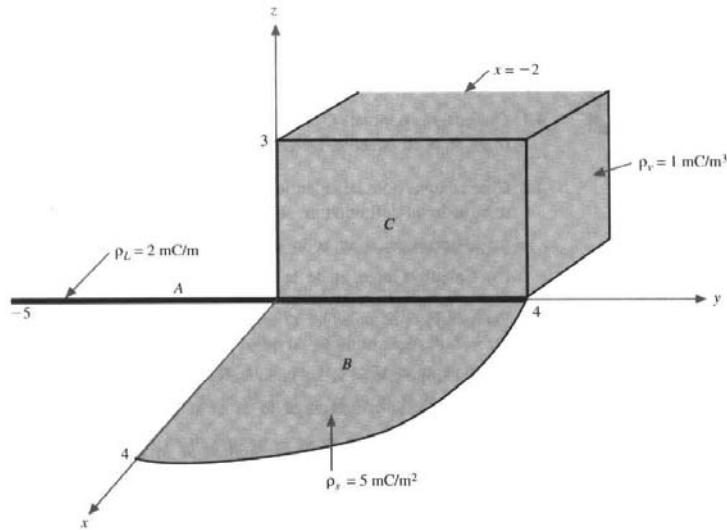


Figura 4.23 Referente ao Problema 4.6.

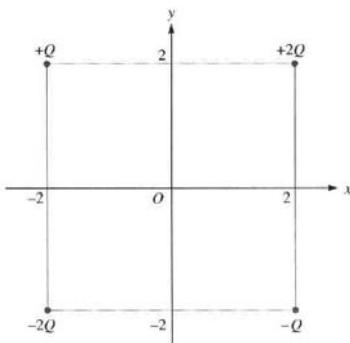


Figura 4.24 Referente ao Problema 4.14.

- 4.12** Uma carga pontual de 100 pC está localizada em  $(4, 1, -3)$ , enquanto o eixo  $x$  está carregado com  $2 \text{ nC/m}$ . Se o plano  $z = 3$  também estiver carregado com  $5 \text{ nC/m}^2$ , determine  $\mathbf{E}$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .
- 4.13** A linha  $x = 3$  e  $z = -1$  está carregada com  $20 \text{ nC/m}$ , enquanto o plano  $x = -2$  está carregado com  $4 \text{ nC/m}^2$ . Determine a força sobre uma carga pontual de  $-5 \text{ mC}$  localizada na origem.
- 4.14** Quatro cargas pontuais estão localizadas nos vértices de um quadrado de 4 m de lado, como mostra a Figura 4.24. Se  $Q = 15 \mu\text{C}$ , determine  $\mathbf{D}$  em  $(0, 0, 6)$ .
- 4.15** Estabeleça a lei de Gauss. Deduza a lei de Coulomb a partir da lei de Gauss, mostrando que a lei de Gauss é uma forma alternativa da lei de Coulomb e que a lei de Coulomb está implícita na equação de Maxwell:  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ .
- 4.16** Determine a densidade de cargas devido a cada uma das seguintes densidades de fluxo elétrico:
- $\mathbf{D} = 8xy\mathbf{a}_x + 4x^2\mathbf{a}_y \text{ C/m}^2$
  - $\mathbf{D} = \rho \sin \phi \mathbf{a}_\rho + 2\rho \cos \phi \mathbf{a}_\phi + 2z^2\mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$
  - $\mathbf{D} = \frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{a}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{a}_\theta \text{ C/m}^2$
- 4.17** Seja  $\mathbf{E} = xya_x + x^2\mathbf{a}_y$ , determine:
- A densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$ .
  - A densidade volumétrica de cargas  $\rho_v$ .
- 4.18** O plano  $x + 2y = 5$  está carregado com  $\rho_s = 6 \text{ nC/m}^2$ . Determine  $\mathbf{E}$  em  $(-1, 0, 1)$ .
- 4.19** No espaço livre,  $\mathbf{D} = 2y^2\mathbf{a}_x + 4xy\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z \text{ mC/m}^2$ . Determine a carga total armazenada na região  $1 < x < 2$ ,  $1 < y < 2$ ,  $-1 < z < 4$ .
- 4.20** Em uma certa região, o campo elétrico é dado por:
- $$\mathbf{D} = 2\rho(z + 1)\cos \phi \mathbf{a}_\rho - \rho(z + 1)\sin \phi \mathbf{a}_\phi + \rho^2 \cos \phi \mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$$
- Determine a densidade de cargas.
  - Calcule a carga total encerrada em um volume dado por:  $0 < \rho < 2$ ,  $0 < \phi < \pi/2$  e  $0 < z < 4$ .
  - Confirme a lei de Gauss, determinando o fluxo líquido através da superfície que limita o volume dado em (b).

- \*4.21** O modelo de Thomson do átomo de hidrogênio é uma esfera de cargas positivas com um elétron (carga pontual) em seu centro. A carga positiva total é igual à carga eletrônica  $e$ . Prove que, quando o elétron está a uma distância  $r$  do centro da esfera positiva de cargas, ele é atraído com uma força

$$F = \frac{e^2 r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

onde  $R$  é o raio da esfera.

- 4.22** Três cascas esféricas concêntricas com  $r = 1$ ,  $r = 2$  e  $r = 3$  m têm, respectivamente, distribuições de cargas dadas por  $2$ ,  $-4$  e  $5 \mu\text{C/m}^2$ .

- (a) Calcule o fluxo através de  $r = 1,5$  m e  $r = 2,5$  m.
- (b) Determine  $\mathbf{D}$  em  $r = 0,5$ ,  $r = 2,5$  e  $r = 3,5$  m.

- 4.23** Dado que

$$\rho_r = \begin{cases} 12\rho \text{ nC/m}^3, & 1 < \rho < 2 \\ 0, & \text{fora desse intervalo} \end{cases}$$

determine  $\mathbf{D}$  em qualquer ponto.

- 4.24** Seja

$$\rho_r = \begin{cases} \frac{10}{r^2} \text{ mC/m}^3, & 1 < r < 4 \\ 0, & r > 0 \end{cases}$$

- (a) Determine o fluxo líquido que atravessa as superfícies  $r = 2$  m e  $r = 6$  m.
- (b) Determine  $\mathbf{D}$  em  $r = 1$  m e em  $r = 5$  m.

- 4.25** Determine o trabalho realizado ao deslocar uma carga de  $5 \text{ C}$  do ponto  $P(1, 2, -4)$  até o ponto  $R(3, -5, 6)$ , na presença de um campo elétrico dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x + z^2 \mathbf{a}_y + 2yz \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

- 4.26** Dado o campo elétrico em uma certa região do espaço

$$\mathbf{E} = (z + 1) \sin \phi \mathbf{a}_\rho + (z + 1) \cos \phi \mathbf{a}_\theta + \rho \sin \phi \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

determine o trabalho realizado ao movimentar uma carga de  $4 \text{ nC}$  de

- (a)  $A(1, 0, 0)$  até  $B(4, 0, 0)$
- (b)  $B(4, 0, 0)$  até  $C(4, 30^\circ, 0)$
- (c)  $C(4, 30^\circ, 0)$  até  $D(4, 30^\circ, -2)$
- (d)  $A$  até  $D$

- 4.27** Em um campo elétrico  $\mathbf{E} = 20 r \sin \theta \mathbf{a}_r + 10 r \cos \theta \mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$ , determine a energia empregada ao transferir uma carga de  $10 \text{ nC}$

- (a) de  $A(5, 30^\circ, 0^\circ)$  até  $B(5, 90^\circ, 0^\circ)$
- (b) de  $A$  até  $C(10, 30^\circ, 0^\circ)$
- (c) de  $A$  até  $D(5, 30^\circ, 60^\circ)$
- (d) de  $A$  até  $E(10, 90^\circ, 60^\circ)$

**4.28** Seja  $V = xy^2z$ . Calcule a energia necessária para transferir uma carga pontual de  $2 \mu\text{C}$  de  $(1, -1, 2)$  a  $(2, 1, -3)$ .

**4.29** Determine o campo elétrico devido aos seguintes potenciais:

- (a)  $V = x^2 + 2y^2 + 4z^2$
- (b)  $V = \sin(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
- (c)  $V = \rho^2(z + 1)\sin\phi$
- (d)  $V = e^{-r}\sin\theta\cos 2\phi$

**4.30** Três cargas pontuais  $Q_1 = 1 \text{ mC}$ ,  $Q_2 = -2 \text{ mC}$  e  $Q_3 = 3 \text{ mC}$  estão localizadas, respectivamente, em  $(0, 0, 4)$ ,  $(-2, 5, 1)$  e  $(3, -4, 6)$ .

- (a) Determine o potencial  $V_P$  em  $P(-1, 1, 2)$ .
- (b) Calcule a diferença de potencial  $V_{PQ}$  se  $Q = (1, 2, 3)$ .

**4.31** No espaço livre,  $V = x^2y(z + 3) \text{ V}$ . Determine:

- (a)  $\mathbf{E}$  em  $(3, 4, -6)$
- (b) a carga dentro de um cubo de dimensões  $0 < x, y, z < 1$

**4.32** Uma distribuição esférica de cargas é dada por

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_0 \frac{r}{a}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Determine  $V$  em qualquer ponto.

**4.33** Para verificar que  $\mathbf{E} = yza_i + xza_j + xy\mathbf{a}_k \text{ V/m}$  é verdadeiramente um campo elétrico, demonstre que:

- (a)  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$
- (b)  $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , onde  $L$  é o perímetro de um quadrado definido por  $0 < x, y < 2, z = 1$ .

**4.34** (a) Uma carga total  $Q = 60 \mu\text{C}$  é dividida em duas cargas iguais localizadas a  $180^\circ$  uma da outra, posicionadas em um anel circular de raio 4 m. Determine o potencial no centro do anel.

(b) Se a carga  $Q$  for dividida em três cargas iguais espaçadas em intervalos iguais de  $120^\circ$  nesse anel, determine o potencial no centro do anel.

(c) Se a carga for distribuída ao longo do anel com uma distribuição linear dada por  $\rho_L = \frac{Q}{8\pi}$ , determine o potencial no centro do anel.

**4.35** Para uma distribuição esférica de cargas dada por:

$$\rho_v = \begin{cases} \rho_0(a^2 - r^2), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

- (a) Determine  $\mathbf{E}$  e  $V$  para  $r \geq a$ .
- (b) Determine  $\mathbf{E}$  e  $V$  para  $r \leq a$ .
- (c) Determine a carga total.
- (d) Demonstre que  $\mathbf{E}$  é máximo quando  $r = 0,145a$ .

**\*4.36** (a) Prove que, quando uma partícula de massa e carga constantes é acelerada a partir do repouso, na presença de um campo elétrico, sua velocidade final é proporcional à raiz quadrada da diferença de potencial sob a qual ela é acelerada.

(b) Determine a magnitude da constante de proporcionalidade se a partícula for um elétron.

(c) Sob que diferença de potencial deve um elétron ser acelerado, considerando que não haja variação em sua massa, para adquirir uma velocidade de um décimo da velocidade da luz? (Em tais velocidades, a massa de um corpo torna-se consideravelmente maior do que sua "massa de repouso" e não pode ser considerada constante.)

- \*4.37 Um elétron é lançado com uma velocidade inicial  $u_0 = 10^7$  m/s em um campo elétrico uniforme existente entre duas placas paralelas, como mostra a Figura 4.25. O elétron entra no campo na posição média entre as duas placas. Se o elétron tangencia a placa superior ao sair do campo:

- Determine a intensidade de campo elétrico entre as placas.
- Calcule a velocidade do elétron quando ele abandona o campo. Desconsidere efeitos de borda.

- 4.38 Um dipolo elétrico com  $\mathbf{p} = p\mathbf{a}_z$  C · m está localizado em  $(x, z) = (0, 0)$ . Se o potencial em  $(0, 1)$  nm é de 9 V, determine o potencial em  $(1, 1)$  nm.

- 4.39 Duas cargas pontuais  $Q$  e  $-Q$  estão localizadas em  $(0, d/2, 0)$  e  $(0, -d/2, 0)$ . Demonstre que no ponto  $(r, \theta, \phi)$ , onde  $r \gg d$ :

$$V = \frac{Qd \sin \theta \sin \phi}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Determine o campo  $\mathbf{E}$  correspondente.

- 4.40 Determine o trabalho necessário para deslocar as cargas  $Q_1 = 1$  mC e  $Q_2 = -2$  mC do infinito até os pontos  $(-2, 6, 1)$  e  $(3, -4, 0)$ , respectivamente.

- 4.41 Uma carga pontual  $Q$  está na origem. Calcule a energia armazenada na região dada por  $r > a$ .

- 4.42 Determine a energia armazenada em uma região delimitada pelo hemisfério  $r \leq 2$  m e  $0 < \theta < \pi$ , onde existe o campo elétrico expresso matematicamente por:

$$\mathbf{E} = 2r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + r \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - r \sin \phi \mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$$

- 4.43 Se  $V = \rho^2 z \sin \phi$ , calcule a energia dentro da região definida por  $1 < \rho < 4$ ,  $-2 < z < 2$  e  $0 < \phi < \pi/3$ .

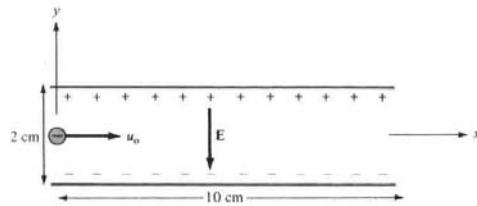


Figura 4.25 Referente ao Problema 4.37.

# Capítulo 5

## CAMPOS ELÉTRICOS EM MEIO MATERIAL

Os 12 princípios do caráter: (1) Honestidade, (2) Compreensão, (3) Compaixão, (4) Apreço, (5) Paciência, (6) Disciplina, (7) Firmeza, (8) Perseverança, (9) Humor, (10) Humildade, (11) Generosidade, (12) Respeito.

—KATHRYN B. JOHNSON

### 5.1 INTRODUÇÃO

No último capítulo, consideramos campos eletrostáticos no espaço livre ou na ausência de meios materiais. Assim, o que desenvolvemos em eletrostática é o que podemos chamar de teoria de campos no “vácuo”. Da mesma maneira, o que vamos desenvolver nesse capítulo pode ser denominado de teoria dos fenômenos elétricos em um meio material. Como veremos em breve, a maioria das fórmulas obtidas no Capítulo 4 são ainda aplicáveis, embora algumas necessitem de adaptações.

Da mesma maneira que campos elétricos podem existir no espaço livre, eles podem existir em um meio material. Os materiais são classificados segundo suas propriedades elétricas, de maneira ampla, como condutores e não-condutores. Materiais não-condutores são usualmente referidos como *isolantes* ou *dielétricos*. Será feita uma rápida discussão sobre as propriedades elétricas dos materiais em geral para embasar o entendimento dos conceitos de condução, corrente elétrica e polarização. Além dessa, outras discussões versarão sobre algumas propriedades dos materiais dielétricos, como por exemplo: suscetibilidade, permissividade, linearidade, isotropia, homogeneidade, rigidez dielétrica e tempo de relaxação. O conceito de condição de fronteira para campos elétricos existentes em dois meios diferentes será também estudado nesse capítulo.

### 5.2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Em um texto dessa natureza, a discussão a respeito das propriedades elétricas dos materiais pode parecer fora de contexto. Porém, questões tais como: “porque os elétrons não escapam através da superfície de um condutor”, “porque os fios condutores percorridos por uma corrente elétrica permanecem descarregados eletricamente”, “porque os materiais se comportam de maneira diferente na presença de um campo elétrico” e “porque as ondas eletromagnéticas se propagam com velocidade menor em meios condutores do que nos meios dielétricos” são facilmente respondidas considerando as propriedades elétricas dos materiais. Uma discussão extensa sobre esse assunto é usualmente encontrada em textos sobre eletrônica física ou de engenharia elétrica. Aqui, uma breve discussão será suficiente para nos ajudar a entender o mecanismo pelo qual os materiais influenciam no campo elétrico.

Genericamente, os materiais podem ser classificados, de acordo com sua *condutividade*  $\sigma$  (expressa em mhos por metro ( $\Omega^{-1}/m$ ) ou em siemens por metro ( $S/m$ ), como condutores ou não-condutores ou, ainda, do ponto de vista técnico, como metais ou isolantes (dielétricos). A condutividade de um material geralmente depende da temperatura e da frequência. Um material com *elevada condutividade* ( $\sigma \gg 1$ ) é referido como *metal*, enquanto um material com *baixa condutividade* ( $\sigma \ll 1$ ) é referido como *isolante*. Um material cuja condutividade está entre a condutividade de metais e a dos

isolantes é denominado *semicondutor*. Os valores de condutividade de alguns materiais de uso comum estão mostrados na Tabela B.1, no Apêndice B. Dessa tabela se depreende que materiais como cobre e alumínio são metais, silício e germânio são semicondutores e vidro e borracha são isolantes.

A condutividade dos metais geralmente aumenta com a diminuição da temperatura. Em temperaturas próximas à do zero absoluto ( $T = 0^{\circ}\text{K}$ ), alguns condutores apresentam condutividade infinita e são chamados de *supercondutores*. Chumbo e alumínio são exemplos típicos desses metais. A condutividade do chumbo a  $4^{\circ}\text{K}$  é da ordem de  $10^{20}$  mhos/m. Ao leitor interessado recomendamos a leitura de textos sobre supercondutividade.<sup>1</sup>

Nesse texto trataremos apenas de metais e isolantes. Microscopicamente, a diferença mais significativa entre metal e isolante reside na quantidade de elétrons disponíveis para a condução de corrente elétrica. Os materiais dielétricos têm poucos elétrons disponíveis para a condução da corrente elétrica, ao contrário dos metais, os quais têm elétrons livres em abundância. Nas seções subsequentes, será também discutida a presença de condutores e dielétricos em campos elétricos.

### 5.3 CORRENTES DE CONVEÇÃO E DE CONDUÇÃO

A voltagem elétrica (ou a diferença de potencial) e a corrente são duas quantidades fundamentais em Engenharia Elétrica. Estudamos o potencial no capítulo anterior. Antes de considerarmos como o campo elétrico se comporta em meios condutores ou dielétricos, é apropriado estudarmos a corrente elétrica. A corrente elétrica é, geralmente, provocada pelo movimento de cargas elétricas.

**A corrente** (em ampères) através de uma área é a quantidade de carga que passa através dessa área na unidade de tempo.

Isto é:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (5.1)$$

Assim, para uma corrente de um ampère, a carga está sendo transferida a uma taxa de um coulomb por segundo.

Introduziremos, agora, o conceito de *densidade de corrente*  $\mathbf{J}$ . Se uma corrente  $\Delta I$  atravessa uma superfície  $\Delta S$ , a densidade de corrente é dada por

$$J_n = \frac{\Delta I}{\Delta S}$$

ou

$$\Delta I = J_n \Delta S \quad (5.2)$$

considerando que a densidade de corrente é perpendicular à superfície. Se a densidade de corrente não for normal à superfície:

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S} \quad (5.3)$$

Dessa maneira, a corrente total atravessando a superfície  $S$  será dada por:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.4)$$

<sup>1</sup> O exemplar de agosto de 1989 de *Proceedings of IEEE* é dedicado às “Aplicações da Supercondutividade” (“Applications of Superconductivity”).

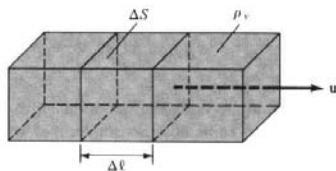


Figura 5.1 Corrente em um filamento.

Dependendo de como  $I$  é gerada, haverá diferentes tipos de densidades de corrente: densidade de corrente de convecção, densidade de corrente de condução e densidade de corrente de deslocamento. Neste capítulo, consideraremos as densidades de corrente de convecção e de condução. A densidade de corrente de deslocamento será considerada no Capítulo 9. O que devemos ter em mente é que a equação (5.4) se aplica a qualquer tipo de densidade de corrente. Comparada à definição geral de fluxo, na equação (3.13), a equação (5.4) mostra que a corrente  $I$  através de  $S$  é simplesmente o fluxo da densidade de corrente  $\mathbf{J}$ .

A corrente de convecção, diferentemente da corrente de condução, não envolve condutores e, consequentemente, não satisfaz a lei de Ohm. Resulta do fluxo de cargas através de um meio isolante tal como um líquido, um gás rarefeito ou o vácuo. Um feixe de elétrons em um tubo de vácuo, por exemplo, é uma corrente de convecção.

Considere o filamento da Figura 5.1. Se houver um fluxo de cargas, de densidade  $\rho_v$ , a uma velocidade  $\mathbf{u} = a_y \mathbf{a}_y$ , da equação (5.1) tira-se que a corrente através do filamento é dada por:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta \ell}{\Delta t} = \rho_v \Delta S u_y \quad (5.5)$$

**A densidade de corrente** em um dado ponto é a corrente através de uma área unitária normal àquele ponto.

A componente em  $y$  da densidade de corrente  $J_y$  é dada por:

$$J_y = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho_v u_y \quad (5.6)$$

Portanto, em geral:

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}} \quad (5.7)$$

A corrente  $I$  é a *corrente de convecção* e  $J$  é a *densidade de corrente de convecção* em ampères/metro quadrado ( $A/m^2$ ).

A corrente de condução ocorre necessariamente em condutores. Um condutor é caracterizado por uma grande quantidade de elétrons livres que promovem a corrente de condução ao serem impulsados por um campo elétrico. Quando um campo elétrico  $\mathbf{E}$  é aplicado, a força sobre um elétron com carga  $-e$  é de:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} \quad (5.8)$$

Já que o elétron não está no espaço livre, ele será acelerado pelo campo elétrico, sofrerá inúmeras colisões com a rede cristalina e derivará de um átomo para outro. Se um elétron, com massa  $m$ , move-se em um campo elétrico  $\mathbf{E}$  com uma velocidade média de deriva  $\mathbf{u}$ , de acordo com a lei de Newton, a variação média no *momentum* do elétron livre deve se igualar à força aplicada. Assim,

$$\frac{m\mathbf{u}}{\tau} = -e\mathbf{E}$$

ou

$$\mathbf{u} = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} \quad (5.9)$$

onde  $\tau$  é o intervalo de tempo médio entre as colisões. Isso indica que a velocidade de deriva do elétron é diretamente proporcional ao campo aplicado. Se houver  $n$  elétrons por unidade de volume, a densidade de carga eletrônica é dada por:

$$\rho_v = -ne \quad (5.10)$$

Dessa forma, a *densidade de corrente de condução* é

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$$

ou

$$J = \sigma E \quad (5.11)$$

onde  $\sigma = ne^2\tau/m$  é a condutividade do condutor. Conforme mencionado anteriormente, os valores de  $\sigma$  para os materiais mais comuns são dados na Tabela B.1, no Apêndice B. A relação expressa na equação (5.11) é conhecida como forma pontual da *lei de Ohm*.

## 5.4 CONDUTORES

Um condutor possui, em abundância, cargas elétricas que estão livres para se movimentar. Considere um condutor isolado, tal como mostrado na Figura 5.2(a). Quando um campo elétrico externo  $\mathbf{E}_e$  é aplicado, as cargas livres positivas são empurradas no sentido do campo aplicado, enquanto que as cargas livres negativas movem-se no sentido oposto. Essa migração das cargas ocorre muito rapidamente. Em um primeiro momento, essas cargas se acumulam na superfície do condutor, formando uma *superfície de cargas induzidas*. Em um segundo momento, essas cargas, induzidas, estabelecem um campo elétrico interno induzido  $\mathbf{E}_i$ , o qual cancela o campo elétrico externo aplicado  $\mathbf{E}_e$ . O resultado disso é mostrado na Figura 5.2(b). Isso leva a uma importante propriedade dos condutores:

**Um condutor perfeito** não pode conter um campo eletrostático em seu interior.

Um condutor é um corpo *equipotencial*, o que implica que o potencial é o mesmo em qualquer ponto no condutor. Isso baseia-se no fato de que  $\mathbf{E} = -\nabla V = 0$ .

Uma outra maneira de analisar isso é através da lei de Ohm,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ . Para manter uma densidade de corrente finita  $\mathbf{J}$  em um condutor perfeito ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), é necessário que o campo elétrico no interior do condutor se anule. Em outras palavras,  $\mathbf{E} \rightarrow 0$  porque  $\sigma \rightarrow \infty$  em um condutor perfeito. Se algumas cargas forem introduzidas no interior de tal condutor, as cargas se moverão para a superfície e se redistribuirão rapidamente, de tal maneira que o campo no interior do condutor se anule. De acordo com a lei de Gauss, se  $\mathbf{E} = 0$ , a densidade de carga  $\rho_v$  deve ser zero. Concluímos, novamente, que um condutor perfeito não pode conter campo eletrostático em seu interior. Sob condições estáticas:

$$\mathbf{E} = 0, \quad \rho_v = 0, \quad V_{ab} = 0 \quad \text{no interior do condutor} \quad (5.12)$$

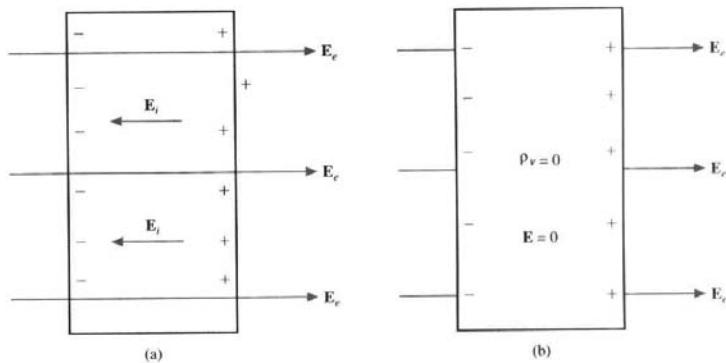


Figura 5.2 (a) Um condutor isolado sob a influência de um campo elétrico aplicado; (b) um condutor tem um campo elétrico nulo sob condições estáticas.

Consideremos um condutor cujos terminais são mantidos a uma diferença de potencial  $V$ , como mostrado na Figura 5.3. Note que, nesse caso,  $\mathbf{E} \neq 0$  no interior do condutor, como mostra a Figura 5.2. Qual é a diferença? Não há equilíbrio estático na situação mostrada na Figura 5.3, uma vez que o condutor não está isolado, mas ligado a uma fonte de força eletromotriz que compõe as cargas livres a se movimentarem e evita o estabelecimento do equilíbrio eletrostático. Dessa forma, no caso da Figura 5.3, um campo elétrico deve existir no interior do condutor para manter o fluxo de corrente. À medida que os elétrons se movem, encontram algumas forças amortecedoras denominadas *resistência*. Tomando por base a lei de Ohm na equação (5.11), obtemos a resistência do material condutor. Suponhamos que o condutor tem uma seção reta *uniforme*  $S$  e um comprimento  $\ell$ . A orientação do campo elétrico  $\mathbf{E}$  produzido é a mesma orientação do fluxo de cargas positivas ou corrente  $I$ . Essa orientação é oposta à orientação do fluxo dos elétrons. O campo elétrico aplicado é uniforme e sua magnitude é dada por

$$E = \frac{V}{\ell} \quad (5.13)$$

Como o condutor tem uma seção reta uniforme:

$$J = \frac{I}{S} \quad (5.14)$$

Substituindo as equações (5.11) e (5.13) na equação (5.14) tem-se:

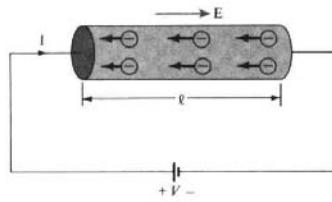
$$\frac{I}{S} = \sigma E = \frac{\sigma V}{\ell} \quad (5.15)$$

Portanto,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S}$$

ou

$$R = \frac{\rho_c \ell}{S} \quad (5.16)$$



Figuras 5.3 Um condutor de seção reta uniforme sob um campo aplicado  $\mathbf{E}$ .

onde  $\rho_e = 1/\sigma$  é a *resistividade* do material. A equação (5.16) é útil para determinar a resistência de qualquer condutor de seção reta uniforme. Se a seção reta do condutor não for uniforme, a equação (5.16) não é aplicável. Entretanto, a definição básica de resistência  $R$  como sendo a razão entre a diferença de potencial  $V$ , entre os dois terminais de um condutor, e a corrente elétrica  $I$ , que atravessa o condutor, ainda se aplica. Portanto, utilizando as equações (4.60) e (5.4), obtém-se a resistência de um condutor de seção reta não uniforme, isto é,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad (5.17)$$

Note que o sinal negativo antes de  $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  desaparece na equação (5.17) porque  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0$ , se  $I > 0$ . A equação (5.17) só será utilizada a partir da Seção 6.5.

A potência  $P$  (em watts) é definida como a taxa de variação da energia  $W$  (em joules) ou força vezes velocidade. Portanto,

$$\int \rho_v dv \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \int \mathbf{E} \cdot \rho_v \mathbf{u} dv$$

ou

$$P = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \quad (5.18)$$

que é conhecida como *lei de Joule*. A densidade de potência  $w_p$  (em watts/m<sup>3</sup>) é dada pelo integrando na equação (5.18), isto é:

$$w_p = \frac{dP}{dv} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma |\mathbf{E}|^2 \quad (5.19)$$

Para um condutor com seção reta uniforme,  $dv = dS dl$ , tal que a equação (5.18) torna-se

$$P = \int_L E dl \int_S J dS = VI$$

ou

$$P = I^2 R \quad (5.20)$$

que é a forma mais comum da lei de Joule em Teoria de Circuitos Elétricos.

**EXEMPLO 5.1**

Se  $\mathbf{J} = \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta) \text{ A/m}^2$ , calcule a corrente que passa através de:

- (a) uma casca hemisférica de raio 20 cm;
- (b) uma casca esférica de raio 10 cm.

**Solução:**

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad \text{onde } d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, \mathbf{a}_r \text{ nesse caso.}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad I &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r^3} 2 \cos \theta r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \Big|_{r=0,2} \\ &= \frac{2}{r} 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \, d(\sin \theta) \Big|_{r=0,2} \\ &= \frac{4\pi}{0,2} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 10\pi = 31,4 \text{ A} \end{aligned}$$

(b) A única diferença nesse caso é que temos  $0 \leq \theta \leq \pi$ , ao invés de  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  e  $r = 0,1$ . Portanto:

$$I = \frac{4\pi}{0,1} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^\pi = 0$$

Alternativamente, nesse caso,

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv = 0$$

uma vez que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .

**EXERCÍCIO PRÁTICO 5.1**

Para a densidade de corrente  $\mathbf{J} = 10z \sin^2 \phi \mathbf{a}_\rho \text{ A/m}^2$ , determine a corrente através de uma superfície cilíndrica dado por  $\rho = 2,1 \leq z \leq 5 \text{ m}$ .

**Resposta:** 754 A.

**EXEMPLO 5.2**

Um exemplo típico de transporte convectivo de cargas é encontrado no gerador de Van de Graaff, no qual as cargas são transportadas sobre uma correia que se movimenta da base até a calota esférica, como mostrado na Figura 5.4. Se uma densidade superficial de cargas de  $10^{-7} \text{ C/m}^2$  é transportada a uma velocidade de 2 m/s, calcule a carga coletada em 5 s. Considere a largura da correia de 10 cm.

**Solução:**

Se  $\rho_s$  = densidade superficial de cargas,  $u$  = velocidade da correia e  $w$  = largura da correia, a corrente na calota esférica é de:

$$I = \rho_s u w$$

A carga total coletada em  $t = 5 \text{ s}$  é

$$\begin{aligned} Q &= It = \rho_s u w t = 10^{-7} \times 2 \times 0,1 \times 5 \\ &= 100 \text{ nC} \end{aligned}$$

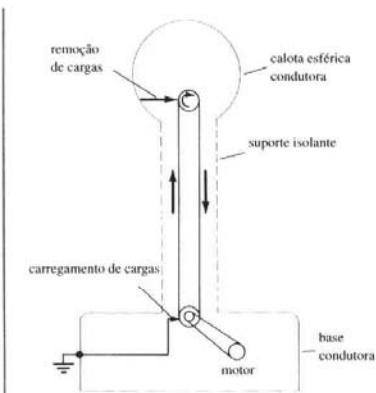


Figura 5.4 Gerador de Van de Graaff; referente ao Exemplo 5.2.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 5.2

Em um gerador Van de Graaff,  $w = 0,1\text{ m}$ ,  $u = 10\text{ m/s}$  e os caminhos de fuga têm resistência de  $10^{14}\text{ }\Omega$ . Se a correia transporta  $0,5\text{ }\mu\text{C/m}^2$  de carga, determine a diferença de potencial entre a calota esférica e a base.

**Resposta:** 50 MV.

#### EXEMPLO 5.3

Um fio de 1 mm de diâmetro e de condutividade  $5 \times 10^7\text{ S/m}$  tem  $10^{29}\text{ elétrons livres/m}^3$  quando um campo elétrico de  $10\text{ mV/m}$  é aplicado. Determine:

- a densidade de carga dos elétrons livres;
- a densidade de corrente;
- a corrente no fio;
- a velocidade de deriva dos elétrons. Considere a carga eletrônica como  $e = -1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$ .

**Solução:**

(Nesse problema particular, as correntes de convecção e de condução são as mesmas.)

- $\rho_v = ne = (10^{29})(-1,6 \times 10^{-19}) = -1,6 \times 10^{10}\text{ C/m}^3$
- $J = \sigma E = (5 \times 10^7)(10 \times 10^{-3}) = 500\text{ kA/m}^2$
- $I = JS = (5 \times 10^5)\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = \frac{5\pi}{4} \cdot 10^{-6} \cdot 10^5 = 0,393\text{ A}$
- Já que  $J = \rho_v u$ ,  $u = \frac{J}{\rho_v} = \frac{5 \times 10^5}{1,6 \times 10^{10}} = 3,125 \times 10^{-5}\text{ m/s}$ .

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 5.3

A densidade de cargas livres no cobre é de  $1,81 \times 10^{10}\text{ C/m}^3$ . Para uma densidade de corrente de  $8 \times 10^6\text{ A/m}^2$ , determine a intensidade do campo elétrico e a velocidade de deriva.

**Resposta:**  $0,138\text{ V/m}$ ;  $4,42 \times 10^{-4}\text{ m/s}$ .

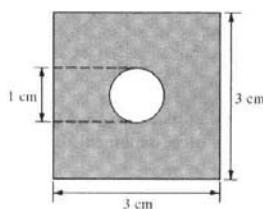


Figura 5.5 Seção reta da barra de chumbo do Exemplo 5.4.

**EXEMPLO 5.4**

Uma barra de chumbo ( $\sigma = 5 \times 10^6 \text{ S/m}$ ), de seção reta quadrada, tem um furo ao longo de seu comprimento, cuja seção reta é mostrada na Figura 5.5. Determine a resistência entre as extremidades da barra.

**Solução:**

Já que a seção reta da barra é uniforme, podemos aplicar a equação (5.16), isto é,

$$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

onde  $S = d^2 - \pi r^2 = 3^2 - \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9 - \frac{\pi}{4} \text{ cm}^2$ .

Portanto,

$$R = \frac{4}{5 \times 10^6 (9 - \pi/4) \times 10^{-4}} = 974 \mu\Omega$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 5.4**

Se o furo na barra de chumbo do Exemplo 5.4 é preenchido completamente com cobre ( $\sigma = 5,8 \times 10^6 \text{ mhos/m}$ ), determine a resistência da barra assim composta.

**Resposta:**  $876,7 \mu\Omega$ .

## 5.5 POLARIZAÇÃO EM DIELÉTRICOS

Na Seção 5.2, destacamos que a diferença principal entre um condutor e um dielétrico reside na disponibilidade de elétrons livres, nas camadas atômicas mais externas, para a condução de corrente. Embora as cargas em dielétricos não sejam capazes de se movimentar livremente, estão presas por forças finitas e, certamente, é esperado um deslocamento das mesmas quando uma força externa é aplicada.

Para compreender o efeito macroscópico de um campo elétrico sobre um dielétrico, considere um átomo de um dielétrico como constituído de uma carga negativa  $-Q$  (nuvem eletrônica) e uma carga positiva  $+Q$  (núcleo), como mostra a Figura 5.6(a). Uma representação semelhante pode ser adotada para uma molécula dielétrica. Podemos tratar os núcleos nas moléculas como cargas pontuais e a estrutura eletrônica como uma única nuvem de cargas negativas. Uma vez que temos iguais quantidades de cargas negativas e positivas, o átomo como um todo, ou a molécula, é eletricamente neutro. Quando um campo elétrico  $E$  é aplicado, a carga positiva é deslocada de sua posição de equilíbrio no sentido de  $E$  pela força  $F_+ = QE$ , enquanto que a carga negativa é deslocada no sentido oposto pela força  $F_- = QE$ . Um dipolo resulta do deslocamento das cargas e o dielétrico é dito estar *polarizado*. No estado polarizado, a nuvem eletrônica é deformada pelo campo elétrico aplicado  $E$ . Essa

distribuição deformada de cargas é equivalente, pelo princípio da superposição, à distribuição original mais um dipolo cujo momento é dado por

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad (5.21)$$

onde  $\mathbf{d}$  é o vetor distância entre as cargas do dipolo,  $-Q$  e  $+Q$ , como mostra a Figura 5.6(b). Se houver  $N$  dipolos em um volume  $\Delta v$  do dielétrico, o momento de dipolo total devido ao campo elétrico é de:

$$Q_1\mathbf{d}_1 + Q_2\mathbf{d}_2 + \dots + Q_N\mathbf{d}_N = \sum_{k=1}^N Q_k\mathbf{d}_k \quad (5.22)$$

Com o objetivo de estabelecer uma medida de intensidade de polarização, definimos *polarização*  $\mathbf{P}$  (em coulombs/metro quadrado) como o momento de dipolo por unidade de volume do dielétrico, isto é:

$$\mathbf{P} = \frac{\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N Q_k\mathbf{d}_k}{\Delta v} \quad (5.23)$$

Dessa forma, concluímos que o maior efeito do campo elétrico  $\mathbf{E}$  sobre o dielétrico é a geração de momentos de dipolo que se alinham na direção de  $\mathbf{E}$ . Esse tipo de dielétrico é denominado *apolar*.

Exemplos de tais dielétricos são o hidrogênio, o oxigênio, o nitrogênio e os gases nobres. As moléculas de dielétricos apolares não possuem dipolos enquanto não for aplicado o campo elétrico, conforme já dissemos anteriormente. Outros tipos de moléculas, tais como da água, do dióxido de enxofre e do ácido clorídrico, possuem dipolos internos permanentes, randomicamente orientados, como mostra a Figura 5.7(a), e são ditos *polares*. Quando um campo elétrico  $\mathbf{E}$  é aplicado sobre uma molécula polar, o dipolo permanente sofre um torque que tende a alinhar esse momento de dipolo paralelamente ao campo  $\mathbf{E}$ , como mostrado na Figura 5.7(b).

Calculemos, agora, o campo devido ao dielétrico polarizado. Considere o material dielétrico mostrado na Figura 5.8 como constituído de dipolos com momento de dipolo  $\mathbf{p}$  por unidade de volume. De acordo com a equação (4.80), o potencial  $dV$  em um ponto externo  $O$  devido ao momento de dipolo  $\mathbf{p} dv'$  é dado por

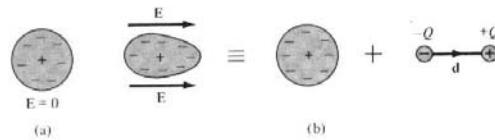


Figura 5.6 Polarização de um átomo ou molécula apolar.

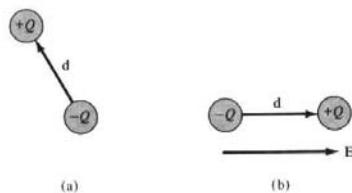


Figura 5.7 Polarização de uma molécula polar:  
(a) dipolo permanente ( $\mathbf{E} = 0$ ), (b) alinhamento de dipolo permanente ( $\mathbf{E} \neq 0$ ).

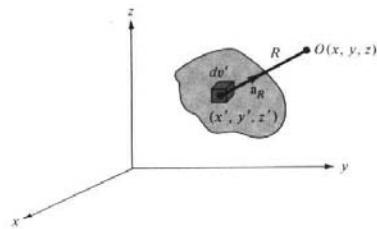


Figura 5.8 Um bloco de material dielétrico com momento de dipolo  $\mathbf{p}$  por unidade de volume.

$$dV = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R \, dv'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (5.24)$$

onde  $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$  e  $R$  é a distância entre o elemento de volume  $dv'$  em  $(x', y', z')$  e o ponto de interesse  $O(x, y, z)$ . Podemos transformar a equação (5.24) de forma a facilitar a interpretação física. Será mostrado, logo a seguir (veja Seção 7.7), que o gradiente de  $1/R$  em relação às coordenadas linha é dado por:

$$\nabla' = \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2}$$

Assim,

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right)$$

Ao aplicar a identidade vetorial

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot f \mathbf{A} &= f \nabla' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla' f, \\ \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} &= \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Substituindo a equação (5.25) na equação (5.24) e integrando sobre todo o volume  $v'$  do dielétrico, obtemos:

$$V = \int_{v'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{P} \right] dv'$$

Aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo chegamos, finalmente, à

$$V = \int_S \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}'_n}{4\pi\epsilon_0 R} dS' + \int_{v'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 R} dv' \quad (5.26)$$

onde  $\mathbf{a}'_n$  é o vetor unitário normal que aponta para fora da superfície  $dS'$  do dielétrico. Comparando os dois termos do lado direito da equação (5.26) com as equações (4.68) e (4.69), temos que os dois termos denotam o potencial devido a distribuições de cargas superficial e volumétrica, cujas densidades são dadas por (omitindo os índices linha):

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n \quad (5.27a)$$

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (5.27b)$$

Em outras palavras, a equação (5.26) revela que, quando a polarização ocorre, uma densidade volumétrica de cargas equivalente  $\rho_{pv}$  se forma no interior do dielétrico, enquanto que uma densidade superficial de cargas equivalente  $\rho_{ps}$  se forma sobre a superfície do dielétrico. Referimos  $\rho_{ps}$  e  $\rho_{pv}$  como, respectivamente, *densidade superficial* e *densidade volumétrica de cargas ligadas* (*ou de polarização*), como uma forma de distingui-las das densidades superficial e volumétrica de cargas *livres*  $\rho_v$  e  $\rho_s$ . As cargas ligadas são cargas que não são livres para se movimentar no interior do material dielétrico. Elas surgem em função do deslocamento, que ocorre em escala molecular, durante o processo de polarização. As cargas livres são aquelas que são capazes de se mover ao longo de distâncias macroscópicas, como elétrons em um condutor. São essas as cargas que podemos controlar. O total de cargas positivas ligadas sobre a superfície  $S$ , que contorna o dielétrico, é

$$Q_b = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_{ps} dS \quad (5.28a)$$

enquanto que a carga que permanece no interior de  $S$  é dada por:

$$-Q_b = \int_v \rho_{pv} dv = - \int_v \nabla \cdot \mathbf{P} dv \quad (5.28b)$$

Desse modo, a carga total do material dielétrico permanece igual a zero, isto é:

$$\text{Carga total} = \oint_S \rho_{ps} dS + \int_v \rho_{pv} dv = Q_b - Q_b = 0$$

Esse resultado é o esperado porque o dielétrico foi eletricamente neutralizado antes da polarização.

Consideremos, agora, o caso em que a região do dielétrico contém cargas livres. Se  $\rho_v$  é a densidade volumétrica de cargas livres, a densidade volumétrica de cargas total  $\rho_t$  é dada por:

$$\rho_t = \rho_v + \rho_{pv} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.29)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \rho_v &= \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} - \rho_{pv} \\ &= \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad (5.31)$$

Concluímos que o efeito líquido do dielétrico sobre o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é de aumentar  $\mathbf{D}$  no interior do dielétrico de uma quantidade  $\mathbf{P}$ . Em outras palavras, devido à aplicação de  $\mathbf{E}$  no material dielétrico, a densidade de fluxo é maior do que seria se esse campo fosse aplicado no espaço livre. Deve ser observado que a equação (4.35), que define  $\mathbf{D}$  no espaço livre, é um caso especial da equação (5.31) porque  $\mathbf{P} = 0$  no espaço livre.

Seria de se esperar que a polarização  $\mathbf{P}$  variasse diretamente com o campo  $\mathbf{E}$  aplicado. Para alguns dielétricos, isso é o que ocorre e temos

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}} \quad (5.32)$$

onde  $\chi_e$ , conhecida como *susceptibilidade elétrica* do material, é aproximadamente a medida de quanto um dado dielétrico é suscetível (ou sensível) aos campos elétricos.

## 5.6 CONSTANTE E RIGIDEZ DIELÉTRICA

Substituindo a equação (5.32) na equação (5.31), obtemos

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (5.33)$$

ou

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \quad (5.34)$$

onde

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r} \quad (5.35)$$

e

$$\boxed{\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad (5.36)$$

Nas equações (5.33) a (5.36),  $\epsilon$  é chamado de *permissividade do dielétrico*,  $\epsilon_0$  é a permissividade do espaço livre, definida na equação (4.2) como, aproximadamente,  $10^{-9}/36\pi$  F/m, e  $\epsilon_r$  é chamado de *constante dielétrica ou permissividade relativa*.

**A constante dielétrica (ou permissividade relativa)**  $\epsilon_r$  é a razão entre a permissividade do dielétrico e a do espaço livre.

Deve ser também observado que  $\epsilon$ ,  $\epsilon_r$  e  $\chi_e$  são adimensionais, enquanto que  $\epsilon$  e  $\epsilon_0$  são em farads/metro. Os valores aproximados das constantes dielétricas de alguns materiais usuais são apresentados na Tabela B.2 no Apêndice B. Os valores apresentados na Tabela B.2 são para campos estáticos ou de baixa frequência ( $< 1000$  Hz). Esses valores podem se alterar em altas frequências. A partir da tabela, observe que  $\epsilon_r$  é sempre maior ou igual à unidade. Para o espaço livre e materiais não-dielétricos (como os metais),  $\epsilon_r = 1$ .

A teoria dos dielétricos pressupõe dielétricos ideais. Na prática, nenhum dielétrico é ideal. Quando o campo elétrico no interior de um dielétrico é suficientemente elevado, ele começa a arrancar os elétrons das moléculas e o dielétrico torna-se condutor. A *ruptura dielétrica* ocorre quando o dielétrico torna-se condutor. A ruptura dielétrica ocorre em todos os tipos de materiais dielétricos (gases, líquidos ou sólidos) e depende da natureza do material, da temperatura, da umidade e do intervalo de tempo em que o campo elétrico é aplicado. O menor valor de campo elétrico para o qual essa ruptura ocorre é chamado de *rigidez dielétrica* do material dielétrico.

**A rigidez dielétrica** é o máximo campo elétrico que o dielétrico pode suportar (ou ao qual pode ser submetido) sem que haja ruptura.

Na Tabela B.2 também estão listadas a rigidez dielétrica de alguns dielétricos usuais. Já que nossa teoria dos dielétricos não se aplica quando ocorre a ruptura dielétrica, consideraremos sempre dielétricos ideais e evitaremos a ruptura dielétrica.

## 5.7 DIELÉTRICOS LINEARES, ISOTRÓPICOS E HOMOGÊNEOS

Embora as equações (5.24) a (5.31) sejam para materiais dielétricos em geral, as equações (5.32) a (5.34) são aplicáveis apenas para materiais lineares isotrópicos. Um material é dito *linear* se  $\mathbf{D}$  varia linearmente com  $\mathbf{E}$ . Em caso contrário, é dito *não linear*. Os materiais para os quais  $\epsilon$  (ou  $\sigma$ ) não va-

ria na região que está sendo considerada e, consequentemente, é o mesmo para todos os pontos (isto é, independente de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), são ditos *homogêneos*. São ditos *não homogêneos* (ou heterogêneos) quando  $\epsilon$  depende das coordenadas espaciais. A atmosfera é um exemplo típico de meio não homogêneo. Sua permissividade varia com a altitude. Materiais nos quais  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  estão na mesma direção são ditos *isotrópicos*, isto é, dielétricos isotrópicos são aqueles que têm as mesmas propriedades em todas as direções. Em materiais *anisotrópicos* (ou *não isotrópicos*),  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}$  não são paralelos.  $\epsilon$  ou  $\chi_e$  tem nove componentes que são coletivamente referidas como um *tensor*. Por exemplo, em lugar da equação (5.34), temos

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

para materiais anisotrópicos. Os materiais cristalinos e o plasma magnetizado são anisotrópicos.

**Um material dielétrico** (para o qual  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}$  se aplica) é linear se  $\epsilon$  não varia com o campo  $\mathbf{E}$  aplicado, homogêneo se  $\epsilon$  não varia ponto a ponto e isotrópico se  $\epsilon$  não varia com a direção.

O mesmo conceito é válido para um material condutor, para o qual  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$  se aplica. O material é linear se  $\sigma$  não varia com o  $\mathbf{E}$ , homogêneo se  $\sigma$  é o mesmo em todos os pontos e isotrópico se  $\sigma$  não varia com a direção.

Na maior parte do tempo, consideraremos apenas meios lineares, isotrópicos e homogêneos. Para tais meios, todas as fórmulas obtidas no Capítulo 4 para espaço livre podem ser aplicadas simplesmente substituindo  $\epsilon_0$  por  $\epsilon_0\epsilon_r$ . Assim, a lei de Coulomb, por exemplo, expressa na equação (4.4), pode ser reescrita como

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^2} \mathbf{a}_R \quad (5.38)$$

e a equação (4.96) torna-se

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon_0\epsilon_r E^2 dv \quad (5.39)$$

quando aplicada ao meio dielétrico.

### EXEMPLO 5.5

Um cubo dielétrico de aresta  $L$  e centro na origem tem polarização radial dada por  $\mathbf{P} = ar$ , onde  $a$  é uma constante e  $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ . Determine todas as densidades de cargas ligadas e demonstre que a carga ligada total se anula.

#### Solução:

Para cada uma das seis faces do cubo, existe uma carga superficial  $\rho_{ps}$ . Para a face localizada em  $x = L/2$ , por exemplo:

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_t \Big|_{x=L/2} = ax \Big|_{x=L/2} = aL/2$$

O total da carga ligada superficial é dada por:

$$\begin{aligned} Q_s &= \int \rho_{ps} dS = 6 \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \rho_{ps} dy dz = \frac{6aL}{2} L^2 \\ &= 3aL^3 \end{aligned}$$

A densidade volumétrica de cargas ligadas é dada por

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -(a + a + a) = -3a$$

e o total da carga ligada volumétrica é dada por:

$$Q_v = \int \rho_{pv} dv = -3a \int dv = -3aL^3$$

Dessa maneira, a carga total é:

$$Q_t = Q_s + Q_v = 3aL^3 - 3aL^3 = 0$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 5.5

Uma haste fina de seção reta  $A$  se estende ao longo do eixo  $x$  de  $x = 0$  até  $x = L$ . A polarização da haste ocorre ao longo de seu comprimento e é dada por  $P_x = ax^2 + b$ . Calcule  $\rho_{pv}$  e  $\rho_{ps}$ , em cada extremidade da haste. Demonstre que a carga ligada total se anula nesse caso.

**Resposta:**  $0; -2aL; -b; aL^2 + b$ ; a demonstração.

### EXEMPLO 5.6

A intensidade do campo elétrico no poliestireno ( $\epsilon_r = 2,55$ ), que preenche o espaço entre duas placas de um capacitor de placas paralelas, é  $10 \text{ kV/m}$ . A distância entre as placas é de  $1,5 \text{ mm}$ . Calcule:

- (a)  $D$ ;
- (b)  $P$ ;
- (c) a densidade superficial de cargas livres nas placas;
- (d) a densidade superficial de cargas de polarização;
- (e) a diferença de potencial entre as placas.

**Solução:**

- (a)  $D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot (2,55) \cdot 10^4 = 225,4 \text{ nC/m}^2$
- (b)  $P = \chi_r \epsilon_0 E = (1,55) \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 10^4 = 137 \text{ nC/m}^2$
- (c)  $\rho_s = D \cdot a_n = D_n = 225,4 \text{ nC/m}^2$
- (d)  $\rho_{ps} = P \cdot a_n = P_n = 137 \text{ nC/m}^2$
- (e)  $V = Ed = 10^4 (1,5 \times 10^{-3}) = 15 \text{ V}$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 5.6

Um capacitor de placas paralelas, com separação entre placas de  $2 \text{ mm}$ , tem diferença de potencial entre as placas de  $1 \text{ kV}$ . Se o espaço entre as placas é preenchido com poliestireno ( $\epsilon_r = 2,55$ ), determine  $E$ ,  $P$  e  $\rho_{pv}$ .

**Resposta:**  $500 \text{ a}_s \text{kV/m}; 6,853 \text{ a}_s \mu\text{C/m}^2; 6,853 \mu\text{C/m}^2$ .

**EXEMPLO 5.7**

Uma esfera dielétrica ( $\epsilon_r = 5,7$ ), de raio 10 cm, tem uma carga pontual de 2 pC colocada em seu centro. Calcule:

- a densidade superficial de cargas de polarização sobre a superfície da esfera;
- a força exercida pela carga sobre uma carga pontual de -4 pC localizada sobre a esfera.

**Solução:**

- Aplicamos a lei de Coulomb ou a lei de Gauss para obter:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{a}_r \\ \mathbf{P} &= \chi_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\chi_r Q}{4\pi\epsilon_r r^2} \mathbf{a}_r \\ \rho_{px} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_r = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi\epsilon_r r^2} = \frac{(4,7) 2 \times 10^{-12}}{4\pi(5,7) 100 \times 10^{-4}} \\ &= 13,12 \text{ pC/m}^2 \end{aligned}$$

Usando a lei de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{a}_r = \frac{(-4)(2) \times 10^{-24}}{4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} (5,7) 100 \times 10^{-4}} \mathbf{a}_r \\ &= -1,263 \mathbf{a}_r \text{ pN} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 5.7**

Em um material dielétrico,  $E_z = 5 \text{ V/m}$  e  $\mathbf{P} = \frac{1}{10\pi} (3\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z) \text{ nC/m}^2$ .

Calcule:

- $\chi_r$ ;
- $\mathbf{E}$ ;
- $\mathbf{D}$ .

**Resposta:** (a) 2,16; (b)  $5\mathbf{a}_x - 1,67\mathbf{a}_y + 6,67\mathbf{a}_z \text{ V/m}$ ; (c)  $139,7\mathbf{a}_x - 46,6\mathbf{a}_y + 186,3\mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$ .

**EXEMPLO 5.8**

Determine a força de atração entre as placas de um capacitor de placas paralelas. Determine também a pressão sobre a superfície de cada placa devido ao campo.

**Solução:**

Da equação (4.26), a intensidade do campo elétrico sobre a superfície de cada placa é

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_n$$

onde  $\mathbf{a}_n$  é uma normal unitária à placa e  $\rho_s$  é a densidade superficial de cargas. A força total em cada placa é

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} = \rho_s S \cdot \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_n = \frac{\rho_s^2 S}{2\epsilon_0\epsilon_r} \mathbf{a}_n$$

ou

$$F = \frac{\rho_s^2 S}{2\epsilon} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

A pressão (força/área) é  $\frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r S}$ .

### EXERCÍCIO PRÁTICO 5.8

Na Figura 5.9 é mostrado um dispositivo de medida de potencial chamado *eletrômetro*. Basicamente, consiste em um capacitor de placas paralelas, com uma das placas tendo uma posição móvel suspensa pelo braço de uma balança, de tal modo que a força  $F$  sobre ela é medida em termos do peso no prato da balança. Se  $S$  é a área de cada placa, demonstre que

$$V_1 - V_2 = \left[ \frac{2Fd^2}{\epsilon_0 S} \right]^{1/2}$$

**Resposta:** a demonstração.

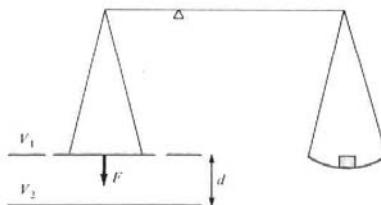


Figura 5.9 Um eletrômetro; referente ao Exercício 5.8.

## 5.8 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE E TEMPO DE RELAXAÇÃO

Devido ao princípio de conservação da carga, a taxa de diminuição da carga em um dado volume, em um determinado tempo, deve ser igual à corrente líquida que sai da superfície fechada que limita esse volume. Dessa forma, a corrente  $I$ , que sai da superfície fechada, é dada por

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{-dQ_{in}}{dt} \quad (5.40)$$

onde  $Q_{in}$  é a carga total no interior da superfície fechada. Usando o teorema da divergência:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv \quad (5.41)$$

e

$$\frac{-dQ_{in}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dv = -\int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \quad (5.42)$$

Substituindo as equações (5.41) e (5.42) na equação (5.40), tem-se

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv = - \int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

ou

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \quad (5.43)$$

que é conhecida como *equação da continuidade de corrente*. Deve-se ter em mente que a equação da continuidade é derivada do princípio de conservação da carga e, essencialmente, estabelece que a carga elétrica não pode ser destruída. Para correntes estacionárias,  $\partial \rho_v / \partial t = 0$  e, por isso,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , mostrando que a carga total que sai de um volume é a mesma carga total que entra nesse volume. A Lei de Kirchhoff das correntes é consequência dessa propriedade.

Tendo já discutido a equação da continuidade e as propriedades  $\sigma$  e  $\epsilon$  dos materiais, podemos analisar o que ocorre ao introduzir cargas em algum ponto no *interior* de um dado material (condutor ou dielétrico). Faremos uso da equação (5.43) junto com a lei de Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.44)$$

e a lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (5.45)$$

Substituindo as equações (5.44) e (5.45) na equação (5.43), obtém-se

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma \rho_v}{\epsilon} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0 \quad (5.46)$$

Essa é uma equação diferencial linear, ordinária e homogênea. Por separação de variáveis, a partir de (5.46), obtemos

$$\frac{\partial \rho_v}{\rho_v} = - \frac{\sigma}{\epsilon} dt \quad (5.47)$$

e, integrando ambos os lados da igualdade, tem-se

$$\ln \rho_v = - \frac{\sigma t}{\epsilon} + \ln \rho_{vo}$$

onde  $\rho_{vo}$  é uma constante de integração. Dessa forma,

$$\boxed{\rho_v = \rho_{vo} e^{-\sigma t / \epsilon T_r}} \quad (5.48)$$

onde

$$\boxed{T_r = \frac{\epsilon}{\sigma}} \quad (5.49)$$

Na equação (5.48),  $\rho_{vo}$  é a densidade de carga inicial (isto é,  $\rho_v$  em  $t = 0$ ). A equação mostra que, como resultado da introdução de cargas em algum ponto no interior do material, ocorre um decréscimo

na densidade volumétrica de cargas  $\rho_v$ . O movimento da carga, do ponto no interior onde foi introduzida até a superfície do material, está associada a esse decréscimo. A constante de tempo  $T_r$  (em segundos) é conhecida como *tempo de relaxação ou tempo de rearranjo*.

**Tempo de relaxação** é o tempo que uma carga no interior de um material leva para decair a  $e^{-1} = 36,8\%$  de seu valor inicial.

Esse tempo é curto para bons condutores e longo para bons dielétricos. Por exemplo, para o cobre  $\sigma = 5,8 \times 10^{17}$  mhos/m,  $\epsilon_r = 1$  e

$$T_r = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\sigma} = 1 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{1}{5,8 \times 10^7} = 1,53 \times 10^{-19} \text{ s} \quad (5.50)$$

mostrando um rápido decréscimo da carga colocada no interior do cobre. Isso implica que, para bons condutores, o tempo de relaxação é tão curto que a maior parte da carga desaparece dos pontos internos e aparece na superfície (como carga superficial). Por outro lado, para quartzo fundido, por exemplo,  $\sigma = 10^{-17}$  mhos/m,  $\epsilon_r = 5$ ,

$$T_r = 5 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{1}{10^{-17}} = 51,2 \text{ dias} \quad (5.51)$$

mostrando um tempo de relaxação bastante longo. Assim, para bons dielétricos, podemos considerar que a carga permanecerá no ponto onde foi introduzida.

## 5.9 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Até agora, consideramos a existência do campo elétrico em um meio homogêneo. Se existe campo em uma região formada por dois meios diferentes, as condições que o campo deve satisfazer, na interface de separação entre os meios, são chamadas *condições de fronteira*. Essas condições são úteis na determinação do campo em um lado da fronteira se o campo no outro lado for conhecido. Obviamente, as condições serão ditadas pelos tipos de materiais dos meios. Consideraremos as condições de fronteira na interface de separação entre os meios:

- dielétrico ( $\epsilon_{r1}$ ) e dielétrico ( $\epsilon_{r2}$ )
- condutor e dielétrico
- condutor e espaço livre

Para determinar as condições de fronteira, precisamos usar as equações de Maxwell:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.52)$$

e

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} \quad (5.53)$$

Também precisamos decompor a intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  em suas duas componentes ortogonais:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n \quad (5.54)$$

onde  $\mathbf{E}_t$  e  $\mathbf{E}_n$  são, respectivamente, as componentes tangencial e normal de  $\mathbf{E}$  em relação à interface de interesse. Uma decomposição semelhante pode ser feita para a densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$ .

### A. Interface dielétrico–dielétrico

Considere o campo elétrico  $\mathbf{E}$  existente em uma região formada por dois dielétricos distintos caracterizados por  $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$  e  $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2}$ , como mostrado na Figura 5.10(a).  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  nos meios 1 e 2, respectivamente, podem ser decompostos como:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1t} + \mathbf{E}_{1n} \quad (5.55a)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} \quad (5.55b)$$

Aplicamos a equação (5.52) ao caminho fechado *abcd* da Figura 5.10(a), assumindo que o caminho é muito pequeno em relação à variação de  $\mathbf{E}$ . Obtemos

$$0 = E_{1t} \Delta w - E_{1n} \frac{\Delta h}{2} - E_{2n} \frac{\Delta h}{2} - E_{2t} \Delta w + E_{2n} \frac{\Delta h}{2} + E_{1n} \frac{\Delta h}{2} \quad (5.56)$$

onde  $E_t = |\mathbf{E}_t|$  e  $E_n = |\mathbf{E}_n|$ . Como  $\Delta h \rightarrow 0$ , a equação (5.56) torna-se:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (5.57)$$

Dessa forma, as componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$  são as mesmas em ambos os lados da fronteira. Em outras palavras,  $\mathbf{E}_t$  não sofre alteração na fronteira e é dito *contínuo* através da fronteira. Já que  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$ , a equação (5.57) pode ser escrita como

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = E_{1t} = E_{2t} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

ou

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \quad (5.58)$$

Isto é,  $D_t$  sofre alguma alteração ao atravessar a interface. Por isso,  $D_t$  é dito *descontínuo* através da interface.

Similarmente, aplicamos a equação (5.53) ao cilindro (superfície gaussiana) da Figura 5.10b. Fazendo  $\Delta h \rightarrow 0$ , tem-se

$$\Delta Q = \rho_s \Delta S = D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S$$

ou

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (5.59)$$

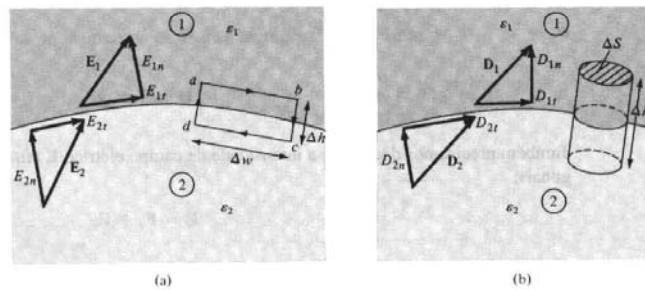


Figura 5.10 Fronteira dielétrico–dielétrico.

onde  $\rho_s$  é a densidade de cargas livres colocadas, deliberadamente, na fronteira. É preciso ter em mente que a equação (5.59) se baseia no pressuposto de que  $\mathbf{D}$  está apontando da região 2 para a região 1, e essa equação deve ser aplicada de acordo com esse pressuposto. Se não existirem cargas livres na interface (isto é, se cargas não forem, deliberadamente, colocadas nessa região),  $\rho_s = 0$  e a equação (5.59) torna-se:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (5.60)$$

Dessa forma, a componente normal de  $\mathbf{D}$  é contínua através da interface; isto é,  $D_n$  não sofre nenhuma alteração na fronteira. Já que  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , a equação (5.60) pode ser escrita como

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad (5.61)$$

mostrando que a componente normal de  $\mathbf{E}$  é descontínua na fronteira. As equações (5.57) e (5.59) ou (5.60) são referidas, no seu conjunto, como *condições de fronteira*. Essas condições devem ser satisfeitas por um campo elétrico na fronteira de separação entre dois dielétricos.

Como mencionado anteriormente, as condições de fronteira são usualmente empregadas para determinar o campo elétrico em um lado da fronteira, dado o campo no outro lado. Além disso, podemos usar as condições de fronteira para determinar a “refração” do campo elétrico através da interface. Considere  $\mathbf{D}_1$  ou  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{D}_2$  ou  $\mathbf{E}_2$  fazendo ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  com a *normal* à interface, como ilustrado na Figura 5.11. Usando a equação (5.57), temos

$$E_1 \sin \theta_1 = E_{1t} = E_{2t} = E_2 \sin \theta_2$$

ou

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (5.62)$$

Similarmente, aplicando a equação (5.60) ou (5.61), obtemos

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = D_{1n} = D_{2n} = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

ou

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 \quad (5.63)$$

Dividindo a equação (5.62) pela equação (5.63), obtém-se:

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2} \quad (5.64)$$

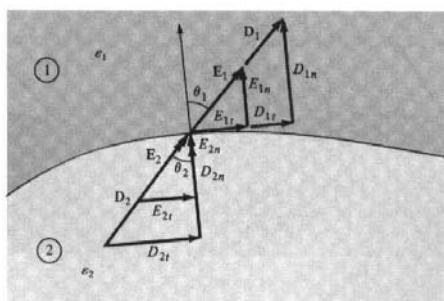


Figura 5.11 Refração de  $\mathbf{D}$  ou  $\mathbf{E}$  em uma fronteira dielétrico-dielétrico.

Já que  $\epsilon_1 = \epsilon_0\epsilon_{r1}$  e  $\epsilon_2 = \epsilon_0\epsilon_{r2}$ , a equação (5.64) torna-se:

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \quad (5.65)$$

Essa é a *lei da refração* do campo elétrico em uma fronteira livre de cargas (já que se considera  $\rho_s = 0$  na interface). Dessa forma, em geral, uma interface entre dois dielétricos causa o desvio das linhas de fluxo, como resultado da diferença no número de cargas de polarização que se acumulam em cada um dos lados da interface.

### B. Interface condutor – dielétrico

Esse é o caso mostrado na Figura 5.12. O condutor é considerado perfeito (isto é,  $\sigma \rightarrow \infty$  ou  $\rho_c \rightarrow 0$ ). Embora tal condutor não seja concebível na prática, podemos considerar condutores, tais como o cobre e a prata, como se fossem condutores perfeitos.

Para determinar as condições de fronteira em uma interface condutor-dielétrico, seguiremos o mesmo procedimento usado para o caso da interface dielétrico-dielétrico, com exceção de que consideraremos  $\mathbf{E} = 0$  no interior do condutor. Aplicando a equação (5.52) ao caminho fechado *abcda* da Figura 5.12(a), tem-se:

$$0 = 0 \cdot \Delta w + 0 \cdot \frac{\Delta h}{2} + E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - E_t \cdot \Delta w - E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - 0 \cdot \frac{\Delta h}{2} \quad (5.66)$$

Como  $\Delta h \rightarrow 0$ :

$$E_t = 0 \quad (5.67)$$

De maneira similar, aplicando a equação (5.53) ao cilindro da Figura 5.12(b) e fazendo  $\Delta h \rightarrow 0$ , obtemos

$$\Delta Q = D_n \cdot \Delta S = 0 \cdot \Delta S \quad (5.68)$$

porque  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = 0$  no interior do condutor. A equação (5.68) pode ser escrita como

$$D_n = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s$$

ou

$$D_n = \rho_s \quad (5.69)$$

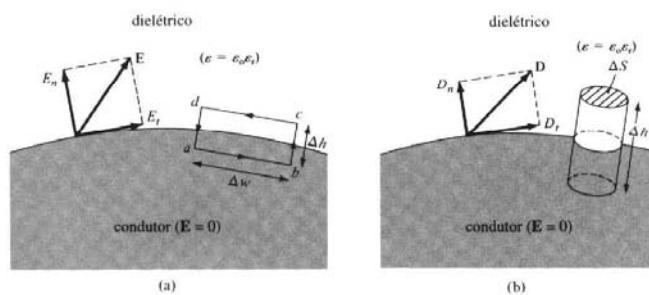


Figura 5.12 Fronteira condutor-dielétrico.

Dessa forma, sob condições estáticas, a respeito de um condutor perfeito, pode-se concluir que:

1. Não existe campo elétrico *no interior* de um condutor, isto é:

$$\rho_v = 0, \quad \mathbf{E} = 0 \quad (5.70)$$

2. Já que  $\mathbf{E} = -\nabla V = 0$ , não pode existir diferença de potencial entre dois pontos no interior do condutor, isto é, o condutor é um corpo equipotencial.

3. Pode existir um campo elétrico  $\mathbf{E}$  externo ao condutor e *normal* à sua superfície, isto é:

$$D_t = \epsilon_0 \epsilon_r E_t = 0, \quad D_n = \epsilon_0 \epsilon_r E_n = \rho_S \quad (5.71)$$

Uma aplicação importante do fato de que  $\mathbf{E} = 0$ , no interior do condutor, é em *isolamento ou blindagem eletrostática*. Se um condutor *A*, mantido a um potencial zero, circunda um condutor *B*, como mostrado na Figura 5.13, *B* é dito estar eletricamente isolado por *A* de outros sistemas elétricos, tais como o condutor *C*, externo à *A*. Da mesma maneira que o condutor *C*, externo à *A*, está isolado de *B* pela presença de *A*.

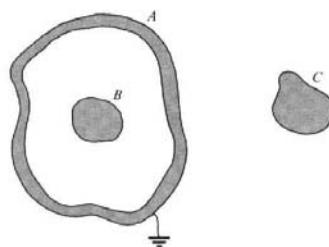


Figura 5.13 Isolamento eletrostático.

Assim, o condutor *A* atua como um isolador ou uma blindagem, e as condições elétricas no interior e no exterior de *A* são completamente independentes uma das outras.

### C. Interface Condutor – Espaço Livre

Esse é um caso especial da interface condutor–dielétrico e está ilustrado na Figura 5.14. As condições de fronteira na interface entre um condutor e o espaço livre podem ser obtidas da equação (5.71), substituindo  $\epsilon_r$  por 1 (porque o espaço livre pode ser considerado um dielétrico especial, para o qual  $\epsilon_r = 1$ ). Conforme esperado, o campo elétrico externo ao condutor é normal a sua superfície. Assim, as condições de fronteira são:

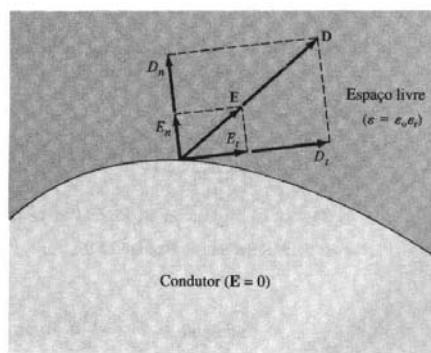


Figura 5.14 Fronteira condutor – espaço livre.

$$D_t = \epsilon_0 E_t = 0, \quad D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S \quad (5.72)$$

Deve-se observar, novamente, que a equação (5.72) implica que o campo  $\mathbf{E}$  deve se aproximar da superfície condutora perpendicularmente à ela.

### EXEMPLO 5.9

Dois dielétricos isotrópicos homogêneos muito extensos são justapostos de modo que sua interface se encontra no plano  $z = 0$ . Para  $z \geq 0$ ,  $\epsilon_{r1} = 4$  e para  $z \leq 0$ ,  $\epsilon_{r2} = 3$ . Um campo elétrico uniforme

$\mathbf{E}_1 = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$  kV/m existe para  $z \geq 0$ . Determine:

- $\mathbf{E}_2$  para  $z \leq 0$ ;
- Os ângulos que  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  fazem com a interface;
- As densidades de energia, em  $J/m^3$ , em ambos os dielétricos;
- A energia no interior de um cubo, de 2 m de aresta, centrado em  $(3, 4, -5)$ .

#### Solução:

Seja o problema como mostra a ilustração na Figura 5.15.

(a) Já que  $\mathbf{a}_z$  é normal ao plano da interface, obtemos as componentes normais fazendo:

$$E_{1n} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_z = 3$$

$$\mathbf{E}_{1n} = 3\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_{2n} = (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z$$

Também

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t$$

Portanto:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$$

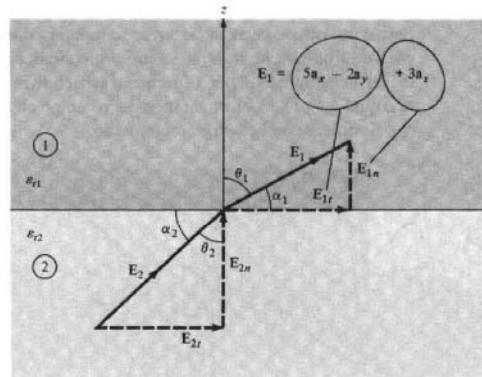


Figura 5.15 Referente ao Exemplo 5.9.

Dessa forma:

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$$

De maneira similar

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} \rightarrow \varepsilon_{r2}\mathbf{E}_{2n} = \varepsilon_{r1}\mathbf{E}_{1n}$$

ou

$$\mathbf{E}_{2n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \mathbf{E}_{1n} = \frac{4}{3} (3\mathbf{a}_z) = 4\mathbf{a}_z$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} \\ &= 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \text{ kV/m} \end{aligned}$$

(b) Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  os ângulos que  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  fazem com a interface e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos que esses vetores fazem com a normal à interface, como mostrado na Figura 5.15, isto é,

$$\alpha_1 = 90^\circ - \theta_1$$

$$\alpha_2 = 90^\circ - \theta_2$$

Já que  $E_{1n} = 3$  e  $E_{1t} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{\sqrt{29}}{3} = 1,795 \rightarrow \theta_1 = 60,9^\circ$$

Donde:

$$\alpha_1 = 29,1^\circ$$

Alternativamente,

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_n = |\mathbf{E}_1| \cdot 1 \cdot \cos \theta_1$$

ou

$$\cos \theta_1 = \frac{3}{\sqrt{38}} = 0,4867 \rightarrow \theta_1 = 60,9^\circ$$

De maneira similar,

$$E_{2n} = 4 \quad E_{2t} = E_{1t} = \sqrt{29}$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \frac{\sqrt{29}}{4} = 1,346 \rightarrow \theta_2 = 53,4^\circ$$

Donde,

$$\alpha_2 = 36,6^\circ$$

Note que  $\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$  é satisfeita.

(c) As densidades de energia são dadas por

$$w_{E_1} = \frac{1}{2} \epsilon_1 |\mathbf{E}_1|^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot (25 + 4 + 9) \times 10^6 \\ = 672 \mu\text{J/m}^3$$

$$w_{E_2} = \frac{1}{2} \epsilon_2 |\mathbf{E}_2|^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} (25 + 4 + 16) \times 10^6 \\ = 597 \mu\text{J/m}^3$$

(d) No centro  $(3, 4, -5)$  do cubo de aresta 2 m,  $z = -5 < 0$ , isto é, o cubo está na região 2 com  $2 \leq x \leq 4$ ,  $3 \leq y \leq 5$ ,  $-6 \leq z \leq -4$ . Por isso:

$$W_E = \int w_{E_2} dv = \int_{x=2}^4 \int_{y=3}^5 \int_{z=-6}^{-4} w_{E_2} dz dy dz = w_{E_2}(2)(2)(2) \\ = 597 \times 8 \mu\text{J} = 4.776 \text{ mJ}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 5.9

Um dielétrico homogêneo ( $\epsilon_r = 2,5$ ) preenche uma região 1 ( $x \leq 0$ ), enquanto que a região 2 ( $x \geq 0$ ) é o espaço livre.

- (a) Se  $\mathbf{D}_1 = 12\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \text{nC/m}^2$ , determine  $\mathbf{D}_2$  e  $\theta_2$ .  
 (b) Se  $E_2 = 12 \text{ V/m}$  e  $\theta_2 = 60^\circ$ , determine  $E_1$  e  $\theta_1$ . Considere  $\theta_1$  e  $\theta_2$  como definido no exemplo anterior.

**Resposta:** (a)  $12\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 1,6\mathbf{a}_z \text{nC/m}^2$ ;  $19,75^\circ$ ; (b)  $10,67 \text{ V/m}$ ,  $77^\circ$ .

### EXEMPLO 5.10

A região  $y \leq 0$  consiste de um condutor perfeito, enquanto a região  $y \geq 0$  é um meio dielétrico ( $\epsilon_{r,\epsilon} = 2$ ), como na Figura 5.16. Se existe uma carga superficial de  $2 \text{nC/m}^2$  no condutor, determine  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  em:

- (a)  $A(3, -2, 2)$   
 (b)  $B(-4, 1, 5)$

#### Solução:

(a) O ponto  $A(3, -2, 2)$  está localizado no condutor, já que  $y = -2 < 0$  em  $A$ . Portanto,

$$\mathbf{E} = 0 = \mathbf{D}$$

(b) O ponto  $B(-4, 1, 5)$  está localizado no meio dielétrico, já que  $y = 1 > 0$  em  $B$ .

$$D_n = \rho_S = 2 \text{nC/m}^2$$

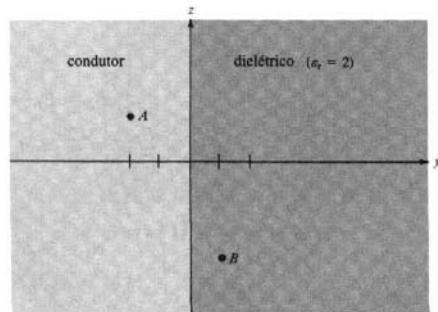


Figura 5.16 Veja Exemplo 5.10.

Portanto,

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{a}_y \text{nC/m}^2$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 2 \times 10^{-9} \times \frac{36\pi}{2} \times 10^9 \mathbf{a}_y = 36\pi \mathbf{a}_y \\ &= 113,1 \mathbf{a}_y \text{ V/m}\end{aligned}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 5.10

O campo elétrico em um ponto particular na interface entre o ar e a superfície de um condutor é de  $\mathbf{E} = 60\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z \text{ mV/m}$ . Determine  $\mathbf{D}$  e  $\rho_s$  nesse ponto.

**Resposta:**  $0,531\mathbf{a}_x + 0,177\mathbf{a}_y - 0,265\mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$ ;  $0,619 \text{ pC/m}^2$ .

### RESUMO

- Os materiais podem ser classificados, grosso modo, como condutores ( $\sigma \gg 1$ ,  $\epsilon_r = 1$ ) e dielétricos ( $\sigma \ll 1$ ,  $\epsilon_r \geq 1$ ), em termos de suas propriedades elétricas  $\sigma$  e  $\epsilon_r$ , onde  $\sigma$  é a condutividade e  $\epsilon_r$  é a constante dielétrica ou permissividade relativa.
  - A corrente elétrica é o fluxo da densidade de corrente elétrica através de uma superfície, isto é:
- $$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$
- A resistência de um condutor de seção reta uniforme é:
- $$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$
- O efeito macroscópico da polarização, em um dado volume de um material dielétrico, é o de “pintar” sua superfície com cargas ligadas  $Q_b = \oint_S \rho_{ps} dS$  e produzir, em seu interior, um acúmulo de cargas ligadas  $Q_b = \int_v \rho_{pv} dv$ , onde  $\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n$  e  $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ .
  - Em um meio dielétrico, os campos  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  estão relacionados por  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , onde  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  é a permissividade do meio.
  - A suscetibilidade elétrica  $\chi_e (= \epsilon_r - 1)$  de um dielétrico mede a sensibilidade do material ao campo elétrico.
  - Um material dielétrico é linear se  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  se verifica, isto é, se  $\epsilon$  é independente de  $\mathbf{E}$ . É homogêneo se  $\epsilon$  é independente da posição. É isotrópico se  $\epsilon$  é um escalar.
  - O princípio da conservação da carga, base da Lei de Kirchhoff das correntes, é estabelecido na equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$$

- O tempo de relaxação,  $T_r = \epsilon/\sigma$ , de um material é o tempo que leva uma carga colocada em seu interior para diminuir de um fator de  $\epsilon^{-1} = 37\%$ .
- As condições de fronteira devem ser satisfeitas por um campo elétrico existente em dois meios diferentes separados por uma interface. Para uma interface dielétrico-dielétrico:

$$\begin{aligned}E_{1r} &= E_{2r} \\ D_{1n} - D_{2n} &= \rho_s \quad \text{ou} \quad D_{1n} = D_{2n} \quad \text{se} \quad \rho_s = 0\end{aligned}$$

Para uma interface dielétrico-condutor

$$E_t = 0 \quad D_n = \epsilon E_n = \rho_s$$

porque  $\mathbf{E} = 0$  dentro do condutor.

## QUESTÕES DE REVISÃO

- 5.1** Qual das situações a seguir *não* é um exemplo de corrente de convecção?
- Uma correia carregada em movimento.
  - O movimento dos elétrons em um válvula cletrônica.
  - Um feixe de elétrons em um tubo de televisão.
  - Uma corrente eletrônica que flui em um fio de cobre.
- 5.2** Quando uma diferença de potencial constante é aplicada entre os terminais de um fio condutor,
- Todos os elétrons se movem com uma velocidade constante.
  - Todos os elétrons se movem com uma aceleração constante.
  - O movimento randômico dos elétrons será, em média, equivalente à velocidade constante de cada elétron.
  - O movimento randômico dos elétrons será, em média, equivalente à uma aceleração não nula constante de cada elétron.
- 5.3** A fórmula  $R = \ell/(\sigma S)$  só se aplica para fios de bitola pequena.
- Verdadeiro.
  - Falso.
  - Não necessariamente.
- 5.4** A água do mar tem  $\epsilon_r = 80$ . Sua permissividade é de:
- 81
  - 79
  - $5,162 \times 10^{-10}$  F/m
  - $7,074 \times 10^{-10}$  F/m
- 5.5** Os parâmetros  $\epsilon_0$  e  $\chi_e$  são adimensionais.
- Verdadeiro.
  - Falso.
- 5.6** Se as relações  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E}$  e  $\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E}$  são satisfeitas em um determinado material, esse material é dito:
- linear;
  - homogêneo;
  - isotrópico;
  - linear e homogêneo;
  - linear e isotrópico;
  - isotrópico e homogêneo.
- 5.7** O tempo de relaxação da mica ( $\sigma = 10^{-15}$  mhos/m,  $\epsilon_r = 6$ ) é de:
- $5 \times 10^{-10}$  s;
  - $10^{-6}$  s;
  - 5 horas;
  - 10 horas;
  - 15 horas.

**5.8** Os campos uniformes, mostrados na Figura 5.17, estão perto de uma interface dielétrico-dielétrico mas em lados opostos da mesma. Quais configurações estão corretas? Considere que a interface esteja livre de cargas e que  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ .

**5.9** Quais das afirmações seguintes estão incorretas?

- As condutividades dos condutores e isolantes variam com a temperatura e a frequência.
- Um condutor é um corpo equipotencial e  $\mathbf{E}$  é sempre tangencial ao condutor.
- Moléculas não polares não têm dipolos permanentes.
- Em um dielétrico linear,  $P$  varia linearmente com  $E$ .

**5.10** As condições elétricas (carga e potencial) dentro e fora de uma blindagem eletrostática são completamente independentes uma da outra.

- Verdadeiro.
- Falso.

*Respostas:* 5.1d; 5.2c; 5.3c; 5.4d; 5.5b; 5.6d; 5.7e; 5.8e; 5.9b; 5.10a.

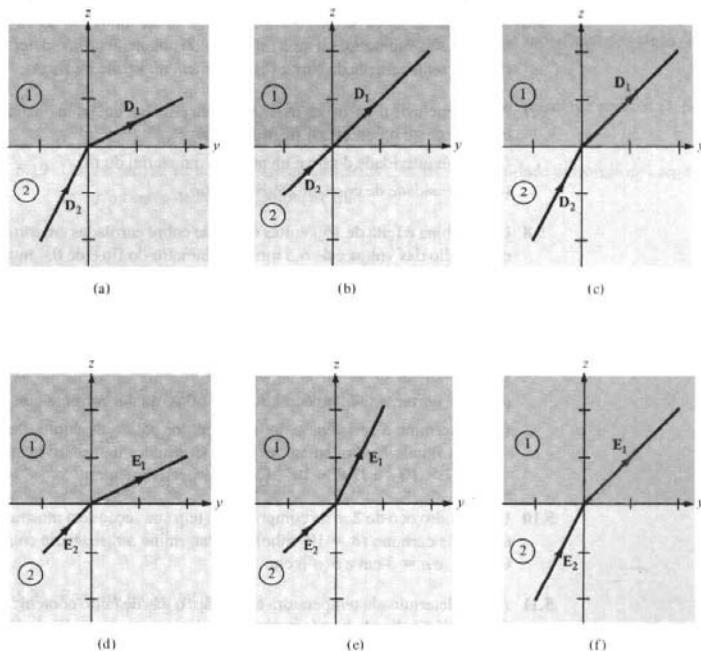


Figura 5.17 Referente à Questão de Revisão 5.8.

**PROBLEMAS**

**5.1** Em uma certa região,  $\mathbf{J} = 3r^2 \cos \theta \mathbf{a}_r - r^2 \sin \theta \mathbf{a}_\theta$  A/m. Determine a corrente que atravessa a superfície definida por  $\theta = 30^\circ$ ,  $0 < \phi < 2\pi$ ,  $0 < r < 2$  m.

**5.2** Determine a corrente total em um fio de raio 1,6 mm se  $\mathbf{J} = \frac{500\mathbf{a}_z}{\rho}$  A/m<sup>2</sup>.

**5.3** A densidade de corrente em um condutor cilíndrico de raio  $a$  é de:

$$\mathbf{J} = 10e^{-(1-\rho/a)}\mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$$

Determine a corrente através da seção reta do condutor.

**5.4** A carga  $10^{-4} e^{-3t}$  C é removida de uma esfera através de um fio. Determine a corrente no fio em  $t = 0$  e  $t = 2,5$  s.

**5.5** (a) Seja  $V = x^2y^2z$  em uma região ( $\epsilon = 2\epsilon_0$ ) definida por  $-1 < x, y, z < 1$ . Determine a densidade de carga  $\rho$ , nessa região.

(b) Se uma carga se desloca a uma velocidade de  $10^4$  m/s, determine a corrente que atravessa a superfície definida por  $0 < x, y < 0,5$ ,  $y = 1$ .

**5.6** Se as extremidades de uma barra cilíndrica de carbono ( $\sigma = 3 \times 10^4$ ), de raio 5 mm e comprimento 8 cm, são submetidas a uma diferença de potencial de 9V, determine: (a) a resistência da barra; (b) a corrente através da barra; (c) a potência dissipada na barra.

**5.7** A resistência de um fio longo de seção reta circular, de 3 mm de diâmetro, é de  $4,04 \Omega/\text{km}$ . Se uma corrente de 40 A percorre o fio, determine:

- a condutividade do fio e identifique o material do fio;
- a densidade de corrente elétrica no fio.

**5.8** Uma bobina é feita de 150 voltas de fio de cobre enroladas em torno de um núcleo cilíndrico. Se o raio médio das voltas é de 6,5 mm e o diâmetro do fio é de 0,4 mm, calcule a resistência da bobina.

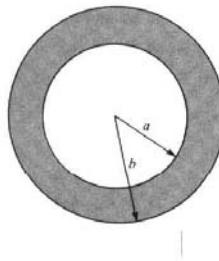
**5.9** Um condutor de 10 m de comprimento consiste de núcleo de aço de 1,5 cm de raio e de uma camada externa de cobre 0,5 cm de espessura.

- Determine a resistência do condutor.
- Se a corrente total no condutor é de 60 A, qual a corrente que flui em cada metal?
- Determine a resistência de um condutor sólido de cobre, de comprimento e área de seção reta iguais às da camada externa. Considere as resistividades do cobre e do aço iguais a  $1,77 \times 10^{-8}$  e  $11,8 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , respectivamente.

**5.10** Um cilindro oco de 2 m de comprimento tem sua seção reta mostrada na Figura 5.18. Se o cilindro é feito de carbono ( $\sigma = 10^5$  mhos/m), determine a resistência entre as extremidades do cilindro. Considere  $a = 3$  cm e  $b = 5$  cm.

**5.11** A uma determinada temperatura e pressão, o gás de hélio contém  $5 \times 10^{25}$  átomos/m<sup>3</sup>. Um campo de 10 kV/m aplicado no gás provoca um deslocamento médio de  $10^{-18}$  m na nuvem eletrônica. Determine a constante dielétrica do hélio.

Figura 5.18 Referente aos Problemas 5.10 e 5.15.



**5.12** Um material dielétrico contém  $2 \times 10^{19}$  moléculas polares/m<sup>3</sup>, cada uma com momento de dipolo de  $1,8 \times 10^{-27}$  C/m. Considerando que todos os dipolos estão alinhados na direção do campo elétrico  $\mathbf{E} = 10^5 \mathbf{a}_z$  V/m, determine  $\mathbf{P}$  e  $\epsilon_r$ .

**5.13** Em uma placa de material dielétrico de  $\epsilon = 2,4\epsilon_0$  e  $V = 300z^2$  V, determine: (a)  $\mathbf{D}$  e  $\rho_v$ ; (b)  $\mathbf{P}$  e  $\rho_{pv}$ .

**5.14** Para  $x < 0$ ,  $\mathbf{P} = 5 \sin(\alpha y) \mathbf{a}_x$ , onde  $\alpha$  é uma constante. Determine  $\rho_{pv}$  e  $\rho_{ppv}$ .

**5.15** Considere a Figura 5.18 como uma casca dielétrica esférica de  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  para  $a < r < b$  e  $\epsilon = \epsilon_\infty$  para  $0 < r < a$ . Se uma carga  $Q$  for colocada no centro da casca, determine:

- (a)  $\mathbf{P}$  para  $a < r < b$
- (b)  $\rho_{pv}$  para  $a < r < b$
- (c)  $\rho_{ppv}$  em  $r = a$  e  $r = b$

**5.16** Duas cargas pontuais no espaço livre exercem uma força de  $4,5 \mu\text{N}$ , uma sobre a outra. Quando o espaço entre elas é preenchido com um material dielétrico, a força muda para  $2 \mu\text{N}$ . Determine a constante dielétrica do material e identifique o material.

**5.17** Uma esfera condutora de raio 10 cm está centrada na origem e imersa em um material dielétrico com  $\epsilon = 2,5\epsilon_0$ . Se a esfera está carregada com uma densidade superficial de cargas de  $4 \text{nC/m}^2$ , determine  $\mathbf{E}$  em (-3 cm, 4 cm, 12 cm).

**5.18** No centro de uma esfera dielétrica oca ( $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ ) é colocada uma carga pontual  $Q$ . Se a esfera tem um raio interno  $a$  e um raio externo  $b$ , calcule  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}$ .

**5.19** Uma esfera de raio  $a$  e constante dielétrica  $\epsilon_r$  tem uma densidade uniforme de carga de  $\rho_o$ .

- (a) No centro da esfera, demonstre que:

$$V = \frac{\rho_o a}{6\epsilon_0\epsilon_r} (2\epsilon_r + 1)$$

- (b) Determine o potencial na superfície da esfera.

**5.20** Para campos estáticos (independentes do tempo), quais das seguintes densidades de corrente são possíveis?

(a)  $\mathbf{J} = 2x^3y\mathbf{a}_x + 4x^2z^2\mathbf{a}_y - 6x^2yz\mathbf{a}_z$

(b)  $\mathbf{J} = xy\mathbf{a}_x + y(z+1)\mathbf{a}_y + 2yz\mathbf{a}_z$

(c)  $\mathbf{J} = \frac{z^2}{\rho} \mathbf{a}_\rho + z \cos \phi \mathbf{a}_z$

(d)  $\mathbf{J} = \frac{\sin \theta}{r^2} \mathbf{a}_r$

**5.21** Para um meio anisotrópico

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

obtenha  $\mathbf{D}$  para: (a)  $\mathbf{E} = 10\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y$  V/m, (b)  $\mathbf{E} = 10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z$  V/m.

**5.22** Se  $\mathbf{J} = \frac{100}{\rho^2} \mathbf{a}_\rho$ , determine: (a) a taxa de aumento da densidade volumétrica de carga; (b) a corrente total que passa através de uma superfície definida por  $r = 2,0 < z < 1,0 < \phi < 2\pi$ .

- 5.23** Dado que  $\mathbf{J} = \frac{5e^{-10^4 t}}{r} \mathbf{a}_r$  A/m<sup>2</sup>, em  $t = 0,1$  ms, determine: (a) a corrente que passa através da superfície  $r = 2$  m; (b) a densidade de carga  $\rho_s$  nessa superfície.
- 5.24** Determine o tempo de relaxação para cada um dos seguintes meios:  
 (a) Borracha dura ( $\sigma = 10^{-15}$  S/m,  $\epsilon = 3,1\epsilon_0$ )  
 (b) Mica ( $\sigma = 10^{-15}$  S/m,  $\epsilon = 6\epsilon_0$ )  
 (c) Água destilada ( $\sigma = 10^{-4}$  S/m,  $\epsilon = 80\epsilon_0$ )
- 5.25** O excesso de cargas, em um determinado meio, decai a um terço de seu valor inicial em  $20\ \mu s$ .  
 (a) Se a condutividade do meio é de  $10^{-4}$  S/m, qual é a constante dielétrica desse meio? (b) Qual é o tempo de relaxação? (c) Após  $30\ \mu s$ , qual a fração de carga que ainda permanece?
- 5.26** Uma descarga elétrica atinge uma esfera dielétrica de raio 20 mm, para a qual  $\epsilon_r = 2,5$  e  $\sigma = 5 \times 10^{-7}$  nhos/m, e deposita, uniformemente, uma carga de  $10\ \mu C$ . Determine a densidade de carga inicial e a densidade de carga após  $2\ \mu s$ .
- 5.27** A região 1 ( $z < 0$ ) contém um dielétrico para o qual  $\epsilon_r = 2,5$ , enquanto que a região 2 ( $z > 0$ ) é caracterizada por  $\epsilon_r = 4$ . Considere  $\mathbf{E}_1 = -30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y + 70\mathbf{a}_z$  V/m e determine: (a)  $\mathbf{D}_2$ , (b)  $\mathbf{P}_2$ , (c) o ângulo entre  $\mathbf{E}_1$  e a normal à superfície.
- 5.28** Dado que  $\mathbf{E}_1 = 10\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$  V/m na Figura 5.19, determine: (a)  $\mathbf{P}_1$ , (b)  $\mathbf{E}_2$  e o ângulo que  $\mathbf{E}_2$  faz com o eixo  $y$ ; (c) a densidade de energia em cada região.
- 5.29** Duas regiões dielétricas homogêneas 1 ( $\rho \leq 4$  cm) e 2 ( $\rho \geq 4$  cm) têm constantes dielétricas 3,5 e 1,5, respectivamente. Se  $\mathbf{D}_2 = 12\mathbf{a}_\rho - 6\mathbf{a}_\theta + 9\mathbf{a}_z$  nC/m<sup>2</sup>, calcule: (a)  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{D}_1$ , (b)  $\mathbf{P}_2$  e  $\rho_{m,2}$ , (c) a densidade de energia em cada região.
- 5.30** Uma esfera condutora de raio  $a$  está semi-imersa em um meio dielétrico líquido de permissividade de  $\epsilon_1$ , como mostra a Figura 5.20. A região acima do líquido é um gás de permissividade  $\epsilon_2$ . Se a carga total sobre a esfera é  $Q$ , determine a intensidade do campo elétrico em qualquer ponto.
- \*5.31** Duas lâminas de vidro ( $\epsilon_r = 8,5$ ) paralelas, montadas verticalmente, estão separadas, entre suas faces internas, por uma região de pequena espessura de ar uniforme. As lâminas, adequadamente seladas, são imersas em óleo ( $\epsilon_r = 3,0$ ), como mostrado na Figura 5.21. Um campo elétrico uniforme de 2.000 V/m existe no interior do óleo, na direção horizontal. Calcule a intensidade e a orientação do campo elétrico no vidro e na camada de ar entre as duas lâminas quando: (a) o campo elétrico uniforme de 2.000 V/m existe no interior do óleo, na direção horizontal. Calcule a intensidade e a orientação do campo elétrico no vidro e na camada de ar entre as duas lâminas quando: (a) o campo elétrico é normal às superfícies de vidro, (b) o campo elétrico no óleo faz um ângulo de  $75^\circ$  com a normal às superfícies de vidro. Despreze os efeitos de borda.
- 5.32** (a) Dado que  $\mathbf{E} = 15\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_z$  V/m, em um ponto sobre a superfície de um condutor, qual é a densidade superficial de carga nesse ponto? Considere  $\epsilon = \epsilon_0$ .  
 (b) A região  $y \geq 2$  é preenchida por um condutor. Se a carga superficial no condutor é de  $-20\text{ nC/m}^2$ , determine  $\mathbf{D}$  imediatamente fora do condutor.

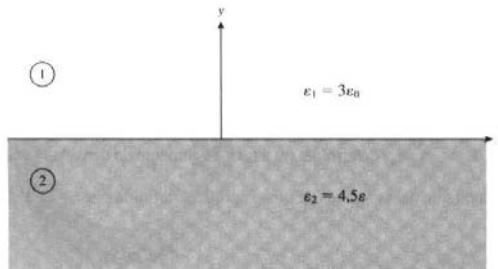


Figura 5.19 Referente ao Problema 5.28.

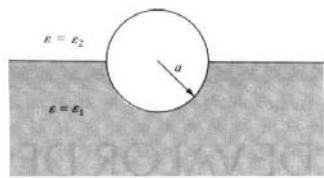


Figura 5.20 Referente ao Problema 5.30.

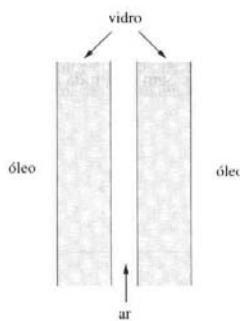


Figura 5.21 Referente ao Problema 5.31.

- 5.33** Uma esfera, no espaço livre, revestida de prata, de raio 5 cm, está carregada com uma carga total de 12 nC, uniformemente distribuída em sua superfície. Determine (a)  $|D|$  sobre a superfície da esfera, (b)  $D$  externo à esfera, (c) a energia total armazenada no campo.

# Capítulo 6

## PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTEIRA EM ELETROSTÁTICA

Nossas escolas deveriam investir esforços para dar conta de seu mais importante desafio: ensinar seus alunos a se expressar de maneira clara e precisa, tanto na fala quanto na escrita. Em outras palavras, levá-los a dominar sua própria língua. Sem isso, toda a nossa instrução em matemática e ciência é uma perda de tempo.

— JOSEPH WEIZENBAUM, MIT

### 6.1 INTRODUÇÃO

O procedimento utilizado para determinar o campo elétrico  $\mathbf{E}$  nos capítulos precedentes basicamente consistiu em utilizar ou a lei de Coulomb ou a lei de Gauss, quando a distribuição de carga é conhecida, ou em utilizar  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , quando o potencial  $V$  é conhecido em uma região. No entanto, na maioria das situações práticas, nem a distribuição de cargas nem a distribuição de potencial são conhecidas.

Neste capítulo, consideraremos problemas práticos de eletrostática onde somente as condições eletrostáticas (carga e potencial), em algumas fronteiras de uma determinada região, são conhecidas, e é deseável determinar  $\mathbf{E}$  e  $V$  ao longo de toda essa região. Tais problemas são usualmente resolvidos utilizando a equação de Poisson<sup>1</sup> ou a equação de Laplace<sup>2</sup> ou, ainda, o método das imagens. Estes problemas são usualmente referidos como problemas de *valor de fronteira*. Os conceitos de resistência e capacitação serão abordados. Utilizaremos a equação de Laplace para obter a resistência de um objeto e a capacitação de um capacitor. O Exemplo 6.5 deve ser visto com atenção porque nos referiremos a ele, algumas vezes, na parte restante do capítulo.

### 6.2 EQUAÇÕES DE LAPLACE E DE POISSON

As equações de Laplace e de Poisson são facilmente obtidas a partir da lei de Gauss (para um meio linear)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho_v \quad (6.1)$$

e

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (6.2)$$

Substituindo a equação (6.2) na equação (6.1), obtém-se

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho_v \quad (6.3)$$

para um meio não homogêneo. Para um meio homogêneo, a equação (6.3) torna-se:

<sup>1</sup> Simeon Denis Poisson (1781–1840), matemático e físico francês.

<sup>2</sup> Pierre Simon de Laplace (1749–1829), astrônomo e matemático francês.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (6.4)$$

Esta é conhecida como *equação de Poisson*. Um caso especial desta equação ocorre quando  $\rho_v = 0$  (isto é, para uma região livre de cargas). A equação (6.4) torna-se, então

$$\nabla^2 V = 0 \quad (6.5)$$

que é conhecida como *equação de Laplace*. Observe que, ao retirar  $\epsilon$  do lado esquerdo da equação (6.3) para obter a (6.4), assumimos que  $\epsilon$  é constante em toda a região na qual  $V$  é definido. Para uma região não homogênea,  $\epsilon$  não é constante e a equação (6.4) não resulta da (6.3). A (6.3) é a equação de Poisson para um meio não homogêneo; torna-se a equação de Laplace para um meio não homogêneo quando  $\rho_v = 0$ .

Lembre que o operador laplaciano  $\nabla^2$  foi obtido na Seção 3.8. Então, a equação de Laplace em coordenadas cartesianas, cilíndricas ou esféricas é dada, respectivamente, por

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (6.8)$$

dependendo se o potencial é  $V(x, y, z)$ ,  $V(\rho, \phi, z)$  ou  $V(r, \theta, \phi)$ . A equação de Poisson nesses sistemas de coordenadas pode ser obtida simplesmente substituindo o zero do lado direito das equações (6.6), (6.7) e (6.8) por  $-\rho_v/\epsilon$ .

A equação de Laplace é de fundamental importância na solução de problemas de eletrostática envolvendo um conjunto de condutores mantidos em diferentes potenciais. Exemplos de tais problemas incluem capacitores e válvulas eletrônicas. As equações de Laplace e de Poisson não só são úteis para resolver problemas de campos eletrostáticos, mas também são utilizadas em muitos outros problemas que envolvem campos.

Por exemplo,  $V$  poderia ser interpretado como o potencial magnético em magnetostática, como a temperatura em condução de calor, como uma função tensão em fluxo de fluidos e como uma perda de carga em vazamentos.

### <sup>†</sup>6.3 TEOREMA DA UNICIDADE

Já que existem vários métodos (análíticos, gráficos, numéricos, experimentais, etc.) para resolver um determinado problema, poderíamos questionar se resolver a equação de Laplace de diferentes maneiras resultaria em diferentes soluções. Por conseguinte, antes de começarmos a resolver a equação de Laplace, precisamos responder à seguinte pergunta: se a solução da equação de Laplace satisfaz um dado conjunto de condições de fronteira, será essa a única solução? A resposta é sim, existe apenas uma única solução. Dizemos que a solução é única. Portanto, qualquer solução da equação de Laplace que satisfaça as mesmas condições de fronteira deve ser a única solução, independente do método escolhido para determiná-la. Esse é conhecido como o *teorema da unicidade*. O teorema se aplica a qualquer solução da equação de Laplace ou da equação de Poisson em uma dada região ou superfície fechada.

O teorema é demonstrado por absurdo. Assumimos que há duas soluções  $V_1$  e  $V_2$  da equação de Laplace que satisfazem as condições de fronteira do problema. Portanto:

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad \nabla^2 V_2 = 0 \quad (6.9a)$$

$$V_1 = V_2 \quad \text{na fronteira} \quad (6.9b)$$

Consideramos a diferença

$$V_d = V_2 - V_1 \quad (6.10)$$

que obedece

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0 \quad (6.11a)$$

$$V_d = 0 \quad \text{na fronteira} \quad (6.11b)$$

de acordo com a equação (6.9). Do teorema da divergência:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.12)$$

Consideramos  $\mathbf{A} = V_d \nabla V_d$  e usamos a identidade vetorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

Contudo,  $\nabla^2 V_d = 0$ , de acordo com a equação (6.11). Então:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla V_d \cdot \nabla V_d \quad (6.13)$$

Substituindo a equação (6.13) na equação (6.12), obtém-se:

$$\int_v \nabla V_d \cdot \nabla V_d dv = \oint_S V_d \nabla V_d \cdot d\mathbf{S} \quad (6.14)$$

Das equações (6.9) e (6.11), fica evidente que o lado direito da equação (6.14) se anula. Portanto:

$$\int_v |\nabla V_d|^2 dv = 0$$

Já que a integração é sempre positiva,

$$\nabla V_d = 0 \quad (6.15a)$$

ou

$$V_d = V_2 - V_1 = \text{constante em qualquer ponto no interior de } v \quad (6.15b)$$

Contudo, a equação (6.15) deve ser consistente com a equação (6.9b). Portanto,  $V_d = 0$  ou  $V_1 = V_2$  em qualquer ponto, demonstrando que  $V_1$  e  $V_2$  não podem ser soluções diferentes do mesmo problema.

**Teorema da unicidade:** se uma solução da equação de Laplace que satisfaça as condições de fronteira pode ser encontrada, então a solução é única.

O mesmo procedimento pode ser adotado para demonstrar que esse teorema também se aplica à equação de Poisson e também para o caso em que o campo elétrico (gradiente do potencial) é especificado na fronteira.

Antes de começarmos a resolver problemas de valor de fronteira, devemos ter em mente três características que descrevem univocamente um problema:

1. A equação diferencial apropriada (neste capítulo, equação de Laplace ou equação de Poisson).
2. A região de interesse para a solução.
3. As condições de fronteira.

Um problema não tem solução única e não pode ser resolvido completamente se não for considerando um desses três itens.

## 6.4 PROCEDIMENTO GERAL PARA RESOLVER A EQUAÇÃO DE LAPLACE OU A EQUAÇÃO DE POISSON

O seguinte procedimento geral pode ser adotado ao resolver um dado problema de valor de fronteira envolvendo a equação de Laplace ou a equação de Poisson:

1. Resolver a equação de Laplace (se  $\rho_v = 0$ ) ou de Poisson (se  $\rho_v \neq 0$ ) utilizando ou (a) integração direta quando  $V$  é uma função de uma variável, ou (b) separação de variáveis se  $V$  é função de mais de uma variável. A solução, nesta etapa, não é única, mas sim expressa em termos de constantes de integração a serem determinadas.
2. Aplicar as condições de fronteira para determinar uma solução única de  $V$ , partindo do pressuposto que, para determinadas condições de fronteira, existe uma única solução.
3. Tendo obtido  $V$ , encontrar  $\mathbf{E}$  usando  $\mathbf{E} = -\nabla V$  e  $\mathbf{D}$  a partir de  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ .
4. Se desejado, encontrar a carga  $Q$ , induzida em um condutor, fazendo  $Q = \int \rho_s dS$ , onde  $\rho_s = D_n$  e  $D_n$  é a componente de  $\mathbf{D}$  normal ao condutor. Se necessário, a capacidade entre dois condutores pode ser encontrada fazendo  $C = Q/V$ .

Resolver a equação de Laplace (ou de Poisson), de acordo com a etapa 1, não é sempre tão complicado quanto parece. Em alguns casos, a solução pode ser obtida por mera inspeção do problema. Por outro lado, uma solução pode ser conferida fazendo o caminho inverso e determinando se ela satisfaz a equação de Laplace (ou a de Poisson) e as condições de fronteira impostas.

### EXEMPLO 6.1

Componentes condutores em equipamentos de potência de alta tensão devem ser resfriados, a fim de eliminar o calor causado pelas perdas ôhmicas. Uma maneira de bombear esse calor é baseada na força transmitida para o fluido refrigerante por cargas em um campo elétrico. O bombeamento eletródinâmico (EHD) está representado na Figura 6.1. A região entre os eletrodos contém uma carga uniforme  $\rho_o$ , que é gerada no eletrodo da esquerda e coletada no eletrodo da direita. Calcule a pressão da bomba se  $\rho_o = 25 \text{ mC/m}^3$  e  $V_o = 22 \text{ kV}$ .

#### Solução:

Já que  $\rho_v \neq 0$ , aplicamos a equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

As condições de fronteira  $V(z=0) = V_o$  e  $V(z=d) = 0$  mostram que  $V$  depende somente de  $z$  (não existe qualquer dependência com  $\rho$  ou  $\phi$ ). Portanto:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho_o}{\epsilon}$$

Integrando uma vez, obtém-se

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho_o z}{\epsilon} + A$$

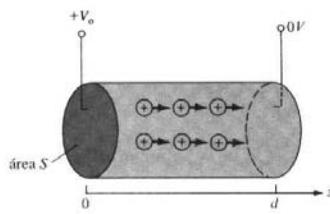


Figura 6.1 Uma bomba eletrodinâmica; referente ao Exemplo 6.1.

Integrando-se novamente

$$V = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon} + Az + B$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração a serem determinadas pela aplicação das condições de fronteira. Quando  $z = 0$ ,  $V = V_0$ ,

$$V_0 = -0 + 0 + B \rightarrow B = V_0$$

Quando  $z = d$ ,  $V = 0$ ,

$$0 = -\frac{\rho_0 d^2}{2\epsilon} + Ad + V_0$$

ou

$$A = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon} - \frac{V_0}{d}$$

O campo elétrico é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \mathbf{a}_z = \left( \frac{\rho_0 z}{\epsilon} - A \right) \mathbf{a}_z \\ &= \left[ \frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0}{\epsilon} \left( z - \frac{d}{2} \right) \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

A força líquida é:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int \rho_0 \mathbf{E} dv = \rho_0 \int dS \int_{z=0}^d \mathbf{E} dz \\ &= \rho_0 S \left[ \frac{V_0 z}{d} + \frac{\rho_0}{2\epsilon} (z^2 - dz) \right] \Big|_0^d \mathbf{a}_z \\ \mathbf{F} &= \rho_0 S V_0 \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

A força por unidade de área, ou pressão, é:

$$\rho = \frac{F}{S} = \rho_0 V_0 = 25 \times 10^{-3} \times 22 \times 10^3 = 550 \text{ N/m}^2$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 6.1

Em um dispositivo unidimensional, a densidade de carga é dada por  $\rho_v = \rho_0 x/a$ . Se  $\mathbf{E} = 0$  em  $x = 0$  e  $V = 0$  em  $x = a$ , determine  $V$  e  $\mathbf{E}$ .

$$\text{Resposta: } \frac{\rho_0}{6\epsilon a} (a^3 - x^3), \frac{\rho_0 x^2}{2a\epsilon} \mathbf{a}_x$$

### **EXEMPLO 6.2**

Uma máquina de cópia xerográfica é uma importante aplicação da eletrostática. A superfície de um fotocondutor é, de início, carregada uniformemente, como mostra a Figura 6.2(a). Quando a luz, refletida pelo documento a ser copiado, incide no fotocondutor, as cargas da superfície inferior do fotocondutor combinam com as da superfície superior e ocorre a neutralização de umas com as outras.

A imagem é obtida ao se pulverizar a superfície do fotocondutor com um pó negro carregado eletricamente. O campo elétrico atrai o pó carregado que posteriormente é transferido para o papel, sendo fundido para formar uma imagem permanente. Desejamos determinar o campo elétrico acima e abaixo da superfície do fotocondutor.

### Soluções:

Considere a Figura 6.2(b) que é uma versão da Figura 6.2(a). Já que  $\rho_c = 0$  nesse caso, aplicamos a equação de Laplace. Além disso, o potencial depende somente de  $x$ . Então:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Integrando duas vezes, obtém-se:

$$V = Ax + B$$

Sejam os potenciais acima e abaixo da superfície  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente.

$$V_1 = A_1 x + B_1, \quad x \geq a \quad (6.2.1a)$$

$$V_2 = A_2 x + B_2, \quad x < a \quad (6.2.1b)$$

As condições de fronteira nos eletrodos aterrados são:

$$V_1(x = d) = 0 \quad (6.2.2.a)$$

$$V_2(x=0) = 0 \quad (6.2.2b)$$

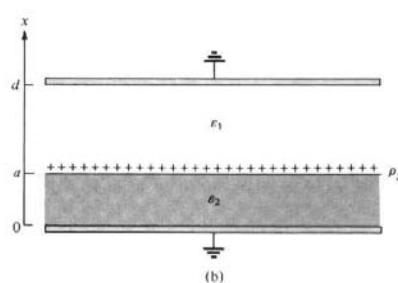
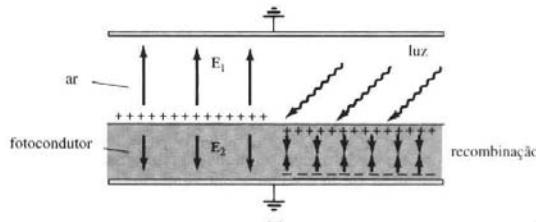


Figura 6.2 Referente ao Exemplo 6.2.

Na superfície do fotocondutor:

$$V_1(x = a) = V_2(x = a) \quad (6.2.3a)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \Big|_{x=a} \quad (6.2.3b)$$

Para determinar as quatro constantes desconhecidas  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ , utilizamos as quatro condições das equações (6.2.2) e (6.2.3). Das equações (6.2.1) e (6.2.2):

$$0 = A_1d + B_1 \rightarrow B_1 = -A_1d \quad (6.2.4a)$$

$$0 = 0 + B_2 \rightarrow B_2 = 0 \quad (6.2.4b)$$

Das equações (6.2.1) e (6.2.3a):

$$A_1a + B_1 = A_2a \quad (6.2.5)$$

Ao aplicar (6.2.3b), lembre que  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = -\epsilon\nabla V$ , de forma que

$$\rho_s = D_{1n} - D_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = -\epsilon_1 \frac{dV_1}{dx} + \epsilon_2 \frac{dV_2}{dx}$$

ou

$$\rho_s = -\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2 \quad (6.2.6)$$

Resolvendo para  $A_1$  e  $A_2$ , nas equações (6.2.4) a (6.2.6), obtém-se:

$$\mathbf{E}_1 = -A_1 \mathbf{a}_x = \frac{\rho_s \mathbf{a}_x}{\epsilon_1 \left[ 1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{d}{a} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right]}$$

$$\mathbf{E}_2 = -A_2 \mathbf{a}_x = \frac{-\rho_s \left( \frac{d}{a} - 1 \right) \mathbf{a}_x}{\epsilon_1 \left[ 1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{d}{a} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right]}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 6.2

Para o modelo representado na Figura 6.2(b), se  $\rho_s = 0$  e o eletrodo superior é mantido em  $V_o$ , enquanto o eletrodo inferior é aterrado, demonstre que:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{-V_o \mathbf{a}_x}{d - a + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} a}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{-V_o \mathbf{a}_x}{a + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} d - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} a}$$

### EXEMPLO 6.3

Dois semiplanos condutores,  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi/6$ , estão separados por uma fenda de largura infinitesimal, como mostra a Figura 6.3. Se  $V(\phi = 0) = 0$  e  $V(\phi = \pi/6) = 100$  V, determine  $V$  e  $\mathbf{E}$  na região entre os semiplanos.

**Solução:**

Se  $V$  depende somente de  $\phi$ , a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas torna-se:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0$$

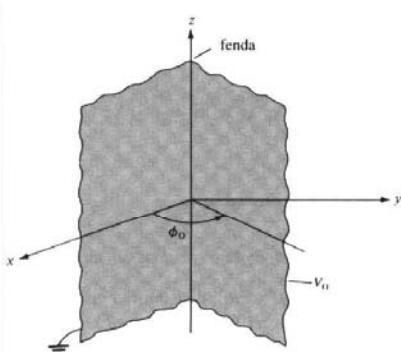


Figura 6.3 O potencial  $V(\phi)$  devido a semiplanos condutores.

Já que  $\rho = 0$  não faz parte da solução devida à fenda que separa os dois semiplanos, podemos multiplicar a equação anterior por  $\rho^2$  para obter

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

que é integrada duas vezes para obter

$$V = A\phi + B$$

Aplicamos as condições de fronteira para determinar as constantes  $A$  e  $B$ . Quando  $\phi = 0$ ,  $V = 0$ :

$$0 = 0 + B \rightarrow B = 0$$

Quando  $\phi = \phi_0$ ,  $V = V_0$ :

$$V_0 = A\phi_0 \rightarrow A = \frac{V_0}{\phi_0}$$

Portanto,

$$V = \frac{V_0}{\phi_0} \phi$$

e

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\phi} \mathbf{a}_\phi = -\frac{V_0}{\rho \phi_0} \mathbf{a}_\phi$$

Substituindo  $V_0 = 100$  e  $\phi_0 = \pi/6$ , obtém-se:

$$V = \frac{600}{\pi} \phi \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = -\frac{600}{\pi \rho} \mathbf{a}_\phi$$

Confira:  $\nabla^2 V = 0$ ,  $V(\phi = 0) = 0$ ,  $V(\phi = \pi/6) = 100$ .

### EXERCÍCIO PRÁTICO 6.3

Dois placas condutoras de tamanho  $1 \times 5$  m estão inclinadas  $45^\circ$  uma em relação à outra, com um espaçamento de 4 mm entre elas, conforme mostrado na Figura 6.4. Determine um valor aproximado da carga por placa se as placas forem mantidas a uma diferença de potencial de 50 V. Considere que o meio entre elas tenha  $\epsilon_r = 1,5$ .

Resposta: 22,2 nC.

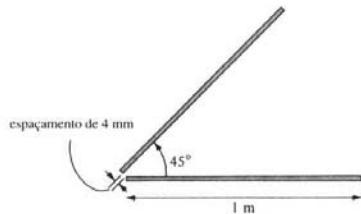


Figura 6.4 Referente ao Exercício Prático 6.3.

**EXEMPLO 6.4**

Dois cones condutores ( $\theta = \pi/10$  e  $\theta = \pi/6$ ), de extensão infinita, estão separados por um espaçoamento infinitesimal em  $r = 0$ . Se  $V(\theta = \pi/10) = 0$  e  $V(\theta = \pi/6) = 50$  V, determine  $V$  e  $\mathbf{E}$  entre os cones.

**Solução:**

Considere o cone coaxial da Figura 6.5, onde o espaçoamento serve como elemento isolador entre os dois cones condutores.  $V$  depende somente de  $\theta$ . Então, a equação de Laplace, em coordenadas esféricas, torna-se

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right] = 0$$

Já que  $r = 0$  e  $\theta = 0$  ou  $\pi$  não fazem parte da solução, podemos multiplicar a equação anterior por  $r^2 \sin \theta$  para obter:

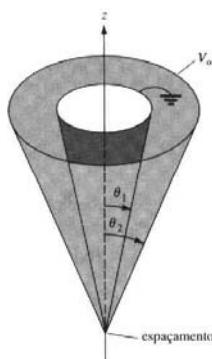
$$\frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right] = 0$$

Integrando uma vez, obtém-se

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

ou

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\sin \theta}$$

Figura 6.5 Potencial  $V(\phi)$  devido a cones condutores.

Integrando esta equação, obtemos:

$$\begin{aligned} V &= A \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = A \int \frac{d\theta}{2 \cos \theta/2 \sin \theta/2} \\ &= A \int \frac{1/2 \sec^2 \theta/2 d\theta}{\tan \theta/2} \\ &= A \int \frac{d(\tan \theta/2)}{\tan \theta/2} \\ &= A \ln(\tan \theta/2) + B \end{aligned}$$

Aplicaremos, agora, as condições de fronteira para determinar as constantes de integração  $A$  e  $B$ .

$$V(\theta = \theta_1) = 0 \rightarrow 0 = A \ln(\tan \theta_1/2) + B$$

ou

$$B = -A \ln(\tan \theta_1/2)$$

Portanto:

$$V = A \ln \left[ \frac{\tan \theta/2}{\tan \theta_1/2} \right]$$

Também,

$$V(\theta = \theta_2) = V_o \rightarrow V_o = A \ln \left[ \frac{\tan \theta_2/2}{\tan \theta_1/2} \right]$$

ou

$$A = \frac{V_o}{\ln \left[ \frac{\tan \theta_2/2}{\tan \theta_1/2} \right]}$$

Então:

$$\begin{aligned} V &= \frac{V_o \ln \left[ \frac{\tan \theta/2}{\tan \theta_1/2} \right]}{\ln \left[ \frac{\tan \theta_2/2}{\tan \theta_1/2} \right]} \\ \mathbf{E} &= -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \mathbf{a}_\theta = -\frac{A}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\theta \\ &= -\frac{V_o}{r \sin \theta \ln \left[ \frac{\tan \theta/2}{\tan \theta_1/2} \right]} \mathbf{a}_\theta \end{aligned}$$

Fazendo  $\theta_1 = \pi/10$ ,  $\theta_2 = \pi/6$  e  $V_o = 50$ , obtém-se

$$V = \frac{50 \ln \left[ \frac{\tan \theta/2}{\tan \pi/20} \right]}{\ln \left[ \frac{\tan \pi/12}{\tan \pi/20} \right]} = 95,1 \ln \left[ \frac{\tan \theta/2}{0,1584} \right] V$$

e

$$\mathbf{E} = -\frac{95,1}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$$

Confira:  $\nabla^2 V = 0$ ,  $V(\theta = \pi/10) = 0$  e  $V(\theta = \pi/6) = V_o$ .

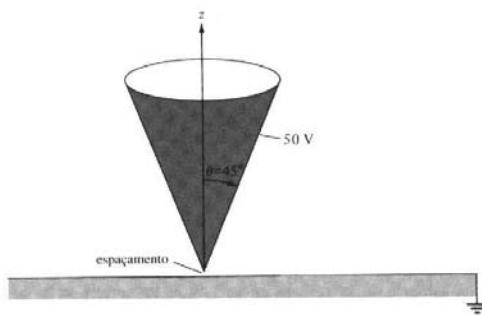


Figura 6.6 Referente ao Exercício Prático 6.4.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 6.4**

Um cone condutor ( $\theta = 45^\circ$ ) está colocado sobre um plano condutor e há, entre eles, um pequeno espaçoamento, como mostra a Figura 6.6. Se o cone está conectado à uma fonte de 50 V, determine  $V$  e  $E$  em  $(-3, 4, 2)$ .

**Resposta:** 22,13 V; 11,36  $\text{a}_\theta$  V/m

**EXEMPLO 6.5**

- (a) Determine a função potencial para a região dentro de uma calha de seção retangular e de comprimento infinito, cuja seção retangular está mostrada na Figura 6.7.  
 (b) Para  $V_o = 100$  V e  $b = 2a$ , determine o potencial em  $x = a/2$ ,  $y = 3a/4$ .

**Solução:**

(a) O potencial  $V$ , neste caso, depende de  $x$  e  $y$ . A equação de Laplace é escrita como:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (6.5.1)$$

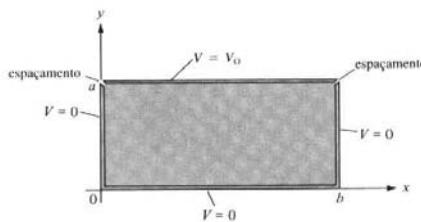
Temos que resolver essa equação com as seguintes condições de fronteira:

$$V(x = 0, 0 \leq y \leq a) = 0 \quad (6.5.2a)$$

$$V(x = b, 0 \leq y \leq a) = 0 \quad (6.5.2b)$$

$$V(0 \leq x \leq b, y = 0) = 0 \quad (6.5.2c)$$

$$V(0 \leq x \leq b, y = a) = V_o \quad (6.5.2d)$$

Figura 6.7 Potencial devido a uma  $V(x, y)$  calha retangular condutora.

Resolvemos a equação (6.5.1) pelo método da separação de variáveis, isto é, procuramos uma solução de  $V$  na forma de um produto. Seja

$$V(x, y) = X(x) Y(y) \quad (6.5.3)$$

onde  $X$  é uma função somente de  $x$  e  $Y$  é uma função somente de  $y$ . Substituindo a equação (6.5.3) na equação (6.5.1), obtemos:

$$X''Y + Y''X = 0$$

Dividindo todos os termos por  $XY$  e separando os termos em  $X$  dos termos em  $Y$ , obtemos:

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \quad (6.5.4a)$$

Já que o lado esquerdo da equação é uma função só de  $x$  e o lado direito é uma função só de  $y$ , para satisfazer a igualdade, ambos os lados devem ser iguais a uma constante  $\lambda$ , isto é:

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \quad (6.5.4b)$$

A constante  $\lambda$  é conhecida como a constante de separação. Da equação (6.5.4b), obtemos

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (6.5.5a)$$

e

$$Y'' - \lambda Y = 0 \quad (6.5.5b)$$

Dessa forma, as variáveis estão separadas neste ponto e nos referimos às equações (6.5.5) como *equações separadas*. Podemos determinar  $X(x)$  e  $Y(y)$ , separadamente, e então substituir essas soluções na equação (6.5.3). Para tanto, as condições de fronteira nas equações (6.5.2) precisam estar separadas, se possível. A separação é feita como segue:

$$V(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \quad (6.5.6a)$$

$$V(b, y) = X(b)Y(y) = 0 \rightarrow X(b) = 0 \quad (6.5.6b)$$

$$V(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 \quad (6.5.6c)$$

$$V(x, a) = X(x)Y(a) = V_o \text{ (inseparável)} \quad (6.5.6d)$$

Para determinar  $X(x)$  e  $Y(y)$  nas equações (6.5.5), consideraremos as condições de fronteira das equações (6.5.6). Consideraremos os valores possíveis de  $\lambda$  que satisfaçam tanto as equações separadas (6.5.5) quanto as condições de fronteira (6.5.6).

#### CASO A

Se  $\lambda = 0$ , então a equação (6.5.5a) torna-se

$$X'' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0$$

a partir da qual, após integrarmos duas vezes, obtemos

$$X = Ax + B \quad (6.5.7)$$

As condições de fronteira nas equações (6.5.6a) e (6.5.6b) implicam que

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B \quad \text{ou} \quad B = 0$$

e

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = A \cdot b + 0 \quad \text{ou} \quad A = 0$$

porque  $b \neq 0$ . Dessa forma, a solução para  $X$ , na equação (6.5.7), torna-se

$$X(x) = 0$$

o que torna  $V = 0$  na equação (6.5.3). Então, consideramos  $X(x) = 0$  como uma solução trivial e concluímos que  $\lambda \neq 0$ .

#### CASO B

Se  $\lambda < 0$ , digamos  $\lambda = -\alpha^2$ , então a equação (6.5.5a) torna-se

$$X'' - \alpha^2 X = 0 \quad \text{ou} \quad (D^2 - \alpha^2)X = 0$$

onde  $D = \frac{d}{dx}$ , isto é,

$$DX = \pm \alpha X \quad (6.5.8)$$

mostrando que temos duas soluções possíveis correspondendo aos sinais positivo e negativo. Para o sinal positivo, a equação (6.5.8) torna-se

$$\frac{dX}{dx} = \alpha X \quad \text{ou} \quad \frac{dX}{X} = \alpha dx$$

Dessa forma,

$$\int \frac{dX}{X} = \int \alpha dx \quad \text{ou} \quad \ln X = \alpha x + \ln A_1$$

onde  $\ln A_1$  é uma constante de integração. Portanto,

$$X = A_1 e^{\alpha x} \quad (6.5.9a)$$

De maneira similar, resolvendo a equação (6.5.8), para o sinal negativo, obtém-se:

$$X = A_2 e^{-\alpha x} \quad (6.5.9b)$$

Reunindo os resultados das equações (6.5.9a) e (6.5.9b):

$$X(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \quad (6.5.10)$$

Já que  $\cosh \alpha x = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})/2$  e  $\operatorname{senh} \alpha x = (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})/2$  ou  $e^{\alpha x} = \cosh \alpha x + \operatorname{senh} \alpha x$  e  $e^{-\alpha x} = \cosh \alpha x - \operatorname{senh} \alpha x$ , a equação (6.5.10) pode ser escrita como

$$X(x) = B_1 \cosh \alpha x + B_2 \operatorname{senh} \alpha x \quad (6.5.11)$$

onde  $B_1 = A_1 + A_2$  e  $B_2 = A_1 - A_2$ . Em função das condições de fronteira impostas, preferimos a equação (6.5.11) em vez da equação (6.5.10) como solução. Novamente, as equações (6.5.6a) e (6.5.6b) exigem que

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = B_1 \cdot (1) + B_2 \cdot (0) \quad \text{ou} \quad B_1 = 0$$

e

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B_2 \operatorname{senh} \alpha b$$

Já que  $\alpha \neq 0$  e  $b \neq 0$ ,  $\sin \alpha b$  não pode ser zero porque  $\sin x = 0$  se e somente se  $x = 0$ , como mostrado na Figura 6.8. Dessa maneira,  $B_2 = 0$  e

$$X(x) = 0$$

Essa é uma solução trivial e concluímos que  $\lambda$  não pode ser menor do que zero.

#### CASO C

Se  $\lambda > 0$ , digamos  $\lambda = \beta^2$ , então a equação (6.5.5a) torna-se

$$X'' + \beta^2 X = 0$$

isto é,

$$(D^2 + \beta^2)X = 0 \quad \text{ou} \quad DX = \pm j\beta X \quad (6.5.12)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$ . Das equações (6.5.8) e (6.5.12), observa-se que a diferença entre os casos B e C consiste em substituir  $\alpha$  por  $j\beta$ . Procedendo da mesma maneira como no caso B, obtemos a solução:

$$X(x) = C_0 e^{j\beta x} + C_1 e^{-j\beta x} \quad (6.5.13a)$$

Já que  $e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x$  e  $e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \sin \beta x$ , a equação (6.5.13a) pode ser escrita como

$$X(x) = g_0 \cos \beta x + g_1 \sin \beta x \quad (6.5.13b)$$

onde  $g_0 = C_0 + C_1$  e  $g_1 = C_0 - jC_1$ .

Em função das condições de fronteira dadas, preferimos usar a equação (6.5.13b). Impondo as condições de fronteira nas equações (6.5.6a) e (6.5.6b), obtém-se:

$$X(x=0) = 0 \rightarrow 0 = g_0 \cdot (1) + 0 \quad \text{ou} \quad g_0 = 0$$

e

$$X(x=b) = 0 \rightarrow 0 = 0 + g_1 \sin \beta b$$

Supondo  $g_1 \neq 0$  (senão teríamos uma solução trivial), então:

$$\sin \beta b = 0 = \sin n\pi$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (6.5.14)$$

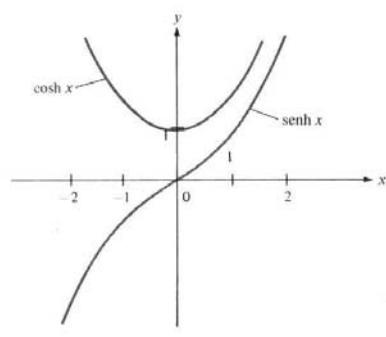


Figura 6.8 Representação de  $\cosh x$  e de  $\sinh x$  mostrando que  $\sinh x = 0$  se e somente se  $x = 0$ .

Observe que, diferentemente de  $\sinh x$ , que é zero apenas quando  $x = 0$ ,  $\sin x$  é zero para um número infinito de pontos, conforme mostra a Figura 6.9. Note, também, que  $n \neq 0$  porque  $\beta \neq 0$ . No caso A, tínhamos considerado a possibilidade se  $\beta = 0$ , o que resultou em uma solução trivial. Ainda não precisamos considerar  $n = -1, -2, -3, -4, \dots$  porque  $\lambda = \beta^2$  permaneceria o mesmo para valores positivos e negativos de  $n$ . Portanto, para um dado  $n$ , a equação (6.5.13b) torna-se

$$X_n(x) = g_n \sin \frac{n\pi x}{b} \quad (6.5.15)$$

Tendo encontrado  $X(x)$  e

$$\lambda = \beta^2 = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (6.5.16)$$

resolvemos a equação (6.5.5b), reescrita como:

$$Y'' - \beta^2 Y = 0$$

A solução dessa equação é semelhante à da equação (6.5.11), obtida no caso B, isto é:

$$Y(y) = h_0 \cosh \beta y + h_1 \sinh \beta y$$

A condição de fronteira na equação (6.5.6c) implica que:

$$Y(y=0) = 0 \rightarrow 0 = h_0 \cdot (1) + 0 \quad \text{ou} \quad h_0 = 0$$

Portanto, nossa solução para  $Y(y)$  torna-se

$$Y_n(y) = h_n \sinh \frac{n\pi y}{b} \quad (6.5.17)$$

Substituindo as equações (6.5.15) e (6.5.17) – que são as soluções das equações separadas [equações (6.5.5)], na solução-produto [equação (6.5.3)], tem-se:

$$V_n(x, y) = g_n h_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

Isto mostra que há muitas soluções possíveis  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , e assim por diante, para  $n = 1, 2, 3, 4$ , etc.

Pelo teorema da superposição, se  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  são soluções da equação de Laplace, a combinação linear

$$V = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + \dots + c_n V_n$$

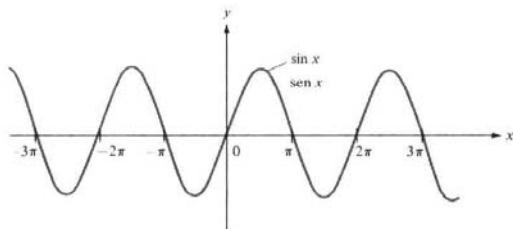


Figura 6.9 Representação de  $\sin x$  mostrando que  $\sin x = 0$  para um número infinito de pontos.

(onde  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  são constantes) é também uma solução da equação de Laplace. Portanto, a solução da equação (6.5.1) é

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{b} \quad (6.5.18)$$

onde  $c_n = g_n h_n$  são os coeficientes a serem determinados a partir da condição de fronteira descrita na equação (6.5.6d). Impondo esta condição, obtém-se:

$$V(x, y = a) = V_o = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \quad (6.5.19)$$

que é uma expansão em série de Fourier de  $V_o$ . Multiplicando ambos os lados da equação (6.5.19) por  $\operatorname{sen} m\pi x/b$  e integrando em  $0 < x < b$ , obtém-se:

$$\int_0^b V_o \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{b} dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} dx \quad (6.5.20)$$

Pela propriedade de ortogonalidade das funções seno e cosseno (veja Apêndice A.9):

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

Incorporando essa propriedade na equação (6.5.20), todos os termos no lado direito da equação (6.5.20) se cancelarão, à exceção de um único termo, para o qual  $m = n$ . Assim, a equação (6.5.20) se reduz a

$$\begin{aligned} \int_0^b V_o \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} dx &= c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{b} dx \\ -V_o \frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{b} \Big|_0^b &= c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \frac{1}{2} \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{b}\right) dx \\ \frac{V_o b}{n\pi} (1 - \cos n\pi) &= c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \cdot \frac{b}{2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} &= \frac{2V_o}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{4V_o}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

isto é:

$$c_n = \begin{cases} \frac{4V_o}{n\pi} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}, & n = \text{ímpar} \\ 0, & n = \text{par} \end{cases} \quad (6.5.21)$$

Substituindo as igualdades acima na equação (6.5.18), obtém-se a solução completa:

$$V(x, y) = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\frac{\sin n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \quad (6.5.22)$$

*Confira:*  $\nabla^2 V = 0$ ,  $V(x = 0, y) = 0 = V(x = b, y) = V(x, y = 0)$ ,  $V(x, y = a) = V_o$ . A solução da equação (6.5.22) não deveria ser uma surpresa. Ela poderia ser intuída por mera observação do arranjo da Figura 6.7. Dessa figura, observamos que, ao longo de  $x$ ,  $V$  varia de 0 (em  $x = 0$ ) a 0 (em  $x = b$ ) e somente uma função seno pode satisfazer essa condição. De maneira similar, ao longo de  $y$ ,  $V$  varia de 0 (em  $y = 0$ ) a  $V_o$  (em  $y = a$ ) e somente uma função seno hiperbólico pode satisfazer essa condição. Portanto, uma solução como a da equação (6.5.22) era esperada.

Para determinar o potencial em cada ponto  $(x, y)$  no interior da calha, tomamos os primeiros poucos termos da série infinita convergente mostrada na equação (6.5.22). Considerar quatro ou cinco termos pode ser suficiente.

(b) Para  $x = a/2$  e  $y = 3a/4$ , onde  $b = 2a$ , temos:

$$\begin{aligned} V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) &= \frac{4V_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin n\pi/4 \sinh 3n\pi/8}{n \sinh n\pi/2} \\ &= \frac{4V_o}{\pi} \left[ \frac{\sin \pi/4 \sinh 3\pi/8}{\sinh \pi/2} + \frac{\sin 3\pi/4 \sinh 9\pi/8}{3 \sinh 3\pi/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin 5\pi/4 \sinh 15\pi/8}{5 \sinh 5\pi/4} + \dots \right] \\ &= \frac{4V_o}{\pi} (0,4517 + 0,0725 - 0,01985 - 0,00645 + 0,00229 + \dots) \\ &= 0,6374V_o \end{aligned}$$

É interessante considerar um caso especial em que  $A = b = 1$  m e  $V_o = 100$  V. Os potenciais em alguns pontos específicos são calculados usando a equação (6.5.22), e os resultados estão mostrados na Figura 6.10(a). As linhas de fluxo e as linhas equipotenciais correspondentes estão mostradas na Figura 6.10(b). Um programa simples em Matlab, baseado na equação (6.5.22) está apresentado na Figura 6.11. Esse programa é auto-explicativo e pode ser usado para determinar  $V(x, y)$  em qualquer ponto no interior da calha. Na Figura 6.11,  $V(x = b/4, y = 3a/4)$  é calculado e o valor encontrado é de 43,2 volts.

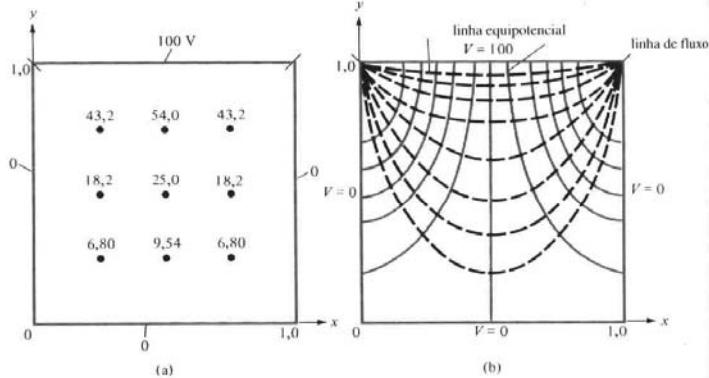


Figura 6.10 Referente ao Exemplo 6.5: (a)  $V(x, y)$  calculado em alguns pontos, (b) representação esquemática das linhas de fluxo e das linhas equipotenciais.

```
% SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE
% -----
% ESTE PROGRAMA RESOLVE O PROBLEMA
% DE VALOR DE FRONTEIRA BI-DIMENSIONAL
% DESCRITO NA FIGURA 6.7
% a E b SÃO AS DIMENSÕES DA CALHA
% x E y SÃO AS COORDENADAS DO PONTO
% DE INTERESSE

P = [ ];
Vo = 100.0;
a = 1.0;
b = a;
x = b/4;
y = 3.*a/4.;
c = 4.*Vo/pi;
sum = 0.0;
for k=1:10
    n = 2*k - 1
    a1 = sin(n*pi*x/b);
    a2 = sinh(n*pi*y/b);
    a3 = n*sinh(n*pi*a/b);
    sum = sum + c*a1*a2/a3;
    P = [n, sum]
end
diary test.out
P
diary off
```

Figura 6.11 Programa em Matlab referente ao Exemplo 6.5.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 6.5**

No problema do Exemplo 6.5, considere  $V_o = 100$  V,  $b = 2a = 2$ m.

Determine  $V$  e  $\mathbf{E}$  em:

- (a)  $(x, y) = (a, a/2)$
- (b)  $(x, y) = (3a/2, a/4)$

**Resposta:** (a)  $44,51$  V,  $-99,25 \mathbf{a}_y$  V/m; (b)  $16,5$  V,  $20,6 \mathbf{a}_x - 70,34 \mathbf{a}_y$  V/m.

**EXEMPLO 6.6**

Para o exemplo anterior, determine a distribuição de potencial se  $V_o$  não for uma constante, mas dado por:

- (a)  $V_o = 10 \operatorname{sen} 3\pi x/b$ ,  $y = a$ ,  $0 \leq x \leq b$
- (b)  $V_o = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} + \frac{1}{10} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{b}$ ,  $y = a$ ,  $0 \leq x \leq b$

**Solução:**

(a) Do exemplo anterior, cada passo antes da equação (6.5.19) permanece o mesmo, isto é, a solução é da forma

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{b} \quad (6.6.1)$$

como na equação (6.5.18). Porém, ao invés da equação (6.5.19), temos, agora:

$$V(y = a) = V_o = 10 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}$$

Ao equacionar os termos em seno, em ambos os lados da equação, obtemos:

$$c_n = 0, \quad n \neq 3$$

Para  $n = 3$ ,

$$10 = c_3 \operatorname{senh} \frac{3\pi a}{b}$$

ou

$$c_3 = \frac{10}{\operatorname{senh} \frac{3\pi a}{b}}$$

Portanto, a solução da equação (6.6.1) torna-se:

$$V(x, y) = 10 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{b} \frac{\operatorname{senh} \frac{3\pi y}{b}}{\operatorname{senh} \frac{3\pi a}{b}}$$

(b) De maneira similar, ao invés da equação (6.5.19), temos agora

$$V_o = V(y = a)$$

ou

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} + \frac{1}{10} \operatorname{senh} \frac{5\pi x}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}$$

Equacionando os termos em seno:

$$c_n = 0, \quad n \neq 1, 5$$

Para  $n = 1$ :

$$2 = c_1 \operatorname{senh} \frac{\pi a}{b} \quad \text{ou} \quad c_1 = \frac{2}{\operatorname{senh} \frac{\pi a}{b}}$$

Para  $n = 5$ :

$$\frac{1}{10} = c_5 \operatorname{senh} \frac{5\pi a}{b} \quad \text{ou} \quad c_5 = \frac{1}{10 \operatorname{senh} \frac{5\pi a}{b}}$$

Dessa forma:

$$V(x, y) = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{senh} \frac{\pi a}{b}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{5\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{5\pi y}{b}}{10 \operatorname{senh} \frac{5\pi a}{b}}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 6.6**

No Exemplo 6.5, suponha que todos os dados sejam os mesmos, à exceção de  $V_o$ , que é substituído por

$$V_o \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{b}, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y = a. \text{ Determine } V(x, y).$$

**Resposta:**  $\frac{V_o \operatorname{sen} \frac{7\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{7\pi y}{b}}{\operatorname{senh} \frac{7\pi a}{b}}$

**EXEMPLO 6.7**

Obtenha as equações diferenciais separadas para a distribuição de potencial  $V(\rho, \phi, z)$  em uma região livre de cargas.

**Solução:**

Esse exemplo, como o Exemplo 6.5, ilustra o método de separação de variáveis. Já que a região é livre de cargas, precisamos resolver a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, isto é:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (6.7.1)$$

Seja

$$V(\rho, \phi, z) = R(\rho) \Phi(\phi) Z(z) \quad (6.7.2)$$

onde  $R$ ,  $\Phi$  e  $Z$  são, respectivamente, funções de  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$ . Substituindo a equação (6.7.2) na equação (6.7.1) resulta em

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\rho dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + R\Phi \frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \quad (6.7.3)$$

Dividindo por  $R\Phi Z$ , obtém-se:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\rho dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} \quad (6.7.4)$$

O lado direito dessa equação fica somente em função de  $z$ , enquanto o lado esquerdo não depende de  $z$ . Para que os dois lados sejam iguais, é preciso que eles sejam iguais a uma constante, isto é,

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\rho dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -\lambda^2 \quad (6.7.5)$$

onde  $-\lambda^2$  é uma constante de separação. Dessa forma, a equação (6.7.5) pode ser separada em duas partes:

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = \lambda^2 \quad (6.7.6)$$

ou

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0 \quad (6.7.7)$$

e

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} \right) + \lambda^2 \rho^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0 \quad (6.7.8)$$

A equação (6.7.8) pode ser escrita como

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + \lambda^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \mu^2 \quad (6.7.9)$$

onde  $\mu^2$  é uma outra constante de separação. Assim, a equação (6.7.9) é separada como

$$\Phi'' = \mu^2 \Phi = 0 \quad (6.7.10)$$

e

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2 \lambda^2 - \mu^2) R = 0 \quad (6.7.11)$$

As equações (6.7.7), (6.7.10) e (6.7.11) são as equações diferenciais separadas requeridas pelo problema. A equação (6.7.7) tem uma solução similar à solução obtida no caso B do Exemplo 6.5, isto é,

$$Z(z) = c_1 \cosh \lambda z + c_2 \sinh \lambda z \quad (6.7.12)$$

A solução da equação (6.7.10) é similar à solução obtida no caso C do Exemplo 6.5, isto é:

$$\Phi(\phi) = c_3 \cos \mu \phi + c_4 \sin \mu \phi \quad (6.7.13)$$

A equação (6.7.11) é conhecida como *equação diferencial de Bessel* e sua solução está além do escopo deste livro.<sup>1</sup>

### EXERCÍCIO PRÁTICO 6.7

Repita o Exemplo 6.7 para  $V(r, \theta, \phi)$ .

**Resposta:** Se  $V(r, \theta, \phi) = R(r) F(\theta) \Phi(\phi)$ ,  $\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$ ,  $R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{\mu^2}{r^2} R = 0$ ,  
 $F'' + \cot \theta F' + (\mu^2 - \lambda^2 \operatorname{cossec}^2 \theta) F = 0$ .

## 6.5 RESISTÊNCIA E CAPACITÂNCIA

Na Seção 5.4, o conceito de resistência foi abordado e obtivemos a equação (5.16) para encontrar a resistência de um condutor com seção reta uniforme. Se a seção reta do condutor não for uniforme, a equação (5.16) torna-se inválida, e a resistência é obtida diretamente da equação (5.17):

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad (6.16)$$

<sup>1</sup> Para a solução completa da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas ou em coordenadas esféricas, veja, por exemplo, D. T. Paris e F. K. Hurd, *Basic Electromagnetic Theory*, New York: McGraw-Hill, 1969, p. 150–159.

O problema de determinar a resistência de um condutor de seção reta não uniforme pode ser tratado como um problema de valor de fronteira. Utilizando a equação (6.16), a resistência  $R$  (ou condutância  $G = 1/R$ ) de um dado material condutor pode ser encontrada conforme os seguintes passos:

1. Escolher um sistema de coordenadas adequado.
2. Considerar  $V_0$  como a diferença de potencial entre terminais condutores.
3. Resolver a equação de Laplace  $\nabla^2 V$  para obter  $V$ . Então, determinar  $\mathbf{E}$  a partir da solução de  $\mathbf{E} = -\nabla V$  e  $I$  a partir da solução de  $I = \int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ .
4. Finalmente, obter  $R$  como  $V_0/I$ .

Essencialmente, assumimos um valor  $V_0$ , determinamos  $I$  e a partir desses determinamos  $R = V_0/I$ . De maneira alternativa, podemos assumir um valor de corrente  $I_0$ , determinar a diferença de potencial correspondente  $V$  e determinar  $R$  a partir de  $R = V/I_0$ . Como discutiremos a seguir, a capacidade de um capacitor é obtida utilizando uma técnica similar.

De modo geral, para termos um capacitor precisamos ter dois (ou mais) condutores carregados com cargas iguais e de sinais contrários. Isso implica em que todas as linhas de fluxo que saem de um condutor devem, necessariamente, terminar na superfície do outro condutor. Os condutores são, por vezes, referidos como as *placas* do capacitor. As placas podem estar separadas por espaço livre ou por um dielétrico.

Considere o capacitor de dois condutores da Figura 6.12. Os condutores são mantidos sob uma diferença de potencial  $V$  dada por

$$V = V_1 - V_2 = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.17)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico existente entre os condutores e se assume que o condutor 1 está carregado positivamente. (Observe que o campo  $\mathbf{E}$  é sempre ortogonal às superfícies condutoras.)

Definimos a *capacitância*  $C$  do capacitor como a razão entre o valor da carga em uma das placas e a diferença de potencial entre elas. Isto é:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (6.18)$$

O sinal negativo antes de  $V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  foi desconsiderado porque estamos interessados no valor absoluto de  $V$ . A capacidade  $C$  é uma propriedade física do capacitor e é medida em farads (F). Utilizando a equação (6.18),  $C$  pode ser obtido, para qualquer capacitor de dois condutores, seguindo um destes dois métodos:

1. Assumindo um valor de  $Q$  e determinando  $V$  em termos de  $Q$  (utilizando a lei de Gauss).
2. Assumindo um valor de  $V$  e determinando  $Q$  em termos de  $V$  (utilizando a solução da equação de Laplace).

O primeiro método será utilizado a seguir e o segundo será utilizado nos Exemplos 6.10 e 6.11. O primeiro método implica o uso dos seguintes passos:

1. Escolher um sistema de coordenadas apropriado.
2. Atribuir, às duas placas condutoras, as cargas  $+Q$  e  $-Q$ .

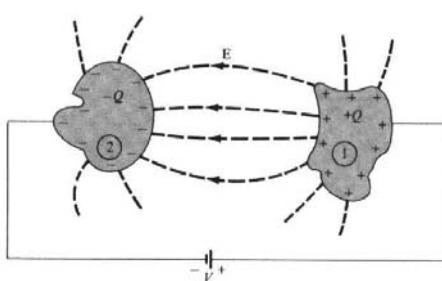


Figura 6.12 Capacitor de dois condutores.

3. Determinar  $\mathbf{E}$  utilizando a lei de Coulomb ou a lei de Gauss e encontrar  $V$  a partir de  $V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ . O sinal negativo pode ser ignorado, nesse caso, porque estamos interessados no valor absoluto de  $V$ .
4. Finalmente, obter  $C$  a partir de  $C = Q/V$ .

Aplicaremos agora esse procedimento para determinar a capacidade de algumas configurações importantes a dois condutores.

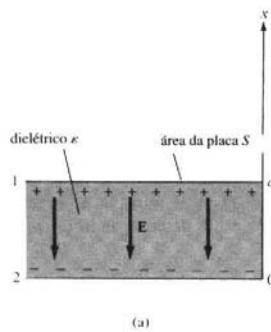
### A. Capacitor de Placas Paralelas

Considere o capacitor de placas paralelas da Figura 6.13(a). Suponha que cada uma das placas tem uma área  $S$  e que estão separadas de uma distância  $d$ . Assumiremos que as placas 1 e 2, respectivamente, estão carregadas com cargas  $+Q$  e  $-Q$ , uniformemente distribuídas sobre elas, de tal modo que:

$$\rho_S = \frac{Q}{S} \quad (6.19)$$

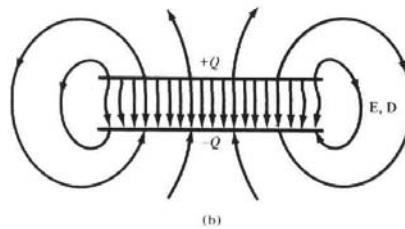
Um capacitor de placas paralelas ideal é aquele em que a separação  $d$  entre as placas é muito pequena quando comparada com as suas dimensões. Considerando tal caso ideal, o vazamento ou dispersão do campo nas bordas das placas, como mostra a Figura 6.13(b), pode ser desprezado, dessa forma o campo entre as placas pode ser considerado uniforme. Se o espaço entre as placas for preenchido com um dielétrico homogêneo com permissividade dielétrica  $\epsilon$ , e se desprezarmos o vazamento do fluxo nas bordas das placas, da equação (4.27),  $\mathbf{D} = \rho_S \mathbf{a}_x$  ou

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\rho_S}{\epsilon} (-\mathbf{a}_x) \\ &= -\frac{Q}{\epsilon S} \mathbf{a}_x \end{aligned} \quad (6.20)$$



(a)

Figura 6.13 (a) Capacitor de placas paralelas, (b) efeito de vazamento nas bordas de um capacitor de placas paralelas.



(b)

Assim,

$$V = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^d \left[ -\frac{Q}{\epsilon S} \mathbf{a}_x \right] \cdot dx \mathbf{a}_x = \frac{Qd}{\epsilon S} \quad (6.21)$$

e, portanto, para um capacitor de placas paralelas:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d}} \quad (6.22)$$

Essa fórmula apresenta uma maneira de se determinar a constante dielétrica  $\epsilon_r$  de um determinado dielétrico. Ao medir a capacitância  $C$  de um capacitor de placas paralelas com o espaçamento entre as placas preenchido com o dielétrico, e a capacitância  $C_o$  com o ar entre as placas, determinamos  $\epsilon_r$  a partir de

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_o} \quad (6.23)$$

Utilizando a equação (4.96), pode-se demonstrar que a energia armazenada em um capacitor é dada por:

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C}} \quad (6.24)$$

Para o capacitor de placas paralelas, substituímos a equação (6.20) na equação (4.96) e verificamos que

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int_v \epsilon \frac{Q^2}{\epsilon^2 S^2} dv = \frac{\epsilon Q^2 S d}{2 \epsilon^2 S^2} \\ &= \frac{Q^2}{2} \left( \frac{d}{\epsilon S} \right) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV \end{aligned}$$

conforme esperado.

### B. Capacitor coaxial

Um capacitor coaxial é, essencialmente, um cabo coaxial ou um capacitor cilíndrico coaxial. Considere  $L$  o comprimento de dois condutores coaxiais, o interno com raio  $a$  e o externo com raio  $b$  ( $b > a$ ), como mostra a Figura 6.14. Seja o espaço entre os condutores preenchido com um dielétrico homogêneo com permissividade  $\epsilon$ . Assumimos que os condutores 1 e 2, respectivamente, estão carregados com cargas  $+Q$  e  $-Q$ , uniformemente distribuídas sobre eles. Aplicando a lei de Gauss em uma superfície gaussiana arbitrária cilíndrica de raio  $\rho$  ( $a < \rho < b$ ), obtemos:

$$Q = \epsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon E_\rho 2\pi\rho L \quad (6.25)$$

Assim:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} \mathbf{a}_\rho \quad (6.26)$$

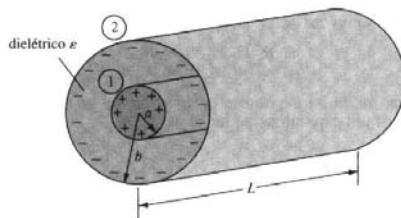


Figura 6.14 Capacitor coaxial.

Desprezando o vazamento do fluxo nas extremidades do cilindro,

$$V = - \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_b^a \left[ \frac{Q}{2\pi\epsilon\rho L} \mathbf{a}_\rho \right] \cdot d\rho \mathbf{a}_\rho \quad (6.27a)$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln \frac{b}{a} \quad (6.27b)$$

Portanto, a capacidade de um cilindro coaxial é dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} \quad (6.28)$$

### C. Capacitor esférico

Esse é o caso de dois condutores esféricos concêntricos. Considere a esfera interna, de raio  $a$  e a esfera externa de raio  $b$  ( $b > a$ ), separadas por um meio dielétrico com permissividade  $\epsilon$ , como mostra a Figura 6.15. Assumimos cargas  $+Q$  e  $-Q$  sobre as esferas interna e externa, respectivamente. Aplicando a lei de Gauss em uma superfície gaussiana arbitrária esférica, de raio  $r$  ( $a < r < b$ ),

$$Q = \epsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon E_r 4\pi r^2 \quad (6.29)$$

isto é,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r \quad (6.30)$$

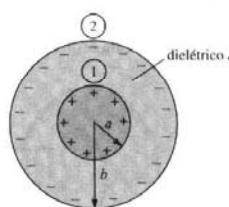


Figura 6.15 Capacitor esférico.

A diferença de potencial entre os condutores é:

$$\begin{aligned} V &= - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_b^a \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r \right] \cdot dr \mathbf{a}_r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \end{aligned} \quad (6.31)$$

Portanto, a capacidade do capacitor esférico é:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}}{a - b} \quad (6.32)$$

Fazendo  $b \rightarrow \infty$ ,  $C = 4\pi\epsilon a$ , que é a capacidade de um capacitor esférico, cuja placa externa está infinitamente distante. Esse é o caso de um condutor esférico a uma grande distância de outros corpos condutores – a *esfera isolada*. Mesmo um objeto de forma irregular, com aproximadamente o mesmo tamanho da esfera, terá praticamente a mesma capacidade. Este fato é útil na estimativa da capacidade parasita de um corpo isolado ou de uma peça de um equipamento.

Lembre da Teoria de Circuitos que, se dois capacitores com capacidades  $C_1$  e  $C_2$  estão em série (isto é, eles têm a mesma carga), como mostrado na Figura 6.16(a), a capacidade total é

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

ou

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (6.33)$$

Se os capacitores estão em paralelo (isto é, eles têm a mesma voltagem entre suas placas), como mostrado na Figura 6.16(b), a capacidade total é:

$$C = C_1 + C_2 \quad (6.34)$$

Reconsideraremos as expressões para encontrar a resistência  $R$  e a capacidade  $C$  de um sistema elétrico. As expressões foram dadas nas equações (6.16) e (6.18), aqui repetidas:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \quad (6.16)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (6.18)$$

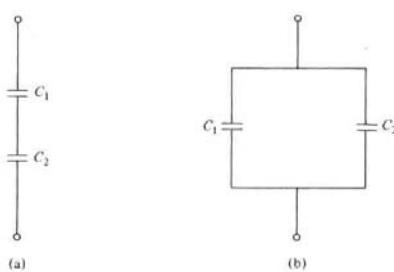


Figura 6.16 Capacitores em (a) série e (b) paralelo.

O produto entre essas expressões nos leva a

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (6.35)$$

que é o tempo de relaxação  $T$ , do meio que separa os condutores. Deve-se destacar que a equação (6.35) é válida somente quando o meio é homogêneo. Isto é facilmente inferido das equações (6.16) e (6.18). Supondo que os meios são homogêneos, a resistência dos vários capacitores mencionados anteriormente podem ser rapidamente obtidas utilizando a equação (6.35). Os exemplos seguintes servirão para ilustrar essa idéia.

Para um capacitor de placas paralelas:

$$C = \frac{\epsilon S}{d}, \quad R = \frac{d}{\sigma S} \quad (6.36)$$

Para um capacitor cilíndrico:

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}}, \quad R = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi\sigma L} \quad (6.37)$$

Para um capacitor esférico:

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}, \quad R = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{4\pi\sigma} \quad (6.38)$$

E, finalmente, para um condutor esférico isolado:

$$C = 4\pi\epsilon a, \quad R = \frac{1}{4\pi\sigma a} \quad (6.39)$$

Deve-se observar que a resistência  $R$  em cada uma das equações de (6.35) a (6.39) não é a resistência da placa do capacitor, mas é a resistência de perdas entre as placas. Portanto,  $\sigma$ , nessas equações, é a condutividade do meio dielétrico que separa as placas.

#### EXEMPLO 6.8

Uma barra metálica de condutividade  $\sigma$  é dobrada de modo a formar um setor plano de  $90^\circ$  de raio interno  $a$ , raio externo  $b$  e espessura  $t$ , como mostra a Figura 6.17. Demonstre que: (a) a resistência da barra entre as superfícies verticais curvas em  $\rho = a$  e  $\rho = b$  é dada por

$$R = \frac{2 \ln \frac{b}{a}}{\sigma \pi t}$$

e (b) a resistência entre as duas superfícies horizontais em  $z = 0$  e  $z = t$  é dada por

$$R' = \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$

#### Solução:

(a) Entre as extremidades verticais curvas, situadas em  $\rho = a$  e  $\rho = b$ , a barra tem uma seção reta não uniforme e, portanto, a equação (5.16) não se aplica. Temos que utilizar a equação (6.16). Seja  $V_0$  uma diferença de potencial mantida entre as superfícies curvas em  $\rho = a$  e  $\rho = b$  tal que

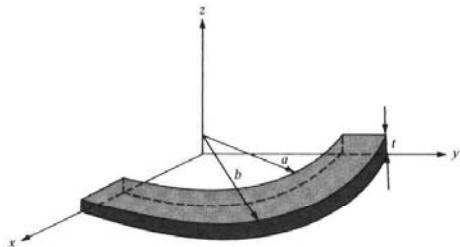


Figura 6.17 Barra metálica do Exemplo 6.8.

$V(\rho = a) = 0$  e  $V(\rho = b) = V_0$ . Resolvemos a equação de Laplace para  $\nabla^2 V = 0$  em coordenadas cilíndricas. Já que  $V = V(\rho)$ :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

Como  $\rho = 0$  não faz parte da solução, após multiplicar por  $\rho$  e integrar uma vez, obtemos

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

ou

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{A}{\rho}$$

Integrando novamente

$$V = A \ln \rho + B$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração a serem determinadas a partir das condições de fronteira.

$$V(\rho = a) = 0 \rightarrow 0 = A \ln a + B \quad \text{ou} \quad B = -A \ln a$$

$$V(\rho = b) = V_0 \rightarrow V_0 = A \ln b + B = A \ln b - A \ln a = A \ln \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad A = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

Assim,

$$V = A \ln \rho - A \ln a = A \ln \frac{\rho}{a} = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{\rho}{a}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho} \mathbf{a}_\rho = -\frac{A}{\rho} \mathbf{a}_\rho = -\frac{V_0}{\rho \ln \frac{b}{a}} \mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$$

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^t \frac{-V_0 \sigma}{\rho \ln \frac{b}{a}} dz \rho d\phi = \frac{\pi t V_0 \sigma}{2 \ln \frac{b}{a}}$$

Então,

$$R = \frac{V_o}{I} = \frac{2 \ln \frac{b}{a}}{\sigma \pi t}$$

conforme solicitado.

(b) Seja  $V_o$  a diferença de potencial entre as duas superfícies horizontais, tal que  $V(z=0)=0$  e  $V(z=t)=V_o$ .  $V=V(z)$ , então a equação de Laplace  $\nabla^2 V=0$  torna-se:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

Integrando duas vezes:

$$V = Az + B$$

Aplicando as condições de fronteira para determinar  $A$  e  $B$ :

$$V(z=0)=0 \rightarrow 0=0+B \quad \text{ou} \quad B=0$$

$$V(z=t)=V_o \rightarrow V_o=At \quad \text{ou} \quad A=\frac{V_o}{t}$$

Assim,

$$V = \frac{V_o}{t} z$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \mathbf{a}_z = -\frac{V_o}{t} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\frac{\sigma V_o}{t} \mathbf{a}_z, \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi d\rho \mathbf{a}_z$$

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=a}^b \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{V_o \sigma}{t} \rho d\phi d\rho \\ &= \frac{V_o \sigma}{t} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_a^b = \frac{V_o \sigma \pi (b^2 - a^2)}{4t} \end{aligned}$$

Então:

$$R' = \frac{V_o}{I} = \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$

Alternativamente, para este caso, a seção reta da barra é uniforme entre as superfícies horizontais em  $z=0$  e  $z=t$  e a equação (5.16) é válida. Desta forma,

$$\begin{aligned} R' &= \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{t}{\sigma \frac{\pi}{4} (b^2 - a^2)} \\ &= \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)} \end{aligned}$$

conforme solicitado.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 6.8**

Um disco de espessura  $t$  tem um raio  $b$  e um furo central de raio  $a$ . Considerando a condutividade do disco  $\sigma$ , determine a resistência entre:

- o furo e a periferia do disco;
- entre as duas faces planas do disco.

Resposta: (a)  $\frac{\ln b/a}{2\pi\sigma}$ , (b)  $\frac{t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$ .

**EXEMPLO 6.9**

Um cabo coaxial contém um material isolante de condutividade  $\sigma$ . Se o raio do fio central é  $a$  e o raio da blindagem é  $b$ , demonstre que a condutância do cabo, por unidade de comprimento, é (veja equação (6.37)):

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln b/a}$$

**Solução:**

Considere  $L$  o comprimento de um cabo coaxial, conforme mostra a Figura 6.14. Seja  $V_o$  a diferença de potencial entre os condutores interno e externo, tal que  $V(\rho = a) = 0$  e  $V(\rho = b) = V_o$ .  $V$  e  $\mathbf{E}$  podem ser encontrados da mesma forma que na parte (a) do exemplo anterior. Assim:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \frac{-\sigma V_o}{\rho \ln b/a} \mathbf{a}_\rho, \quad d\mathbf{S} = -\rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho$$

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{V_o \sigma}{\rho \ln b/a} \rho dz d\phi \\ &= \frac{2\pi L \sigma V_o}{\ln b/a} \end{aligned}$$

A resistência, por unidade de comprimento, é

$$R = \frac{V_o}{I} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\ln b/a}{2\pi\sigma}$$

e a condutância, por unidade de comprimento, é:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\sigma}{\ln b/a}$$

conforme solicitado.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 6.9**

Um cabo coaxial contém um material isolante de condutividade  $\sigma_1$  na sua metade superior e um outro material de condutividade  $\sigma_2$  na sua metade inferior (situação semelhante à da ilustrada na Figura 6.19b). Se o raio do fio central é  $a$  e o raio da blindagem é  $b$ , demonstre que a resistência de perdas de um comprimento  $\ell$  do cabo é:

$$R = \frac{1}{\pi\ell(\sigma_1 + \sigma_2)} \ln \frac{b}{a}$$

Resposta: a demonstração.

**EXEMPLO 6.10**

Cascas esféricas condutoras com raios  $a = 10$  cm e  $b = 30$  cm são mantidas sob uma diferença de potencial de 100 V, tal que  $V(r = b) = 0$  e  $V(r = a) = 100$  V. Determine  $V$  e  $\mathbf{E}$  na região entre as cascas. Se  $\epsilon_r = 2,5$  na região, determine a carga total induzida nas cascas e a capacitância do capacitor.

**Solução:**

Considere as cascas esféricas como mostradas na Figura 6.18. Já que  $V$  depende somente de  $r$ , a equação de Laplace torna-se

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dV}{dr} \right] = 0$$

Já que  $r \neq 0$  na região de interesse, multiplicamos a equação anterior por  $r^2$  e obtemos:

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dV}{dr} \right] = 0$$

Integrando uma vez,

$$r^2 \frac{dV}{dr} = A$$

ou

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

Integrando, novamente, obtém-se

$$V = -\frac{A}{r} + B$$

Como é usual, as constantes  $A$  e  $B$  são determinadas a partir das condições de fronteira.

$$\text{Quando } r = b, V = 0 \rightarrow 0 = -\frac{A}{b} + B \quad \text{ou} \quad B = \frac{A}{b}$$

Dessa maneira,

$$V = A \left[ \frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right]$$

$$\text{E também, quando } r = a, V = V_0 \rightarrow V_0 = A \left[ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right]$$

ou

$$A = \frac{V_0}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

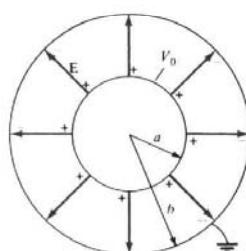


Figura 6.18 Potencial  $V(r)$  devido às cascas esféricas condutoras.

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= V_o \frac{\left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right]}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\ \mathbf{E} &= -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \mathbf{a}_r = -\frac{A}{r^2} \mathbf{a}_r \\ &= \frac{V_o}{r^2 \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]} \mathbf{a}_r \\ Q &= \int e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_o}{r^2 \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]} r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r V_o}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \end{aligned}$$

A capacidade é facilmente encontrada fazendo

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

que é o mesmo resultado obtido na equação (6.32). Na Seção 6.5 assumimos uma carga  $Q$  e encontramos o  $V_o$  correspondente. Aqui, porém, assumimos um valor de potencial  $V_o$  e encontramos a carga  $Q$  correspondente para determinar  $C$ . Substituindo  $a = 0,1$  m,  $b = 0,3$  m e  $V_o = 100$  V, obtém-se:

$$V = 100 \frac{\left[ \frac{1}{r} - \frac{10}{3} \right]}{10 - 10/3} = 15 \left[ \frac{1}{r} - \frac{10}{3} \right] V$$

Confira:  $\nabla^2 V = 0$ ,  $V(r = 0,3$  m) = 0,  $V(r = 0,1$  m) = 100.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{100}{r^2 [10 - 10/3]} \mathbf{a}_r = \frac{15}{r^2} \mathbf{a}_r \text{ V/m} \\ Q &= \pm 4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{(2,5) \cdot (100)}{10 - 10/3} \\ &= \pm 4,167 \text{ nC} \end{aligned}$$

A carga positiva é induzida na esfera interna e a carga negativa é induzida na esfera externa. Também,

$$C = \frac{|Q|}{V_o} = \frac{4,167 \times 10^{-9}}{100} = 41,67 \text{ pF}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 6.10

Se a Figura 6.19 representa as seções retas de dois capacitores esféricos, determine suas capacidades. Sejam  $a = 1$  mm,  $b = 3$  mm,  $c = 2$  mm,  $\epsilon_r = 2,5$  e  $\epsilon_o = 3,5$ .

**Resposta:** (a) 0,53 pF; (b) 0,5 pF.

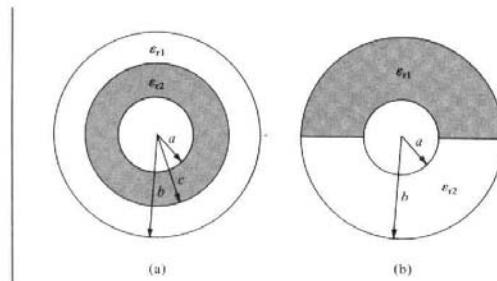


Figura 6.19 Referente aos Exercícios Práticos 6.9, 6.10 e 6.12.

**EXEMPLO 6.11**

Na Seção 6.5 foi mencionado que a capacitância  $C = Q/V$  de um capacitor pode ser encontrada ou assumindo um valor de  $Q$  e determinando  $V$ , ou assumindo um valor de  $V$  e determinando  $Q$ . A primeira abordagem foi utilizada na Seção 6.5, enquanto que a última foi utilizada no exemplo anterior. Utilizando esse último método, obtenha a equação (6.22).

**Solução:**

Assuma que as placas paralelas na Figura 6.13 sejam mantidas a uma diferença de potencial  $V_o$  tal que  $V(x=0) = V(x=d) = V_o$ . Isso requer a solução de um problema de valor de fronteira unidimensional, isto é, resolver a equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Integrando duas vezes,

$$V = Ax + B$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração a serem determinadas a partir das condições de fronteira. Em  $x = 0$ ,  $V = 0 \rightarrow 0 = 0 + B$ , ou  $B = 0$ , e em  $x = d$ ,  $V = V_o \rightarrow V_o = Ad + 0$  ou  $A = V_o/d$ .

Assim:

$$V = \frac{V_o}{d} x$$

Observe que essa solução satisfaz a equação de Laplace e as condições de fronteira.

Uma vez que consideramos  $V_o$  a diferença de potencial entre as placas, nosso objetivo é determinar a carga  $Q$  em cada uma das placas, de tal modo a obtermos a capacitância  $C = Q/V_o$ . A carga em cada placa é dada por

$$Q = \int \rho_S dS$$

No entanto,  $\rho_S = \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n = \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_n$ , onde:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx} \mathbf{a}_x = -A \mathbf{a}_x = -\frac{V_o}{d} \mathbf{a}_x$$

Nas placas inferiores,  $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_x$ . Assim:

$$\rho_S = -\frac{\epsilon V_o}{d} \quad \text{e} \quad Q = -\frac{\epsilon V_o S}{d}$$

Nas placas superiores,  $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_x$ . Assim:

$$\rho_S = \frac{\epsilon V_o}{d} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\epsilon V_o S}{d}$$

Conforme esperado,  $Q$  é igual, mas de sinal oposto em cada uma das placas. Então,

$$C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}$$

o que está de acordo com a equação (6.22).

### EXERCÍCIO PRÁTICO 6.11

Obtenha a fórmula para a capacitância  $C = Q/V_0$  de um capacitor cilíndrico na equação (6.28), supondo um valor de  $V_0$  e determinando  $Q$ .

### EXEMPLO 6.12

Determine a capacitância de cada um dos capacitores da Figura 6.20. Considere  $\epsilon_{r1} = 4$ ,  $\epsilon_{r2} = 6$  e  $d = 5 \text{ mm}$ ,  $S = 30 \text{ cm}^2$ .

#### Solução:

(a) Já que **D** e **E** são normais à interface dielétrica, o capacitor da Figura 6.20(a) pode ser considerado como constituído de dois capacitores  $C_1$  e  $C_2$  em série, como na Figura 6.16(a).

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{d/2} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{d}, \quad C_2 = \frac{2\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{d}$$

A capacitância total  $C$  é dada, então, por:

$$\begin{aligned} C &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\epsilon_0 S}{d} \frac{(\epsilon_{r1} \epsilon_{r2})}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \\ &= 2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{30 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-3}} \cdot \frac{4 \times 6}{10} \\ &= 25,46 \text{ pF} \end{aligned} \quad (6.12.1)$$

(b) Nesse caso, **D** e **E** são paralelos à interface dielétrica. Podemos considerar esse capacitor como constituído de dois capacitores,  $C_1$  e  $C_2$ , em paralelo, isto é, submetidos à mesma diferença de potencial, como na Figura 6.16(b).

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S/2}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{2d}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{2d}$$

A capacitância total  $C$  é dada, então, por:

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \\ &= \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{30 \times 10^{-4}}{2 \cdot (5 \times 10^{-3})} \cdot 10 \\ &= 26,53 \text{ pF} \end{aligned} \quad (6.12.2)$$

Observe que, quando  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = \epsilon_r$ , as equações (6.12.1) e (6.12.2) estão de acordo com a equação (6.22), conforme esperado.

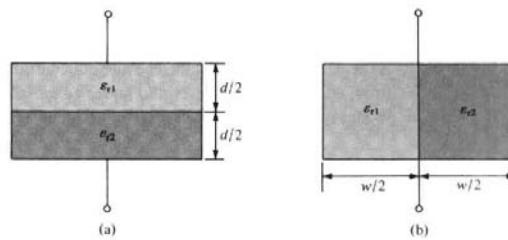


Figura 6.20 Referente ao Exemplo 6.12.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 6.12**

Determine a capacidade de 10 m de comprimento dos capacitores cilíndricos representados na Figura 6.19. Considere  $a = 1$  mm,  $b = 3$  mm,  $c = 2$  mm,  $\epsilon_{r1} = 2,5$  mm e  $\epsilon_{r2} = 3,5$ .

**Resposta:** (a) 1,41 nF; (b) 1,52 nF.

**EXEMPLO 6.13**

Um capacitor cilíndrico tem raios  $a = 1$  cm e  $b = 2,5$  cm. Se o espaço entre as placas é preenchido com um dielétrico não homogêneo de  $\epsilon_r = (10 + \rho)/\rho$ , onde  $\rho$  é dado em cm, determine a capacidade por metro do capacitor.

**Solução:**

O procedimento é o mesmo que foi adotado na Seção 6.5, exceto pelo fato de que a equação (6.27a) agora se apresenta como:

$$\begin{aligned} V &= - \int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r\rho L} d\rho = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho \left( \frac{10 + \rho}{\rho} \right)} \\ &= \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_b^a \frac{d\rho}{10 + \rho} = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln(10 + \rho) \Big|_b^a \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{10 + b}{10 + a} \end{aligned}$$

Logo, a capacidade por metro ( $L = 1$  m) é:

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{10 + b}{10 + a}} = 2\pi \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{\ln \frac{12,5}{11,0}} \\ C &= 434,6 \text{ pF/m} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 6.13**

Um capacitor esférico, com  $a = 1,5$  cm e  $b = 4$  cm, tem um dielétrico não homogêneo de  $\epsilon = 10\epsilon_0/r$ . Determine a capacidade do capacitor.

**Resposta:** (a) 1,13 nF.

**6.6 MÉTODO DAS IMAGENS**

O método das imagens, introduzido por Lord Kelvin em 1848, é comumente utilizado para determinar  $V$ ,  $E$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\rho_s$  associados a cargas na presença de condutores. Por esse método, evitamos resolver a equação de Laplace ou de Poisson ao considerar o fato de que uma superfície condutora é equipotencial. Embora o método não se aplique a todos os problemas de eletrostática, ele pode reduzir a complexidade de solução de alguns deles.

A teoria das imagens estabelece que uma dada configuração de carga próxima a um plano infinito condutor perfeito aterrado pode ser substituída pela própria configuração de carga, por sua imagem e por uma superfície equipotencial no lugar do plano condutor.

Exemplos típicos de configurações de carga, tais como a carga pontual, a linha de cargas e um volume de cargas, encontram-se representados na Figura 6.21(a). Suas correspondentes configurações de imagem estão representadas na Figura 6.21(b).

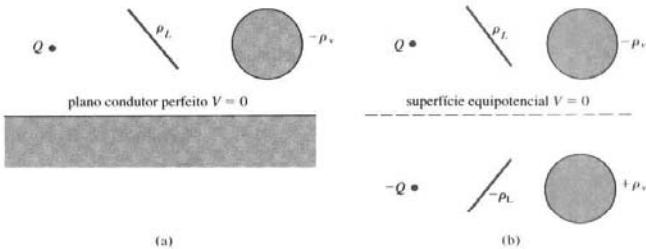


Figura 6.21 Sistema imagem: (a) configurações de carga próxima de um plano condutor perfeito; (b) configuração da imagem com o plano condutor substituído pela superfície equipotencial.

Ao aplicar o método das imagens, duas condições devem ser satisfeitas:

1. A(s) carga(s) imagem deve(m) estar localizada(s) no interior da região condutora.
2. A(s) carga(s) imagem deve(m) estar localizada(s) de tal modo que o potencial na superfície condutora seja zero ou constante.

A primeira condição é necessária para satisfazer a equação de Poisson, e a segunda garante que as condições de fronteira sejam satisfeitas. Apliquemos a teoria das imagens para dois problemas específicos.

#### A. Carga pontual próxima de um plano condutor aterrado

Considere uma carga pontual  $Q$  posicionada a uma distância  $h$  de um plano infinito condutor perfeito, como mostrado na Figura 6.22(a). A configuração da imagem está na Figura 6.22(b). O campo elétrico no ponto  $P(x, y, z)$  é dado por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \quad (6.40)$$

$$= \frac{Q \mathbf{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{-Q \mathbf{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} \quad (6.41)$$

Os vetores distância  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  são dados por

$$\mathbf{r}_1 = (x, y, z) - (0, 0, h) = (x, y, z - h) \quad (6.42)$$

$$\mathbf{r}_2 = (x, y, z) - (0, 0, -h) = (x, y, z + h) \quad (6.43)$$

desta forma, a equação (6.41) torna-se:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z - h)\mathbf{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{3/2}} - \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z + h)\mathbf{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{3/2}} \right] \quad (6.44)$$

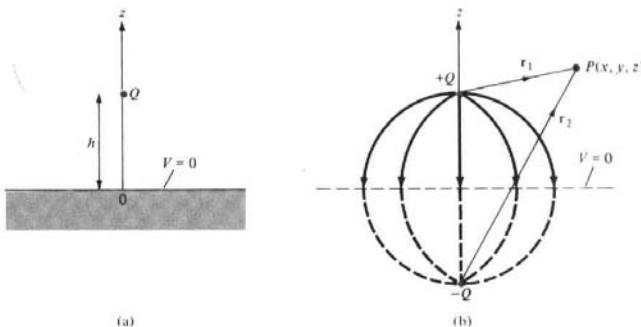


Figura 6.22 (a) Carga pontual a planos condutores aterrados; (b) configurações da imagem e linhas de campo.

Deve-se observar que, quando  $z = 0$ ,  $\mathbf{E}$  tem somente a componente  $z$ , confirmando que  $\mathbf{E}$  é normal à superfície condutora.

O potencial em  $P$  é facilmente obtido da equação (6.41) ou da (6.44), utilizando  $V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} V &= V_+ + V_- \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - h)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z + h)^2]^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (6.45)$$

para  $z \geq 0$  e  $V = 0$  para  $z \leq 0$ . Observe que  $V(z = 0) = 0$ .

A densidade superficial de carga induzida pode ser obtida da equação (6.44) fazendo:

$$\begin{aligned} \rho_S &= D_n = \epsilon_0 E_n \Big|_{z=0} \\ &= \frac{-Qh}{2\pi[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (6.46)$$

A carga total induzida sobre o plano condutor é:

$$Q_i = \int \rho_S dS = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Qh dx dy}{2\pi[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}} \quad (6.47)$$

Fazendo a mudança de variáveis,  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $dx dy = \rho d\rho d\phi$ , donde se obtém:

$$Q_i = -\frac{Qh}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho d\phi}{[\rho^2 + h^2]^{3/2}} \quad (6.48)$$

Integrando em  $\phi$  resulta  $2\pi$ . Fazendo  $\rho d\rho = \frac{1}{2}d(\rho^2)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} Q_i &= -\frac{Qh}{2\pi} 2\pi \int_0^{\infty} [\rho^2 + h^2]^{-3/2} \frac{1}{2} d(\rho^2) \\ &= \frac{Qh}{[\rho^2 + h^2]^{1/2}} \Big|_0^{\infty} \\ &= -Q \end{aligned} \quad (6.49)$$

conforme esperado, porque todas as linhas de fluxo que terminam sobre o condutor deveriam terminar na carga imagem se o condutor estivesse ausente.

### B. Linha de carga próxima de um plano condutor aterrado

Considere uma linha infinita de cargas com densidade  $\rho_L$  C/m localizada a uma distância  $h$  do plano condutor aterrado, em  $z = 0$ . A mesma configuração de imagem da Figura 6.22(b) aplica-se à linha de cargas, com exceção de que  $Q$  é substituído por  $\rho_L$ . Podemos assumir que a linha infinita de cargas  $\rho_L$  se encontra em  $x = 0, z = h$  e a imagem  $-\rho_L$  em  $x = 0, z = -h$ , de tal forma que as duas estão paralelas ao eixo  $y$ . O campo elétrico no ponto  $P$  é dado (da equação 4.21) por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \quad (6.50)$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r_1} \mathbf{a}_{\rho 1} + \frac{-\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r_2} \mathbf{a}_{\rho 2} \quad (6.51)$$

Os vetores distância  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são dados por

$$\rho_1 = (x, y, z) - (0, y, h) = (x, 0, z - h) \quad (6.52)$$

$$\rho_2 = (x, y, z) - (0, y, -h) = (x, 0, z + h) \quad (6.53)$$

então, a equação (6.51) torna-se:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x\mathbf{a}_x + (z-h)\mathbf{a}_z}{x^2 + (z-h)^2} - \frac{x\mathbf{a}_x + (z+h)\mathbf{a}_z}{x^2 + (z+h)^2} \right] \quad (6.54)$$

Novamente, observa-se que, quando  $z = 0$ ,  $\mathbf{E}$  tem somente a componente  $z$ , confirmando, dessa forma, que  $\mathbf{E}$  é normal à superfície condutora.

O potencial em  $P$  é obtido da equação (6.51) ou da (6.54), utilizando  $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} V &= V_+ + V_- \\ &= -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho_1 - \frac{-\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho_2 \\ &= -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Substituindo  $\rho_1 = |\rho_1|$  e  $\rho_2 = |\rho_2|$ , das equações (6.52) e (6.53) na equação (6.55), resulta em

$$V = -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{x^2 + (z-h)^2}{x^2 + (z+h)^2} \right]^{1/2} \quad (6.56)$$

para  $z \geq 0$  e  $V = 0$  para  $z \leq 0$ . Observe que  $V(z=0) = 0$ .

A carga superficial induzida sobre o plano condutor é dada por:

$$\rho_S = D_n = \epsilon_0 E_z \Big|_{z=0} = \frac{-\rho_L h}{\pi(x^2 + h^2)} \quad (6.57)$$

A carga induzida por unidade de comprimento sobre o plano condutor é:

$$\rho_i = \int \rho_S dx = -\frac{\rho_L h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + h^2} \quad (6.58)$$

Fazendo  $x = h \operatorname{tg} \alpha$ , a equação (6.58) torna-se

$$\begin{aligned} \rho_i &= -\frac{\rho_L h}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{h} \\ &= -\rho_L \end{aligned} \quad (6.59)$$

conforme esperado.

#### EXEMPLO 6.14

Uma carga pontual  $Q$  está localizada em um ponto  $(a, 0, b)$  entre dois semiplanos condutores que se interceptam em ângulo reto, como mostra a Figura 6.23. Determine o potencial no ponto  $P(x, y, z)$  e a força sobre  $Q$ .

#### Solução:

A configuração da imagem está mostrada na Figura 6.24. Três cargas imagem são necessárias para satisfazer as condições de fronteira da Seção 6.6. Da Figura 6.24(a), o potencial no ponto  $P(x, y, z)$  é dado pela superposição dos potenciais em  $P$  devido às quatro cargas pontuais, isto é,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right]$$

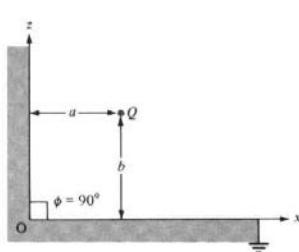


Figura 6.23 Carga pontual entre dois semiplanos condutores.

onde

$$r_1 = [(x - a)^2 + y^2 + (z - b)^2]^{1/2}$$

$$r_2 = [(x + a)^2 + y^2 + (z - b)^2]^{1/2}$$

$$r_3 = [(x + a)^2 + y^2 + (z + b)^2]^{1/2}$$

$$r_4 = [(x - a)^2 + y^2 + (z + b)^2]^{1/2}$$

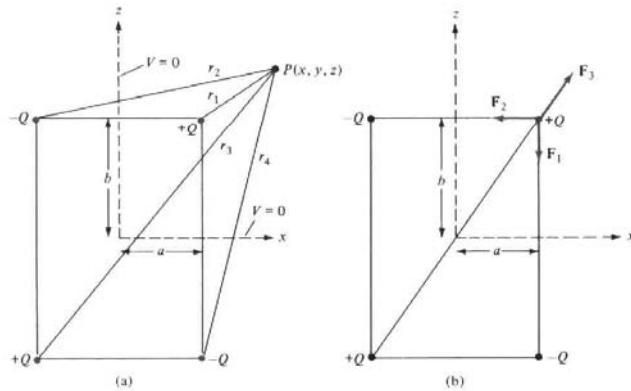
Da Figura 6.24(b), a força líquida sobre  $Q$  é:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2b)^2} \mathbf{a}_z - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} \mathbf{a}_x + \frac{Q^2(2a\mathbf{a}_x + 2b\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0[(2a)^2 + (2b)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2} \right] \mathbf{a}_x + \left[ \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{b^2} \right] \mathbf{a}_z \right\} \end{aligned}$$

O campo elétrico devido a esse sistema de cargas pode ser determinado de maneira similar e a carga induzida sobre os planos também pode ser encontrada.

Em geral, quando o método das imagens é aplicado para um sistema que consiste de cargas pontuais entre dois semiplanos condutores, que se cruzam segundo um ângulo  $\phi$  (em graus), o número de imagens é dado por

$$N = \left( \frac{360^\circ}{\phi} - 1 \right)$$

Figura 6.24 Determinação de: (a) potencial em  $P$ ; (b) força sobre a carga  $Q$ .

porque a carga e suas imagens se localizam ao longo de um círculo. Por exemplo, quando  $\phi = 180^\circ$ ,  $N = 1$ , como no caso da Figura 6.22. Para  $\phi = 90^\circ$ ,  $N = 3$ , como no caso da Figura 6.23. E para  $\phi = 60^\circ$ , esperamos que  $N = 5$ , como mostrado na Figura 6.25.

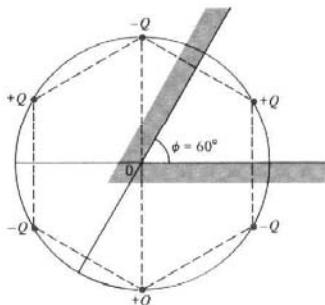


Figura 6.25 Carga pontual entre duas paredes semi-infinitas condutoras, inclinadas em  $\phi = 60^\circ$  uma em relação à outra.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 6.14

Se a carga pontual  $Q = 10 \text{ nC}$  da Figura 6.25 encontra-se 10 cm afastada do ponto  $O$  e ao longo da linha bissetriz de  $\phi = 60^\circ$ , determine o valor da força exercida sobre  $Q$  devido às cargas induzidas sobre as paredes condutoras.

**Resposta:**  $60,53 \mu\text{N}$ .

#### RESUMO

1. Problemas de valor de fronteira são aqueles para os quais os potenciais nas fronteiras da região são especificados e para as quais desejamos conhecer o campo potencial no seu interior. Esses problemas são resolvidos utilizando a equação de Poisson, se  $\rho_v \neq 0$ , ou de Laplace, se  $\rho_v = 0$
2. Em uma região não homogênea, a equação de Poisson é dada por:

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla V = -\rho_v$$

Em uma região homogênea,  $\epsilon$  é independente das variáveis espaciais. A equação de Poisson torna-se:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Em uma região livre de cargas ( $\rho_v = 0$ ), a equação de Poisson reduz-se à equação de Laplace, isto é:

$$\nabla^2 V = 0$$

3. Resolvemos a equação diferencial, que resulta da equação de Poisson ou da equação de Laplace, integrando duas vezes, caso  $V$  dependa apenas de uma variável, ou pelo método da separação de variáveis, caso  $V$  seja uma função de mais de uma variável. Aplicamos, então, as condições de fronteira prescritas para obter uma solução única.
4. O teorema da unicidade estabelece que, se  $V$  satisfaz a equação de Poisson ou a equação de Laplace e as condições de fronteira prescritas,  $V$  é a solução única possível para o problema dado. Isto nos permite encontrar a solução de um dado problema por qualquer caminho porque estamos seguros de que existe uma, e apenas uma única solução.
5. O problema de encontrar a resistência  $R$  de um objeto ou a capacidade  $C$  de um capacitor pode ser tratado como um problema de valor de fronteira. Para determinar  $R$ , assumimos uma diferença de potencial  $V_o$  entre as extremidades do objeto, resolvemos a equação de Laplace, encontramos  $I = \int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  e obtemos  $R = V_o/I$ . De maneira similar, para determinar  $C$ , assumimos uma diferença de potencial  $V_o$  entre as placas do capacitor, resolvemos a equação de Laplace, encontramos  $Q = \int \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  e obtemos  $C = Q/V_o$ .

- 6.** Um problema de valor de fronteira envolvendo um plano condutor infinito ou um canto pode ser resolvido utilizando o método das imagens. Basicamente consiste em substituir a configuração de cargas por ela mesma, por sua imagem e por uma superfície equipotencial no lugar do plano condutor. Desta forma, o problema original é substituído por um “problema imagem”, o qual é resolvido utilizando as técnicas abordadas nos Capítulos 4 e 5.

### QUESTÕES DE REVISÃO

- 6.1** A equação  $\nabla \cdot (-\epsilon \nabla V) = \rho_v$  pode ser considerada como a equação de Poisson para um meio não homogêneo.

- (a) Verdadeiro.
- (b) Falso.

- 6.2** Em coordenadas cilíndricas, a equação

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 10 = 0$$

é denominada:

- (a) Equação de Maxwell.
- (b) Equação de Laplace.
- (c) Equação de Poisson.
- (d) Equação de Helmholtz.
- (e) Equação de Lorentz.

- 6.3** Duas funções potenciais  $V_1$  e  $V_2$  satisfazem a equação de Laplace em uma região fechada e assumem os mesmos valores sobre a superfície que limita essa região.  $V_1$  deve ser igual a  $V_2$ .

- (a) Verdadeiro.
- (b) Falso.
- (c) Não necessariamente verdadeiro nem falso.

- 6.4** Qual dos seguintes potenciais não satisfaz a equação de Laplace?

- (a)  $V = 2x + 5$
- (b)  $V = 10xy$
- (c)  $V = r \cos \phi$
- (d)  $V = \frac{10}{r}$
- (e)  $V = \rho \cos \phi + 10$

- 6.5** Qual das seguintes alternativas não é verdadeira?

- (a)  $-5 \cos 3x$  é uma solução para  $\phi''(x) + 9\phi(x) = 0$
- (b)  $10 \sin 2x$  é uma solução para  $\phi''(x) - 4\phi(x) = 0$
- (c)  $-4 \cosh 3y$  é uma solução para  $R''(y) - 9R(y) = 0$
- (d)  $\sinh 2y$  é uma solução para  $R''(y) - 4R(y) = 0$
- (e)  $\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)} = f(z) = -1$  onde  $g(x) = \sin x$  e  $h(y) = \sinh y$

- 6.6** Se  $V_1 = X_1 Y_1$  é um produto solução da equação de Laplace, quais das seguintes alternativas não são soluções da equação de Laplace?

- (a)  $-10X_1 Y_1$

- (b)  $X_1 Y_1 + 2xy$
- (c)  $X_1 Y_1 - x + y$
- (d)  $X_1 + Y_1$
- (e)  $(X_1 - 2)(Y_1 + 3)$

**6.7** A capacitância de um capacitor, preenchido com um dielétrico linear, independe da carga sobre as placas e da diferença de potencial entre as mesmas.

- (a) Verdadeiro.
- (b) Falso.

**6.8** Um capacitor de placas paralelas conectado à uma bateria armazena duas vezes mais carga com um dado dielétrico do que quando o dielétrico é o ar. Disso pode-se afirmar que a suscetibilidade desse dielétrico é:

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4

**6.9** Uma diferença de potencial  $V_o$  é aplicada em uma coluna de mercúrio dentro de um contêiner cilíndrico. O mercúrio é, então, despejado no interior de outro contêiner cilíndrico de metade do raio do primeiro e com a mesma diferença de potencial aplicada entre suas extremidades. Como resultado dessa variação de espaço, a resistência aumentará:

- (a) duas vezes.
- (b) quatro vezes.
- (c) oito vezes.
- (d) dezesseis vezes.

**6.10** Duas placas condutoras estão inclinadas entre si em um ângulo de  $30^\circ$  com uma carga pontual entre elas. O número de cargas imagem é:

- (a) 12
- (b) 11
- (c) 6
- (d) 5
- (e) 3

*Respostas:* 6.1a; 6.2c; 6.3a; 6.4c; 6.5b; 6.6d, e; 6.7a; 6.8b; 6.9d; 6.10b.

## PROBLEMAS

**6.1** No espaço livre,  $V = 6xy^2z + 8$ . Determine  $\mathbf{E}$  e  $\rho_v$  no ponto  $P(1, 2, -5)$ .

**6.2** Duas placas condutoras muito extensas estão localizadas em  $x = 1$  e  $x = 4$ . O espaço entre elas apresenta uma distribuição de cargas dada por  $\frac{x}{6\pi}$  nC/m<sup>3</sup>. Determine  $V$  em  $x = 2$  se  $V(1) = -50$  V e  $V(4) = 50$  V.

**6.3** A região entre  $x = 0$  e  $x = d$  tem  $\rho_v = \rho_0(x - d)/d$ . Se  $V(x = 0) = 0$  e  $V(x = d) = V_o$ , encontre: (a)  $V$  e  $\mathbf{E}$ , (b) a densidade superficial de cargas em  $x = 0$  e  $x = d$ .

**6.4** Demonstre que a solução exata da equação

$$\frac{d^2V}{dx^2} = f(x) \quad 0 < x < L$$

para

$$V(x = 0) = V_1 \quad V(x = L) = V_2$$

é

$$\begin{aligned} V(x) &= \left[ V_2 - V_1 - \int_0^L \int_0^\lambda f(\mu) d\mu d\lambda \right] \frac{x}{L} \\ &\quad + V_1 + \int_0^x \int_0^\lambda f(\mu) d\mu d\lambda \end{aligned}$$

- 6.5** Um certo material ocupa o espaço entre dois blocos condutores e está localizado em  $y = \pm 2$  cm. Quando aquecido, o material emite elétrons de forma que essa região adquire uma carga dada por  $\rho_v = 50(1 - y^2) \mu\text{C}/\text{m}^3$ . Se ambos os blocos forem mantidos a 30 kV, encontre a distribuição de potencial entre eles. Considere  $\epsilon = 3\epsilon_0$ .

- 6.6** Determine quais das seguintes distribuições de potencial satisfazem a equação de Laplace:

(a)  $V_1 = x^2 + y^2 - 2z^2 + 10$

(b)  $V_2 = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$

(c)  $V_3 = \rho z \operatorname{sen} \phi + \rho^2$

(d)  $V_4 = \frac{10 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{r^2}$

- 6.7** Demonstre que os seguintes potenciais satisfazem a equação de Laplace:

(a)  $V = e^{-3x} \cos 13y \operatorname{senh} 12z$

(b)  $V = \frac{z \cos \phi}{\rho}$

(c)  $V = \frac{30 \cos \theta}{r^2}$

- 6.8** Demonstre que se  $\nabla^2 V = 0$  então  $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z)$  satisfaz a equação de Laplace.

- 6.9** Seja  $V = (A \cos nx + B \operatorname{sen} nx)(Ce^{ny} + De^{-ny})$ , onde  $A, B, C$  e  $D$  são constantes. Demonstre que  $V$  satisfaz a equação de Laplace.

- 6.10** O campo potencial  $V = 2x^2yz - y^3z$  existe em um meio dielétrico, cujo  $\epsilon = 2\epsilon_0$ . (a)  $V$  satisfaz a equação de Laplace? (b) Calcule a carga total dentro de um cubo unitário dado por  $0 < x, y, z < 1$  m.

- 6.11** Considere as placas condutoras mostradas na Figura 6.26. Se  $V(z = 0) = 0$  e  $V(z = 2 \text{ mm}) = 50$  V, determine  $V$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  no interior do dielétrico ( $\epsilon_r = 1,5$ ) entre as placas e  $\rho_s$  sobre as placas.

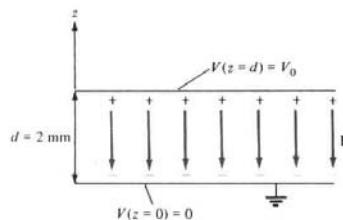


Figura 6.26 Referente ao Problema 6.11.

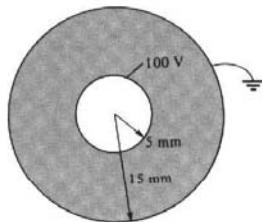


Figura 6.27 Capacitor cilíndrico do Problema 6.12.

- 6.12** O capacitor cilíndrico, cuja seção reta encontra-se representada na Figura 6.27, tem um raio interno de 5 mm e um raio externo de 15 mm. Se  $V(\rho = 5 \text{ mm}) = 100 \text{ V}$  e  $V(\rho = 15 \text{ mm}) = 0 \text{ V}$ , determine  $V$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  em  $\rho = 10 \text{ mm}$  e  $\rho_s$  sobre cada placa. Considere  $\epsilon_r = 2,0$ .
- 6.13** Dois cilindros concêntricos,  $\rho = 2 \text{ cm}$  e  $\rho = 6 \text{ cm}$ , são mantidos a  $V = 60 \text{ V}$  e  $V = -20 \text{ V}$ , respectivamente. Calcule  $V$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  em  $\rho = 4 \text{ cm}$ .
- 6.14** A região entre duas cascas esféricas concêntricas condutoras  $r = 0,5 \text{ m}$  e  $r = 1 \text{ m}$  está livre de gases. Se  $V(r = 0,5) = -50 \text{ V}$  e  $V(r = 1) = 50 \text{ V}$ , determine a distribuição de potencial e a intensidade do campo elétrico na região entre as cascas.
- 6.15** Determine  $V$  e  $\mathbf{E}$  em  $(3, 0, 4)$  devido a dois cones condutores de extensão infinita, como mostrado na Figura 6.28.

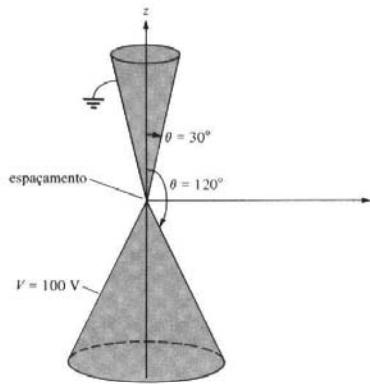


Figura 6.28 Cones condutores do Problema 6.15.

- \*6.16** Os eletrodos interno e externo de um diodo são cilindros coaxiais de raios  $a = 0,6 \text{ m}$  e  $b = 30 \text{ mm}$ , respectivamente. O eletrodo interno é mantido a 70 V, enquanto que o eletrodo externo é aterrado. (a) Assumindo que o comprimento dos eletrodos  $\ell \gg a, b$  e desprezando os efeitos de carga espacial, calcule o potencial em  $\rho = 15 \text{ mm}$ . (b) Se um elétron for injetado radialmente, através de um pequeno furo no eletrodo interno, com uma velocidade de  $10^7 \text{ m/s}$ , determine sua velocidade em  $\rho = 15 \text{ mm}$ .

- 6.17** Um outro método de determinar a capacidade de um capacitor é através do conceito de energia, isto é:

$$C = \frac{2W_E}{V_0^2} = \frac{1}{V_0^2} \int \epsilon |\mathbf{E}|^2 dv$$

Utilizando essa abordagem, obtenha as equações (6.22), (6.28) e (6.32).

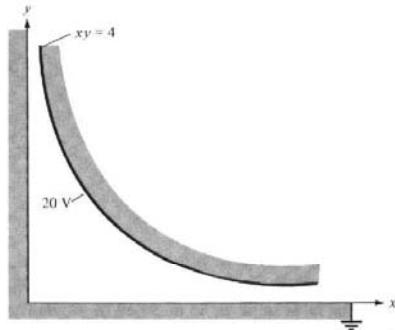


Figura 6.29 Referente ao Problema 6.18.

**6.18** Um eletrodo com formato hiperbólico ( $xy = 4$ ) é colocado acima de um canto reto aterrado, como mostra a Figura 6.29. Determine  $V$  e  $\mathbf{E}$  no ponto  $(1, 2, 0)$  quando o eletrodo estiver conectado a uma fonte de 20 V.

**\*6.19** Resolva a equação de Laplace para o sistema eletrostático bidimensional da Figura 6.30 e encontre o potencial  $V(x, y)$ .

**\*6.20** Encontre o potencial  $V(x, y)$  associado aos sistemas bidimensionais da Figura 6.31.

**6.21** Ao considerar  $V(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$  como a solução da equação de Laplace em uma região em que  $\rho \neq 0$ , demonstre que as equações diferenciais separadas, para  $R$  e para  $\Phi$ , são

$$R'' + \frac{R'}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho^2} R = 0$$

c

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

onde  $\lambda$  é a constante de separação.

**6.22** Um potencial em coordenadas esféricas é uma função de  $r$  e  $\theta$ , mas não de  $\phi$ . Assumindo que  $V(r, \theta) = R(r)F(\theta)$ , obtenha as equações diferenciais separadas, para  $R$  e  $F$ , em uma região para a qual  $\rho = 0$ .

**6.23** Demonstre que a resistência da barra da Figura 6.17, entre as extremidades verticais, localizadas em  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi/2$ , é:

$$R = \frac{\pi}{2\sigma t \ln b/a}$$

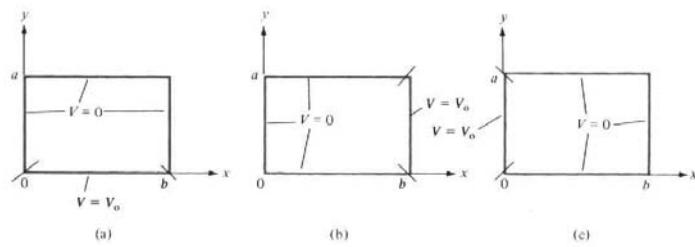


Figura 6.30 Referente ao Problema 6.19.

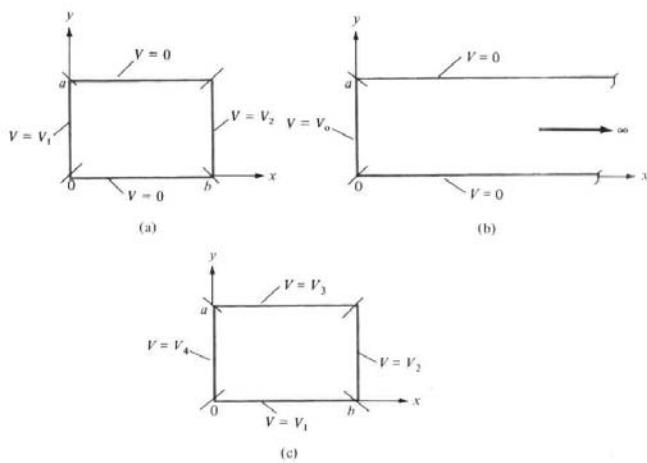


Figura 6.31 Referente ao Problema 6.20.

**\*6.24** Demonstre que a resistência do setor de uma casca esférica de condutividade  $\sigma$ , com seção reta mostrada na Figura 6.32 (onde  $0 \leq \phi < 2\pi$ ), entre as superfícies definidas por  $a$  e  $b$ , é:

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma(1 - \cos \alpha)} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

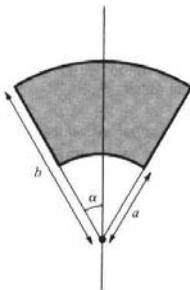
**\*6.25** Um hemisfério condutor óco, de raio  $a$ , está enterrado com sua face plana paralela à superfície da terra, servindo como um eletrodo de aterramento. Se a condutividade da terra é  $\sigma$ , demonstre que a condutância de perdas entre eletrodo e terra é  $2\pi a\sigma$ .

**6.26** A seção reta de um fusível é mostrada na Figura 6.33. Se o fusível for feito de cobre e sua espessura for de 1,5 mm, calcule a sua resistência elétrica.

**6.27** Em um circuito integrado, um capacitor é formado pelo crescimento de uma camada de dióxido de silício ( $\epsilon_r = 4$ ), de espessura 1  $\mu\text{m}$ , sobre um substrato de silício. Essa camada é coberta com um eletrodo metálico de área  $S$ . Determine  $S$  para se obter uma capacitância de 2 nF.

**6.28** A quarta parte do capacitor de placas paralelas, da Figura 6.34, é preenchida com mica ( $\epsilon_r = 6$ ). Determine a capacitância do capacitor.

Figura 6.32 Referente ao Problema 6.24.



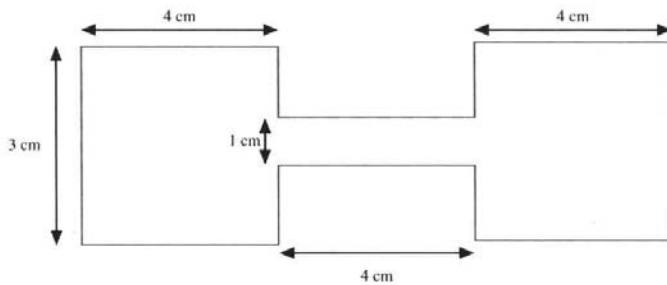


Figura 6.33 Referente ao Problema 6.26.

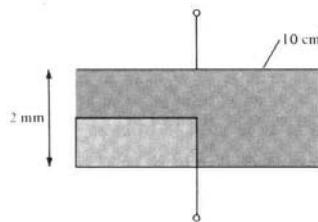


Figura 6.34 Referente ao Problema 6.28.

- \*6.29** Um capacitor de placas paralelas preenchido com ar, de comprimento  $L$ , largura  $a$  e espaçamento entre placas  $d$ , tem suas placas mantidas sob uma diferença de potencial constante  $V_o$ . Se um bloco dielétrico com constante dielétrica  $\epsilon$  deslizar entre as placas, até que somente um comprimento  $x$  permaneça entre elas, como mostrado na Figura 6.35, demonstre que a força que tende a restabelecer o bloco em sua posição original é:

$$F = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1) a V_o^2}{2d}$$

- 6.30** Um capacitor de placas paralelas tem área da placa de  $200 \text{ cm}^2$  e separação entre placas de 3 mm. A densidade de carga é  $1 \mu\text{C}/\text{m}^2$  tendo ar como dielétrico. Encontre:  
 (a) a capacitância do capacitor;  
 (b) a voltagem entre as placas;  
 (c) a força pela qual as placas se atraem uma à outra.

- 6.31** Duas placas condutoras estão posicionadas em  $z = -2 \text{ cm}$  e  $z = 2 \text{ cm}$  e são, respectivamente, mantidas nos potenciais 0 V e 200 V. Assumindo que as placas estão separadas por uma camada de polipropileno ( $\epsilon = 2,25\epsilon_0$ ), calcule: (a) o potencial em um ponto entre as placas e eqüidistante delas, (b) as densidades superficiais em cada placa.

- 6.32** Duas placas paralelas condutoras estão separadas por um material dielétrico com  $\epsilon = 5,6\epsilon_0$  e espessura 0,64 mm. Assuma que cada placa tenha uma área de  $80 \text{ cm}^2$ . Se a distribuição do campo potencial entre as placas é de  $V = 3x + 4y - 12z + 6 \text{ kV}$ , determine: (a) a capacitância do capacitor; (b) a diferença de potencial entre as placas.

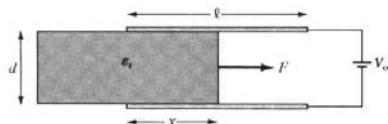


Figura 6.35 Referente ao Problema 6.29.

- 6.33** O espaço entre as cascas esféricas condutoras  $r = 5\text{ cm}$  e  $r = 10\text{ cm}$  é preenchido com um material dielétrico, para o qual  $\epsilon = 2,25\epsilon_0$ . As duas cascas são mantidas sob uma diferença de potencial de  $80\text{ V}$ . (a) Encontre a capacidade do conjunto. (b) Calcule a densidade de carga sobre a casca  $r = 5\text{ cm}$ .
- 6.34** As cascas concêntricas  $r = 20\text{ cm}$  e  $r = 30\text{ cm}$  são mantidas a  $V = 0$  e  $V = 50$ , respectivamente. Se o espaço entre elas é preenchido com material dielétrico ( $\epsilon = 3,1\epsilon_0$ ,  $\sigma = 10^{-12}\text{ S/m}$ ), encontre: (a)  $V$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$ ; (b) as densidades de carga nas cascas e (c) a resistência de perdas.
- 6.35** Um capacitor esférico tem um raio interno  $a$  e um raio externo  $d$ . Concêntrica com os condutores esféricos e posicionada entre eles existe uma casca esférica de raio externo  $c$  e raio interno  $b$ . Se as regiões  $d < r < c$ ,  $c < r < b$  e  $b < r < a$  são preenchidas com materiais de permissividades  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_3$ , respectivamente, determine a capacidade do sistema.
- 6.36** Determine a capacidade de uma esfera condutora de raio  $5\text{ cm}$ , totalmente imersa na água do mar ( $\epsilon_r = 80$ ).
- 6.37** Uma esfera condutora de raio  $2\text{ cm}$  está circundada por uma esfera condutora concêntrica de raio  $5\text{ cm}$ . Se o espaço entre as esferas for preenchido com cloreto de sódio ( $\epsilon_r = 5,9$ ), calcule a capacidade do sistema.
- \*6.38** Em uma impressora jato de tinta, as gotas de tinta são carregadas envolvendo o jato de  $20\text{ }\mu\text{m}$  de raio com um cilindro concêntrico de raio  $600\text{ }\mu\text{m}$ , como mostrado na Figura 6.36. Calcule a voltagem mínima requerida para gerar uma carga de  $50\text{ fC}$  na gota se o comprimento do jato, dentro do cilindro, é de  $100\text{ }\mu\text{m}$ . Considere  $\epsilon = \epsilon_0$ .
- 6.39** Um dado comprimento de cabo, cuja capacidade é  $10\text{ }\mu\text{F/km}$  e resistência de isolamento de  $100\text{ M}\Omega/\text{km}$ , é submetido a uma voltagem de  $100\text{ V}$ . Quanto tempo leva para a voltagem cair até  $50\text{ V}$ ?
- 6.40** A capacidade por unidade de comprimento de uma linha de transmissão de dois fios, mostrada na Figura 6.37, é dada por:

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left[\frac{d}{2a}\right]}$$

Determine a condutância por unidade de comprimento.

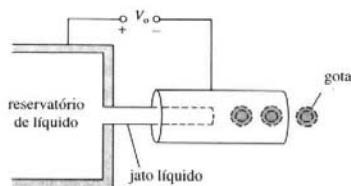


Figura 6.36 Geometria simplificada de uma impressora jato de tinta; referente ao Problema 6.38.

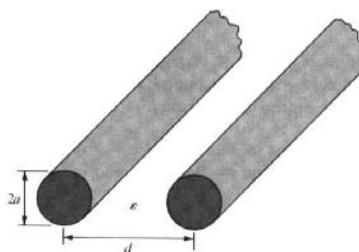


Figura 6.37 Referente ao Problema 6.40.

- \*6.41** Um capacitor esférico tem um condutor interno de raio  $a$  carregado com uma carga  $Q$  e mantido em potencial zero. Se o condutor externo se contrai de um raio  $b$  até um raio  $c$  sob a ação de forças internas, prove que o trabalho realizado pelo campo elétrico como resultado da contração é:

$$W = \frac{Q^2(b - c)}{8\pi\epsilon_0 bc}$$

- \*6.42** Um capacitor de placas paralelas tem suas placas em  $x = 0, d$  e o espaço entre as placas é preenchido com um material não homogêneo com permissividade  $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \frac{x}{d}\right)$ . Se a placa em  $x = d$  é mantida em  $V_0$ , enquanto a placa em  $x = 0$  estiver aterrada, encontre:  
 (a)  $V$  e  $E$ ;  
 (b)  $P$ ;  
 (c)  $\rho_s$  em  $x = 0, d$ .

- 6.43** Um capacitor esférico tem um raio interno  $a$  e um raio externo  $b$  e é preenchido com um dielétrico não homogêneo com  $\epsilon = \epsilon_0 k/r^2$ . Demonstre que a capacidade do capacitor é:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 k}{b - a}$$

- 6.44** Um capacitor cilíndrico tem um raio interno  $a$  e um raio externo  $b$  e é preenchido com um dielétrico não homogêneo, tendo  $\epsilon = \epsilon_0 k/\rho$ , onde  $k$  é uma constante. Calcule a capacidade por unidade de comprimento do capacitor.

- 6.45** Se a Terra fosse considerada um capacitor esférico, qual seria a sua capacidade? Considere que o raio da Terra seja de, aproximadamente, 670 km.

- 6.46** Uma carga pontual de 10 nC está localizada no ponto  $P(0, 0, 3)$ , enquanto que o plano condutor  $z = 0$  está aterrado. Calcule:  
 (a)  $V$  e  $E$  em  $R(6, 3, 5)$ ;  
 (b) a força sobre a carga devido à carga induzida sobre o plano.

- 6.47** Duas cargas pontuais de 3 nC e -4 nC estão localizadas, respectivamente, em  $(0, 0, 1 \text{ m})$  e  $(0, 0, 2 \text{ m})$ , enquanto que um plano infinito condutor está em  $z = 0$ . Determine:  
 (a) a carga total induzida no plano;  
 (b) o valor da força de atração entre as cargas e o plano.

- 6.48** Duas cargas pontuais de 50 nC e -20 nC estão localizadas em  $(-3, 2, 4)$  e  $(1, 0, 5)$ , acima de um plano condutor aterrado  $z = 2$ . Calcule: (a) a densidade superficial de carga em  $(7, -2, 2)$ ; (b)  $D$  em  $(3, 4, 8)$  e (c)  $D$  em  $(1, 1, 1)$ .

- \*6.49** Uma carga pontual de  $10 \mu\text{C}$  está localizada em  $(1, 1, 1)$  e as porções positivas dos planos coordenados estão ocupadas por três planos condutores, mutuamente perpendiculares, mantidos a um potencial zero. Encontre a força sobre a carga devido aos planos condutores.

- 6.50** Uma carga pontual  $Q$  está localizada entre dois planos condutores aterrados que se interceptam a  $45^\circ$  um do outro. Determine o número de cargas imagem e suas localizações.

- 6.51** Uma linha infinita  $x = 3, z = 4$ , carregada com  $16 \text{ nC/m}$  está localizada no espaço livre acima de um plano condutor  $z = 0$ . (a) Encontre  $E$  em  $(2, -2, 3)$ ; (b) calcule a densidade superficial de carga induzida sobre o plano condutor em  $(5, -6, 0)$ .

- 6.52** No espaço livre, planos infinitos  $y = 4$  e  $y = 8$  estão carregados com  $20 \text{ nC/m}^2$  e  $30 \text{ nC/m}^2$ , respectivamente. Se o plano  $y = 2$  está aterrado, calcule  $E$  em  $P(0, 0, 0)$  e  $Q(-4, 6, 2)$ .

---

PARTE 3

---

## MAGNETOSTÁTICA

# Capítulo 7

## CAMPOS MAGNETOSTÁTICOS

Nenhum homem honesto pode ser tudo para todos.

— ABRAHAM LINCOLN

### 7.1 INTRODUÇÃO

Nos Capítulos 4 a 6, limitamos nossa discussão aos campos eletrostáticos caracterizados por  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{D}$ . Agora, focaremos nossa atenção nos campos magnéticos estáticos que são caracterizados por  $\mathbf{H}$  ou  $\mathbf{B}$ . Há semelhanças e diferenças entre campos elétricos e magnéticos. Assim como  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  estão relacionados de acordo com  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ , para meios materiais lineares,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  estão relacionados de acordo com  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . A Tabela 7.1, adiante, mostra a analogia entre as grandezas associadas aos campos elétrico e magnético. Algumas das grandezas associadas ao campo magnético serão introduzidas mais tarde neste capítulo e outras serão apresentadas no próximo. A analogia é apresentada aqui para mostrar que a maioria das equações obtidas para campos elétricos pode ser prontamente utilizada para obter as equações correspondentes para campos magnéticos, se as grandezas análogas equivalentes forem substituídas. Desse modo, embora não pareça, estamos aprendendo novos conceitos.

Uma ligação definitiva entre campos elétricos e magnéticos foi estabelecida por Oersted<sup>1</sup> em 1820. Conforme estudamos, um campo eletrostático é gerado por cargas estáticas ou estacionárias. Se as cargas estão se movimentando com velocidade constante, um campo magnético estático (ou magnetostático) é gerado. Um campo magnetostático é gerado por um fluxo de corrente constante (ou corrente contínua). Esse fluxo de corrente pode se constituir de correntes de magnetização, como as correntes no interior de um ímã permanente; correntes de feixes eletrônicos, como nas válvulas eletrônicas; ou correntes de condução, como as correntes em fios condutores. Neste capítulo, consideraremos campos magnéticos no espaço livre devido a correntes contínuas. Campos magnetostáticos em meios materiais serão estudados no Capítulo 8.

Nosso estudo de magnetostática não é um capricho dispensável, mas uma necessidade indispensável. O desenvolvimento de motores, transformadores, microfones, bússolas, campainhas de telefone, controles de foco em televisores, letreiros de propaganda, veículos de alta velocidade com levitação magnética, memórias de computador, separadores magnéticos, e assim por diante, envolve fenômenos magnéticos e desempenha um papel importante na nossa vida cotidiana.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Hans Christian Oersted (1777–1851), professor holandês de Física, após treze anos de frustrantes esforços, descobriu que a eletricidade poderia produzir magnetismo.

<sup>2</sup> Várias aplicações do magnetismo podem ser encontradas em J. K. Watson, *Applications of Magnetism*. New York: John Wiley & Sons, 1980.

TABELA 7.1 Analogia entre Campos Elétrico e Magnético\*

Conceito	Elétrico	Magnético
Leis básicas	$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I dl \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$
	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$
Lei da força	$\mathbf{F} = QE$	$\mathbf{F} = Qu \times \mathbf{B}$
Elemento fonte	$dQ$	$Qu = Idl$
Intensidade de campo	$E = \frac{V}{\ell}$ (V/m)	$H = \frac{I}{\ell}$ (A/m)
Densidade de fluxo	$\mathbf{D} = \frac{\Psi}{S}$ (C/m <sup>2</sup> )	$\mathbf{B} = \frac{\Psi}{S}$ (Wb/m <sup>2</sup> )
Relação entre campos	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$
Potenciais	$\mathbf{E} = -\nabla V$	$\mathbf{H} = -\nabla V_m (\mathbf{J} = 0)$
	$V = \int \frac{\rho_0 dl}{4\pi r}$	$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R}$
Fluxo	$\Psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$	$\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
	$\Psi = Q = CV$	$\Psi = LI$
	$I = C \frac{dV}{dt}$	$V = L \frac{dl}{dt}$
Densidade de energia	$w_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$	$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$
Equação de Poisson	$\nabla^2 V = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$

\* Uma analogia similar pode ser encontrada em R. S. Elliot, "Electromagnetic theory: a simplified representation", *IEEE Trans. Educ.*, vol. B-24, n° 4, Nov 1981, p. 294–296.

Existem duas leis fundamentais que governam os campos magnetostáticos: (1) lei de Biot–Savart<sup>3</sup> e (2) lei circuital de Ampère.<sup>4</sup> Assim como a lei de Coulomb, a lei de Biot–Savart é a lei geral da magnetostática. Da mesma forma que a lei de Gauss é um caso especial da lei de Coulomb, a lei de Ampère é um caso especial da lei de Biot–Savart e se aplica facilmente a problemas envolvendo distribuição de corrente simétrica. Primeiramente, as duas leis da magnetostática são estabelecidas e aplicadas. Suas consequências são fornecidas mais ao final do capítulo.

## 7.2 LEI DE BIOT–SAVART

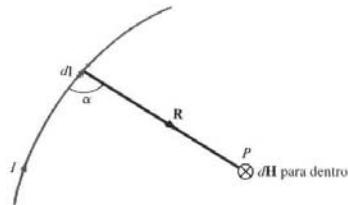
A lei de Biot–Savart estabelece que a intensidade do campo magnético  $dH$  gerada em um ponto  $P$ , como mostrado na Figura 7.1, pelo elemento diferencial de corrente  $I dl$  é proporcional ao produto entre  $I dl$  e o seno do ângulo  $\alpha$ , entre o elemento e a linha que une  $P$  ao elemento, e é inversamente proporcional ao quadrado da distância  $R$  entre  $P$  e o elemento.

Isto é,

$$dH \propto \frac{I dl \sin \alpha}{R^2} \quad (7.1)$$

<sup>3</sup> Os experimentos e análises do efeito de um elemento de corrente foram desenvolvidos por Ampère e por Jean-Baptiste Biot e Félix Savart em torno de 1820.

<sup>4</sup> André Marie Ampère (1775–1836), físico francês, ampliou a descoberta de Oersted e introduziu o conceito de elemento de corrente e da força entre elementos de corrente.



ou

$$dH = \frac{kI dl \sin \alpha}{R^2} \quad (7.2)$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade. Em unidades do SI,  $k = 1/4\pi$ , tal que a equação (7.2) torna-se

$$dH = \frac{I dl \sin \alpha}{4\pi R^2} \quad (7.3)$$

Da definição do produto cruzado na equação (1.21), é fácil observar que a equação (7.3) na forma vetorial é escrita como

$$\boxed{d\mathbf{H} = \frac{I dl \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{I dl \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}} \quad (7.4)$$

onde  $R = |\mathbf{R}|$  e  $\mathbf{a}_R = \mathbf{R}/R$ . Assim, a orientação de  $d\mathbf{H}$  pode ser determinada pela regra da mão direita, em que com o polegar apontando segundo a orientação da corrente, os outros dedos dobrados em torno do fio indicam a orientação de  $d\mathbf{H}$ , como mostra a Figura 7.2(a). Alternativamente, podemos usar a regra do parafuso de rosca direita para determinar a orientação de  $d\mathbf{H}$ . Com o parafuso posicionado ao longo do fio e apontando no sentido do fluxo da corrente, a orientação dada pelo avanço do parafuso é a orientação de  $d\mathbf{H}$ , como mostra a Figura 7.2(b).

É costume representar a orientação do vetor intensidade do campo magnético  $\mathbf{H}$  (ou da corrente  $I$ ) por um pequeno círculo com um ponto ou um sinal de vezes, dependendo se  $\mathbf{H}$  (ou  $I$ ) é para fora ou para dentro da página, como ilustrado na Figura 7.3.

Da mesma maneira que podemos ter diferentes configurações de carga (veja Figura 4.5), podemos ter diferentes distribuições de corrente: corrente em uma linha, corrente em uma superfície e corrente em um volume, como mostrado na Figura 7.4. Se definirmos  $\mathbf{K}$  como a densidade de corrente em uma superfície (em ampères/metro) e  $\mathbf{J}$  como a densidade de corrente em um volume (em ampères/metro<sup>2</sup>), os elementos-fonte estão relacionados conforme:

$$Idl \equiv \mathbf{K} dS \equiv \mathbf{J} dv \quad (7.5)$$

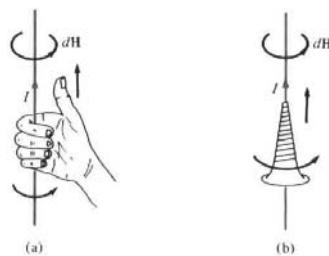
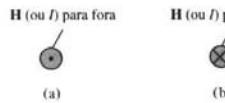


Figura 7.2 Determinando a orientação de  $d\mathbf{H}$  utilizando (a) a regra da mão direita ou (b) a regra do parafuso de rosca direita.



Dessa forma, em termos de fontes de corrente distribuída, a lei de Biot–Savart, como na equação (7.4), torna-se:

$$\mathbf{H} = \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (\text{corrente em uma linha}) \quad (7.6)$$

$$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K} dS \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (\text{corrente em uma superfície}) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{H} = \int_V \frac{\mathbf{J} dv \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (\text{corrente em um volume}) \quad (7.8)$$

Como um exemplo, apliquemos a equação (7.6) para determinar o campo devido a uma corrente que percorre um condutor filamentar *retilíneo* de comprimento finito  $AB$ , como mostrado na Figura 7.5. Assumimos que o condutor está ao longo do eixo  $z$  com suas extremidades superior e inferior subtendendo os ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente, em  $P$ , o ponto no qual se pretende determinar  $\mathbf{H}$ . Deve-se atentar para esses parâmetros a fim de que a fórmula a ser obtida seja adequadamente aplicada. Se considerarmos a contribuição  $d\mathbf{H}$  em  $P$ , devido a um elemento  $d\mathbf{l}$  em  $(0, 0, z)$ ,

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (7.9)$$

Porém,  $d\mathbf{l} = dz \mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{R} = \rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z$ , então

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = \rho dz \mathbf{a}_\phi \quad (7.10)$$

Portanto,

$$\mathbf{H} = \int \frac{I \rho dz}{4\pi[\rho^2 + z^{2/3/2}]} \mathbf{a}_\phi \quad (7.11)$$

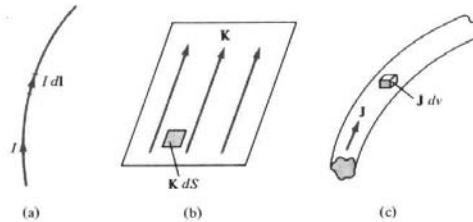


Figura 7.4 Distribuição de corrente: (a) corrente em uma linha, (b) corrente em uma superfície, (c) corrente em um volume.

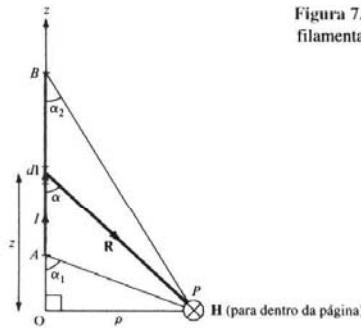


Figura 7.5 Campo em um ponto  $P$  devido a um condutor filamentar retilíneo.

Fazendo  $z = \rho \cotg \alpha$ ,  $dz = -\rho \operatorname{cosec}^2 \alpha d\alpha$ , a equação (7.11) torna-se

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha d\alpha}{\rho^3 \operatorname{cosec}^3 \alpha} \mathbf{a}_\phi \\ &= -\frac{I}{4\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{sen} \alpha d\alpha\end{aligned}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \mathbf{a}_\phi} \quad (7.12)$$

Essa expressão se aplica, de maneira geral, a qualquer condutor filamentar retilíneo de comprimento finito. Observe, a partir da equação (7.12), que  $\mathbf{H}$  está sempre ao longo do vetor unitário  $\mathbf{a}_\phi$  (isto é, ao longo de trajetórias circulares concêntricas), independente do comprimento do fio ou do ponto de interesse  $P$ . Considerando um caso especial em que o condutor é *semi-infinito* (com relação a  $P$ ), tal que o ponto  $A$  está em  $O(0,0,0)$ , enquanto  $B$  está em  $(0,0,\infty)$ ;  $\alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 0^\circ$  e a equação (7.12) torna-se

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} \mathbf{a}_\phi} \quad (7.13)$$

Um outro caso especial é o de um condutor de comprimento *infinito*. Para este caso, o ponto  $A$  está em  $(0,0,-\infty)$ , enquanto  $B$  está em  $(0,0,\infty)$ ;  $\alpha_1 = 180^\circ$ ,  $\alpha_2 = 0^\circ$  e tal que a equação (7.12) se reduz a

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi} \quad (7.14)$$

Encontrar o vetor unitário  $\mathbf{a}_\phi$  nas equações (7.12) a (7.14) nem sempre é fácil. Uma abordagem simples é determinar  $\mathbf{a}_\phi$  de

$$\boxed{\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\ell \times \mathbf{a}_\rho} \quad (7.15)$$

onde  $\mathbf{a}_\ell$  é o vetor unitário ao longo da corrente em uma linha e  $\mathbf{a}_\rho$  é o vetor unitário ao longo da linha perpendicular traçada a partir da corrente até o ponto onde se quer calcular o campo.

**EXEMPLO 7.1**

Pela espira condutora triangular, na Figura 7.6(a), circula uma corrente de 10A. Determine  $\mathbf{H}$  em  $(0, 0, 5)$  devido ao lado 1 da espira.

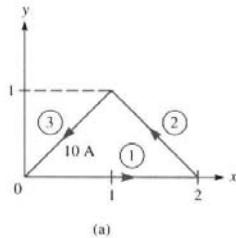


Figura 7.6 Referente ao Exemplo 7.1: (a) espira condutora triangular; (b) lado 1 da espira.

**Solução:**

Esse exemplo ilustra como a equação (7.12) pode ser aplicada para qualquer condutor retilíneo e fino percorrido por uma corrente. O ponto-chave que se deve ter em mente ao aplicar a equação (7.12) é determinar  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\rho$  e  $\mathbf{a}_\phi$ . Para determinar  $\mathbf{H}$  em  $(0, 0, 5)$ , devido ao lado 1 da espira da Figura 7.6(a), considere a Figura 7.6(b), onde o lado 1 é considerado como um condutor retilíneo. Note que ligamos o ponto de interesse  $(0, 0, 5)$  ao começo e ao final da linha por onde flui a corrente. Observe que  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\rho$  são referidos da mesma maneira que na Figura 7.5, usada como referência para a equação (7.12).

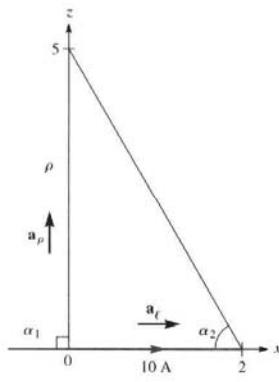
$$\cos \alpha_1 = \cos 90^\circ = 0, \quad \cos \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \rho = 5$$

Determinar  $\mathbf{a}_\phi$  aplicando a equação (7.12) é, muitas vezes, a parte mais difícil. De acordo com a equação (7.15),  $\mathbf{a}_\ell = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_z$ , então,

$$\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{I}{4\pi\rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \mathbf{a}_\phi = \frac{10}{4\pi(5)} \left( \frac{2}{\sqrt{29}} - 0 \right) (-\mathbf{a}_y) \\ &= -59,1 \mathbf{a}_y \text{ mA/m} \end{aligned}$$



**EXERCÍCIO PRÁTICO 7.1**

Encontre  $\mathbf{H}$  em  $(0, 0, 5)$  devido ao lado 3 da espira triangular da Figura 7.6 (a).

**Resposta:**  $-30,63\mathbf{a}_x + 30,63\mathbf{a}_y \text{ mA/m}$ .

**EXEMPLO 7.2**

Determine  $\mathbf{H}$  em  $(-3, 4, 0)$  devido à corrente filamentar mostrada na Figura 7.7(a).

**Solução:**

Seja  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_z$ , onde  $\mathbf{H}_x$  e  $\mathbf{H}_z$  são as contribuições à intensidade do campo magnético em  $P$   $(-3, 4, 0)$  devido às porções do filamento ao longo de  $x$  e de  $z$ , respectivamente.

$$\mathbf{H}_z = \frac{I}{4\pi\rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \mathbf{a}_\phi$$

Em  $P(-3, 4, 0)$ ,  $r = (9 + 16)^{1/2} = 5$ ,  $\alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 0^\circ$  e  $\mathbf{a}_\phi$  é obtido como um vetor unitário ao longo da trajetória circular que passa por  $P$  no plano  $z = 0$ , como na Figura 7.7(b). A orientação de  $\mathbf{a}_\phi$  é determinada utilizando a regra do parafuso de rosca direita ou a regra da mão direita. A partir da geometria mostrada na Figura 7.7(b):

$$\mathbf{a}_\phi = \sin \theta \mathbf{a}_x + \cos \theta \mathbf{a}_y = \frac{4}{5} \mathbf{a}_x + \frac{3}{5} \mathbf{a}_y$$

Alternativamente, podemos determinar  $\mathbf{a}_\phi$  a partir da equação (7.15). No ponto  $P$ ,  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$  são como ilustrado na Figura 7.7(a) para  $\mathbf{H}_z$ . Assim,

$$\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_z \times \left( -\frac{3}{5} \mathbf{a}_x + \frac{4}{5} \mathbf{a}_y \right) = \frac{4}{5} \mathbf{a}_x + \frac{3}{5} \mathbf{a}_y$$

como obtido anteriormente. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_z &= \frac{3}{4\pi(5)} (1 - 0) \frac{(4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y)}{5} \\ &= 38,2\mathbf{a}_x + 28,65\mathbf{a}_y \text{ mA/m} \end{aligned}$$

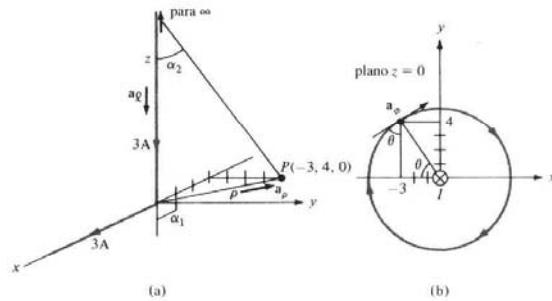


Figura 7.7 Referente ao Exemplo 7.2: (a) corrente filamentar ao longo dos eixos semi-infinitos  $x$  e  $z$ ;  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$  somente para  $\mathbf{H}_z$ ; (b) determinando  $\mathbf{a}_\phi$  para  $\mathbf{H}_z$ .

Deve-se observar que, nesse caso, o sentido de  $\mathbf{a}_\phi$  é contrário ao do sentido convencional do  $\mathbf{a}_\phi$  em coordenadas cilíndricas.  $\mathbf{H}_z$  também poderia ter sido obtido em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_z &= \frac{3}{4\pi(5)}(1 - 0)(-\mathbf{a}_\phi) \\ &= -47,75\mathbf{a}_\phi \text{ mA/m}\end{aligned}$$

De maneira similar, para  $\mathbf{H}_x$  em  $P$ ,  $\rho = 4$ ,  $\alpha_2 = 0^\circ$ ,  $\cos \alpha_1 = 3/5$  e  $\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$  ou  $\mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ . Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_x &= \frac{3}{4\pi(4)}\left(1 - \frac{3}{5}\right)\mathbf{a}_z \\ &= 23,88\mathbf{a}_z \text{ mA/m}\end{aligned}$$

Então,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_z = 38,2\mathbf{a}_x + 28,65\mathbf{a}_y + 23,88\mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

ou

$$\mathbf{H} = -47,75\mathbf{a}_\phi + 23,88\mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

Observe que, embora os filamentos de corrente pareçam ser semi-infinitos (eles ocupam os eixos  $x$  e  $z$  positivos), é somente o fio ao longo do eixo  $z$  que é semi-infinito em relação ao ponto  $P$ . Assim,  $\mathbf{H}_z$  poderia ser encontrado utilizando a equação (7.13), mas a equação não poderia ter sido usada para encontrar  $\mathbf{H}_x$  porque o fio ao longo do eixo  $x$  não é semi-infinito em relação a  $P$ .

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 7.2

O eixo  $y$  positivo (linha semi-infinita em relação à origem) é percorrido por uma corrente filamentar de  $2 \text{ A}$  no sentido de  $-\mathbf{a}_y$ . Assuma que seja parte de um circuito muito extenso. Determine  $\mathbf{H}$  em:

- (a)  $A(2, 3, 0)$ ;
- (b)  $B(3, 12, -4)$ .

**Resposta:** (a)  $145,8\mathbf{a}_z \text{ mA/m}$ ; (b)  $48,97\mathbf{a}_z + 36,73\mathbf{a}_x \text{ mA/m}$ .

#### EXEMPLO 7.3

Uma espira circular localizada em  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = 0$ , é percorrida por uma corrente contínua de  $10 \text{ A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_\phi$ . Determine  $\mathbf{H}$  em  $(0, 0, 4)$  e  $(0, 0, -4)$ .

#### Solução:

Considere a espira circular mostrada na Figura 7.8(a). A intensidade do campo magnético  $d\mathbf{H}$ , no ponto  $P(0, 0, h)$ , contribuição do elemento de corrente  $I d\mathbf{l}$ , é dada pela Lei de Biot-Savart:

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

onde  $d\mathbf{l} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$ ,  $\mathbf{R} = (0, 0, h) - (x, y, 0) = -\rho \mathbf{a}_\rho + h \mathbf{a}_z$ , e

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ 0 & \rho d\phi & 0 \\ -\rho & 0 & h \end{vmatrix} = \rho h d\phi \mathbf{a}_\rho + \rho^2 d\phi \mathbf{a}_z$$

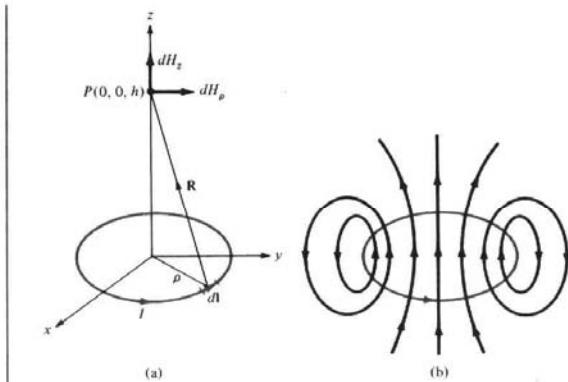


Figura 7.8 Referente ao Exemplo 7.3: (a) espira circular de corrente; (b) linhas de fluxo devido à espira circular de corrente.

Portanto,

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}} (\rho h d\phi \mathbf{a}_\rho + \rho^2 d\phi \mathbf{a}_z) = dH_\rho \mathbf{a}_\rho + dH_z \mathbf{a}_z$$

Por simetria, a soma das contribuições ao longo de  $\mathbf{a}_\rho$  é zero porque as componentes radiais produzidas pelos pares de elementos de corrente simétricos se cancelam. Isso pode também ser demonstrado matematicamente ao expressar  $\mathbf{a}_\rho$  em coordenadas retangulares (isto é,  $\mathbf{a}_\rho = \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \phi \mathbf{a}_y$ ). Integrando  $\cos \phi$  ou  $\sin \phi$  no intervalo  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  resulta em zero, demonstrando que  $H_\rho = 0$ . Portanto,

$$\mathbf{H} = \int dH_z \mathbf{a}_z = \int_0^{2\pi} \frac{I\rho^2 d\phi \mathbf{a}_z}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}} = \frac{I\rho^2 2\pi \mathbf{a}_z}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

ou

$$\mathbf{H} = \frac{I\rho^2 \mathbf{a}_z}{2[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

(a) Substituindo  $I = 10 \text{ A}$ ,  $\rho = 3$ ,  $h = 4$ , obtém-se

$$\mathbf{H}(0, 0, 4) = \frac{10 (3)^2 \mathbf{a}_z}{2[9 + 16]^{3/2}} = 0,36 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

(b) Observe, da expressão  $d\mathbf{l} \times \mathbf{R}$  acima, que, se  $h$  for substituído por  $-h$ , a componente  $z$  de  $d\mathbf{H}$  permanece a mesma, enquanto a componente  $\rho$  se cancela devido à simetria axial da espira circular. Portanto,

$$\mathbf{H}(0, 0, -4) = \mathbf{H}(0, 0, 4) = 0,36 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

As linhas de fluxo devido à espira circular de corrente estão esboçadas na Figura 7.8(b).

**EXERCÍCIO PRÁTICO 7.3**

Um anel filamentar de raio 5 cm está colocado sobre o plano  $z = 1$  cm, tal que seu centro está em  $(0, 0, 1\text{cm})$ . Se o anel for percorrido por 50 mA ao longo de  $\mathbf{a}_\phi$ , determine  $\mathbf{H}$  em:

- (a)  $(0, 0, -1\text{ cm})$ ;
- (b)  $(0, 0, 10\text{ cm})$ .

**Resposta:** (a)  $400 \mathbf{a}_z \text{ mA/m}$ ; (b)  $57,3 \mathbf{a}_z \text{ mA/m}$ .

**EXEMPLO 7.4**

Um solenóide de comprimento  $\ell$  e raio  $a$  consiste de  $N$  espiras de fio percorridas por uma corrente  $I$ . Demonstre que, em um ponto  $P$  ao longo do seu eixo,

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \mathbf{a}_z$$

onde  $n = N/\ell$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos subtendidos em  $P$  pelas espiras das extremidades, como ilustrado na Figura 7.9. Demonstre também que, se  $\ell \gg a$ , no centro do solenóide,

$$\mathbf{H} = nI \mathbf{a}_z$$

**Solução:**

Considere a seção reta de um solenóide, como mostrado na Figura 7.9. Já que o solenóide consiste de espiras circulares, aplicamos o resultado do Exemplo 7.3. A contribuição para o campo magnético  $H$  em  $P$ , por um elemento do solenóide de comprimento  $dz$ , é

$$dH_z = \frac{I dl a^2}{2[a^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{Ia^2 n dz}{2[a^2 + z^2]^{3/2}}$$

onde  $dl = n dz = (N/\ell) dz$ . Da Figura 7.9,  $\tan \theta = a/z$ ; isto é,

$$dz = -a \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta = \frac{[z^2 + a^2]^{3/2}}{a^2} \sin \theta d\theta$$

Assim,

$$dH_z = -\frac{nI}{2} \sin \theta d\theta$$

ou

$$H_z = -\frac{nI}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

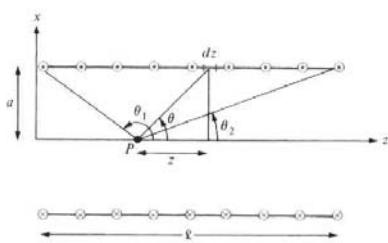


Figura 7.9 Referente ao Exemplo 7.4; seção reta de um solenóide.

Então,

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \mathbf{a}_z$$

conforme solicitado. Substituindo  $n = N/\ell$  resulta em

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\ell} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \mathbf{a}_z$$

No centro do solenóide,

$$\cos \theta_2 = \frac{\ell/2}{[a^2 + \ell^2/4]^{1/2}} = -\cos \theta_1$$

e

$$\mathbf{H} = \frac{In\ell}{2[a^2 + \ell^2/4]^{1/2}} \mathbf{a}_z$$

Se  $\ell \gg a$  ou  $\theta_2 = 0^\circ$ ,  $\theta_1 = 180^\circ$ ,

$$\mathbf{H} = nI\mathbf{a}_z = \frac{NI}{\ell} \mathbf{a}_z$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 7.4

Se o solenóide da Figura 7.9 tem 2.000 espiras, um comprimento de 75 cm, um raio de 5 cm e é percorrido por uma corrente de 50 mA ao longo de  $\mathbf{a}_\phi$ , determine  $\mathbf{H}$  em:

- (a) (0, 0, 0);
- (b) (0, 0, 75 cm);
- (c) (0, 0, 50 cm).

**Resposta:** (a) 66,52  $\mathbf{a}_z$  A/m; (b) 66,52  $\mathbf{a}_z$  A/m; (c) 131,7  $\mathbf{a}_z$  A/m.

### 7.3 LEI CIRCUITAL DE AMPÈRE – EQUAÇÃO DE MAXWELL

A lei circuital de Ampère estabelece que a integral de linha da componente tangencial de  $\mathbf{H}$  em torno de um caminho fechado é igual à corrente líquida  $I_{\text{env}}$  envolvida pelo caminho. Em outras palavras, a circulação de  $\mathbf{H}$  é igual à  $I_{\text{env}}$ , isto é,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{env}}$$

(7.16)

A lei de Ampère é similar à lei de Gauss e é de fácil aplicação para determinar  $\mathbf{H}$ , quando a distribuição de corrente é simétrica. Deve-se observar que a equação (7.16) é sempre válida, sendo a distribuição de corrente simétrica ou não, mas somente é útil para determinar  $\mathbf{H}$  quando a distribuição de corrente é simétrica. A lei de Ampère é um caso especial da lei de Biot-Savart; aquela pode ser obtida dessa última.

Ao aplicar o teorema de Stokes ao lado esquerdo da equação (7.16), obtemos:

$$I_{\text{env}} = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (7.17)$$

Porém,

$$I_{\text{env}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.18)$$

Comparando as integrais de superfície nas equações (7.17) e (7.18), transparece que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad (7.19)$$

Essa é a terceira das equações de Maxwell que deduzimos. É, essencialmente, a lei de Ampère na forma diferencial (ou pontual), enquanto que a equação (7.16) é a forma integral. A partir da equação (7.19), devemos observar que  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$ ; isto é, o campo magnetostático não é conservativo.

## 7.4 APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

Aplicaremos, agora, a lei circuital de Ampère para determinar  $\mathbf{H}$  para algumas distribuições simétricas de corrente, assim como foi feito para a lei de Gauss. Consideraremos corrente em uma linha infinita, corrente em uma lâmina infinita e uma linha de transmissão coaxial infinitamente longa.

### A. Corrente em uma linha infinita

Consideremos uma corrente filamentar infinitamente longa  $I$  ao longo do eixo  $z$ , como mostrado na Figura 7.10. Para determinar  $\mathbf{H}$  em um determinado ponto  $P$ , escolheremos um caminho fechado que passa por  $P$ . Esse caminho, no qual a lei de Ampère vai ser aplicada, é denominado *caminho amperiano* (análogo à superfície gaussiana). Escolhemos um círculo concêntrico como o caminho amperiano, tendo em vista a equação (7.14), que mostra que  $\mathbf{H}$  é constante se  $\rho$  for constante. Já que o caminho envolve a corrente  $I$ , de acordo com a lei de Ampère

$$I = \int H_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \rho d\phi \mathbf{a}_\phi = H_\phi \int \rho d\phi = H_\phi \cdot 2\pi\rho$$

ou

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi} \quad (7.20)$$

como esperado a partir da equação (7.14).

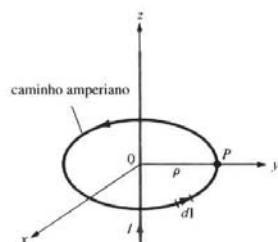


Figura 7.10 Lei de Ampère aplicada a uma corrente em linha filamentar infinita.

### B. Corrente em uma lâmina infinita

Considere uma lâmina infinita de corrente no plano  $z = 0$ . Se a lâmina tem uma densidade de corrente uniforme  $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$  A/m, como mostrado na Figura 7.11, ao aplicar a lei de Ampère ao caminho fechado retangular (caminho amperiano), obtém-se:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{env}} = K_y b \quad (7.21a)$$

Para resolver essa integral necessitamos, inicialmente, ter uma noção de como  $\mathbf{H}$  se comporta. Para tanto, vamos considerar a lâmina infinita como composta de filamentos. O campo elementar  $d\mathbf{H}$  acima e abaixo da lâmina, devido a um par de correntes filamentares, pode ser encontrado utilizando as equações (7.14) e (7.15). Como fica evidente na Figura 7.11(b), o campo resultante  $d\mathbf{H}$  tem somente uma componente  $x$ . Ainda,  $\mathbf{H}$  em um lado da lâmina é negativo em relação ao do outro lado. Devido à extensão infinita da lâmina, ela pode ser considerada como consistindo de pares filamentares, tais que as características de  $\mathbf{H}$  para um par são as mesmas para a lâmina infinita de corrente, isto é:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} H_o \mathbf{a}_x & z > 0 \\ -H_o \mathbf{a}_x & z < 0 \end{cases} \quad (7.21b)$$

onde  $H_o$  deve ser determinado. Resolvendo a integral de linha de  $\mathbf{H}$  na equação (7.21b), ao longo do caminho fechado da Figura 7.11(a), obtém-se

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \left( \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \right) \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0(-a) + (-H_o)(-b) + 0(a) + H_o(b) \\ &= 2H_o b \end{aligned} \quad (7.21c)$$

A partir das equações (7.21a) e (7.21c), obtemos  $H_o = \frac{1}{2} K_y$ . Substituindo  $H_o$  na equação (7.21b), obtém-se

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{1}{2} K_y \mathbf{a}_x, & z > 0 \\ -\frac{1}{2} K_y \mathbf{a}_x, & z < 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

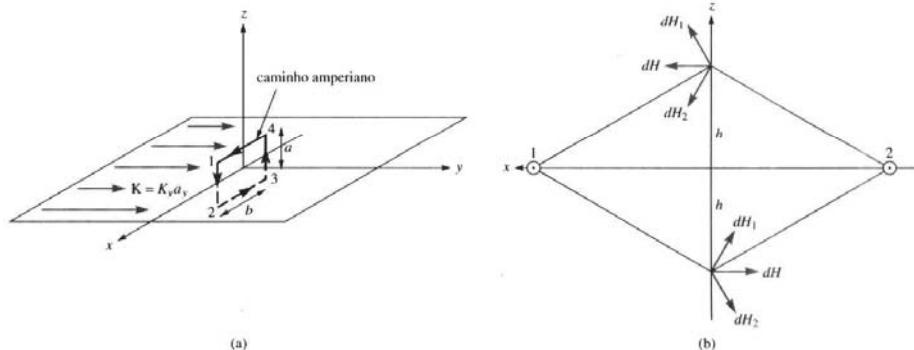


Figura 7.11 Aplicação da lei de Ampère à uma lâmina infinita: (a) caminho fechado 1-2-3-4-1; (b) par simétrico de filamentos de corrente com corrente ao longo de  $\mathbf{a}_y$ .

Em geral, para uma lâmina infinita com densidade de corrente  $\mathbf{K} \text{ A/m}$ ,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_n \quad (7.23)$$

onde  $\mathbf{a}_n$  é um vetor unitário normal orientado da lâmina de corrente para o ponto de interesse.

### C. Linha de transmissão coaxial infinitamente longa

Considere uma linha de transmissão coaxial infinitamente longa constituída de dois cilindros concêntricos cujos eixos estão ao longo do eixo  $z$ . A seção reta da linha é mostrada na Figura 7.12, com o eixo  $z$  apontando para fora da página. O condutor interno tem raio  $a$  e é percorrido por uma corrente  $I$ , enquanto que o condutor externo tem um raio interno  $b$ , espessura  $t$  e é percorrido por uma corrente de retorno  $-I$ . Queremos determinar  $\mathbf{H}$  em qualquer ponto, assumindo que a corrente esteja uniformemente distribuída em ambos os condutores. Já que a distribuição de corrente é simétrica, aplicamos a lei de Ampère ao longo do caminho amperiano para cada uma das quatro possíveis regiões:  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $a \leq \rho \leq b$ ,  $b \leq \rho \leq b + t$  e  $\rho \geq b + t$ .

Para a região  $0 \leq \rho \leq a$ , aplicamos a lei de Ampère para o caminho  $L_1$ , o que resulta em:

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{env}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.24)$$

Já que a corrente está uniformemente distribuída sobre a seção reta:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{a}_z, \quad d\mathbf{S} = \rho \, d\phi \, d\rho \, \mathbf{a}_z$$

$$I_{\text{env}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\pi a^2} \iint \rho \, d\phi \, d\rho = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = \frac{I \rho^2}{a^2}$$

Dessa forma, a equação (7.24) torna-se:

$$H_\phi \int dl = H_\phi 2\pi\rho = \frac{I \rho^2}{a^2}$$

ou

$$H_\phi = \frac{I \rho}{2\pi a^2} \quad (7.25)$$

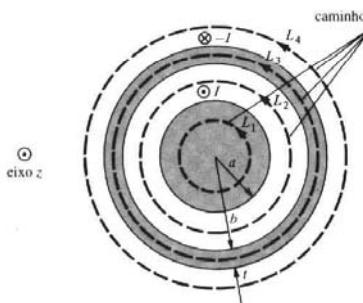


Figura 7.12 Seção reta da linha de transmissão; o eixo  $z$  positivo aponta para fora do plano da página.

Para a região  $a \leq \rho \leq b$ , usamos o caminho  $L_2$  como o caminho amperiano,

$$\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{env}} = I$$

$$H_\phi 2\pi\rho = I$$

ou

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (7.26)$$

uma vez que toda a corrente  $I$  é envolvida por  $L_2$ . Observe que a equação (7.26) é a mesma equação (7.14) e é independente de  $a$ . Para a região  $b \leq \rho \leq b + t$ , usamos o caminho  $L_3$ , obtendo

$$\oint_{L_3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\phi \cdot 2\pi\phi = I_{\text{env}} \quad (7.27a)$$

onde

$$I_{\text{env}} = I + \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

e  $\mathbf{J}$ , nesse caso, é a densidade de corrente (corrente por unidade de área) do condutor externo e está ao longo de  $-\mathbf{a}_z$ , isto é:

$$\mathbf{J} = -\frac{I}{\pi[(b+t)^2 - b^2]} \mathbf{a}_z$$

Portanto,

$$I_{\text{env}} = I - \frac{I}{\pi[(b+t)^2 - t^2]} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=b}^{\rho} \rho d\rho d\phi$$

$$= I \left[ 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right]$$

Substituindo esse resultado na equação (7.27a), temos:

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left[ 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right] \quad (7.27b)$$

Para a região  $\rho \geq b + t$ , usamos o caminho  $L_4$ , obtendo

$$\oint_{L_4} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I - I = 0$$

ou

$$H_\phi = 0 \quad (7.28)$$

Reunindo as equações (7.25) a (7.28), resulta em:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I\rho}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi, & 0 \leq \rho \leq a \\ \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi, & a \leq \rho \leq b \\ \frac{I}{2\pi\rho} \left[ 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right] \mathbf{a}_\phi, & b \leq \rho \leq b + t \\ 0, & \rho \geq b + t \end{cases} \quad (7.29)$$

A magnitude de  $\mathbf{H}$  está esboçada na Figura 7.13.

Observe, desses exemplos, que a habilidade em extrair  $\mathbf{H}$  do integrando é questão-chave ao usar a lei de Ampère para determinar  $\mathbf{H}$ . Em outras palavras, a lei de Ampère só é útil para encontrar  $\mathbf{H}$  devido a distribuições simétricas de corrente para as quais seja possível encontrar um caminho fechado no qual  $\mathbf{H}$  é constante em magnitude.

### EXEMPLO 7.5

Os planos  $z = 0$  e  $z = 4$  são percorridos por correntes  $\mathbf{K} = -10\mathbf{a}_x$  A/m e  $\mathbf{K} = 10\mathbf{a}_x$  A/m, respectivamente. Determine  $\mathbf{H}$  em:

- (a)  $(1, 1, 1)$ ;
- (b)  $(0, -3, 10)$ .

#### Solução:

Sejam lâminas de corrente paralelas, como mostrado na Figura 7.14. Seja, também,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_o + \mathbf{H}_4$$

onde  $\mathbf{H}_o$  e  $\mathbf{H}_4$  são as contribuições devido às lâminas de corrente  $z = 0$  e  $z = 4$ , respectivamente. Faremos uso da equação (7.23).

- (a) Em  $(1, 1, 1)$ , ponto entre os planos ( $0 < z = 1 < 4$ ),

$$\mathbf{H}_o = 1/2 \mathbf{K} \times \mathbf{a}_n = 1/2 (-10\mathbf{a}_x) \times \mathbf{a}_z = 5\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H}_4 = 1/2 \mathbf{K} \times \mathbf{a}_n = 1/2 (10\mathbf{a}_x) \times (-\mathbf{a}_z) = 5\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

Assim,

$$\mathbf{H} = 10\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

- (b) Em  $(0, -3, 10)$ , ponto acima das duas lâminas ( $z = 10 > 4 > 0$ ),

$$\mathbf{H}_o = 1/2 (-10\mathbf{a}_x) \times \mathbf{a}_z = 5\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H}_4 = 1/2 (10\mathbf{a}_x) \times \mathbf{a}_z = -5\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

Assim,

$$\mathbf{H} = 0 \text{ A/m}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 7.5

O plano  $y = 1$  é percorrido por uma corrente  $\mathbf{K} = 50\mathbf{a}_z$  mA/m. Determine  $\mathbf{H}$  em:

- (a)  $(0, 0, 0)$ ;
- (b)  $(1, 5, -3)$ .

**Resposta:** (a)  $25 \mathbf{a}_x$  mA/m; (b)  $-25 \mathbf{a}_x$  mA/m.

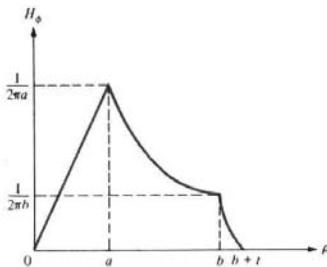
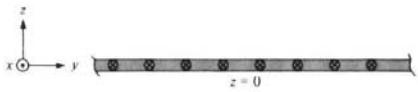


Figura 7.13 Gráfico de  $H_\phi$  contra  $\rho$ .



Figura 7.14 Referente ao Exemplo 7.5; lâminas de corrente infinitas e paralelas.



#### EXEMPLO 7.6

Um toróide, cujas dimensões estão mostradas na Figura 7.15, tem  $N$  espiras e é percorrido por uma corrente  $I$ . Determine  $H$  dentro e fora do toróide.

#### Solução:

Aplicamos a lei circuitual de Ampère ao caminho amperiano, que é um círculo de raio  $\rho$  como mostrado, em tracejado, na Figura 7.15. Já que as  $N$  espiras, cada uma delas percorrida por uma corrente  $I$ , cortam esse caminho, a corrente líquida envolvida pelo caminho amperiano é  $NI$ . Portanto,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{env}} \rightarrow H \cdot 2\pi\rho = NI$$

ou

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho}, \quad \text{para } \rho_o - a < \rho < \rho_o + a$$

onde  $\rho_o$  é o raio médio do toróide, como mostrado na Figura 7.15. Um valor aproximado de  $H$  é:

$$H_{\text{aprox}} = \frac{NI}{2\pi\rho_o} = \frac{NI}{\ell}$$

Observe que essa fórmula é a mesma que a obtida para  $H$  em pontos no interior de um solenóide muito longo ( $\ell \gg a$ ). Dessa forma, um solenóide reto pode ser entendido como uma bobina toroidal especial para a qual  $\rho_o \rightarrow \infty$ . Do lado de fora do toróide, a corrente envolvida pelo caminho amperiano é  $NI - NI = 0$  e, portanto,  $H = 0$ .

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 7.6

Um toróide de seção reta circular cujo centro de sua seção reta encontra-se na origem e seu eixo coincide com o eixo  $z$ , tem 1.000 espiras com  $\rho_o = 10$  cm e  $a = 1$  cm. Se o toróide é percorrido por uma corrente de 100 mA, determine  $|H|$  em:

- (a) (3 cm, -4 cm, 0);
- (b) (6 cm, 9 cm, 0).

**Resposta:** (a) 0; (b) 147,1 A/m.

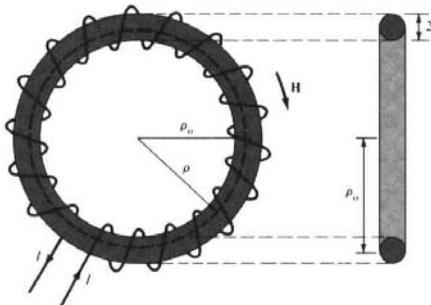


Figura 7.15 Referente ao Exemplo 7.6. Um toróide com seção reta circular.

## 7.5 DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO – EQUAÇÃO DE MAXWELL

A densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$  é similar à densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$ . Assim como  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  no espaço livre, a densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$  está relacionada à intensidade do campo magnético  $\mathbf{H}$ , de acordo com

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (7.30)$$

onde  $\mu_0$  é uma constante conhecida como *permeabilidade do espaço livre*. Essa constante é dada em henrys/metro ( $\text{H}/\text{m}$ ) e tem o valor de

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad (7.31)$$

A definição precisa do campo magnético  $\mathbf{B}$ , em termos da força magnética, será dada no próximo capítulo.

O fluxo magnético, através da superfície  $S$ , é dado por

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.32)$$

onde o fluxo magnético  $\Psi$  é dado em webers ( $\text{Wb}$ ) e a densidade de fluxo magnético é dada em webers/metro quadrado ( $\text{Wb}/\text{m}^2$ ) ou teslas ( $\text{T}$ ).

A linha de fluxo magnético é o caminho, na região do campo magnético, em relação ao qual  $\mathbf{B}$  é tangente em cada ponto. É a linha ao longo da qual a agulha de uma bússola se orienta se estiver sob a ação desse campo. Por exemplo, as linhas de fluxo magnético devido a um fio reto longo são mostradas na Figura 7.16. As linhas de fluxo são determinadas utilizando o mesmo princípio seguido na Seção 4.10 para as linhas de fluxo elétrico. A orientação de  $\mathbf{B}$  é tomada como a indicada pelo “norte” da agulha da bússola. Observe que cada linha de fluxo é fechada e não tem nem início nem fim. Embora a Figura 7.16 seja para um condutor reto percorrido por uma corrente, é sempre válido a afirmação de que as linhas de fluxo magnético são fechadas e não se cruzam, independente da distribuição de corrente.

Em um campo eletrostático, o fluxo que passa através de uma superfície fechada é igual à carga encerrada, isto é,  $\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$ . Então, é possível ter uma carga elétrica isolada, como mostrado na Figura 7.17(a), o que revela que as linhas de fluxo elétrico não são necessariamente fechadas. Diferentemente das linhas de fluxo elétrico, as linhas de fluxo magnético sempre se fecham sobre si mesmas, como na Figura 7.17(b). Isto se deve ao fato de que *não é possível ter um polo magnético isolado (ou cargas magnéticas)*. Por exemplo, se desejamos obter um polo magnético isolado pela divisão sucessiva de um ímã em duas partes, acabaremos por obter peças, cada uma delas tendo um polo norte e um polo sul, como ilustrado na Figura 7.18. Concluímos ser impossível separar um polo norte de um polo sul.

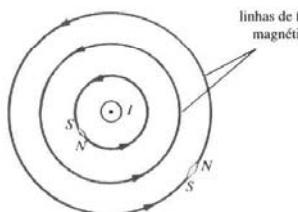


Figura 7.16 Linhas de fluxo magnético devido a um fio retilíneo com corrente saindo do plano da página.

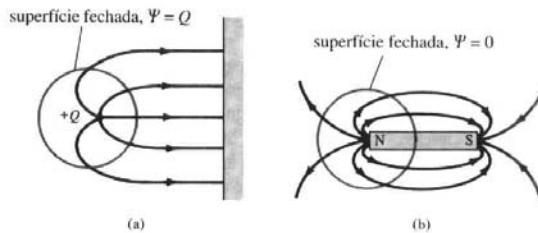


Figura 7.17 Fluxo que sai de uma superfície fechada devido: (a) carga elétrica isolada  $\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$ ; (b) carga magnética  $\Psi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ .

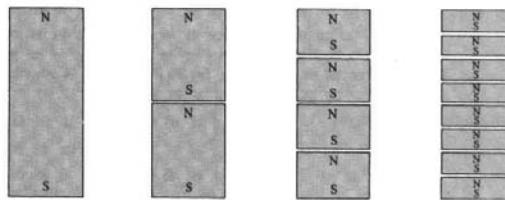


Figura 7.18 A divisão sucessiva de um fêm resulta em peças com pólos norte e sul, mostrando que os pólos magnéticos não podem ser isolados.

**Uma carga magnética isolada não existe.**

Dessa forma, o fluxo total através de uma superfície fechada em um campo magnético deve ser zero, isto é,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.33)$$

Essa equação é referida como *lei da conservação do fluxo magnético*, ou *lei de Gauss para campos magnetostáticos*, assim como  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$  é a lei de Gauss para campos eletrostáticos. Embora o campo magnetostático não seja conservativo, o fluxo magnético se conserva.

Ao aplicar o teorema da divergência à equação (7.33), obtemos

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.34)$$

Essa equação é a quarta das equações de Maxwell que deduzimos. A equação (7.33), ou a (7.34), mostra que o campo magnetostático não tem fontes nem sumidouros. A equação (7.34) sugere que as linhas de campo magnético são sempre contínuas.

## 7.6 EQUAÇÕES DE MAXWELL PARA CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS ESTÁTICOS

Tendo deduzido as quatro equações de Maxwell para campos eletromagnéticos estáticos, torna-se interessante fazer um quadro-resumo que mostre essas relações juntas, como na Tabela 7.2. Observe da tabela que a ordem que seguimos para deduzir as equações mostradas foi alterada para assegurar a clareza.

A escolha entre as formas integral e diferencial das equações depende do problema dado. É evidente, da Tabela 7.2, que um campo vetorial é definido completamente ao especificar seu rotacional e sua divergência. Um campo pode somente ser elétrico ou magnético se satisfaz as equações de Maxwell correspondentes (veja Problemas 7.26 e 7.27). Deve-se observar que as equações de Maxwell, como mostradas na Tabela 7.2, são somente para campos EM estáticos. Como discutiremos no Capítulo 9, as equações de divergência permanecerão as mesmas para campos EM variáveis no tempo, mas as equações de rotacionais deverão sofrer modificações.

TABELA 7.2 Equações de Maxwell para campos EM estáticos

Forma diferencial (ou Pontual)	Forma integral	Comentários
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_v dv$	Lei de Gauss
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Inexistência de monopólio magnético
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$	Conservação de campo eletrostático
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	Lei de Ampère

## 7.7 POTENCIAIS MAGNÉTICOS ESCALAR E VETORIAL

Lembramos que alguns problemas de campo eletrostático foram simplificados ao relacionar o potencial elétrico  $V$  com a intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E} = -\nabla V$ ). De maneira similar, podemos definir um potencial associado ao campo magnetostático  $\mathbf{B}$ . De fato, o potencial magnético pode ser o escalar  $V_m$  ou o vetor  $\mathbf{A}$ . Para definir  $V_m$  e  $\mathbf{A}$ , relembraremos duas identidades importantes (veja Exemplo 3.9 e Exercício Prático 3.9):

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad (7.35a)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (7.35b)$$

que devem ser satisfeitas para qualquer campo escalar  $V$  e campo vetorial  $\mathbf{A}$ .

Assim como  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , definimos o *potencial magnético escalar*  $V_m$  (em ampères) em relação a  $\mathbf{H}$  de acordo com:

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla V_m} \quad \text{se } \mathbf{J} = 0 \quad (7.36)$$

A condição associada à esta equação é importante e será explicada. Combinando as equações (7.36) e (7.19), resulta em

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (-\nabla V_m) = 0 \quad (7.37)$$

já que  $V_m$  deve satisfazer a condição na equação (7.35a). Portanto, o potencial magnético escalar  $V_m$  é somente definido na região onde  $\mathbf{J} = 0$ , como na equação (7.36). Devemos também observar que  $V_m$  satisfaz a equação de Laplace da mesma forma que  $V$  o faz para campos eletrostáticos. Dessa maneira:

$$\nabla^2 V_m = 0, \quad (\mathbf{J} = 0) \quad (7.38)$$

Sabemos que, para campos magnetostáticos,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , como estabelecido na equação (7.34). A fim de satisfazer as equações (7.34) e (7.35b) simultaneamente, podemos definir o potencial magnético vetorial  $\mathbf{A}$  (em Wb/m) tal que:

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \quad (7.39)$$

Assim como definimos

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.40)$$

podemos definir

$$\boxed{\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 J d\mathbf{l}}{4\pi R}} \quad \text{para corrente em uma linha} \quad (7.41)$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K} dS}{4\pi R}} \quad \text{para corrente em uma superfície} \quad (7.42)$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_0 \mathbf{J} dv}{4\pi R}} \quad \text{para corrente em um volume} \quad (7.43)$$

Em vez de obter as equações (7.41) a (7.43) a partir da equação (7.40), uma abordagem alternativa seria obtê-las das equações (7.6) a (7.8). Por exemplo, podemos derivar a equação (7.41) da equação (7.6) em conjunto com a equação (7.39). Para fazer isso, escrevemos a equação (7.6) como

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}} \quad (7.44)$$

onde  $\mathbf{R}$  é o vetor distância do elemento de linha  $d\mathbf{l}'$  no ponto-fonte  $(x', y', z')$ , até o ponto  $(x, y, z)$  onde se quer determinar o campo, como mostrado na Figura 7.19, e  $R = |\mathbf{R}|$ , isto é,

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (7.45)$$

Portanto,

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = - \frac{(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = - \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

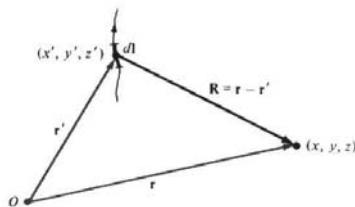


Figura 7.19 Ilustração do ponto-fonte  $(x', y', z')$  e do ponto  $(x, y, z)$  onde se quer determinar o campo.

ou

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \quad \left( = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) \quad (7.46)$$

onde a diferenciação é em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Substituindo na equação (7.44), obtemos:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_L I d\mathbf{l}' \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \quad (7.47)$$

Aplicamos a identidade vetorial

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F} \quad (7.48)$$

onde  $f$  é um campo escalar e  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial. Fazendo  $f = 1/R$  e  $\mathbf{F} = d\mathbf{l}'$ , obtém-se

$$d\mathbf{l}' \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} \nabla \times d\mathbf{l}' - \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{l}'}{R}\right)$$

Já que  $\nabla$  opera em relação a  $(x, y$  e  $z)$ , enquanto  $d\mathbf{l}'$  é uma função de  $(x', y', z')$ ,  $\nabla \times d\mathbf{l}' = 0$ . Dessa maneira:

$$d\mathbf{l}' \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla \times \frac{d\mathbf{l}'}{R} \quad (7.49)$$

Com essa equação, a equação (7.47) se reduz a

$$\mathbf{B} = \nabla \times \int_L \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}'}{4\pi R} \quad (7.50)$$

Comparando a equação (7.50) com a equação (7.39), resulta que

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}'}{4\pi R}$$

o que verifica a equação (7.41).

Substituindo a equação (7.39) na equação (7.32) e aplicando o teorema de Stokes, obtemos

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

ou

$$\boxed{\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}} \quad (7.51)$$

Portanto, o fluxo magnético, através de uma dada área, pode ser encontrado utilizando a equação (7.32) ou a equação (7.51). Também, o campo magnético pode ser determinado utilizando ou  $V_m$  ou  $\mathbf{A}$ . A escolha é ditada pela natureza de um dado problema, à excepção de que  $V_m$  pode somente ser usado em uma região livre de fontes. O uso do potencial magnético vetorial representa uma ferramenta de cálculo poderosa e elegante para resolver problemas de campos EM, particularmente aqueles relacionados com antenas. Como será observado no Capítulo 13, é mais conveniente, em problemas de antenas, encontrar  $\mathbf{B}$  determinando primeiro  $\mathbf{A}$ .

### EXEMPLO 7.7

Dado um potencial magnético vetorial  $\mathbf{A} = -\rho^2/4 \mathbf{a}_z$  Wb/m, calcule o fluxo magnético total que atravessa a superfície  $\phi = \pi/2$ ,  $1 \leq \rho \leq 2$  m,  $0 \leq z \leq 5$  m.

**Solução:**

Podemos resolver esse problema de duas maneiras diferentes, utilizando a equação (7.32) ou a equação (7.51).

**Método 1:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{a}_\phi = \frac{\rho}{2} \mathbf{a}_\phi, \quad d\mathbf{S} = d\rho dz \mathbf{a}_\phi$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Psi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_{z=0}^5 \int_{\rho=1}^2 \rho d\rho dz = \frac{1}{4} \rho^2 \Big|_1^2 (5) = \frac{15}{4} \\ \Psi &= 3,75 \text{ Wb}\end{aligned}$$

**Método 2:**

Usamos

$$\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

onde  $L$  é o caminho que limita a superfície  $S$ ;  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$  e  $\Psi_4$  são, respectivamente, os valores de  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  ao longo dos segmentos de  $L$  enumerados de 1 a 4 na Figura 7.20. Já que  $\mathbf{A}$  tem somente componente  $z$ ,

$$\Psi_1 = 0 = \Psi_3$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_2 + \Psi_4 = -\frac{1}{4} \left[ (1)^2 \int_0^5 dz + (2)^2 \int_5^0 dz \right] \\ &= -\frac{1}{4} (1 - 4)(5) = \frac{15}{4} \\ &= 3,75 \text{ Wb}\end{aligned}$$

como obtido previamente. Observe que a orientação do caminho  $L$  deve estar de acordo com a orientação de  $d\mathbf{S}$ .

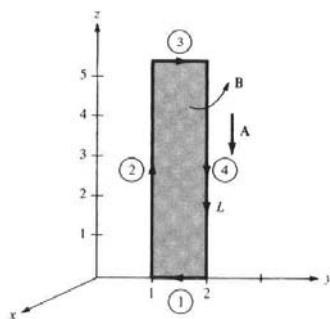


Figura 7.20 Referente ao Exemplo 7.7.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 7.7**

Uma distribuição de corrente dá origem a um potencial magnético vetorial  $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{a}_x + y^2x\mathbf{a}_y - 4xyz\mathbf{a}_z$  Wb/m. Calcule:

- $\mathbf{B}$  em  $(-1, 2, 5)$ ;
- o fluxo através da superfície definida por  $z = 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 4$ .

**Resposta:** (a)  $20\mathbf{a}_x + 40\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup>; (b) 20 Wb.

**EXEMPLO 7.8**

Se o plano  $z = 0$  é percorrido por uma corrente uniforme  $\mathbf{K} = K_y\mathbf{a}_y$ ,

$$\mathbf{H} = \begin{cases} 1/2 K_y \mathbf{a}_x, & z > 0 \\ -1/2 K_y \mathbf{a}_x, & z < 0 \end{cases}$$

Essas relações foram obtidas na Seção 7.4 utilizando a lei de Ampère. Obtenha as mesmas relações fazendo uso do conceito de potencial magnético vetorial.

**Solução:**

Considere a lâmina de corrente, como mostrado na Figura 7.21. Da equação (7.42),

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{K}}{4\pi R} dS$$

Nesse problema,  $\mathbf{K} = K_y\mathbf{a}_y$ ,  $dS = dx' dy'$ , e, para  $z > 0$ ,

$$R = |\mathbf{R}| = |(0, 0, z) - (x', y', 0)| = [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2} \quad (7.8.1)$$

onde as coordenadas-linha são para o ponto-fonte, enquanto as coordenadas não-indicadas são para o ponto onde se quer calcular o campo. É necessário fazer distinção entre os dois pontos para evitar confusão (veja Figura 7.19). Assim,

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{\mu_0 K_y}{4\pi[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2}} dx' dy' \mathbf{a}_y \\ d\mathbf{B} &= \nabla \times d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial z} dA_y \mathbf{a}_x \\ &= \frac{\mu_0 K_y z}{4\pi[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}} dx' dy' \mathbf{a}_x \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' dy'}{[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

No integrando, podemos mudar as coordenadas de cartesianas para cilíndricas, por conveniência, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{[(\rho')^2 + z^2]^{-3/2}} 1/2 d[(\rho')^2] \\ &= \frac{\mu_0 K_y z \mathbf{a}_x}{2} \frac{-1}{[(\rho')^2 + z^2]^{1/2}} \Big|_{\rho'=0}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_0 K_y z \mathbf{a}_x}{2} \end{aligned}$$

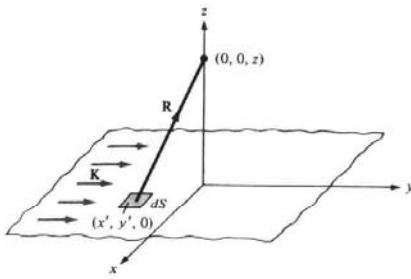


Figura 7.21 Referente ao Exemplo 7.8; lâmina infinita de corrente.

Assim,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{K_x}{2} \mathbf{a}_z, \quad \text{para } z > 0$$

Pela simples troca de  $z$  por  $-z$  na equação (7.8.2), e seguindo o mesmo procedimento, obtemos

$$\mathbf{H} = -\frac{K_x}{2} \mathbf{a}_z, \quad \text{para } z < 0$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 7.8

Repita o Exemplo 7.8 usando a lei de Biot-Savart para determinar  $\mathbf{H}$  nos pontos  $(0, 0, h)$  e  $(0, 0, -h)$ .

## 7.8 DEDUÇÃO DA LEI DE BIOT-SAVART E DA LEI DE AMPÈRE

Tanto a lei de Biot-Savart quanto a lei de Ampère podem ser deduzidas a partir do conceito de potencial magnético vetorial. Essa dedução envolverá o uso das identidades vetoriais na equação (7.48) e

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (7.52)$$

Já que a lei de Biot-Savart, como dada na equação (7.4), é basicamente sobre a corrente em uma linha, iniciaremos essa dedução com as equações (7.39) e (7.41); isto é,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \oint_L \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}'}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \nabla \times \frac{1}{R} d\mathbf{l}', \quad (7.53)$$

onde  $R$  é definido na equação (7.45). Se a identidade vetorial na equação (7.48) for utilizada considerando  $\mathbf{F} = d\mathbf{l}'$  e  $f = 1/R$ , a equação (7.53) torna-se:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \left[ \frac{1}{R} \nabla \times d\mathbf{l}' + \left( \nabla \frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{l}' \right] \quad (7.54)$$

Já que  $\nabla$  opera em relação a  $(x, y, z)$  e  $d\mathbf{l}'$  é uma função de  $(x', y', z')$ ,  $\nabla \times d\mathbf{l}' = 0$ . Também,

$$\frac{1}{R} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2} \quad (7.55)$$

$$\nabla \left[ \frac{1}{R} \right] = -\frac{(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \quad (7.56)$$

onde  $\mathbf{a}_R$  é um vetor unitário orientado a partir do ponto-fonte até o ponto onde se quer calcular o campo. Portanto, a equação (7.54) (após retirar a “linha” de  $d\mathbf{l}$ ) torna-se:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad (7.57)$$

que é a lei de Biot–Savart.

Utilizando a identidade na equação (7.52) com a equação (7.39), obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (7.58)$$

Pode-se demonstrar que, para um campo magnético estático,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.59)$$

tal que, após substituir  $\mathbf{B}$  por  $\mu_0 \mathbf{H}$  e utilizar a equação (7.19), a equação (7.58) torna-se

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}$$

ou

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (7.60)$$

que é denominada de *equação vetorial de Poisson*, similar à equação de Poisson ( $\nabla^2 V = -\rho/e$ ) da eletrostática. Em coordenadas cartesianas, a equação (7.60) pode ser decomposta em três equações escalares:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z \end{aligned} \quad (7.61)$$

que podem ser consideradas como as *equações escalares de Poisson*.

Pode-se demonstrar, também, que a lei circuital de Ampère é consistente com nossa definição de potencial magnético vetorial. Do teorema de Stokes e da equação (7.39),

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_S \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (7.62)$$

Das equações (7.52), (7.59) e (7.60),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Substituindo esta identidade na equação (7.62), vem que:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$$

que é a lei circuital de Ampère.

**RESUMO**

- 1.** As leis básicas que governam os campos magnetostáticos (lei de Biot-Savart e lei de Ampère) são discutidas. A lei de Biot-Savart, que é similar à lei de Coulomb, estabelece que a intensidade de campo magnético  $d\mathbf{H}$  em  $\mathbf{r}$  devido ao elemento de corrente  $I dl$  em  $\mathbf{r}'$  é

$$d\mathbf{H} = \frac{I dl \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (\text{em A/m})$$

onde  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e  $R = |\mathbf{R}|$ . Para uma distribuição de corrente em uma superfície ou em um volume, substituímos  $I dl$  por  $\mathbf{K} dS$  ou  $\mathbf{J} dv$ , respectivamente; isto é,

$$I dl = \mathbf{K} dS = \mathbf{J} dv$$

- 2.** A lei circuital de Ampère, que é similar à lei de Gauss, estabelece que a circulação de  $\mathbf{H}$  em torno de um caminho fechado é igual à corrente envolvida pelo caminho, isto é,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{env}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

ou

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{terceira equação de Maxwell que deduzimos}).$$

Quando as distribuições de correntes são simétricas, tal que o caminho amperiano (sobre o qual  $\mathbf{H} = H_\phi \mathbf{a}_\phi$  é constante) pode ser determinado, a lei de Ampère é útil para determinar  $\mathbf{H}$ , isto é,

$$H_\phi \oint dl = I_{\text{env}} \quad \text{ou} \quad H_\phi = \frac{I_{\text{env}}}{\ell}$$

- 3.** O fluxo magnético, através de uma superfície  $S$ , é dado por

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{em Wb})$$

onde  $\mathbf{B}$  é a densidade de fluxo magnético em  $\text{Wb/m}^2$ . No espaço livre,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

onde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  = permeabilidade do espaço livre.

- 4.** Já que um monopólo magnético isolado ou livre não existe, o fluxo magnético líquido através de uma superfície fechada é zero;

$$\Psi = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{quarta equação de Maxwell que deduzimos}).$$

- 5.** Nesse ponto, todas as quatro equações de Maxwell para campos EM estáticos foram deduzidas, nominalmente:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

- 6.** O potencial magnético escalar  $V_m$  é definido como

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad \text{se } \mathbf{J} = 0$$

e o potencial magnético vetorial  $\mathbf{A}$  como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

onde  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Com a definição de  $\mathbf{A}$ , o fluxo magnético através da superfície  $S$  pode ser encontrado a partir de

$$\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

onde  $L$  é o caminho fechado que limita a superfície  $S$  (veja Figura 3.20). Ao invés de utilizar a lei de Biot-Savart, o campo magnético devido a uma distribuição de corrente pode ser encontrado utilizando  $\mathbf{A}$ , uma ferramenta de cálculo poderosa, particularmente útil na teoria de antenas. Para um elemento de corrente  $I d\mathbf{l}$  em  $\mathbf{r}'$ , o potencial magnético vetorial em  $\mathbf{r}$  é:

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

7. Muita similaridade existe entre os campos eletrostáticos e magnetostáticos. Algumas delas estão listadas na Tabela 7.1. Por exemplo, a equação correspondente à equação de Poisson  $\nabla^2 V = -\rho_v/\epsilon$  é:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

## QUESTÕES DE REVISÃO

- 7.1 Qual das seguintes não é uma fonte de campos magnetostáticos?

- (a) Uma corrente contínua em um fio.
- (b) Um fmã permanente.
- (c) Uma carga acelerada.
- (d) Um campo elétrico que varia linearmente com o tempo.
- (e) Um disco carregado girando com uma velocidade uniforme.

- 7.2 Identifique, na Figura 7.22, a configuração que não é uma correta representação de  $I$  e de  $\mathbf{H}$ .

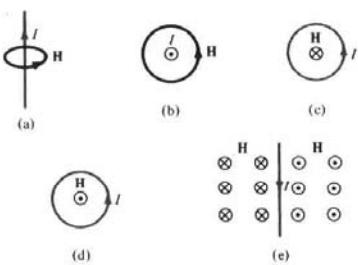


Figura 7.22 Referente a Questão de Revisão 7.2.

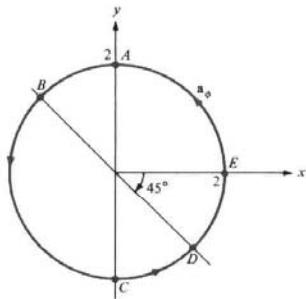


Figura 7.23 Referente a Questão de Revisão 7.3.

**7.3** Considere os pontos  $A, B, C, D$  e  $E$  sobre um círculo de raio 2, conforme mostrado na Figura 7.23. Os itens da coluna da direita são os valores de  $\mathbf{a}_\phi$  nos diferentes pontos sobre o círculo. Relacione esses itens com os pontos na coluna da esquerda.

- |         |   |
|---------|---|
| (a) $A$ | (i) $\mathbf{a}_x$                                    |
| (b) $B$ | (ii) $-\mathbf{a}_x$                                  |
| (c) $C$ | (iii) $\mathbf{a}_y$                                  |
| (d) $D$ | (iv) $-\mathbf{a}_y$                                  |
| (e) $E$ | (v) $\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$    |
|         | (vi) $\frac{-\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$  |
|         | (vii) $\frac{-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$ |
|         | (viii) $\frac{\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}}$ |

**7.4** O eixo  $z$  é percorrido por uma corrente filamentar de  $10\pi$  A ao longo de  $\mathbf{a}_z$ . Qual das alternativas é incorreta?

- (a)  $\mathbf{H} = -\mathbf{a}_z A/m$  em  $(0, 5, 0)$
- (b)  $\mathbf{H} = \mathbf{a}_\phi A/m$  em  $(5, \pi/4, 0)$
- (c)  $\mathbf{H} = -0.8\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_y$  em  $(-3, 4, 0)$
- (d)  $\mathbf{H} = -\mathbf{a}_\phi$  em  $(5, 3\pi/2, 0)$

**7.5** O plano  $y = 0$  é percorrido por uma corrente uniforme de  $30\mathbf{a}_z$  mA/m. Em  $(1, 10, -2)$ , a intensidade do campo magnético é de:

- (a)  $-15\mathbf{a}_y$  mA/m;
- (b)  $15\mathbf{a}_y$  mA/m;
- (c)  $477.5\mathbf{a}_y$   $\pi$  A/m;
- (d)  $18.85\mathbf{a}_y$  nA/m;
- (e) Nenhuma das respostas acima.

**7.6** Para as correntes e os caminhos fechados da Figura 7.24, calcule o valor de  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ .

**7.7** Qual das seguintes afirmações não é uma característica de um campo magnético estático?

- (a) O campo é solenoidal.
- (b) O campo é conservativo.

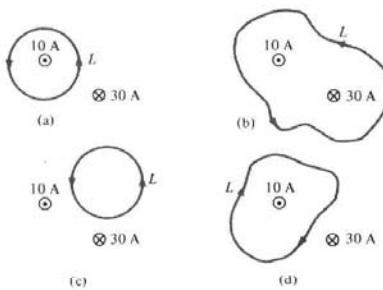


Figura 7.24 Referente a Questão de Revisão 7.6.

- (c) O campo não tem fontes nem sumidouros.  
 (d) As linhas de fluxo magnético são sempre fechadas.  
 (e) O número total de linhas de fluxo que entram em uma dada região é igual ao número de linhas que saem dessa região.

**7.8** Duas bobinas circulares idênticas coaxiais são percorridas pela mesma corrente  $I$ , mas em sentidos opostos. A magnitude do campo magnético  $\mathbf{B}$ , em um ponto ao longo do eixo, a meio caminho entre as bobinas, é:

- (a) zero;  
 (b) o mesmo que o produzido apenas por uma bobina;  
 (c) duas vezes o produzido por uma bobina;  
 (d) metade do produzido apenas por uma bobina.

**7.9** Uma das seguintes equações não é uma equação de Maxwell para campos eletromagnéticos estáticos em um meio linear homogêneo.

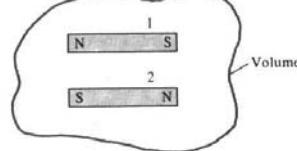
- (a)  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$   
 (b)  $\nabla \times \mathbf{D} = 0$   
 (c)  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$   
 (d)  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$   
 (e)  $\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$

**7.10** Dois ímãs com seus pólos norte com intensidade  $Q_{m1} = 20 \text{ A} \cdot \text{m}$  e  $Q_{m2} = 10 \text{ A} \cdot \text{m}$  (cargas magnéticas) são colocados no interior de um volume, como mostrado na Figura 7.25. O fluxo magnético que sai do volume é:

- (a) 200 Wb  
 (b) 30 Wb  
 (c) 10 Wb  
 (d) 0 Wb  
 (e) -10 Wb

*Respostas:* 7.1c; 7.2c; 7.3(a)-(ii), (b)-(vi), (c)-(i), (d)-(v), (e)-(iii); 7.4d; 7.5a; 7.6(a) 10 A, (b) -20 A, (c) 0, (d) -10 A; 7.7b; 7.8a; 7.9e; 7.10d.

Figura 7.25 Referente a Questão de Revisão 7.10.



**PROBLEMAS**

- 7.1** (a) Dê a lei de Biot-Savart.  
 (b) Os eixos  $y$  e  $z$  são percorridos por correntes filamentares de  $10\text{ A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_y$  e  $20\text{ A}$  ao longo de  $-\mathbf{a}_z$ , respectivamente. Encontre  $\mathbf{H}$  em  $(-3, 4, 5)$ .
- 7.2** Um fio condutor é percorrido por uma corrente  $I$  do ponto  $A(0, 0, a)$  até o ponto  $B(0, 0, b)$ . Demonstre que no ponto  $P(x, y, 0)$ :
- $$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} \right] \mathbf{a}_y$$
- 7.3** Considere o trecho  $AB$ , na Figura 7.26, como parte de um circuito elétrico. Encontre  $\mathbf{H}$  na origem devido a  $AB$ .
- 7.4** Repita o Problema 7.3 para o condutor  $AB$  na Figura 7.27.
- 7.5** A linha  $x = 0, y = 0 \leq z \leq 10\text{ m}$  é percorrida por uma corrente de  $2\text{ A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_z$ . Calcule  $\mathbf{H}$  nos pontos:  
 (a)  $(5, 0, 0)$   
 (b)  $(5, 5, 0)$   
 (c)  $(5, 15, 0)$   
 (d)  $(5, -15, 0)$
- \*7.6** (a) Determine  $\mathbf{H}$  em  $(0, 0, 5)$  devido ao lado 2 da espira triangular na Figura 7.6(a).  
 (b) Determine  $\mathbf{H}$  em  $(0, 0, 5)$  devido a toda a espira triangular.
- 7.7** Um condutor infinitamente longo é dobrado na forma de L, como mostra a Figura 7.28. Se uma corrente contínua de  $5\text{ A}$  flui no condutor, determine a intensidade do campo magnético em (a)  $(2, 0)$ , (b)  $(0, -2, 0)$  e (c)  $(0, 0, 2)$ .

Figura 7.26 Referente ao Problema 7.3.

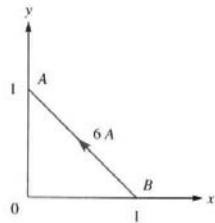
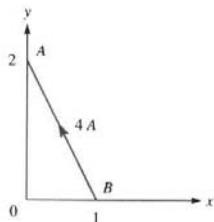


Figura 7.27 Referente ao Problema 7.4.



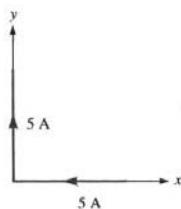


Figura 7.28 Corrente filamentar referente ao Problema 7.7.

**7.8** Determine  $\mathbf{H}$  no centro  $C$  de uma espira na forma de um triângulo equilátero, de lado 4 m, percorrido por uma corrente de 5 A, como mostrado na Figura 7.29.

**7.9** Uma espira retangular é percorrida por uma corrente de 10 A e está localizado no plano  $z = 0$ , como mostrado na Figura 7.30. Calcule  $\mathbf{H}$  em

- (a) (2, 2, 0)
- (b) (4, 2, 0)
- (c) (4, 8, 0)
- (d) (0, 0, 2)

**7.10** Uma espira quadrada condutora de lado  $2a$  está no plano  $z = 0$  e é percorrida por uma corrente  $I$  no sentido anti-horário. Demonstre que, no centro da espira

$$\mathbf{H} = \frac{\sqrt{2}I}{\pi a} \mathbf{a}_z$$

**\*7.11** (a) Uma espira filamentar percorrida por uma corrente  $I$  é dobrada até assumir o formato de um polígono regular de  $n$  lados. Demonstre que, no centro do polígono,

$$H = \frac{nI}{2\pi r} \sin \frac{\pi}{n}$$

onde  $r$  é o raio do círculo circunscrito pelo polígono.

- (b) Aplique essa relação para os casos em que  $n = 3$  e  $n = 4$  e veja se seus resultados estão de acordo com aqueles encontrados, respectivamente, para a espira triangular do Problema 7.8 e para a espira quadrada do Problema 7.10.
- (c) À medida que  $n$  se torna cada vez maior, demonstre que o resultado da parte (a) torna-se o resultado da espira circular do Exemplo 7.3.

**7.12** Para a espira filamentar mostrada na Figura 7.31, determine a intensidade do campo magnético em  $O$ .

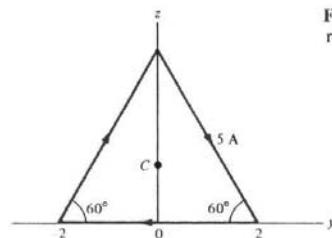


Figura 7.29 Espira na forma de um triângulo equilátero referente ao Problema 7.8.

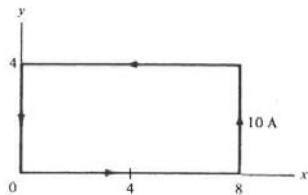


Figura 7.30 Espira retangular do Problema 7.9.

- 7.13** Duas espiras de corrente idênticas têm seus centros em  $(0, 0, 0)$  e  $(0, 0, 4)$  e seus eixos ao longo do eixo  $z$  (de modo a formar uma “bobina de Helmholtz”). Se cada espira tem um raio de  $2\text{ m}$  e é percorrida por uma corrente de  $5\text{ A}$  em  $\mathbf{a}_\phi$ , calcule  $\mathbf{H}$  em:
- $(0, 0, 0)$
  - $(0, 0, 2)$

- 7.14** Um solenóide de  $3\text{ cm}$  de comprimento é percorrido por uma corrente de  $400\text{ mA}$ . Se o solenóide for utilizado para gerar uma densidade de fluxo magnético de  $5\text{ mWb/m}^2$ , quantas espiras são necessárias?

- 7.15** Um solenóide, de raio  $4\text{ mm}$  e comprimento  $2\text{ cm}$ , tem  $150$  espiras/ $\text{m}$  e é percorrido por uma corrente de  $500\text{ mA}$ . Determine: (a)  $|\mathbf{H}|$  no centro; (b)  $|\mathbf{H}|$  nas extremidades do solenóide.

- 7.16** O plano  $x = 10$  é percorrido por uma corrente de  $100\text{ mA/m}$  ao longo de  $\mathbf{a}_z$ , enquanto a linha  $x = 1$  e  $y = -2$  é percorrida por uma corrente filamentar de  $20\pi\text{ mA}$  ao longo de  $\mathbf{a}_z$ . Determine  $\mathbf{H}$  em  $(4, 3, 2)$ .

- 7.17** (a) Dê a lei circuital de Ampère.  
 (b) Um cilindro oco condutor tem raio interno  $a$  e raio externo  $b$  e é percorrido por uma corrente  $I$  ao longo do sentido positivo do eixo  $z$ . Encontre  $\mathbf{H}$  em qualquer ponto.

- 7.18** (a) Um condutor sólido infinitamente longo, de raio  $a$ , está colocado ao longo do eixo  $z$ . Se o condutor for percorrido por uma corrente  $I$  no sentido de  $+z$ , demonstre que

$$\mathbf{H} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$$

dentro do condutor. Determine a densidade de corrente correspondente.

- (b) Se  $I = 3\text{ A}$  e  $a = 2\text{ cm}$  na parte (a), determine  $\mathbf{H}$  em  $(0, 1\text{ cm}, 0)$  e  $(0, 4\text{ cm}, 0)$ .

- 7.19** Se  $\mathbf{H} = ya_z - xa_y\text{ A/m}$  sobre o plano  $z = 0$ : (a) determine a densidade de corrente e (b) verifique a lei de Ampère tomando a circulação de  $\mathbf{H}$  ao longo do perímetro do retângulo  $z = 0, 0 < x < 3\text{ e }-1 < y < 4$ .

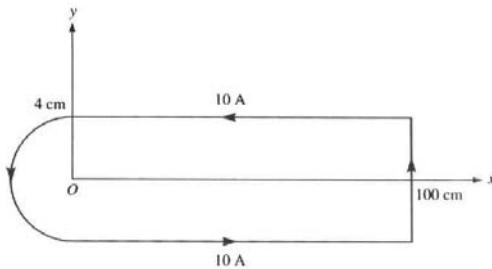


Figura 7.31 Espira filamentar do Problema 7.12; não desenhada em escala.

**7.20** Em uma região condutora:

$$\mathbf{H} = yz(x^2 + y^2)\mathbf{a}_x - y^2xz\mathbf{a}_y + 4x^2y^2\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

- (a) Determine  $\mathbf{J}$  em  $(5, 2, -3)$ .
- (b) Determine a corrente que passa através de  $x = -1$ ,  $0 < y \leq z < 2$ .
- (c) Demonstre que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

**7.21** Um fio infinitamente longo é percorrido por uma corrente de 2 A ao longo de  $+z$ . Calcule:

- (a)  $\mathbf{B}$  em  $(-3, 4, 7)$ ;
- (b) o fluxo através da espira quadrada descrita por  $2 \leq \rho \leq 6$ ,  $0 \leq z \leq 4$  e  $\phi = 90^\circ$ .

**7.22** O motor elétrico, mostrado na Figura 7.32, tem campo

$$\mathbf{H} = \frac{10^6}{\rho} \sin 2\phi \mathbf{a}_\theta \text{ A/m}$$

Calcule o fluxo, por pólo, que passa através do entreferro de ar se o comprimento axial do pólo é 20 cm.

**7.23** Considere a linha de transmissão a dois fios, cuja seção reta é ilustrada na Figura 7.33. Cada fio tem raio 2 cm e os fios separados de 10 cm. O fio, centrado em  $(0, 0)$ , é percorrido por uma corrente de 5 A, enquanto o outro, que está centrado em  $(10 \text{ cm}, 0)$ , é percorrido pela corrente de retorno. Determine  $\mathbf{H}$  em

- (a)  $(5 \text{ cm}, 0)$
- (b)  $(10 \text{ cm}, 5 \text{ cm})$

**7.24** Determine o fluxo magnético através de uma espira retangular  $(a \times b)$  devido a um condutor infinitamente longo percorrido por uma corrente  $I$ , como mostrado na Figura 7.34. A espira e os condutores retilíneos estão separados por uma distância  $d$ .

\***7.25** Um anel de latão com seção reta triangular circunda um condutor retilíneo muito longo concêntrico ao anel, como na Figura 7.35. Se o fio é percorrido por uma corrente  $I$ , demonstre que o número total de linhas de fluxo magnético no anel é:

$$\Psi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi b} \left[ b - a \ln \frac{a+b}{b} \right]$$

Calcule  $\Psi$  se  $a = 30 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $h = 5 \text{ cm}$  e  $I = 10 \text{ A}$ .

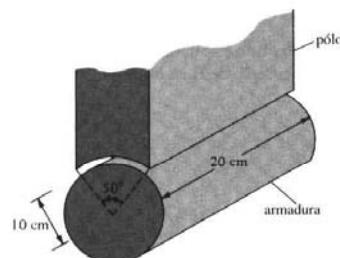


Figura 7.32 Pólo do motor elétrico do Problema 7.22.

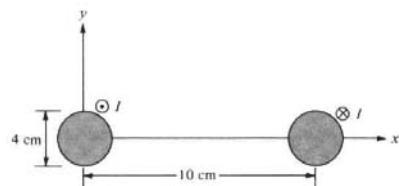


Figura 7.33 Linha a dois fios do Problema 7.23.

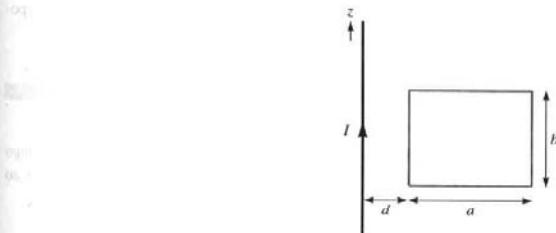


Figura 7.34 Referente ao Problema 7.24.

**7.26** Considere os seguintes campos arbitrários. Determine qual deles pode representar um campo eletrostático ou um campo magnetostático no espaço livre.

- (a)  $\mathbf{A} = y \cos ax \mathbf{a}_x + (y + e^{-x}) \mathbf{a}_z$
- (b)  $\mathbf{B} = \frac{20}{\rho} \mathbf{a}_\rho$
- (c)  $\mathbf{C} = r^2 \sin \theta \mathbf{a}_\theta$

**7.27** Refaça o problema anterior para os seguintes campos:

- (a)  $\mathbf{D} = y^2 z \mathbf{a}_x + 2(x+1)y z \mathbf{a}_y - (x+1)z^2 \mathbf{a}_z$
- (b)  $\mathbf{E} = \frac{(z+1)}{\rho} \cos \phi \mathbf{a}_\rho + \frac{\sin \phi}{\rho} \mathbf{a}_\theta$
- (c)  $\mathbf{F} = \frac{1}{r^2} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$

**7.28** Para uma distribuição de corrente no espaço livre:

$$\mathbf{A} = (2x^2y + yz) \mathbf{a}_x + (xy^2 - xz^3) \mathbf{a}_y - (6xyz - 2x^2y^2) \mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$$

- (a) Calcule  $\mathbf{B}$ .
- (b) Determine o fluxo magnético através de uma espira descrita por  $x = 1, 0 < y \leq z < 2$ .
- (c) Demonstre que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

**7.29** O potencial magnético vetorial de uma distribuição de corrente no espaço livre é dado por

$$\mathbf{A} = 15e^{-\rho} \sin \phi \mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$$

Determine  $\mathbf{H}$  em  $(3, \pi/4, -10)$ . Calcule o fluxo através de  $\rho = 5, 0 \leq \phi \leq \pi/2$  e  $0 \leq z \leq 10$ .

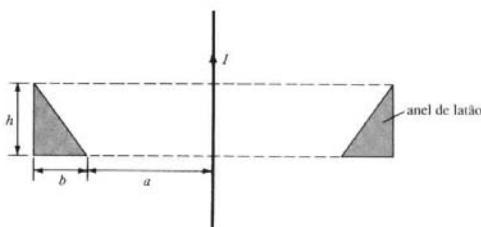


Figura 7.35 Seção reta de um anel de latão que circunda um fio retilíneo longo, referente ao Problema 7.25.

- 7.30** Um condutor de raio  $a$  é percorrido por uma corrente uniforme com  $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{a}_z$ . Demonstre que o potencial magnético vetorial para  $\rho > a$  é:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4} \mu_0 J_0 \rho^2 \mathbf{a}_z$$

- 7.31** Um condutor infinitamente longo, de raio  $a$ , está colocado de tal modo que seu eixo está ao longo do eixo  $z$ . O potencial magnético vetorial, devido à corrente contínua  $I_0$ , que flui ao longo de  $\mathbf{a}_z$  no interior do condutor, é dado por

$$\mathbf{A} = \frac{-I_0}{4\pi a^2} \mu_0 (x^2 + y^2) \mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$$

Determine o  $\mathbf{H}$  correspondente. Confirme seu resultado utilizando a lei de Ampère.

- 7.32** O potencial magnético vetorial de dois filamentos de corrente retilíneos infinitos e paralelos no espaço livre, percorridos por correntes iguais  $I$  e de sentidos contrários, é

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{d - \rho}{\rho} \mathbf{a}_z$$

onde  $d$  é a distância que separa os dois filamentos (com um dos filamentos disposto sobre o eixo  $z$ ). Determine a densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$  correspondente.

- 7.33** Determine a densidade de corrente  $\mathbf{J}$  para

$$\mathbf{A} = \frac{10}{\rho^2} \mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$$

no espaço livre.

- 7.34** Prove que o potencial magnético escalar em  $(0, 0, z)$  devido à uma espira circular de raio  $a$  mostrada na Figura 7.8(a) é:

$$V_m = \frac{I}{2} \left[ 1 - \frac{z}{[z^2 + a^2]^{1/2}} \right]$$

- \*7.35** Uma linha de transmissão coaxial é construída tal que o raio do condutor interno é  $a$  e os raios do condutor externo são  $3a$  e  $4a$ . Determine o potencial magnético vetorial dentro do condutor externo. Assuma  $A_z = 0$  para  $\rho = 3a$ .

- 7.36** O eixo  $z$  é percorrido por uma corrente filamentar de  $12 \text{ A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_z$ . Calcule  $V_m$  em  $(4, 30^\circ, -2)$  se  $V_m = 0$  em  $(10, 60^\circ, 7)$ .

- 7.37** O plano  $z = -2$  é percorrido por uma corrente de  $50 \text{ A/m}$ . Se  $V_m = 0$  na origem, determine  $V_m$  em:

- (a)  $(-2, 0, 5)$ ;
- (b)  $(10, 3, 1)$ .

- 7.38** Prove que, em coordenadas cilíndricas,

- (a)  $\nabla \times (\nabla V) = 0$
- (b)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

- 7.39** Se  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e  $R = |\mathbf{R}|$ , demonstre que

$$\nabla \frac{1}{\mathbf{R}} = -\nabla' \frac{1}{\mathbf{R}} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

onde  $\nabla$  e  $\nabla'$  são os operadores del em relação a  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$ , respectivamente.

# Capítulo 8

## FORÇAS, MATERIAIS E DISPOSITIVOS MAGNÉTICOS

Faça todo o bem que puder,  
Com todos os meios que puder,  
De todas as formas que puder,  
Em todos os lugares que puder,  
Todas as vezes que puder, para todas as pessoas que puder,  
Enquanto puder.

— JOHN WESLEY

### 8.1 INTRODUÇÃO

Tendo considerado as leis e as técnicas básicas comumente utilizadas no cálculo do campo magnético  $\mathbf{B}$  devido a vários arranjos de corrente, estamos preparados para estudar a força que um campo magnético exerce sobre partículas carregadas, elementos de corrente e espiras de corrente. Este estudo é importante para resolver problemas sobre dispositivos elétricos, como amperímetros, voltímetros, galvanômetros, ciclotrons, motores, geradores magnetoídrodinâmico e problemas que envolvem meios ionizados (plasmas). A definição precisa de campo magnético, deliberadamente “deixada de lado” no capítulo anterior, será dada agora. Os conceitos de momento magnético e de dipolo magnético também serão considerados.

Além disso, consideraremos campos magnéticos em meios materiais, em oposição aos campos magnéticos no espaço livre examinados no capítulo anterior. Os resultados do capítulo precedente necessitam somente algumas modificações para explicar a influência de materiais em um campo magnético. Discussões adicionais irão abordar os seguintes assuntos: indutores, indutâncias, energia magnética e circuitos magnéticos.

### 8.2 FORÇAS DEVIDO AOS CAMPOS MAGNÉTICOS

Há pelo menos três maneiras de a força provocada por campos magnéticos se manifestar. A força pode ser devido: (a) ao movimento de partículas carregadas em um campo magnético  $\mathbf{B}$ ; (b) à presença de um elemento de corrente em um campo externo  $\mathbf{B}$ ; (c) à interação entre dois elementos de corrente.

#### A. Força sobre partícula carregada

De acordo com nossa discussão no Capítulo 4, a força elétrica  $\mathbf{F}_e$  sobre uma carga  $Q$ , estacionária ou em movimento, em um campo elétrico é dada pela lei experimental de Coulomb e está relacionada à intensidade do campo elétrico  $\mathbf{E}$ , de acordo com

$$\mathbf{F}_e = QE \quad (8.1)$$

Esta relação mostra que se  $Q$  é positivo,  $\mathbf{F}_e$  e  $\mathbf{E}$  têm a mesma orientação.

Um campo magnético pode exercer força somente sobre uma carga em movimento. Da experiência, verifica-se que a força magnética  $\mathbf{F}_m$  experimentada por uma carga  $Q$  em movimento, com velocidade  $\mathbf{u}$  em um campo magnético  $\mathbf{B}$ , é:

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (8.2)$$

O que mostra, claramente, que  $\mathbf{F}_m$  é perpendicular tanto a  $\mathbf{u}$  quanto a  $\mathbf{B}$ .

A partir das equações (8.1) e (8.2), pode ser feita uma comparação entre a força elétrica  $\mathbf{F}_e$  e a força magnética  $\mathbf{F}_m$ .  $\mathbf{F}_e$  é independente da velocidade da carga e pode realizar trabalho sobre a carga e mudar sua energia cinética. Diferentemente de  $\mathbf{F}_e$ ,  $\mathbf{F}_m$  depende da velocidade da carga e é normal à ela.  $\mathbf{F}_m$  não pode realizar trabalho porque é perpendicular à direção do movimento da carga ( $\mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} = 0$ ). Essa força não causa aumento na energia cinética da carga. A magnitude de  $\mathbf{F}_m$  é geralmente pequena se comparada à de  $\mathbf{F}_e$ , exceto quando as velocidades envolvidas são altas.

Para uma carga  $Q$  em movimento, na presença de um campo elétrico e de um campo magnético, simultaneamente, a força total sobre a carga é dada por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

ou

$$\boxed{\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} \quad (8.3)$$

Esta equação é conhecida como a *equação de força de Lorentz*<sup>1</sup>. Ela relaciona a força mecânica à força elétrica. Se a massa da partícula carregada em movimento, na presença dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , é  $m$ , pela segunda lei do movimento de Newton,

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (8.4)$$

A solução desta equação é importante para determinar o movimento de partículas carregadas na presença dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Devemos ter em mente que, considerando esses campos, apenas o campo elétrico pode transferir energia. Um resumo da força exercida sobre uma partícula carregada é dado na Tabela 8.1.

Já que a equação (8.2) é parecida com a equação (8.1), que define o campo elétrico, alguns autores e professores preferem começar a discussão sobre a magnetostática a partir da equação (8.2), da mesma forma como as discussões na eletrostática usualmente se iniciam pela lei da força de Coulomb.

TABELA 8.1 Força sobre uma partícula carregada

Estado da partícula	Campo E	Campo B	Campos E e B combinados
Estática	$QE$	—	$QE$
Em movimento	$QE$	$Qu \times B$	$Q(E + u \times B)$

### B. Força sobre um elemento de corrente

Para determinar a força sobre um elemento de corrente  $I d\mathbf{l}$ , de uma corrente que percorre um condutor, devido a um campo magnético  $\mathbf{B}$ , modificamos a equação (8.2) a partir do fato de que para a corrente de convecção [veja equação (5.7)]:

$$\mathbf{J} = \rho_r \mathbf{u} \quad (8.5)$$

<sup>1</sup> Hendrik Lorentz (1853–1928) foi quem primeiro aplicou a equação para movimento em um campo elétrico.

Da equação (7.5), retomamos a relação entre elementos de corrente:

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{K} dS = \mathbf{J} dv \quad (8.6)$$

Combinando as equações (8.5) e (8.6), obtém-se

$$I d\mathbf{l} = \rho_s \mathbf{u} dv = dQ \mathbf{u}$$

$$\text{Alternativamente, } I d\mathbf{l} = \frac{dQ}{dt} d\mathbf{l} = dQ \frac{d\mathbf{l}}{dt} = dQ \mathbf{u}$$

Por conseguinte,

$$I d\mathbf{l} = dQ \mathbf{u} \quad (8.7)$$

Isso mostra que uma carga elementar  $dQ$ , se movimentando com uma velocidade  $\mathbf{u}$ , (conseqüentemente, originando um elemento de corrente de convecção  $dQ \mathbf{u}$ ) é equivalente a um elemento de corrente de condução  $I d\mathbf{l}$ . Dessa forma, a força sobre o elemento de corrente  $I d\mathbf{l}$ , em um campo magnético  $\mathbf{B}$ , é determinada da equação (8.2) simplesmente pela substituição de  $Qu$  por  $I d\mathbf{l}$ , isto é,

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8.8)$$

Se a corrente  $I$  percorre um caminho fechado  $L$  ou um circuito, a força sobre o circuito é dada por:

$$\mathbf{F} = \oint_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8.9)$$

Ao utilizar a equação (8.8) ou a (8.9), devemos ter em mente que o campo magnético produzido pelo elemento de corrente  $I d\mathbf{l}$  não exerce força sobre ele mesmo, da mesma forma que uma carga pontual não exerce força sobre si. O campo  $\mathbf{B}$  que exerce força sobre  $I d\mathbf{l}$  deve ser gerado por um outro elemento. Em outras palavras, o campo  $\mathbf{B}$  na equação (8.8) ou (8.9) é externo ao elemento de corrente  $I d\mathbf{l}$ . Se, ao invés do elemento de corrente em uma linha  $I d\mathbf{l}$ , tivermos elementos de corrente em uma superfície  $\mathbf{K} dS$  ou um elemento de corrente em um volume  $\mathbf{J} dv$ , simplesmente fazemos uso da equação (8.6), tal que a equação (8.8) torna-se

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K} dS \times \mathbf{B} \quad \text{ou} \quad d\mathbf{F} = \mathbf{J} dv \times \mathbf{B} \quad (8.8a)$$

enquanto a equação (8.9) torna-se:

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K} dS \times \mathbf{B} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} dv \times \mathbf{B} \quad (8.9a)$$

Da equação (8.8):

**O campo magnético  $\mathbf{B}$**  é definido como a força por elemento de corrente unitário.

Alternativamente,  $\mathbf{B}$  pode ser definido da equação (8.2) como o vetor que satisfaz  $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , da mesma forma como definimos o campo elétrico  $\mathbf{E}$  como a força por unidade de carga,  $\mathbf{F}_e/q$ . Ambas as definições demonstram que  $\mathbf{B}$  descreve as propriedades de força de um campo magnético.

### C. Força entre dois elementos de corrente

Consideremos agora a força entre dois elementos de corrente  $I_1 d\mathbf{l}_1$  e  $I_2 d\mathbf{l}_2$ . De acordo com a lei de Biot-Savart, ambos os elementos de corrente geram campos magnéticos. Assim, podemos determinar a força  $d(d\mathbf{F}_1)$  sobre o elemento  $I_1 d\mathbf{l}_1$  devido ao campo  $d\mathbf{B}_2$ , gerado pelo elemento de corrente  $I_2 d\mathbf{l}_2$ , como mostrado na Figura 8.1. A partir da equação (8.8):

$$d(d\mathbf{F}_1) = I_1 d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}_2 \quad (8.10)$$

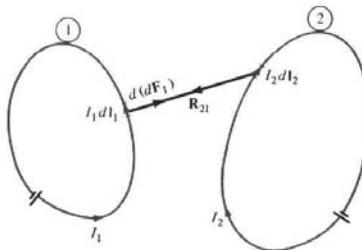


Figura 8.1 Força entre duas espiras de corrente.

Contudo, a partir da lei de Biot–Savart:

$$d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}}}{4\pi R_{21}^2} \quad (8.11)$$

Assim,

$$d(d\mathbf{F}_1) = \frac{\mu_0 I_1 d\mathbf{l}_1 \times (I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}})}{4\pi R_{21}^2} \quad (8.12)$$

Esta equação é, essencialmente, a lei da força entre dois elementos de corrente e é análoga à lei de Coulomb, que expressa a força entre duas cargas estáticas. Da equação (8.12), obtemos a força total  $\mathbf{F}_1$  sobre a espira de corrente 1 devido à espira de corrente 2, mostradas na Figura 8.1, como

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2} \quad (8.13)$$

Embora a equação pareça complicada, devemos lembrar que ela é baseada na equação (8.10), isto é, é a equação (8.9) ou a equação (8.10) que é de fundamental importância.

A força  $\mathbf{F}_2$  sobre a espira 2, devido ao campo magnético  $\mathbf{B}_1$  da espira 1, é obtida a partir da equação (8.13) pelo intercâmbio dos índices subscritos 1 e 2. Pode-se demonstrar que  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ . Dessa forma,  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  obedecem à terceira lei de Newton, para a qual ação e reação são iguais e opostas. É válido mencionar que a equação (8.13) foi experimentalmente estabelecida por Oersted e por Ampère. Na verdade, Biot e Savart (colegas de Ampère) usaram essa experiência como base para sua lei.

### EXEMPLO 8.1

Uma partícula carregada, de massa 2 kg e carga 3 C, parte do ponto  $(1, -2, 0)$  com velocidade  $4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$  m/s em um campo elétrico  $12\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y$  V/m. Em  $t = 1$  s, determine:

- (a) a aceleração da partícula;
- (b) sua velocidade;
- (c) sua energia cinética;
- (d) sua posição.

#### Solução:

(a) Esse é um problema de valor inicial porque são dados valores iniciais. De acordo com a segunda lei do movimento de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = Q\mathbf{E}$$

onde  $\mathbf{a}$  é a aceleração da partícula. Assim,

$$\mathbf{a} = \frac{Q\mathbf{E}}{m} = \frac{3}{2} (12\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y) = 18\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt} (u_x, u_y, u_z) = 18\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y$$

(b) Equacionando as componentes, tem-se:

$$\frac{du_x}{dt} = 18 \rightarrow u_x = 18t + A \quad (8.1.1)$$

$$\frac{du_y}{dt} = 15 \rightarrow u_y = 15t + B \quad (8.1.2)$$

$$\frac{du_z}{dt} = 0 \rightarrow u_z = C \quad (8.1.3)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes de integração. Porém, em  $t = 0$ ,  $\mathbf{u} = 4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$ . Donde:

$$u_x(t = 0) = 4 \rightarrow 4 = 0 + A \quad \text{ou} \quad A = 4$$

$$u_y(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B \quad \text{ou} \quad B = 0$$

$$u_z(t = 0) = 3 \rightarrow 3 = C$$

Substituindo os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  nas equações (8.1.1) a (8.1.3) resulta em:

$$\mathbf{u}(t) = (u_x, u_y, u_z) = (18t + 4, 15t, 3)$$

Dessa forma

$$\mathbf{u}(t = 1 \text{ s}) = 22\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z \text{ m/s}$$

$$(c) \text{A energia cinética (EC)} = \frac{1}{2}m|\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2}(2)(22^2 + 15^2 + 3^2) \\ = 718 \text{ J}$$

$$(d) \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(x, y, z) = (18t + 4, 15t, 3)$$

Equacionando as componentes, obtém-se

$$\frac{dx}{dt} = u_x = 18t + 4 \rightarrow x = 9t^2 + 4t + A_1 \quad (8.1.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y = 15t \rightarrow y = 7,5t^2 + B_1 \quad (8.1.5)$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z = 3 \rightarrow z = 3t + C_1 \quad (8.1.6)$$

Em  $t = 0$ ,  $(x, y, z) = (1, -2, 0)$ . Assim,

$$x(t = 0) = 1 \rightarrow 1 = 0 + A_1 \quad \text{ou} \quad A_1 = 1$$

$$y(t = 0) = -2 \rightarrow -2 = 0 + B_1 \quad \text{ou} \quad B_1 = -2$$

$$z(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + C_1 \quad \text{ou} \quad C_1 = 0$$

Substituindo os valores de  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  nas equações (8.1.4) a (8.1.6), obtemos:

$$(x, y, z) = (9t^2 + 4t + 1, 7,5t^2 - 2, 3t) \quad (8.1.7)$$

Dessa forma, em  $t = 1$ ,  $(x, y, z) = (14, 5, 5, 3)$ .

Ao eliminar  $t$  na equação (8.1.7), o movimento da partícula pode ser descrito em termos de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**EXERCÍCIO PRÁTICO 8.1**

Uma partícula, carregada de massa 1 kg e carga 2 C, parte da origem, com velocidade inicial zero, em uma região onde  $\mathbf{E} = 3\mathbf{a}_z$  V/m. Determine:

- a força sobre a partícula;
- o tempo que a partícula leva para alcançar o ponto  $P(0, 0, 12)$  m;
- a velocidade e a aceleração da partícula em  $P$ ;
- a energia cinética da partícula em  $P$ .

**Resposta:** (a)  $6\mathbf{a}_z$  N; (b) 2 s; (c)  $12\mathbf{a}_z$  m/s,  $6\mathbf{a}_z$  m/s<sup>2</sup>; (d) 72 J.

**EXEMPLO 8.2**

Uma partícula, carregada de massa 2 kg e carga 1 C, parte da origem com velocidade  $3\mathbf{a}_y$  m/s e atravessa uma região com campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = 10\mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup>. Em  $t = 4$  s, calcule:

- a velocidade e a aceleração da partícula;
- a força magnética sobre a partícula;
- a energia cinética (EC) da partícula e sua localização;
- determine a trajetória da partícula eliminando  $t$ ;
- demonstre que a energia cinética (EC) da partícula permanece constante.

**Solução:**

$$(a) \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{Q}{m} \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Assim

$$\frac{d}{dt} (u_x \mathbf{a}_x + u_y \mathbf{a}_y + u_z \mathbf{a}_z) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5(u_y \mathbf{a}_x - u_x \mathbf{a}_y)$$

Comparando ambos os lados da igualdade, componente a componente, obtemos:

$$\frac{du_x}{dt} = 5u_y \quad (8.2.1)$$

$$\frac{du_y}{dt} = -5u_x \quad (8.2.2)$$

$$\frac{du_z}{dt} = 0 \rightarrow u_z = C_0 \quad (8.2.3)$$

Podemos eliminar  $u_x$  ou  $u_y$ , nas equações (8.2.1) e (8.2.2), tomando a derivada segunda da primeira equação e utilizando a outra. Então,

$$\frac{d^2u_x}{dt^2} = 5 \frac{du_y}{dt} = -25u_x$$

ou

$$\frac{d^2u_x}{dt^2} + 25u_x = 0$$

que é uma equação diferencial linear com solução (veja o Caso 3 do Exemplo 6.5):

$$u_x = C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t \quad (8.2.4)$$

Das equações (8.2.1) e (8.2.4),

$$5u_y = \frac{du_x}{dt} = -5C_1 \sin 5t + 5C_2 \cos 5t \quad (8.2.5)$$

ou

$$u_y = -C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t$$

Determinamos, agora, as constantes  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  utilizando as condições iniciais. Em  $t = 0$ ,  $\mathbf{u} = 3\mathbf{a}_y$ . Portanto:

$$u_x = 0 \rightarrow 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$u_y = 3 \rightarrow 3 = -C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \rightarrow C_2 = 3$$

$$u_z = 0 \rightarrow 0 = C_0$$

Substituindo os valores de  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  nas equações (8.2.3) a (8.2.5), resulta em

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = (3 \sin 5t, 3 \cos 5t, 0) \quad (8.2.6)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t = 4) &= (3 \sin 20, 3 \cos 20, 0) \\ &= 2,739\mathbf{a}_x + 1,224\mathbf{a}_y \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = (15 \cos 5t, -15 \sin 5t, 0)$$

e

$$\mathbf{a}(t = 4) = 6,101\mathbf{a}_x - 13,703\mathbf{a}_y \text{ m/s}^2$$

$$(b) \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 12,2\mathbf{a}_x - 27,4\mathbf{a}_y \text{ N}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} = (1)(2,739\mathbf{a}_x + 1,224\mathbf{a}_y) \times 10\mathbf{a}_z \\ &= 12,2\mathbf{a}_x - 27,4\mathbf{a}_y \text{ N} \end{aligned}$$

(c) a energia cinética (EC) =  $1/2m|\mathbf{u}|^2 = 1/2(2)(2,739^2 + 1,224^2) = 9 \text{ J}$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = 3 \sin 5t \rightarrow x = -\frac{3}{5} \cos 5t + b_1 \quad (8.2.7)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = 3 \cos 5t \rightarrow y = \frac{3}{5} \sin 5t + b_2 \quad (8.2.8)$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = 0 \rightarrow z = b_3 \quad (8.2.9)$$

onde  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são constantes de integração. Em  $t = 0$ ,  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  e, portanto,

$$x(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = -\frac{3}{5} \cdot 1 + b_1 \rightarrow b_1 = 0,6$$

$$y(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = \frac{3}{5} \cdot 0 + b_2 \rightarrow b_2 = 0$$

$$z(t = 0) = 0 \rightarrow 0 = b_3$$

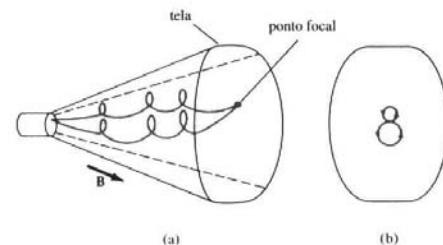


Figura 8.2 Focalização magnética de um feixe de elétrons: (a) trajetórias helicoidais dos elétrons; (b) vista das trajetórias, a partir do ponto final das mesmas.

Substituindo os valores de  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  nas equações (8.2.7) a (8.2.9), obtemos

$$(x, y, z) = (0,6 - 0,6 \cos 5t, 0,6 \sin 5t, 0) \quad (8.2.10)$$

Em  $t = 4$  s

$$(x, y, z) = (0,3552, 0,5478, 0)$$

(d) Da equação (8.2.10), eliminamos  $t$  observando que

$$(x - 0,6)^2 + y^2 = (0,6)^2 (\cos^2 5t + \sin^2 5t), \quad z = 0$$

ou

$$(x - 0,6)^2 + y^2 = (0,6)^2, \quad z = 0$$

que é um círculo sobre o plano  $z = 0$ , centrado em  $(0,6, 0, 0)$  e com raio 0,6 m. Dessa forma, a partícula gira em uma órbita que coincide com uma linha de campo magnético.

$$(e) \quad \text{E.C.} = \frac{1}{2} m |\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} (2) (9 \cos^2 5t + 9 \sin^2 5t) = 9 \text{ J}$$

que é a mesma energia cinética (EC) em  $t = 0$  e  $t = 4$  s. Logo, o campo magnético uniforme não tem efeito sobre a energia cinética da partícula.

Observe que a velocidade angular  $\omega = QB/m$  e o raio da órbita  $r = u_0/\omega$ , onde  $u_0$  é a velocidade inicial. Uma interessante aplicação deste exemplo é na focalização de um feixe de elétrons. Neste caso, é empregado um campo magnético uniforme orientado paralelamente ao feixe desejado, como mostra a Figura 8.2. Cada elétron que emerge do canhão de elétrons segue uma trajetória helicoidal e retorna ao eixo no mesmo ponto focal, juntamente com outros elétrons. Se uma tela de um tubo de raios catódicos for colocada nesse ponto, um ponto luminoso irá aparecer na tela.

### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.2

Um próton de massa  $m$  penetra um campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$  com uma velocidade inicial  $\alpha \mathbf{a}_x + \beta \mathbf{a}_y$ . (a) Encontre as equações diferenciais que o vetor posição  $\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$  deve satisfazer. (b) Demonstre que a solução dessas equações é:

$$x = \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t, \quad y = \frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t, \quad z = \beta t$$

onde  $\omega = eB_0/m$  e  $e$  é a carga do próton. (c) Demonstre que essa solução descreve uma hélice circular no espaço.

**Resposta:** (a)  $\frac{dx}{dt} = \alpha \cos \omega t$ ,  $\frac{dy}{dt} = -\alpha \sin \omega t$ ,  $\frac{dz}{dt} = \beta$ , (b) e (c) a demonstração.

**EXEMPLO 8.3**

Uma partícula carregada se move com uma velocidade uniforme  $4\mathbf{a}_x$  m/s em uma região onde  $\mathbf{E} = 20 \mathbf{a}_y$  V/m e  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup>. Determine  $B_0$  tal que a velocidade da partícula permaneça constante.

**Solução:**

Se a partícula se move com uma velocidade constante, isso implica que sua aceleração é zero. Em outras palavras, a partícula não sofre qualquer força líquida. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{F} = Q\mathbf{a} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ 0 &= Q(20\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_x \times B_0\mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

ou

$$-20\mathbf{a}_y = -4B_0\mathbf{a}_y$$

Então,  $B_0 = 5$ .

Esse exemplo ilustra um princípio importante empregado em um filtro de velocidade, mostrado na Figura 8.3. Nessa aplicação,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{u}$  são mutuamente perpendiculares, tal que  $Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  é orientada em oposição a  $QE$ , independente do sinal da carga. Quando as magnitudes dos dois vetores são iguais,

$$QuB = QE$$

ou

$$u = \frac{E}{B}$$

Esta é a velocidade crítica requerida para igualar os dois termos da equação de força de Lorentz. Partículas com esta velocidade não são defletidas pelos campos, mas são “filtradas” através da abertura. Partículas com outras velocidades são defletidas para cima ou para baixo, dependendo se suas velocidades são maiores ou menores que a velocidade crítica.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 8.3**

Os campos uniformes  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  estão orientados em ângulos retos um em relação ao outro. Um elétron se move com uma velocidade  $8 \times 10^6$  m/s perpendicularmente a ambos os campos e atravessa-os sem ser defletido.

- Se a magnitude de  $\mathbf{B}$  for de 0,5 mWb/m<sup>2</sup>, determine o valor de  $\mathbf{E}$ .
- Esse filtro funcionará para cargas positivas e negativas e para qualquer valor de massa?

**Resposta:** (a) 4 kV/m; (b) sim.

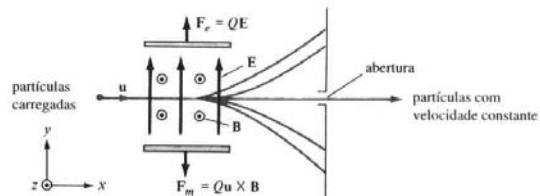


Figura 8.3 Um filtro de velocidade para partículas carregadas.

**EXEMPLO 8.4**

Uma espira retangular, percorrida por uma corrente  $I_2$ , é colocada paralelamente a um fio infinitamente longo, percorrido por uma corrente  $I_1$ , como mostrado na Figura 8.4(a). Demonstre que a força sobre a espira é dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left[ \frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho_o + a} \right] \mathbf{a}_\rho \text{ N}$$

**Solução:**

Seja a força sobre a espira dada por

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = I_2 \oint dl_2 \times \mathbf{B}_1$$

onde  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$ , e  $\mathbf{F}_4$  são, respectivamente, as forças exercidas sobre os lados da espira referidos como 1, 2, 3 e 4 na Figura 8.4(b). Devido ao fio infinitamente longo:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho_o} \mathbf{a}_\phi$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= I_2 \int dl_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 \int_{z=0}^b dz \mathbf{a}_z \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho_o} \mathbf{a}_\phi \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi\rho_o} \mathbf{a}_\rho \quad (\text{atrativa}) \end{aligned}$$

$\mathbf{F}_1$  é uma força atrativa porque está dirigida para o fio longo, isto é,  $\mathbf{F}_1$  está orientado ao longo de  $-\mathbf{a}_\rho$  pelo fato de que o lado 1 da espira e o fio longo são percorridos por correntes no mesmo sentido. De maneira similar,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 &= I_2 \int dl_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 \int_{z=b}^0 dz \mathbf{a}_z \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\rho_o + a)} \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(\rho_o + a)} \mathbf{a}_\rho \quad (\text{repulsiva}) \\ \mathbf{F}_2 &= I_2 \int_{\rho=\rho_o}^{\rho_o+a} d\rho \mathbf{a}_\rho \times \frac{\mu_0 I_1 \mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{\rho_o + a}{\rho_o} \mathbf{a}_z \quad (\text{paralela}) \end{aligned}$$

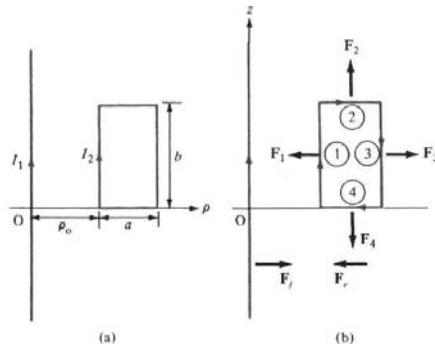


Figura 8.4 Referente ao Exemplo 8.4: (a) espira retangular sob a influência de um campo produzido por um fio infinitamente longo; (b) forças que atuam sobre a espira e o fio.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_4 &= I_2 \int_{\rho=\rho_o+a}^{\rho_o} d\rho \mathbf{a}_\rho \times \frac{\mu_0 I_1 \mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho} \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{\rho_o + a}{\rho_o} \mathbf{a}_z \quad (\text{paralela})\end{aligned}$$

A força total  $\mathbf{F}_e$  sobre a espira é a soma de  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  e  $\mathbf{F}_4$ , isto é:

$$\mathbf{F}_e = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left[ \frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho_o + a} \right] (-\mathbf{a}_\rho)$$

que é uma força atrativa e tenta mover a espira em direção ao fio. A força  $\mathbf{F}_f$  sobre o fio, pela terceira lei de Newton, é igual a  $-\mathbf{F}_e$ . Veja a Figura 8.4(b).

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.4

No Exemplo 8.4, determine a força sobre o fio infinitamente longo, se  $I_1 = 10\text{A}$ ,  $I_2 = 5\text{A}$ ,  $\rho_0 = 20\text{ cm}$ ,  $a = 10\text{ cm}$ ,  $b = 30\text{ cm}$ .

**Resposta:**  $5\mathbf{a}_\rho \mu\text{N}$ .

### 8.3 TORQUE E MOMENTO MAGNÉTICOS

Tendo considerado a força sobre uma espira de corrente em um campo magnético, podemos determinar o torque sobre ela. O conceito de torque sobre uma espira de corrente quando sob ação de um campo magnético é de fundamental importância para entender o comportamento de partículas carregadas em órbita, de motores de corrente contínua e de geradores. Se a espira for colocada paralelamente a um campo magnético, ela sofre uma força que tende a girá-la.

O torque  $\mathbf{T}$  (ou momento mecânico de força) sobre a espira é o produto vetorial entre a força  $\mathbf{F}$  e o braço de alavanca  $\mathbf{r}$ .

Isto é:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (8.14)$$

e sua unidade é Newtons-metro ( $\text{N} \cdot \text{m}$ ).

Apliquemos esta relação à uma espira retangular, de comprimento  $l$  e largura  $w$ , colocada em um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ , como mostrado na Figura 8.5(a). A partir desta figura, observamos que  $d\mathbf{l}$  é paralelo a  $\mathbf{B}$  ao longo dos lados 12 e 34 da espira, e que nenhuma força é exercida sobre estes lados. Então:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= I \int_{l_2}^{l_3} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} + I \int_{l_4}^{l_1} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \\ &= I \int_0^\ell dz \mathbf{a}_z \times \mathbf{B} + I \int_\ell^0 dz \mathbf{a}_z \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_o - \mathbf{F}_o = 0 \quad (8.15)$$

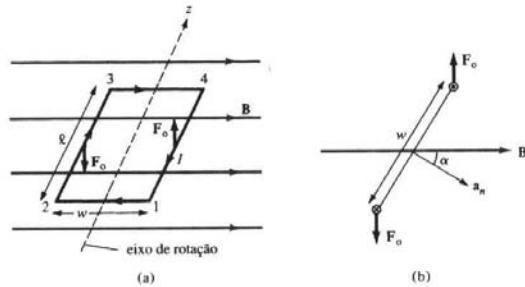


Figura 8.5 Espira retangular plana em um campo magnético uniforme.

onde  $|F_o| = IB\ell$  porque  $\mathbf{B}$  é uniforme. Então, nenhuma força é exercida sobre a espira como um todo. Entretanto,  $\mathbf{F}_o$  e  $-\mathbf{F}_o$  agem em diferentes pontos sobre a espira e, com isso, geram um conjugado. Se a normal ao plano da espira faz um ângulo  $\alpha$  com  $\mathbf{B}$ , como mostrado na vista em seção reta da Figura 8.5(b), o torque sobre a espira é

$$|\mathbf{T}| = |F_o| w \sin \alpha$$

ou

$$T = BI\ell w \sin \alpha \quad (8.16)$$

Contudo,  $\ell w = S$ , a área da espira. Portanto:

$$T = BIS \sin \alpha \quad (8.17)$$

Definimos

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n \quad (8.18)$$

como o *momento de dipolo magnético* da espira (em  $\text{A/m}^2$ ). Na equação (8.18),  $\mathbf{a}_n$  é o vetor unitário normal ao plano da espira e sua orientação é determinada pela regra da mão direita – dedos apontando no sentido da corrente e o polegar ao longo de  $\mathbf{a}_n$ .

**O momento de dipolo magnético** é o produto entre a corrente e a área da espira. Sua direção é perpendicular à espira.

Introduzindo a equação (8.18) na equação (8.17), obtemos:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (8.19)$$

Esta expressão é geralmente aplicável para determinar o torque sobre uma espira plana, de qualquer formato, embora ela tenha sido obtida para uma espira retangular. A única limitação é que o campo magnético deve ser uniforme. Deve-se observar que o torque é na direção do eixo de rotação (eixo  $z$  no caso da Figura 8.5a). Ele é orientado de forma a diminuir  $\alpha$  uma vez que  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}$  estão alinhados. Em uma posição de equilíbrio (quando  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}$  têm a mesma orientação), a espira é perpendicular ao campo magnético e o torque será zero, bem como a soma de forças na espira.

## 8.4 DIPOLO MAGNÉTICO

Um ímã ou uma pequena espira filamentar de corrente é usualmente referido como um *dipolo magnético*. A razão para tanto e o que significa para nós “pequena” ficará logo evidente. Determinemos o campo magnético  $\mathbf{B}$  em um ponto  $P(r, \theta, \phi)$  devido a uma espira circular que é percorrida por uma corrente  $I$ , como mostrado na Figura 8.6. O potencial magnético vetorial em  $P$  é:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}}{r} \quad (8.20)$$

Pode-se demonstrar que, em campo distante ( $r \gg a$ , tal que a espira pareça pequena para um observador no ponto  $P$ ),  $\mathbf{A}$  tem somente a componente  $\phi$  e é dada por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta \mathbf{a}_\phi}{4\pi r^2} \quad (8.21a)$$

ou

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{a}_r}{4\pi r^2}} \quad (8.21b)$$

onde  $\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{a}_z$ , o momento magnético da espira, e  $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \sin \theta \mathbf{a}_\phi$ . Determinamos a densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$  a partir de  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , fazendo:

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\phi)} \quad (8.22)$$

É interessante comparar as equações (8.21) e (8.22) com as expressões similares (4.80) e (4.82) para o potencial elétrico  $V$  e a intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  devido a um dipolo elétrico. A comparação é feita na Tabela 8.2, na qual observamos a estreita semelhança entre  $\mathbf{B}$ , em campo distante, como o campo devido a uma pequena espira de corrente, e  $\mathbf{E}$ , em campo distante, devido a um dipolo elétrico. É, portanto, razoável considerar uma pequena espira de corrente como um dipolo magnético. As linhas de  $\mathbf{B}$  devido a um dipolo magnético são similares às linhas de  $\mathbf{E}$  devido a um dipolo elétrico. A Figura 8.7(a) ilustra as linhas de  $\mathbf{B}$  em torno do dipolo magnético  $\mathbf{m} = IS$ .

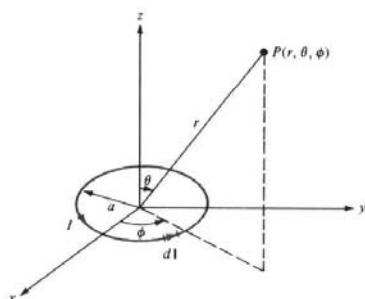
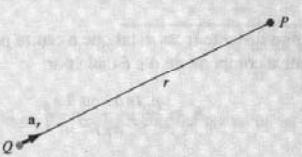
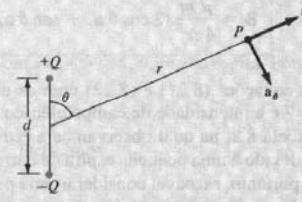
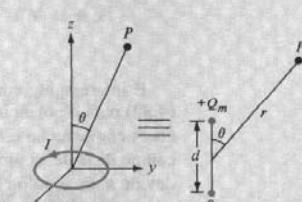


Figura 8.6 Campo magnético em  $P$  devido à uma espira de corrente.

TABELA 8.2 Comparação entre monopolos elétricos e magnéticos e entre dipolos elétricos e magnéticos

Elétrico	Magnético
$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ $\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 	Não existe 
Monopol (carga pontual)	Monopol (carga pontual)
$V = \frac{Q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$ 	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m \sin \theta \mathbf{a}_\phi}{4\pi r^2}$ $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$ 
Dipolo (duas cargas pontuais)	Dipolo (pequena espira de corrente ou barra imantada)

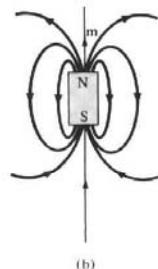
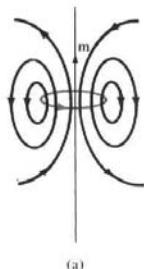


Figura 8.7 As linhas de  $\mathbf{B}$  devido aos dipolos magnéticos: (a) uma pequena espira de corrente com  $\mathbf{m} = IS$ ; (b) um ímã com  $\mathbf{m} = Q_m \ell$ .

Uma pequeno ímã permanente, mostrado na Figura 8.7(b), pode também ser considerado como um dipolo magnético. Observe que as linhas de  $\mathbf{B}$  devido ao ímã são similares àquelas devido à pequena espira de corrente na Figura 8.7(a).

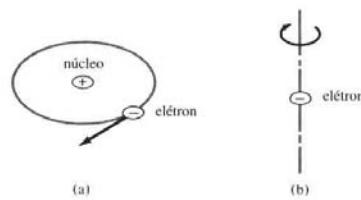


Figura 8.10 (a) Elétron orbitando em torno do núcleo; (b) movimento de rotação do elétron.

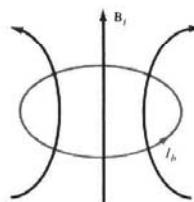


Figura 8.11 Espira circular de corrente equivalente ao movimento eletrônico da Figura 8.10.

Se há  $N$  átomos em um dado volume  $\Delta v$  e o  $k$ -ésimo átomo tem um momento de dipolo  $\mathbf{m}_k$ ,

$$\boxed{\mathbf{M} = \lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{m}_k}{\Delta v}} \quad (8.27)$$

Um meio para o qual  $\mathbf{M}$  não é zero em nenhum ponto é dito magnetizado. Para um volume diferencial  $dv'$ , o momento magnético é  $d\mathbf{m} = \mathbf{M} dv'$ . Da equação (8.21b), o potencial magnético vetorial devido a  $d\mathbf{m}$  é:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} dv' = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} dv'$$

De acordo com a equação (7.46):

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = \nabla' \frac{1}{R}$$

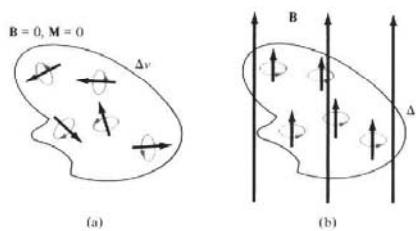


Figura 8.12 Momento de dipolo magnético em um volume  $\Delta v$ : (a) antes da aplicação de  $\mathbf{B}$ ; (b) após a aplicação de  $\mathbf{B}$ .

Escolhemos o sinal positivo em função da orientação da corrente na espira (usando a regra da mão direita,  $\mathbf{m}$  é orientado como na figura 8.9). Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= 5(4 \operatorname{sen} 60^\circ) \frac{(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{3}} \\ &= 10(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \text{ A} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

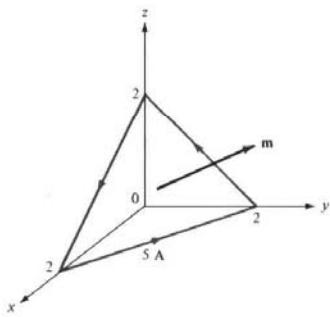


Figura 8.9 Espira triangular do Exemplo 8.5.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.5

Uma bobina retangular, de área  $10 \text{ cm}^2$ , é percorrida por uma corrente de  $50 \text{ A}$  e está sobre o plano  $2x + 6y - 3z = 7$ , tal que o momento magnético da bobina está orientado para fora da origem. Calcule seu momento magnético.

**Resposta:**  $(1,429\mathbf{a}_x + 4,286\mathbf{a}_y - 2,143\mathbf{a}_z) \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2$

#### EXEMPLO 8.6

Uma pequena espira de corrente  $L_1$ , com momento magnético  $5\mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$ , está localizada na origem, enquanto outra pequena espira de corrente, com momento magnético  $3\mathbf{a}_y \text{ A/m}^2$  está localizada em  $(4, -3, 10)$ . Determine o torque sobre  $L_2$ .

**Solução:**

O torque  $\mathbf{T}_2$  sobre a espira  $L_2$  é devido ao campo  $\mathbf{B}_1$  produzido pela espira  $L_1$ . Portanto,

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{B}_1$$

Já que  $\mathbf{m}_1$  para a espira  $L_1$  é ao longo de  $\mathbf{a}_z$ , determinamos  $\mathbf{B}_1$  usando a equação (8.22):

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$

Utilizando a equação (2.23), transformamos  $\mathbf{m}_2$  do sistema de coordenadas cartesiano para o sistema esférico:

$$\mathbf{m}_2 = 3\mathbf{a}_y = 3(\sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi)$$

Em  $(4, -3, 10)$ :

$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y}{z} = \frac{-3}{10} = \frac{-3}{5}, \quad \cos \phi = \frac{4}{5}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5}{4\pi \cdot 625 \cdot \sqrt{5}} \left( \frac{4}{\sqrt{5}} \mathbf{a}_r + \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{a}_\theta \right) \\ &= \frac{10^{-7}}{625} (4\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta) \\ \mathbf{m}_2 &= 3 \left[ -\frac{3\mathbf{a}_r}{5\sqrt{5}} - \frac{6\mathbf{a}_\theta}{5\sqrt{5}} + \frac{4\mathbf{a}_\phi}{5} \right]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{10^{-7}(3)}{625(5\sqrt{5})} (-3\mathbf{a}_r - 6\mathbf{a}_\theta + 4\sqrt{5}\mathbf{a}_\phi) \times (4\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\phi) \\ &= 4,293 \times 10^{-11} (-6\mathbf{a}_r + 38,78\mathbf{a}_\theta + 24\mathbf{a}_\phi) \\ &= -0,258\mathbf{a}_r + 1,665\mathbf{a}_\theta + 1,03\mathbf{a}_\phi \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.6

Se a bobina do Exercício Prático 8.5 é imersa em um campo uniforme  $0,6\mathbf{a}_x + 0,4\mathbf{a}_y + 0,5\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}^2$ ,

- (a) determine o torque sobre a bobina;
- (b) demonstre que o torque sobre a bobina é máximo se ela for colocada sobre o plano  $2x - 8y + 4z = \sqrt{84}$ . Calcule o valor do torque máximo.

**Resposta:** (a)  $0,03\mathbf{a}_x - 0,02\mathbf{a}_y - 0,02\mathbf{a}_z \text{ N} \cdot \text{m}$ ; (b)  $0,04387 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

## 8.5 MAGNETIZAÇÃO EM MATERIAIS

Nossa discussão aqui será semelhante àquela sobre a polarização de materiais em um campo elétrico. Assumiremos que nosso modelo atômico é o de um elétron orbitando em torno de um núcleo positivo.

Sabemos que um dado material é composto de átomos. Cada átomo pode ser considerado como constituído de elétrons orbitando em torno de um núcleo central positivo. Os elétrons também giram em torno de seus próprios eixos. Portanto, um campo magnético interno é gerado pelos elétrons que orbitam em torno do núcleo como na Figura 8.10(a), ou pela rotação dos elétrons, como na Figura 8.10(b). Esses dois movimentos eletrônicos geram campos magnéticos internos  $\mathbf{B}_i$  que são similares ao campo magnético produzido por uma espira de corrente da Figura 8.11. A espira de corrente equivalente tem um momento magnético  $\mathbf{m} = I_b S \mathbf{a}_n$ , onde  $S$  é a área da espira e  $I_b$  é a corrente no torno do átomo.

Sem um campo externo  $\mathbf{B}$  aplicado ao material, a soma dos  $\mathbf{ms}$  é zero devido à orientação randômica, como na Figura 8.12(a). Quando um campo externo  $\mathbf{B}$  é aplicado, os momentos magnéticos dos elétrons tendem a se alinhar com  $\mathbf{B}$ , tal que o momento magnético líquido não é zero, como ilustrado na Figura 8.12(b).

A magnetização  $\mathbf{M}$  (em ampèresmetro) é o momento do dipolo magnético por unidade de volume.

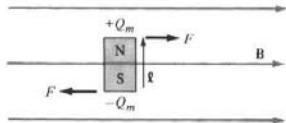


Figura 8.8 Um ímã em um campo magnético externo.

Considere o ímã da Figura 8.8. Se  $Q_m$  é uma carga magnética isolada (intensidade de pólo) e  $\ell$  o seu comprimento, o ímã tem um momento de dipolo  $Q_m \ell$ . (Observe que  $Q_m$  existe, entretanto, não existe sem  $-Q_m$  associado. Veja tabela 8.2.) Quando ímã está imerso em um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ , ele experimenta um torque

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = Q_m \ell \times \mathbf{B} \quad (8.23)$$

onde  $\ell$  aponta na direção sul-norte. O torque tende a alinhar o ímã com o campo magnético externo. A força que age sobre a carga magnética é dada por:

$$\mathbf{F} = Q_m \mathbf{B} \quad (8.24)$$

Já que tanto uma pequena espira de corrente quanto um ímã se comportam como dipolos magnéticos, eles são equivalentes se produzem o mesmo torque quando sob a ação de um dado campo magnético  $\mathbf{B}$ , isto é, quando

$$T = Q_m \ell B = ISB \quad (8.25)$$

Dessa forma,

$$Q_m \ell = IS \quad (8.26)$$

demonstrando que eles devem ter o mesmo momento de dipolo.

### EXEMPLO 8.5

Determine o momento magnético de um circuito elétrico formado pela espira triangular da Figura 8.9.

#### Solução:

Do Problema 1.18(c), a equação de um plano é dada por  $Ax + By + Cz + D = 0$ , onde  $D = -(A^2 + B^2 + C^2)$ . Uma vez que os pontos  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  e  $(0, 0, 2)$  estão sobre o plano, estes pontos devem satisfazer a equação do plano e as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  podem ser determinadas. Fazendo isto, resulta em  $x + y + z = 2$  como o plano sobre o qual a espira está. Portanto, podemos usar

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n$$

onde

$$\begin{aligned} S &= \text{área despiras} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) \text{sen } 60^\circ \\ &= 4 \text{ sen } 60^\circ \end{aligned}$$

Definimos a superfície plana pela função

$$f(x, y, z) = x + y + z - 2 = 0,$$

$$\mathbf{a}_n = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \pm \frac{(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{3}}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{R} dv' \quad (8.28)$$

Utilizando a equação (7.48), obtém-se:

$$\mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \nabla' \times \mathbf{M} - \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R}$$

Substituindo esta relação na equação (8.28):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R} dv'$$

Aplicando a identidade vetorial

$$\int_{v'} \nabla' \times \mathbf{F} dv' = - \oint_{S'} \mathbf{F} \times d\mathbf{S}$$

à segunda integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{a}_n}{R} dS' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\mathbf{J}_m}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_m}{R} dS' \end{aligned} \quad (8.29)$$

Comparando a equação (8.29) com as equações (7.42) e (7.43) (desconsiderando “as linhas”), obtém-se:

$$\boxed{\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}} \quad (8.30)$$

e

$$\boxed{\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n} \quad (8.31)$$

onde  $\mathbf{J}_m$  é a *densidade de corrente de magnetização ligada em um volume*, ou a *densidade de corrente de magnetização em um volume* (em ampères por metro quadrado),  $\mathbf{K}_m$  é a *densidade de corrente ligada em uma superfície* (em ampères por metro) e  $\mathbf{a}_n$  é o vetor unitário normal à superfície. A equação (8.29) mostra que o potencial de um corpo magnético é devido à densidade de corrente em um volume  $\mathbf{J}_m$  através do corpo e de uma corrente  $\mathbf{K}_m$  sobre a superfície do corpo. O vetor  $\mathbf{M}$  é análogo ao vetor polarização  $\mathbf{P}$  nos dielétricos e, algumas vezes, é chamado de *densidade de polarização magnética* do meio. Em outro sentido,  $\mathbf{M}$  é análogo a  $\mathbf{H}$  e ambos têm as mesmas unidades. Neste aspecto, assim como  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ , também  $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ .  $\mathbf{J}_m$  e  $\mathbf{K}_m$  para um corpo imantado também são similares à  $\rho_{ov}$  e  $\rho_{ps}$  para um corpo polarizado. Como fica evidenciado nas equações (8.29) a (8.31),  $\mathbf{J}_m$  e  $\mathbf{K}_m$  podem ser obtidos de  $\mathbf{M}$ . Por conseguinte,  $\mathbf{J}_m$  e  $\mathbf{K}_m$  não são comumente utilizados.

No espaço livre,  $\mathbf{M} = 0$  e temos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \text{ou} \quad \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \mathbf{J}_f \quad (8.32)$$

onde  $\mathbf{J}_f$  é a densidade de corrente livre em um volume. Em um meio material  $\mathbf{M} \neq 0$  e, como resultado,  $\mathbf{B}$  muda, tal que

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) &= \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m = \mathbf{J} \\ &= \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M} \end{aligned}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})} \quad (8.33)$$

A relação na equação (8.33) mantém-se para todos os materiais, sejam eles lineares ou não. Os conceitos de linearidade, isotropia e homogeneidade, introduzidos na Seção 5.7 para meios dielétricos igualmente se aplica aqui para meios magnéticos. Para materiais lineares,  $\mathbf{M}$  (em A/m) depende linearmente de  $\mathbf{H}$ , tal que

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}} \quad (8.34)$$

onde  $\chi_m$  é uma grandeza adimensional (a razão  $M$  sobre  $H$ ) denominada *suscetibilidade magnética* do meio. É mais ou menos a medida de quão suscetível (ou sensível) a matéria é ao campo magnético. Substituindo a equação (8.34) na equação (8.33) vem que

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (8.35)$$

ou

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}} \quad (8.36)$$

onde

$$\boxed{\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}} \quad (8.37)$$

A grandeza  $\mu = \mu_r\mu_0$  é denominada *permeabilidade* do material e é medida em henrysmetro. O henry é a unidade de indutância e será definida mais adiante. A grandeza adimensional  $\mu_r$  é a razão entre a permeabilidade de um determinado material e a do espaço livre, sendo chamada de *permeabilidade relativa* do material.

Deve-se ter em mente que as relações nas equações (8.34) a (8.37) são válidas somente para materiais lineares e isotrópicos. Se os materiais são anisotrópicos (cristais, por exemplo), a equação (8.33) é válida, mas as equações (8.34) a (8.37) não se aplicam. Neste caso,  $\mu$  tem nove termos (similar ao  $\mu$  na equação (5.37)) e, consequentemente, os campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{M}$  não são mais paralelos.

## 8.6 CLASSIFICAÇÃO DOS MATERIAIS MAGNÉTICOS

Em geral, podemos usar a suscetibilidade magnética  $\chi_m$  ou a permeabilidade magnética  $\mu_r$  para classificar os materiais em termos de suas propriedades magnéticas ou de seu comportamento magnético. Um material é dito *não-magnético* se  $\chi_m = 0$  (ou  $\mu_r = 1$ ). Ele é magnético se isso não se verificar. Espaço livre, ar e materiais com  $\chi_m = 0$  (ou  $\mu_r \approx 1$ ) são considerados não-magnéticos.

Em termos genéricos, os materiais magnéticos podem ser agrupados em três categorias principais: diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos. Esta classificação genérica está indicada na Figura 8.13. Um material é dito *diamagnético* se tiver  $\mu_r \leq 1$  (isto é, um  $\chi_m$  muito pequeno e negativo). É dito *paramagnético* se tiver  $\mu_r \geq 1$  (isto é, um  $\chi_m$  muito pequeno e positivo). Se  $\mu_r \gg 1$  (isto é, um  $\chi_m$  muito grande e positivo), o material é *ferromagnético*. A Tabela B.3, no Apêndice B, apresenta os valores de  $\mu_r$  para alguns materiais. Da tabela, fica evidente que, para a maior parte das aplicações práticas, podemos assumir  $\mu_r \approx 1$  para materiais diamagnéticos e para materiais paramagnéticos. Portanto, podemos considerar materiais diamagnéticos e materiais paramagnéticos como lineares e não-magnéticos. Materiais ferromagnéticos são sempre não-lineares e magnéticos, exceto quando as temperaturas de trabalho estão acima da temperatura Curie (a ser explicada mais adiante). A razão para isso ficará evidente à medida que examinarmos mais de perto cada um dos três tipos de materiais magnéticos.

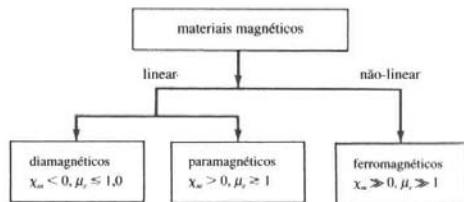


Figura 8.13 Classificação dos materiais magnéticos.

O *diamagnetismo* ocorre em materiais em que os campos magnéticos, devido aos movimentos de translação dos elétrons em torno em torno do núcleo e de rotação dos elétrons em torno de seus próprios eixos, se cancelam mutuamente. Desse modo, o momento magnético permanente (ou intrínseco) de cada átomo é zero, e os materiais são fracamente afetados pelo campo magnético. Para a maioria dos materiais diamagnéticos (por exemplo, bismuto, chumbo, cobre, silício, diamante, cloreto de sódio),  $\chi_m$  é da ordem de  $-10^{-5}$ . Em certos tipos de materiais denominados *supercondutores*, a temperaturas próximas do zero absoluto, o “diamagnetismo perfeito” ocorre:  $\chi_m = -1$  ou  $\mu_r = 0$  e  $B = 0$ . Portanto, os supercondutores não podem conter campos magnéticos.<sup>2</sup> À exceção dos supercondutores, os materiais diamagnéticos são raramente utilizados na prática. Embora o efeito diamagnético seja mascarado por outros efeitos mais proeminentes em alguns materiais, todos os materiais apresentam diamagnetismo.

Os materiais cujos átomos tem um momento magnético permanente não-nulo podem ser ou paramagnéticos ou ferromagnéticos. O *paramagnetismo* ocorre em materiais para os quais os campos magnéticos produzidos pelos movimentos de translação dos elétrons em torno do núcleo e de rotação dos elétrons em torno de seus próprios eixos não se cancelam completamente.

Diferentemente do diamagnetismo, o paramagnetismo depende da temperatura. Para a maioria dos materiais paramagnéticos (por exemplo: ar, platina, tungstênio, potássio),  $\chi_m$  é da ordem de  $+10^{-5}$  a  $+10^{-3}$  e depende da temperatura. Tais materiais encontram aplicação em masers.

O *ferromagnetismo* ocorre em materiais para os quais os átomos têm momento magnético permanente relativamente grande. São denominados materiais ferromagnéticos porque o material mais conhecido dessa categoria é o ferro. Outros materiais são o cobalto, o níquel e seus compostos. Os materiais ferromagnéticos são muito úteis na prática. De forma distinta dos materiais diamagnéticos e dos paramagnéticos, os materiais ferromagnéticos têm as seguintes propriedades:

1. são capazes de serem magnetizados fortemente por um campo magnético;
2. retêm um grau considerável de magnetização quando retirados do campo;
3. perdem suas propriedades ferromagnéticas e tornam-se materiais paramagnéticos lineares quando a temperatura fica acima de uma certa temperatura conhecida como *temperatura Curie*. Portanto, se um imã permanente for aquecido acima de sua temperatura Curie ( $770^\circ\text{C}$  para o ferro), ele perde sua magnetização por completo;
4. são não-lineares, isto é, a relação constitutiva  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$  não se verifica para materiais ferromagnéticos porque  $\mu_r$  depende de  $\mathbf{B}$  e não pode ser representado por um único valor.

Portanto, os valores de  $\mu_r$  citados na Tabela B.3 para materiais ferromagnéticos são apenas típicos. Por exemplo, para níquel  $\mu_r = 50$  sob certas condições e 600 sob outras condições.

Como mencionado na Seção 5.9, referente a materiais condutores, os materiais ferromagnéticos, como o ferro e o aço, são utilizados para isolamento (ou blindagem) para proteger dispositivos elétricos sensíveis de distúrbios causados por campos magnéticos intensos. Um exemplo típico de uma blindagem de ferro é mostrada na Figura 8.14(a), onde a bússola está protegida. Sem a blindagem de ferro, a bússola fornece uma leitura errada devido ao efeito do campo magnético externo, como na Figura 8.14(b). Para um isolamento perfeito requer-se que a blindagem tenha permeabilidade infinita.

<sup>2</sup>Um tratamento excelente dos supercondutores é encontrado em M. A. Plonus, *Applied Electromagnetics*. New York: McGraw-Hill, 1978, p. 375–388. Também, a edição de agosto de 1989 dos *Proceedings of IEEE* é dedicado à supercondutividade.

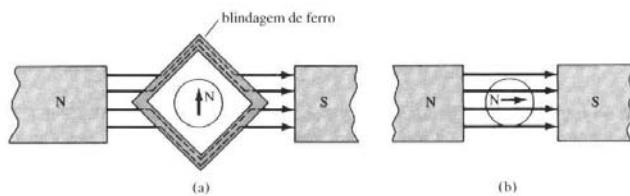


Figura 8.14 Isolamento magnético: (a) blindagem de ferro protegendo uma pequena bússola; (b) a bússola dá uma indicação errada sem a blindagem.

Embora  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  seja válida para todos os materiais, inclusive os ferromagnéticos, a relação entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  depende da magnetização prévia do material ferromagnético, isto é, sua “história magnética”. Ao invés de termos uma relação linear entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  (isto é,  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ), somente é possível representar essa relação pela *curva de magnetização* ou *curva B–H*.

Uma curva B–H típica é mostrada na Figura 8.15. Em primeiro lugar, observe a relação não linear entre  $B$  e  $H$ . Em segundo lugar, em qualquer ponto sobre a curva,  $\mu$  é dado pela razão  $B/H$  e não por  $dB/dH$ , a inclinação da curva.

Se assumirmos que o material ferromagnético, cuja curva B–H está na Figura 8.15, está inicialmente desmagnetizado, à medida que  $H$  aumenta (devido ao aumento da corrente) de  $O$  até a máxima intensidade de campo aplicada  $H_{\max}$ , a curva  $OP$  vai sendo gerada. Essa curva é referida como a *curva virgem ou curva inicial de magnetização*. Após alcançar a saturação em  $P$ , se  $H$  diminuir,  $B$  não segue a curva inicial, mas se atrasa em relação à  $H$ . Esse fenômeno de  $B$  se atrasar em relação à  $H$  é denominado *histerese* (que significa “atraso” em grego).

Se  $H$  for reduzido a zero,  $B$  não é reduzido a zero, mas a  $B_r$ , que é referido como a *densidade de fluxo remanente*. O valor de  $B_r$  depende de  $H_{\max}$ , a intensidade de campo máxima aplicada. A existência de  $B_r$  é a causa de termos finos permanentes. Se  $H$  cresce negativamente (ao inverter o sentido da corrente),  $B$  torna-se zero quando  $H$  torna-se  $-H_c$ , que é conhecida como *intensidade de campo coercitiva*. Materiais para os quais  $H_c$  é pequeno são ditos magneticamente macios. O valor de  $H_c$  depende de  $H_{\max}$ .

Um aumento adicional de  $H$  na direção negativa até alcançar  $Q$  e a reversão até alcançar  $P$  resulta em uma curva fechada denominada *laço de histerese*. O formato dos laços de histerese variam de um material para outro. Algumas ferrites, por exemplo, tem um laço de histerese quase retangular e são utilizadas em computadores digitais como memórias para armazenamento de dados. A área de um laço de histerese dá a energia perdida (perda histerética) por unidade de volume durante um ciclo da magnetização periódica do material ferromagnético. Essa perda de energia se dá na forma de calor. E, portanto, é desejável que os materiais utilizados em geradores elétricos, motores e transformadores tenham laços de histerese altos, mas estreitos, tal que as perdas histeréticas sejam minimizadas.

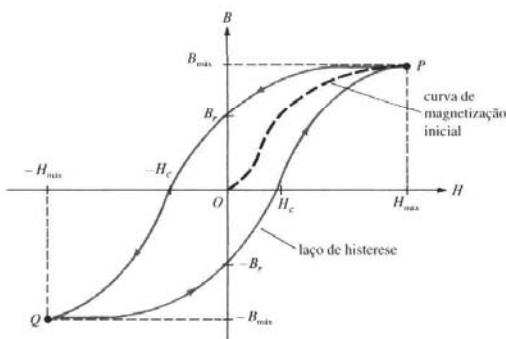


Figura 8.15 Curva de magnetização (B–H) típica.

**EXEMPLO 8.7**

A região  $0 \leq z \leq 2$  m está ocupada por um bloco infinito de material permeável ( $\mu_r = 2,5$ ). Se  $\mathbf{B} = 10y\mathbf{a}_x - 5x\mathbf{a}_y$  mWb/m<sup>2</sup> dentro do bloco, determine: (a)  $\mathbf{J}$ , (b)  $\mathbf{J}_b$ , (c)  $\mathbf{M}$ , (d)  $\mathbf{K}_b$  sobre  $z = 0$ .

**Solução:**

(a) Por definição,

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}(2,5)} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \\ &= \frac{10^6}{\pi} (-5 - 10) 10^{-3} \mathbf{a}_z = -4,775 \mathbf{a}_z \text{ kA/m}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b) } \mathbf{J}_b &= \chi_m \mathbf{J} = (\mu_r - 1) \mathbf{J} = 1,5(-4,775 \mathbf{a}_z) \cdot 10^3 \\ &= -7,163 \mathbf{a}_z \text{ kA/m}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(c) } \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H} = \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1,5(10y\mathbf{a}_x - 5x\mathbf{a}_y) \cdot 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}(2,5)} \\ &= 4,775y\mathbf{a}_x - 2,387x\mathbf{a}_y \text{ kA/m}\end{aligned}$$

(d)  $\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n$ . Já que  $z = 0$  é a porção inferior do bloco que ocupa  $0 \leq z \leq 2$ ,  $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_z$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_b &= (4,775y\mathbf{a}_x - 2,387x\mathbf{a}_y) \times (-\mathbf{a}_z) \\ &= 2,387x\mathbf{a}_x + 4,775y\mathbf{a}_y \text{ kA/m}\end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 8.7**

Em uma certa região ( $\mu = 4,6\mu_0$ ),

$$\mathbf{B} = 10e^{-y}\mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$$

encontre: (a)  $\chi_m$ , (b)  $\mathbf{H}$ , (c)  $\mathbf{M}$

**Resposta:** (a) 3,6; (b)  $1.730e^{-y}\mathbf{a}_z$  A/m; (c)  $6.228e^{-y}\mathbf{a}_z$  A/m.

## 8.7 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA MAGNÉTICAS

Definimos as condições de fronteira magnéticas como as condições que o campo  $\mathbf{H}$  (ou  $\mathbf{B}$ ) deve satis-fazer na fronteira entre dois meios diferentes. Nossas deduções aqui são similares àquelas da Seção 5.9. Faremos uso da lei de Gauss para campos magnéticos

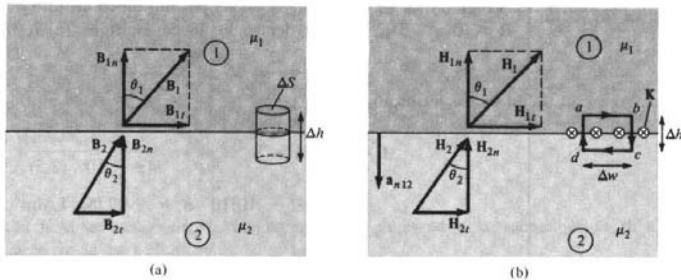
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (8.38)$$

e da lei circuitual de Ampère

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (8.39)$$

Considere a fronteira entre dois meios magnéticos 1 e 2 caracterizada, respectivamente, por  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , como na Figura 8.16. Aplicando a equação (8.38) ao cilindro (superfície gaussiana) da Figura 8.16(a) e fazendo  $\Delta h \rightarrow 0$ , obtemos:

$$B_{1n} \Delta S - B_{2n} \Delta S = 0 \quad (8.40)$$

Figura 8.16 Condições de fronteira entre dois meios magnéticos: (a) para  $\mathbf{B}$ ; (b) para  $\mathbf{H}$ .

Então,

$$\boxed{\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}} \quad \text{ou} \quad \mu_1 \mathbf{H}_{1n} = \mu_2 \mathbf{H}_{2n} \quad (8.41)$$

uma vez que  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . A equação (8.41) mostra que a componente normal de  $\mathbf{B}$  é contínua na fronteira. Essa equação também mostra que a componente normal de  $\mathbf{H}$  é descontínua na fronteira;  $\mathbf{H}$  pode ter alguma mudança na interface.

De maneira similar, aplicamos a equação (8.39) ao caminho fechado  $abcd$  da Figura 8.16(b), onde a corrente  $K$  na superfície da fronteira é considerada normal ao caminho. Obtemos

$$\begin{aligned} K \cdot \Delta w &= H_{1t} \cdot \Delta w + H_{1n} \cdot \frac{\Delta h}{2} + H_{2n} \cdot \frac{\Delta h}{2} \\ &\quad - H_{2t} \cdot \Delta w - H_{2n} \cdot \frac{\Delta h}{2} - H_{1n} \cdot \frac{\Delta h}{2} \end{aligned} \quad (8.42)$$

À medida que  $\Delta h \rightarrow 0$ , a equação (8.42) nos leva a

$$\boxed{H_{1t} - H_{2t} = K} \quad (8.43)$$

Isso mostra que a componente tangencial de  $H$  é também descontínua. A equação (8.43) pode ser escrita em termos de  $B$  como

$$\boxed{\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = K} \quad (8.44)$$

No caso geral, a equação (8.43) torna-se

$$\boxed{(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}} \quad (8.45)$$

onde  $\mathbf{a}_{n12}$  é um vetor unitário normal à interface e orientado do meio 1 para o meio 2. Se a fronteira está livre de corrente ou os meios não são condutores (por  $K$  se entende densidade de corrente livre),  $K = 0$  e a equação (8.43) torna-se

$$\boxed{\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{B}_{1t}}{\mu_1} = \frac{\mathbf{B}_{2t}}{\mu_2}} \quad (8.46)$$

Portanto, a componente tangencial de  $\mathbf{H}$  é contínua, enquanto que a componente tangencial de  $\mathbf{B}$  é descontínua na fronteira.

Se os campos fazem um ângulo  $\theta$  com a normal à interface, a equação (8.41) resulta em

$$B_1 \cos \theta_1 = B_{1n} = B_{2n} = B_2 \cos \theta_2 \quad (8.47)$$

enquanto que a equação (8.46) origina

$$\frac{B_1}{\mu_1} \sin \theta_1 = H_{1t} = H_{2t} = \frac{B_2}{\mu_2} \sin \theta_2 \quad (8.48)$$

Dividindo a equação (8.48) pela equação (8.47), temos

$$\boxed{\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \quad (8.49)$$

que é similar à equação (5.65), e é a lei da refração para linhas de fluxo magnético quando na fronteira não há qualquer fonte de corrente na superfície da interface de separação.

### EXEMPLO 8.8

Dado que  $\mathbf{H} = -2\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$  A/m em uma região  $y - x - 2 \leq 0$ , onde  $\mu_1 = 5\mu_0$ , calcule:

- (a)  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{B}_1$ ;
- (b)  $\mathbf{H}_2$  e  $\mathbf{B}_2$  na região  $y - x - 2 \geq 0$ , onde  $\mu_2 = 2\mu_0$ .

#### Solução:

Já que  $y - x - 2 = 0$  é um plano,  $y - x \leq 2$  ou  $y \leq x + 2$  é a região 1 na Figura 8.17. Podemos confirmar isso com a localização de um ponto nessa região. Por exemplo, a origem  $(0, 0)$  está nessa região, uma vez que  $0 - 0 - 2 < 0$ . Se descrevermos a superfície do plano por  $f(x, y) = y - x - 2$ , um vetor unitário normal ao plano é dado por

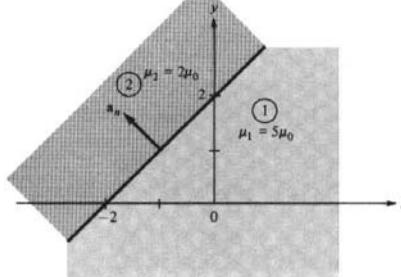
$$\mathbf{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_x}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{M}_1 &= \chi_{m1}\mathbf{H}_1 = (\mu_{r1} - 1)\mathbf{H}_1 = (5 - 1)(-2, 6, 4) \\ &= -8\mathbf{a}_x + 24\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z \text{ A/m} \\ \mathbf{B}_1 &= \mu_1\mathbf{H}_1 = \mu_0\mu_{r1}\mathbf{H}_1 = 4\pi \times 10^{-7}(5)(-2, 6, 4) \\ &= -12,57\mathbf{a}_x + 37,7\mathbf{a}_y + 25,13\mathbf{a}_z \mu\text{Wb/m}^2 \\ \text{(b)} \quad \mathbf{H}_{1n} &= (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{a}_n)\mathbf{a}_n = \left[ (-2, 6, 4) \cdot \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \right] \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \\ &= -4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y \end{aligned}$$

Porém,

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{1n} + \mathbf{H}_{1t}$$

Figura 8.17 Referente ao Exemplo 8.8.



Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{1t} &= \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{1n} = (-2, 6, 4) - (-4, 4, 0) \\ &= 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Utilizando as condições de fronteira, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{2t} &= \mathbf{H}_{1t} = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \\ \mathbf{B}_{2n} &= \mathbf{B}_{1n} \rightarrow \mu_2 \mathbf{H}_{2n} = \mu_1 \mathbf{H}_{1n}\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{H}_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{H}_{1n} = \frac{5}{2} (-4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y) = -10\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y$$

Então,

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2n} + \mathbf{H}_{2t} = -8\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2 &= \mu_2 \mathbf{H}_2 = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_2 = (4\pi \times 10^{-7})(2)(-8, 12, 4) \\ &= -20,11\mathbf{a}_x + 30,16\mathbf{a}_y + 10,05\mathbf{a}_z \text{ } \mu\text{Wb/m}^2\end{aligned}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.8

A região 1, descrita por  $3x + 4y \geq 10$ , é um espaço livre, enquanto que a região 2, descrita por  $3x + 4y \leq 10$ , é um material magnético para o qual  $\mu = 10\mu_0$ . Assumindo que a fronteira entre o material e o espaço livre seja livre de corrente, determine  $\mathbf{B}_2$ , se  $\mathbf{B}_1 = 0,1\mathbf{a}_x + 0,4\mathbf{a}_y + 0,2\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}^2$ .

**Resposta:**  $-1,052\mathbf{a}_x + 1,264\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}^2$ .

### EXEMPLO 8.9

O plano  $xy$  serve como interface entre dois meios diferentes. O meio 1 ( $z < 0$ ) é preenchido com um material cujo  $\mu_r = 6$ , e o meio 2 ( $z > 0$ ) é preenchido com um material cujo  $\mu_r = 4$ . Se a interface é percorrida por uma corrente ( $1/\mu_0$ )  $\mathbf{a}_y \text{ mA/m}$  e  $\mathbf{B}_2 = 5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$ , determine  $\mathbf{H}_1$  e  $\mathbf{B}_1$ .

#### Solução:

No exemplo anterior,  $\mathbf{K} = 0$ , tal que a equação (8.46) era adequada. Neste exemplo, entretanto,  $\mathbf{K} \neq 0$  e temos que recorrer à equação (8.45) em conjunto com a equação (8.41). Considere o problema como ilustrado na Figura 8.18. Assuma que  $\mathbf{B}_1 = (B_x, B_y, B_z)$  seja expressa em  $\text{mWb/m}^2$ .

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n} = 8\mathbf{a}_z \rightarrow B_z = 8 \quad (8.8.1)$$

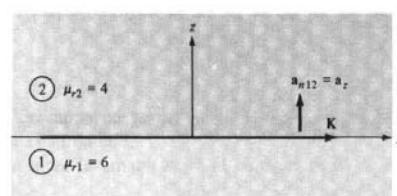


Figura 8.18 Referente ao Exemplo 8.9.

Porém,

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} = \frac{1}{4\mu_0} (5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z) \text{ mA/m} \quad (8.8.2)$$

e

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{1}{6\mu_0} (B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z) \text{ mA/m} \quad (8.8.3)$$

Tendo determinado as componentes normais, podemos encontrar as componentes tangenciais usando

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$$

ou

$$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{a}_{n12} + \mathbf{K} \quad (8.8.4)$$

Substituindo as equações (8.8.2) e (8.8.3) na equação (8.8.4), temos:

$$\frac{1}{6\mu_0} (B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_z = \frac{1}{4\mu_0} (5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_z + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{a}_y$$

Equacionando as componentes, tem-se:

$$B_y = 0, \quad \frac{-B_x}{6} = \frac{-5}{4} + 1 \quad \text{ou} \quad B_x = \frac{6}{4} = 1,5 \quad (8.8.5)$$

A partir das equações (8.8.1) e (8.8.5),

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= 1,5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2 \\ \mathbf{H}_1 &= \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_0} (0,25\mathbf{a}_x + 1,33\mathbf{a}_z) \text{ mA/m} \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} (1,25\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_z) \text{ mA/m}$$

Observe que  $H_{1x}$  é  $(1/\mu_0)$  mA/m menor do que  $H_{2x}$  devido à lâmina de corrente e também porque  $B_{1n} = B_{2n}$ .

### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.9

Um vetor unitário normal apontando da região 2 ( $\mu = 2\mu_0$ ) para a região 1 ( $\mu = \mu_0$ ) é  $\mathbf{a}_{n21} = (6\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z)/7$ . Se  $\mathbf{H}_1 = 10\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$  A/m e  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2x}\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$  A/m, determine:

- (a)  $\mathbf{H}_{2x}$ ;
- (b) a densidade de corrente  $\mathbf{K}$  na interface;
- (c) os ângulos que  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$  fazem com a normal à interface.

**Resposta:** (a) 5,833; (b)  $4,86\mathbf{a}_x - 8,64\mathbf{a}_y + 3,95\mathbf{a}_z$  A/m; (c)  $76,27^\circ, 77,62^\circ$ .

## 8.8 INDUTORES E INDUTÂNCIAS

Um circuito (ou um caminho fechado condutor) que é percorrido por uma corrente  $I$  gera um campo magnético  $\mathbf{B}$ , que causa um fluxo  $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  que atravessa cada espira do circuito, como mostrado na Figura 8.19. Se o circuito tiver  $N$  espiras idênticas, definimos o *fluxo concatenado*  $\lambda$  como

$$\lambda = N\Psi \quad (8.50)$$

Ainda, se o meio que circunda o circuito é linear, o fluxo concatenado  $\lambda$  é proporcional à corrente  $I$  que o gerou, isto é,

$$\begin{aligned} \lambda &\propto I \\ \text{ou} \quad \lambda &= LI \end{aligned} \quad (8.51)$$

onde  $L$  é uma constante de proporcionalidade denominada *indutância* do circuito. A indutância  $L$  é uma propriedade que é função da geometria do circuito. Um circuito, ou parte de um circuito, que tem uma indutância é denominado um *indutor*. Das equações (8.50) e (8.51), podemos definir a indutância  $L$  de um indutor como a razão entre o fluxo magnético concatenado  $\lambda$  e a corrente  $I$  através do indutor, isto é:

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I} \quad (8.52)$$

A unidade de indutância é o henry (H), que é equivalente à webers/ampère. Já que o henry é uma unidade muito grande, as indutâncias são normalmente dadas em mili-henry (mH).

A indutância definida pela equação (8.52) é comumente referida como *auto-indutância*, já que o fluxo concatenado é gerado pelo próprio indutor. Da mesma forma que no caso das capacitâncias, podemos considerar a indutância como uma medida da quantidade de energia magnética que pode ser armazenada dentro de um indutor. A energia magnética (em joules) armazenada em um indutor é expressa na Teoria de Circuitos como

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (8.53)$$

ou

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (8.54)$$

Portanto, a auto-indutância de um circuito pode ser definida ou calculada a partir de considerações de energia.

Se ao invés de termos um circuito tivermos dois circuitos percorridos por correntes  $I_1$  e  $I_2$ , como mostrado na Figura 8.20, uma interação magnética existirá entre os circuitos. Quatro componentes de

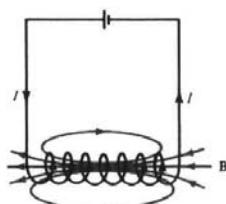


Figura 8.19 Campo magnético  $\mathbf{B}$  gerado por um circuito.

fluxo  $\Psi_{11}$ ,  $\Psi_{12}$ ,  $\Psi_{21}$  e  $\Psi_{22}$  são geradas. O fluxo  $\Psi_{12}$ , por exemplo, é o fluxo que passa através do circuito 1 devido à corrente  $I_2$  no circuito 2. Se  $\mathbf{B}_2$  é o campo devido à  $I_2$  e  $S_1$  é a área do circuito 1, então

$$\Psi_{12} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} \quad (8.55)$$

Definimos a *indutância mútua*  $M_{12}$  como a razão entre o fluxo concatenado  $\lambda_{12} = N_1 \Psi_{12}$  sobre o circuito 1 devido à corrente  $I_2$ , isto é:

$$M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Psi_{12}}{I_2} \quad (8.56)$$

De maneira similar, a indutância mútua  $M_{21}$  é definida como o fluxo concatenado do circuito 2 por unidade de corrente  $I_1$ , isto é,

$$M_{21} = \frac{\lambda_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Psi_{21}}{I_1} \quad (8.57a)$$

Pode-se demonstrar, utilizando conceitos de energia, que, se o meio que circunda os circuitos é linear (isto é, na ausência de material ferromagnético),

$$M_{12} = M_{21} \quad (8.57b)$$

A indutância mútua  $M_{12}$  ou  $M_{21}$  é expressa em henrys e não deve ser confundida com o vetor de magnetização  $\mathbf{M}$  expresso em ampères/metro.

Definimos a auto-indutância dos circuitos 1 e 2, respectivamente, como

$$L_1 = \frac{\lambda_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \Psi_1}{I_1} \quad (8.58)$$

e

$$L_2 = \frac{\lambda_{22}}{I_2} = \frac{N_2 \Psi_2}{I_2} \quad (8.59)$$

onde  $\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12}$  e  $\Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22}$ . A energia total no campo magnético é a soma das energias devido a  $L_1$ ,  $L_2$  e  $M_{12}$  (ou  $M_{21}$ ), isto é,

$$W_m = W_1 + W_2 + W_{12} \\ = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M_{12} I_1 I_2 \quad (8.60)$$

O sinal positivo é considerado se as correntes  $I_1$  e  $I_2$  fluem tal que os campos magnéticos dos dois circuitos se reforçam. Se as correntes fluem de tal modo que seus campos magnéticos se opõem, o sinal é considerado negativo.

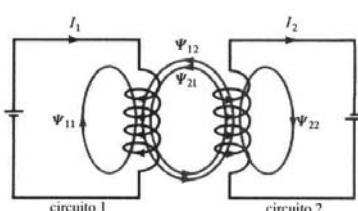


Figura 8.20 Interação magnética entre dois circuitos.

Como mencionado anteriormente, um indutor é um condutor montado com formato adequado para armazenar energia magnética. Exemplos típicos de indutores são toróides, solenóides, linhas de transmissão coaxial e linhas de transmissão de fios paralelos. A indutância de cada um desses indutores pode ser determinada pelo procedimento descrito a seguir, similar àquele utilizado para determinar a capacidade de um capacitor. Para um dado indutor, determinamos a sua auto-indutância  $L$  seguindo os passos abaixo:

1. escolha um sistema de coordenadas adequado;
2. considere que o indutor é percorrido por uma corrente  $I$ ;
3. determine  $\mathbf{B}$  a partir da lei de Biot-Savart (ou a partir da lei de Ampère se houver simetria) e calcule  $\Psi$  a partir de  $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ;
4. finalmente, determine  $L$  a partir de  $L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}$ .

A indutância mútua entre dois circuitos pode ser calculada por um procedimento semelhante.

Em um indutor tal como uma linha de transmissão coaxial ou uma linha de transmissão de fios paralelos, a indutância produzida pelo fluxo interno ao condutor é denominada *indutância interna*  $L_{\text{in}}$  enquanto que a produzida pelo fluxo externo é denominada *indutância externa*  $L_{\text{ext}}$ . A indutância total  $L$  é:

$$L = L_{\text{in}} + L_{\text{ext}} \quad (8.61)$$

Da mesma maneira como foi demonstrado para capacitores

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (6.35)$$

pode-se demonstrar que

$$L_{\text{ext}}C = \mu \epsilon \quad (8.62)$$

Então,  $L_{\text{ext}}$  pode ser calculada utilizando a equação (8.62) se  $C$  for conhecido.

Uma coleção de fórmulas para alguns elementos fundamentais de circuitos é apresentada na Tabela 8.3. Todas as fórmulas podem ser deduzidas seguindo os passos listados acima.<sup>3</sup>

## 8.9 ENERGIA MAGNÉTICA

Da mesma forma que a energia potencial em um campo eletrostático foi deduzida como

$$W_E = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv \quad (4.96)$$

seria interessante deduzir uma expressão similar para a energia em um campo magnetostático. Uma abordagem simples consiste em utilizar a energia magnética no campo de um indutor. A partir da equação (8.53),

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (8.53)$$

verifica-se que a energia está armazenada no campo magnético  $\mathbf{B}$  de um indutor. É interessante expressar a equação (8.53) em termos de  $\mathbf{B}$  ou de  $\mathbf{H}$ .

Considere um volume diferencial em um campo magnético, como mostrado na Figura 8.21. Seja o volume coberto com lâminas metálicas condutoras nas superfícies do topo e da base percorridas por corrente  $\Delta I$ .

<sup>3</sup> Fórmulas adicionais podem ser encontradas em manuais de padrões elétricos ou em H. Knoepfel, Pulsed High Magnetic Fields. Amsterdam: North-Holland, 1970, p. 312–324.

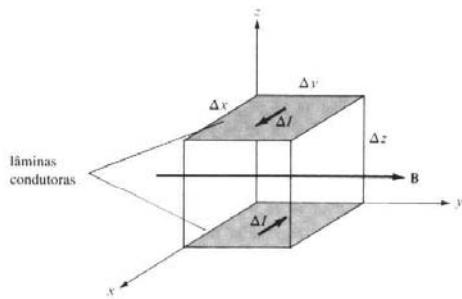


Figura 8.21 Um diferencial de volume no interior de um campo magnético.

Assumimos que toda a região está preenchida com tais volumes diferenciais. Da equação (8.52), cada volume tem uma indutância de

$$\Delta L = \frac{\Delta \Psi}{\Delta I} = \frac{\mu H \Delta x \Delta z}{\Delta I} \quad (8.63)$$

onde  $\Delta I = H \Delta y$ . Substituindo a equação (8.63) na equação (8.53), temos

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \Delta L \Delta I^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \Delta x \Delta y \Delta z \quad (8.64)$$

TABELA 8.3 Uma coleção de fórmulas para a indutância de geometrias básicas

<b>1. Fio</b> $L = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi}$		<b>5. Espira circular</b> $L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \ln \frac{4\ell}{d} - 2,45 \right)$ $\ell = 2\pi\rho_o, \rho_o \gg d$ 
<b>2. Cilindro oco</b> $L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left( \ln \frac{2\ell}{a} - 1 \right)$ $\ell \gg a$ 		<b>6. Solenóide</b> $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$ $\ell \gg a$ 
<b>3. Fios paralelos</b> $L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \frac{d}{a}$ $\ell \gg d, d \gg a$ 		<b>5. Toro (de seção reta circular)</b> $L = \mu_0 N^2 [\rho_o - \sqrt{\rho_o^2 - a^2}]$ 
<b>4. Condutor coaxial</b> $L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ 		<b>6. Lâmina</b> $L = \mu_0 2\ell \left( \ln \frac{2\ell}{b+t} + 0,5 \right)$ 

ou

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \Delta v$$

A densidade de energia magnetostática  $w_m$  (em J/m<sup>3</sup>) é definida como

$$w_m = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta W_m}{\Delta v} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

Portanto,

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{B^2}{2\mu} \quad (8.65)$$

Então, a energia em um campo magnetostático em um meio linear é

$$W_m = \int w_m dv$$

ou

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dv \quad (8.66)$$

que é similar à equação (4.96) para um campo eletrostático.

### EXEMPLO 8.10

Calcule a auto-indutância, por unidade de comprimento, de um solenóide infinitamente longo.

#### Solução:

Lembremos do Exemplo 7.4 que, para um solenóide infinitamente longo, o fluxo magnético no interior do solenóide, por unidade de comprimento, é

$$B = \mu H = \mu In$$

onde  $n = N/\ell$  = número de espiras por unidade de comprimento. Se  $S$  é a área da seção reta do solenóide, o fluxo total através dessa área é

$$\Psi = BS = \mu InS$$

Já que esse fluxo é somente para um comprimento unitário do solenóide, o fluxo concatenado por unidade de comprimento é

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\ell} = n\Psi = \mu n^2 IS$$

e, portanto, a indutância por unidade de comprimento é

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\lambda'}{I} = \mu n^2 S$$

$$L' = \mu n^2 S \quad \text{H/m}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 8.10**

Um solenóide muito longo, com seção reta de  $2 \times 2$  cm, tem um núcleo de ferro ( $\mu_r = 1.000$ ) e 4.000 espiras/metro. Se o solenóide for percorrido por uma corrente de 500 mA, determine:

- sua auto-indutância por metro;
- a energia armazenada, por metro, nesse campo.

**Resposta:** (a) 8,042 H/m; (b) 1,005 J/m.

**EXEMPLO 8.11**

Determine a auto-indutância de um cabo coaxial de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ .

**Solução:**

A auto-indutância do indutor pode ser encontrada de duas maneiras: seguindo os quatro passos dados na Seção 8.8 ou usando as equações (8.54) e (8.66).

**Método 1:** considere a seção reta do cabo como mostrado na Figura 8.22. Lembremos da equação (7.29) que, pela aplicação da lei circuital de Ampère, obtemos para a região 1 ( $0 \leq \rho \leq a$ ),

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu I}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$$

e, para a região 2 ( $a \leq \rho \leq b$ ),

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

Primeiro, encontramos a indutância interna  $L_{in}$  considerando os fluxos concatenados devido ao condutor interno. Da Figura 8.22(a), o fluxo que sai de uma casca diferencial de espessura  $d\rho$  é:

$$d\Psi_1 = B_1 d\rho dz = \frac{\mu I}{2\pi a^2} d\rho dz$$

O fluxo concatenado é  $d\Psi_1$ , multiplicado pela razão entre a área limitada pelo caminho que envolve o fluxo e a área total, isto é,

$$d\lambda_1 = d\Psi_1 \cdot \frac{I_{env}}{I} = d\Psi_1 \cdot \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2}$$

porque  $I$  está uniformemente distribuído através da seção reta, para excitação em corrente contínua (dc). Então, os fluxos concatenados totais no interior do elemento diferencial de fluxo são:

$$d\lambda_1 = \frac{\mu I \rho d\rho dz}{2\pi a^2} \cdot \frac{\rho^2}{a^2}$$

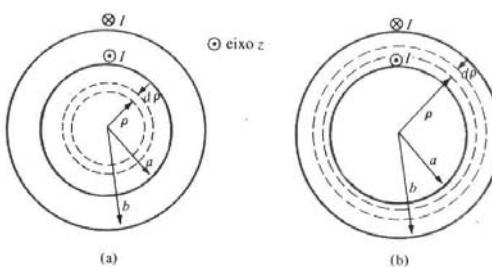


Figura 8.22 Seção reta do cabo coaxial: (a) para a região 1 ( $0 < \rho < a$ ); (b) para a região 2 ( $a < \rho < b$ ); referente ao Exemplo 8.11.

Para um comprimento  $\ell$  do cabo,

$$\lambda_1 = \int_{\rho=0}^a \int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I \rho^3 d\rho dz}{2\pi a^4} = \frac{\mu I \ell}{8\pi}$$

$$L_{\text{in}} = \frac{\lambda_1}{I} = \frac{\mu \ell}{8\pi} \quad (8.11.1)$$

A indutância interna por unidade de comprimento, dada por

$$L'_{\text{in}} = \frac{L_{\text{in}}}{\ell} = \frac{\mu}{8\pi} \quad \text{H/m} \quad (8.11.2)$$

é independente do raio do condutor ou do fio. Portanto, as equações (8.11.1) e (8.11.2) são também aplicáveis para encontrar a indutância de qualquer condutor reto infinitamente longo de raio finito.

Agora, determinaremos a indutância externa  $L_{\text{ext}}$  considerando os fluxos concatenados entre os condutores interno e externo, como na Figura 8.22(b). Para uma casca diferencial de espessura  $d\rho$ ,

$$d\Psi_2 = B_2 d\rho dz = \frac{\mu I}{2\pi\rho} d\rho dz$$

Neste caso, a corrente  $I$  a ser considerada para o cálculo do fluxo é a corrente total  $I$ . Portanto,

$$\lambda_2 = \Psi_2 = \int_{\rho=a}^b \int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I d\rho dz}{2\pi\rho} = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L_{\text{ext}} = \frac{\lambda_2}{I} = \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Então,

$$L = L_{\text{in}} + L_{\text{ext}} = \frac{\mu \ell}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right]$$

ou a indutância por unidade de comprimento é:

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right] \quad \text{H/m}$$

**Método 2:** é mais fácil utilizar as equações (8.54) e (8.66) para determinar  $L$ , isto é,

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad \text{ou} \quad L = \frac{2W_m}{I^2}$$

onde

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv = \int \frac{B^2}{2\mu} dv$$

Portanto,

$$L_{\text{in}} = \frac{2}{I^2} \int \frac{B_1^2}{2\mu} dv = \frac{1}{I^2 \mu} \iiint \frac{\mu^2 I^2 \rho^2}{4\pi^2 a^4} \rho d\rho d\phi dz$$

$$= \frac{\mu}{4\pi^2 a^4} \int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\mu \ell}{8\pi}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\text{ext}} &= \frac{2}{I^2} \int \frac{B_2^2}{2\mu} dv = \frac{1}{I^2 \mu} \iiint \frac{\mu^2 I^2}{4\pi^2 \rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \\
 &= \frac{\mu}{4\pi^2} \int_0^{\ell} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu\ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \\
 L &= L_{\text{in}} + L_{\text{ext}} = \frac{\mu\ell}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right]
 \end{aligned}$$

como obtido anteriormente.

### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.11

Calcule a auto-indutância do cabo coaxial do Exemplo 8.11 se o condutor interno for feito de um material não-homogêneo, tendo  $\mu = 2\mu_o/(1 + \rho)$ .

$$\text{Resposta: } \frac{\mu_o\ell}{8\pi} + \frac{\mu_o\ell}{\pi} \left[ \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{(1+b)}{(1+a)} \right]$$

### EXEMPLO 8.12

Determine a indutância, por unidade de comprimento, de uma linha de transmissão a dois fios, com separação entre eles de  $d$ . Cada fio tem um raio  $a$ , como mostrado na Figura 6.37.

#### Solução:

Utilizaremos os dois métodos do último exemplo.

**Método 1:** determinamos  $L_m$  da mesma forma como foi feito no último exemplo. Portanto, para a região  $0 \leq \rho \leq a$ , obtemos

$$\lambda_1 = \frac{\mu I \ell}{8\pi}$$

como no último exemplo. Para a região  $a \leq \rho \leq d-a$ , os fluxos concatenados entre os fios são

$$\lambda_2 = \Psi_2 = \int_{\rho=a}^{d-a} \int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I}{2\pi\rho} \, d\rho \, dz = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

Os fluxos concatenados gerados pelo fio 1 são:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\mu I \ell}{8\pi} + \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

Por simetria, a mesma quantidade de fluxo é gerada pela corrente  $-I$  no fio 2. Portanto, os fluxos concatenados totais são:

$$\lambda = 2(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\mu I \ell}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a} \right] = L I$$

Se  $d \gg a$ , a auto-indutância, por unidade de comprimento, é:

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right] \quad \text{H/m}$$

**Método 2:** do último exemplo,

$$L_{\text{in}} = \frac{\mu\ell}{8\pi}$$

Agora,

$$\begin{aligned} L_{\text{ext}} &= \frac{2}{I^2} \int \frac{B^2 dv}{2\mu} = \frac{1}{I^2 \mu} \iiint \frac{\mu^2 I^2}{4\pi^2 \rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \\ &= \frac{\mu}{4\pi^2} \int_0^\ell dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^{d-a} \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{\mu\ell}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a} \end{aligned}$$

Uma vez que os dois fios são simétricos,

$$\begin{aligned} L &= 2(L_{\text{in}} + L_{\text{ext}}) \\ &= \frac{\mu\ell}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a} \right] \text{H} \end{aligned}$$

como obtido anteriormente.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.12

Dois fios de cobre com bitola 10 AWG\* (2,588 mm de diâmetro) estão colocados em paralelo no ar com um espaçamento entre eles de  $d$ . Se a indutância de cada fio é de  $1,2 \mu\text{H}/\text{m}$ , calcule:

- (a)  $L_{\text{in}}$  e  $L_{\text{ext}}$ , por metro, para cada fio;
- (b) o espaçamento  $d$  entre os fios.

**Resposta:** (a)  $0,05$  e  $1,15 \mu\text{H}/\text{m}$ ; (b)  $40,79 \text{ cm}$ .

#### EXEMPLO 8.13

Dois anéis circulares coaxiais de raios  $a$  e  $b$  ( $b > a$ ) estão separados por uma distância  $h$  ( $h \gg a, b$ ) como mostrado na Figura 8.23. Determine a indutância mútua entre os anéis.

#### Solução:

Seja o anel 1 percorrido pela corrente  $I_1$ . Em um ponto arbitrário  $P$  sobre o anel 2, o potencial magnético vetorial devido ao anel 1 é dado pela equação (8.21a), a saber:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu I_1 a^2 \sin \theta}{4r^2} \mathbf{a}_\phi = \frac{\mu I_1 a^2 b \mathbf{a}_\phi}{4[h^2 + b^2]^{3/2}}$$

Se  $h \gg b$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu I_1 a^2 b}{4h^3} \mathbf{a}_\phi$$

Portanto,

$$\Psi_{12} = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu I_1 a^2 b}{4h^3} 2\pi b = \frac{\mu \pi I_1 a^2 b^2}{2h^3}$$

e

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu \pi a^2 b^2}{2h^3}$$

\* N. de T. A sigla AWG significa American Wire Gage e representa um padrão norte-americano de bitola de fios, hoje em desuso.

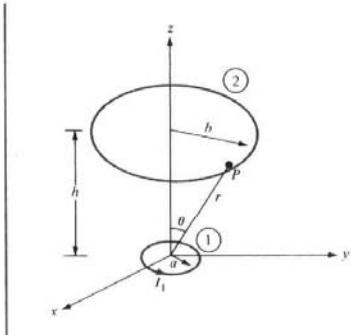


Figura 8.23 Dois anéis coaxiais; referente ao Exemplo 8.13.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 8.13**

Determine a indutância mútua de duas espiras circulares coplanares e concêntricas de raios 2 m e 3 m.

**Resposta:** 2,632  $\mu\text{H}$ .

## 8.10 CIRCUITOS MAGNÉTICOS

O conceito de circuitos magnéticos está baseado na resolução de alguns problemas de campo magnético utilizando a abordagem de circuitos. Dispositivos magnéticos como toróides, transformadores, motores, geradores e relés podem ser considerados circuitos magnéticos. A análise desses circuitos é simplificada se uma analogia entre circuitos elétricos e magnéticos for explorada. Uma vez feito isso, podemos diretamente aplicar conceitos de circuitos elétricos para resolver circuitos magnéticos análogos.

A analogia entre circuitos elétricos e magnéticos está resumida na Tabela 8.4 e mostrada na Figura 8.24. Aconselhamos o leitor a fazer uma pausa na leitura e estudar atentamente a Tabela 8.4 e a Figura 8.24. Primeiramente, observamos da tabela que dois termos são novos. Definimos a *força magnetomotriz* (fmm)  $\mathcal{F}$  (em ampères-espiras) como

$$\mathcal{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.67)$$

TABELA 8.4 Analogia entre circuitos elétricos e magnéticos

Elétrico	Magnético
Condutividade $\sigma$	Permeabilidade $\mu$
Intensidade de campo $E$	Intensidade de campo $H$
Corrente $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	Fluxo magnético $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Densidade de corrente $J = \frac{I}{S} = \sigma E$	Densidade de fluxo $B = \frac{\Psi}{S} = \mu H$
Força electromotriz (fem) $V$	Força magnetomotriz (fmm) $\mathcal{F}$
Resistência $R$	Relutância $\mathcal{R}$
Conduktância $G = \frac{1}{R}$	Permeância $\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}}$
Lei de Ohm $R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S}$ ou $V = E\ell = IR$	Lei de Ohm $\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{\Psi} = \frac{\ell}{\mu S}$ ou $\mathcal{F} = H\ell = \Psi\mathcal{R} = NI$
Lei de Kirchhoff: $\sum I = 0$ $\sum V - \sum RI = 0$	Lei de Kirchhoff: $\sum \mathcal{P} = 0$ $\sum \mathcal{F} - \sum \mathcal{R} \Psi = 0$

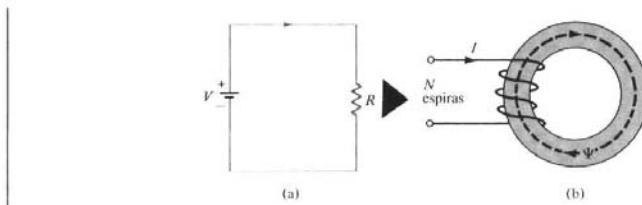


Figura 8.24 Analogia entre (a) um circuito elétrico e (b) um circuito magnético.

A fonte de fmm em circuitos magnéticos é usualmente uma bobina percorrida por uma corrente, como mostra a Figura 8.24. Definimos também *relutância*  $\mathcal{R}$  (em ampère-esp/weber) como

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}} \quad (8.68)$$

onde  $\ell$  e  $S$  são, respectivamente, o comprimento médio e a área da seção reta do núcleo magnético. O recíproco da relutância é a *permeância*  $\mathcal{P}$ . A relação básica para elementos de circuitos é a lei de Ohm ( $V = IR$ ):

$$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{P}\mathcal{R}} \quad (8.69)$$

Baseado nisso, as leis de Kirchhoff de corrente e de tensão podem ser aplicadas aos nós e às malhas de um determinado circuito magnético da mesma forma como em um circuito elétrico. As regras de soma de tensões e de combinação de resistências em série e em paralelo também são válidas para fmm's e relutâncias. Portanto, para  $n$  elementos de circuito magnético em série:

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \dots = \Psi_n \quad (8.70)$$

e

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \dots + \mathcal{F}_n \quad (8.71)$$

Para  $n$  elementos de circuito magnético em paralelo,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \dots + \Psi_n \quad (8.72)$$

e

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \dots = \mathcal{F}_n \quad (8.73)$$

Algumas diferenças entre circuitos elétricos e magnéticos devem ser destacadas. Diferentemente de um circuito elétrico onde flui corrente  $I$ , o fluxo magnético não flui. Também, a condutividade  $\sigma$  é independente da densidade de corrente  $J$  em um circuito elétrico, enquanto que a permeabilidade  $\mu$  varia com a densidade de fluxo  $B$  em um circuito magnético. Isso porque materiais ferromagnéticos (não lineares) são normalmente utilizados na maioria dos dispositivos magnéticos práticos. Apesar dessas diferenças, o conceito de circuito magnético é útil como uma análise aproximada dos dispositivos magnéticos práticos.

## 8.11 FORÇA SOBRE MATERIAIS MAGNÉTICOS

É de interesse prático determinar a força que um campo magnético exerce sobre uma peça de material magnético sob a ação do campo. Esse conceito é útil em sistemas eletromecânicos, como eletroímãs, relés e máquinas rotativas, e no processo de levitação magnética. Considere, por exemplo, um eletroímã feito de ferro com permeabilidade relativa constante, como mostrado na Figura 8.25. A bobina tem  $N$  espiras e é percorrida por uma corrente  $I$ . Se desprezarmos o vazamento, o campo magnético  $B$  no entreferro de ar é o mesmo que no interior do ferro ( $B_{1n} = B_{2n}$ ). Para encontrar a força entre as duas peças de ferro, calculamos a alteração na energia total que resultaria se as duas peças fossem separadas de um deslocamento diferencial  $dl$ . O trabalho necessário para efetivar esse deslocamento é igual à variação da energia armazenada no entreferro de ar (assumindo corrente constante), isto é,

$$-F dl = dW_m = 2 \left[ \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} S dl \right] \quad (8.74)$$

onde  $S$  é a área da seção reta do entreferro, o fator 2 aparece para contabilizar a contribuição dos dois entreferros de ar, e o sinal negativo indica que a força age no sentido de reduzir o entreferro (ou indica que a força é atrativa). Então:

$$F = -2 \left( \frac{B^2 S}{2\mu_0} \right) \quad (8.75)$$

Note que a força é exercida sobre a peça inferior e não sobre a peça superior na qual está enrolada a bobina percorrida pela corrente que dá origem ao campo. A força de tração através de um único entreferro pode ser obtida da equação (8.75) como:

$$F = -\frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad (8.76)$$

Observe a semelhança entre a equação (8.76) e aquela deduzida no Exemplo 5.8 para o caso eletrostático. A equação (8.76) pode ser usada para calcular as forças em muitos tipos de dispositivos, incluindo relés e máquinas elétricas rotativas, e no processo de levitação magnética. A pressão de tração (em  $\text{N/m}^2$ ) em uma superfície imantada é

$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} BH \quad (8.77)$$

que é igual à densidade de energia  $w_m$  no entreferro de ar.

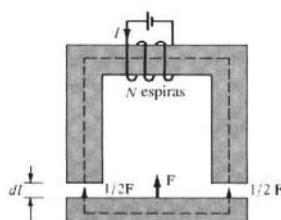


Figura 8.25 Um eletroímã.

### EXEMPLO 8.14

O núcleo toroidal da Figura 8.26(a) tem  $\rho_o = 10 \text{ cm}$  e uma seção reta circular com  $a = 1 \text{ cm}$ . Se o núcleo é feito de aço ( $\mu = 1.000\mu_0$ ) e tem uma bobina com 200 espiras, calcule a intensidade de corrente que irá gerar um fluxo de  $0.5 \text{ mWb}$  no núcleo.

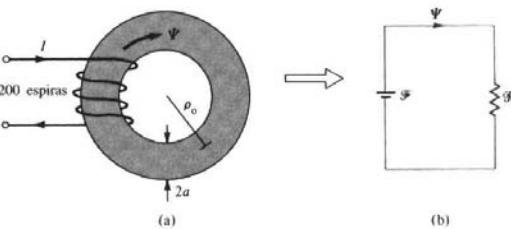


Figura 8.26 (a) Núcleo toroidal do Exemplo 8.14; (b) circuito elétrico equivalente.

**Solução:**

Este problema pode ser resolvido de duas maneiras diferentes: usando a abordagem do campo magnético (modo direto) ou usando o circuito elétrico análogo (modo indireto).

**Método 1:** já que  $\rho_0$  é muito maior do que  $a$ , do Exemplo 7.6,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi\rho_0}$$

Assim,

$$\Psi = BS = \frac{\mu_0 \mu_r NI \pi a^2}{2\pi\rho_0}$$

ou

$$I = \frac{2\rho_0 \Psi}{\mu_0 \mu_r N a^2} = \frac{2(10 \times 10^{-2})(0.5 \times 10^{-3})}{4\pi \times 10^{-7}(1.000)(200)(1 \times 10^{-4})} \\ = \frac{100}{8\pi} = 3,979 \text{ A}$$

**Método 2:** o núcleo toroidal da Figura 8.26(a) é análogo ao circuito elétrico da Figura 8.26(b). Do circuito e da Tabela 8.4,

$$\mathcal{F} = NI = \Psi \mathcal{R} = \Psi \frac{\ell}{\mu S} = \Psi \frac{2\pi\rho_0}{\mu_0 \mu_r \pi a^2}$$

ou

$$I = \frac{2\rho_0 \Psi}{\mu_0 \mu_r N a^2} = 3,979 \text{ A}$$

como obtido anteriormente.

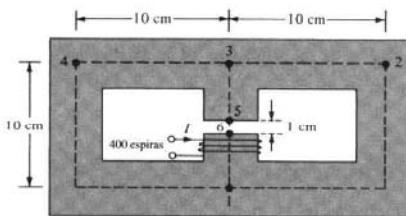
**EXERCÍCIO PRÁTICO 8.14**

Com um condutor de raio  $a$  faz-se uma espira circular de raio médio  $\rho_0$  (veja Figura 8.26a). Se  $\rho_0 = 10 \text{ cm}$  e  $2a = 1 \text{ cm}$ , calcule a indutância interna da espira.

**Resposta:** 31,42 nH.

**EXEMPLO 8.15**

No circuito magnético da Figura 8.27, calcule a corrente na bobina que irá gerar uma densidade de fluxo magnético de  $1,5 \text{ Wb/m}^2$  no entreferro de ar, assumindo que  $\mu = 50\mu_0$ , e que todos os trechos do núcleo tenham a mesma área de seção reta de  $10 \text{ cm}^2$ .



**Figura 8.27** Circuito magnético do Exemplo 8.15.

**Solução:**

O circuito magnético da Figura 8.27 é análogo ao circuito elétrico da Figura 8.28. Na Figura 8.27,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_a$  são as relutâncias nos trechos 143, 123, 35 e 16 e 56 (entreferro de ar), respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \mathcal{R}_2 = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{30 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(50)(10 \times 10^{-4})} \\ &= \frac{3 \times 10^8}{20\pi} \\ \mathcal{R}_3 &= \frac{9 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(50)(10 \times 10^{-4})} = \frac{0.9 \times 10^8}{20\pi} \\ \mathcal{R}_a &= \frac{1 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(1)(10 \times 10^{-4})} = \frac{5 \times 10^8}{20\pi}\end{aligned}$$

Combinamos  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  como resistores em paralelo. Dessa maneira:

$$\mathcal{R}_1 \parallel \mathcal{R}_2 = \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{R}_1}{2} = \frac{1.5 \times 10^8}{20\pi}$$

A relutância total é:

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_a + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_1 \parallel \mathcal{R}_2 = \frac{7.4 \times 10^8}{20\pi}$$

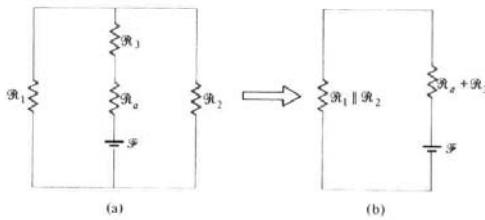


Figura 8.28 Circuito elétrico análogo ao circuito magnético na Figura 8.21.

A fmm é:

$$\mathcal{F} = NI = \Psi_a R_T$$

Porém,  $\Psi_a = \Psi = B_a S$ . Assim,

$$I = \frac{B_a S R_T}{N} = \frac{1,5 \times 10 \times 10^{-4} \times 7,4 \times 10^8}{400 \times 20\pi} \\ = 44,16 \text{ A}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.15

O toróide da Figura 8.26(a) tem uma bobina com 1.000 espiras enroladas em torno de seu núcleo. Se  $\rho_o = 10 \text{ cm}$  e  $a = 1 \text{ cm}$ , qual a corrente necessária para estabelecer um fluxo magnético de  $0,5 \text{ mWb}$ :

- (a) se o núcleo é não magnético?
- (b) se o núcleo tem  $\mu_r = 500$ ?

**Resposta:** (a) 795,8 A; (b) 1.592 A.

### EXEMPLO 8.16

Um eletroímã na forma de U, mostrado na Figura 8.29, é projetado para levantar uma massa de 400 kg (o que inclui a massa do protetor). O núcleo em U de ferro ( $\mu_r = 3.000$ ) tem uma seção reta de  $40 \text{ cm}^2$  e um comprimento médio de 50 cm e cada entreferro de ar tem 0,1 mm de comprimento. Desprezando a relutância do protetor, calcule o número de espiras na bobina quando a corrente de excitação for de 1 A.

**Solução:**

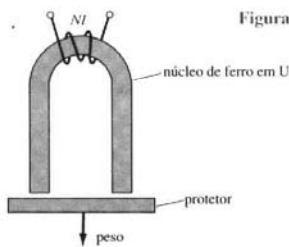
A força de tração através dos dois entreferros deve equilibrar o peso. Portanto,

$$F = 2 \frac{(B_a^2 S)}{2\mu_o} = mg$$

ou

$$B_a^2 = \frac{mg\mu_o}{S} = \frac{400 \times 9,8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{40 \times 10^{-4}} \\ B_a = 1,11 \text{ Wb/m}^2$$

Figura 8.29 Eletroímã na forma de U; referente ao Exemplo 8.16.



Porém,

$$\mathcal{F} = NI = \Psi(\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_i)$$

$$\mathcal{R}_a = \frac{\ell_a}{\mu S} = \frac{2 \times 0,1 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 40 \times 10^{-4}} = \frac{6 \times 10^6}{48\pi}$$

$$\mathcal{R}_i = \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{50 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 3.000 \times 40 \times 10^{-4}} = \frac{5 \times 10^6}{48\pi}$$

$$\mathcal{F}_a = \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_i} \mathcal{F} = \frac{6}{6 + 5} NI = \frac{6}{11} NI$$

Já que

$$\mathcal{F}_a = H_a \ell_a = \frac{B_a \ell_a}{\mu_0}$$

$$N = \frac{11}{6} \frac{B_a \ell_a}{\mu_0 I} = \frac{11 \times 1,11 \times 0,1 \times 10^{-3}}{6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}$$

$$N = 162$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.16

Determine a força através do entreferro de ar do circuito magnético do circuito do Exemplo 8.15.

**Resposta:** 895,2 N.

### RESUMO

1. A equação da força de Lorentz

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = m \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

refere-se à força que atua sobre uma partícula com carga  $Q$  na presença de campos EM. Ela expressa a lei fundamental que relaciona o eletromagnetismo com a mecânica.

2. Baseado na lei da força de Lorentz, a força experimentada por um elemento de corrente  $I d\mathbf{l}$  em um campo magnético  $\mathbf{B}$  é:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Assim, podemos definir o campo magnético  $\mathbf{B}$  como a força por elemento de corrente unitário.

3. O torque sobre uma espira de corrente, com momento magnético  $\mathbf{m}$ , em um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  é:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = ISa_n \times \mathbf{B}$$

4. Um ímã ou uma pequena espira de corrente filamentar é um dipolo magnético. Essas geometrias são assim denominadas pelo fato de que as linhas de campo  $\mathbf{B}$  por elas geradas são semelhantes às linhas de campo  $\mathbf{E}$  de um dipolo elétrico.

5. Quando um material é submetido a um campo magnético, ele se torna magnetizado. A magnetização  $\mathbf{M}$  é o momento de dipolo magnético por unidade de volume de um material. Para um material linear,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

onde  $\chi_m$  é a suscetibilidade magnética do material.

6. Em termos de suas propriedades magnéticas, os materiais são ou lineares (diamagnéticos ou paramagnéticos) ou não lineares (ferromagnéticos). Para materiais lineares,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

onde  $\mu$  = permeabilidade e  $\mu_r = \mu/\mu_0$  = permeabilidade relativa do material. Para materiais não lineares,  $B = \mu(H) H$ , isto é,  $\mu$  não tem um valor fixo. A relação entre  $B$  e  $H$  é usualmente representada pela curva de magnetização.

7. As condições de fronteira que  $\mathbf{H}$  ou  $\mathbf{B}$  devem satisfazer na interface entre dois meios diferentes são

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K} \quad \text{ou} \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad \text{se } \mathbf{K} = 0$$

onde  $\mathbf{a}_{n12}$  é um vetor unitário orientado do meio 1 para o meio 2.

8. A energia em um campo magnetostático é dada por:

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv$$

Para um indutor percorrido por uma corrente  $I$ :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Portanto, a indutância  $L$  pode ser encontrada usando:

$$L = \frac{\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv}{I^2}$$

9. A indutância  $L$  de um indutor pode ser também determinada a partir de sua definição básica: a razão entre o fluxo magnético concatenado e a corrente através do indutor, isto é:

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}$$

Dessa maneira, assumindo a corrente  $I$ , determinamos  $\mathbf{B}$  e  $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  e, finalmente, encontramos  $L = N\Psi/I$ .

10. Um circuito magnético pode ser analisado da mesma maneira que um circuito elétrico, simplesmente levando em conta a similaridade entre

$$\mathcal{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Psi \mathcal{R} \quad \text{e} \quad V = IR$$

isto é,

$$\mathcal{F} \leftrightarrow V, \Psi \leftrightarrow I, \mathcal{R} \leftrightarrow R$$

Portanto, podemos aplicar as leis de Ohm e de Kirchhoff aos circuitos magnéticos da mesma forma que as aplicamos aos circuitos elétricos.

11. A pressão magnética (ou força por unidade de área) sobre uma peça de material magnético é

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{2} BH = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

onde  $B$  é o campo magnético na superfície do material.

## QUESTÕES DE REVISÃO

**8.1** Quais das sentenças seguintes não são verdadeiras a respeito da força elétrica  $\mathbf{F}_e$  e da força magnética  $\mathbf{F}_m$  sobre uma partícula carregada?

- (a)  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}_e$  são paralelas entre si, enquanto  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{F}_m$  são perpendiculares entre si.
- (b) Tanto,  $\mathbf{F}_e$  quanto  $\mathbf{F}_m$  dependem da velocidade da partícula carregada.
- (c) Tanto,  $\mathbf{F}_e$  quanto  $\mathbf{F}_m$  podem realizar trabalho.
- (d) Tanto,  $\mathbf{F}_e$  quanto  $\mathbf{F}_m$  são geradas quando uma partícula carregada se move a uma velocidade constante.
- (e)  $\mathbf{F}_m$  é de magnitude, geralmente, bem menor que  $\mathbf{F}_e$ .
- (f)  $\mathbf{F}_e$  é uma força aceleradora, enquanto  $\mathbf{F}_m$  é uma força puramente deflectora.

**8.2** Dois fios finos paralelos são percorridos por correntes com a mesma orientação. A força experimentada por um deles devido à ação do outro é:

- (a) paralela às linhas;
- (b) perpendicular às linhas e atrativa;
- (c) perpendicular às linhas e repulsiva;
- (d) zero.

**8.3** A força sobre o elemento diferencial  $d\mathbf{l}$  em um ponto  $P$  em uma espira circular condutora na Figura 8.30 é:

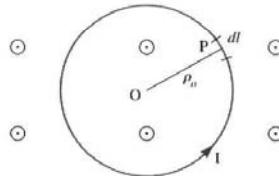
- (a) ao longo de  $OP$ , apontando para fora;
- (b) ao longo de  $OP$ , apontando para dentro;
- (c) na direção e sentido do campo magnético;
- (d) tangencial à espira em  $P$ .

**8.4** A força resultante sobre a espira circular na Figura 8.30 tem magnitude

- (a)  $2\pi\rho_oIB$
- (b)  $\pi\rho_o^2IB$
- (c)  $2\rho_oIB$
- (d) zero



Figura 8.30 Referente as Questões 8.3 e 8.4.



**8.5** Qual é a unidade da carga magnética?

- (a) ampère-metro quadrado;
- (b) coulomb;
- (c) ampère;
- (d) ampère-metro.

**8.6** Qual desses materiais requer o menor valor de intensidade de campo magnético para magnetizá-lo?

- (a) níquel;
- (b) prata;
- (c) tungstênio;
- (d) cloreto de sódio.

**8.7** Identifique a sentença que não é verdadeira para materiais ferromagnéticos.

- (a) Os materiais ferromagnéticos têm um  $\chi_m$  de valor elevado.
- (b) Os materiais ferromagnéticos têm um  $\mu_r$  de valor fixo.
- (c) Nos materiais ferromagnéticos, a perda de energia é proporcional à área do laço de histerese.
- (d) Os materiais ferromagnéticos, acima da temperatura Curie, perdem sua propriedade de não-linearidade.

**8.8** Qual das fórmulas seguintes está errada?

- (a)  $B_{1n} = B_{2n}$
- (b)  $B_2 = \sqrt{B_{2n}^2 + B_{2t}^2}$
- (c)  $H_1 = H_{1n} + H_{1t}$
- (d)  $\mathbf{a}_{n21}^\perp \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}$ , onde  $\mathbf{a}_{n21}^\perp$  é um vetor unitário normal à interface e orientado da região 2 para a região 1.

**8.9** Cada um dos seguintes pares consiste de um termo relativo a circuitos elétricos e seu correspondente termo relativo a circuitos magnéticos. Qual desses pares não satisfaz essa condição?

- (a)  $V$  e  $\mathcal{F}$
- (b)  $G$  e  $\mathcal{P}$
- (c)  $\epsilon$  e  $\mu$
- (d)  $IR$  e  $H\mathcal{R}$
- (e)  $\Sigma I = 0$  e  $\Sigma \Psi = 0$

**8.10** Uma bobina multicamadas de 2.000 espiras de fio fino tem comprimento de 20 mm e espessura (de enrolamento) de 5 mm. Se a bobina é percorrida por uma corrente de 5 mA, a fmm gerada é de

- (a) 10 A-esp;
- (b) 500 A-esp;
- (c) 2.000 A-esp;
- (d) nenhuma das respostas anteriores.

*Respostas:* 8.1b,c; 8.2b; 8.3a; 8.4d; 8.5d; 8.6a; 8.7b; 8.8c; 8.9c,d; 8.10a.

## PROBLEMAS

**8.1** Um elétron com uma velocidade  $\mathbf{u} = (3\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z) \times 10^5$  m/s experimenta uma força líquida nula em um ponto no qual o campo magnético é  $\mathbf{B} = 10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 30\mathbf{a}_z$  mWb/m<sup>2</sup>. Determine  $\mathbf{E}$  nesse ponto.

**8.2** Uma partícula carregada de massa 1 kg e carga 2 C parte da origem com velocidade  $10\mathbf{a}_z$  m/s em um campo magnético  $\mathbf{B} = 1\mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup>. Determine a localização e a energia cinética da partícula em  $t = 2$  s.

**\*8.3** Uma partícula com massa 1 kg e carga 2 C, inicialmente em repouso, parte do ponto (2, 3, -4) em uma região onde  $\mathbf{E} = -4\mathbf{a}_y$  V/m e  $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup>. Determine:

- (a) a posição da partícula em  $t = 1$  s;
- (b) sua velocidade e sua energia cinética nessa posição.

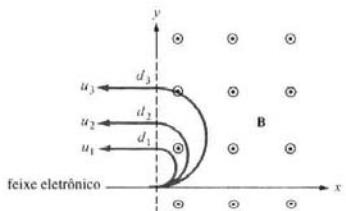


Figura 8.31 Referente ao Problema 8.5.

**8.4** Uma carga de  $-2\text{mC}$  parte do ponto  $(0, 1, 2)$  com uma velocidade de  $5\mathbf{a}_x \text{ m/s}$  em um campo magnético  $\mathbf{B} = 6\mathbf{a}_y \text{ Wb/m}^2$ . Determine a posição e a velocidade da partícula após 10 s, assumindo que a massa da carga é de 1 g. Descreva o movimento da carga.

**\*8.5** Ao injetar um feixe eletrônico perpendicularmente à periferia plana de um campo uniforme  $B_0 \mathbf{az}$ , os elétrons são dispersados de acordo com as suas velocidades, como mostrado na Figura 8.31.

- Mostre que os elétrons vão ser ejetados do campo em trajetórias paralelas às do feixe que penetra essa região, como mostrado.
- Deduza uma expressão para a distância  $d$  de saída, acima do ponto de entrada.

**8.6** Dado que  $\mathbf{B} = 6x\mathbf{a}_x - 9y\mathbf{a}_y + 3z\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}^2$ , determine a força total experimentada pela espira retangular (sobre o plano  $z = 0$ ) mostrada na Figura 8.32.

**8.7** Um elemento de corrente de 2 cm de comprimento está localizado na origem no espaço livre e é percorrido por uma corrente de 12 mA ao longo de  $\mathbf{a}_x$ . Uma corrente filamentar de  $15 \mathbf{a}_z$  A está localizada ao longo de  $x = 3$  e  $y = 4$ . Determine a força sobre o fio de corrente.

**\*8.8** Três linhas infinitas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  definidas, respectivamente, por  $x = 0$  e  $y = 0$ ;  $x = 0$  e  $y = 4$ ;  $x = 3$  e  $y = 4$  são percorridas por correntes filamentares  $-100 \text{ A}$ ,  $200 \text{ A}$  e  $300 \text{ A}$  ao longo de  $\mathbf{a}_z$ . Determine a força, por unidade de comprimento, sobre:

- $L_2$  devido a  $L_1$ ;
- $L_1$  devido a  $L_2$ ;
- $L_3$  devido a  $L_1$ ;
- $L_3$  devido a  $L_1$  e  $L_2$ . Caracterize se a força é repulsiva ou atrativa.

**8.9** Um condutor de 2 m de comprimento é percorrido por uma corrente de 3 A e está colocado em paralelo ao eixo  $z$  a uma distância  $\rho_0 = 10 \text{ cm}$ , como mostrado na Figura 8.33. Se o campo nessa região é de  $\cos(\phi/3)\mathbf{a}_\rho \text{ Wb/m}^2$ , quanto trabalho é necessário para girar o condutor de uma espira em torno do eixo  $z$ ?

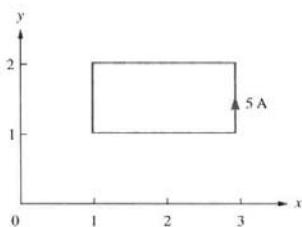


Figura 8.32 Referente ao Problema 8.6.

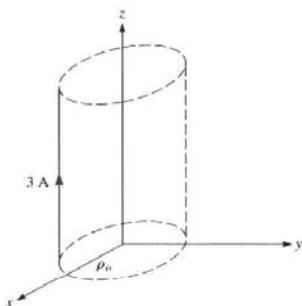


Figura 8.33 Referente ao Problema 8.9.

**\*8.10** Uma espira triangular condutora é percorrida por uma corrente de 2 A e está localizada próximo a um condutor reto, infinitamente longo, percorrido por uma corrente de 5 A, como mostrado na Figura 8.34. Calcule (a) a força sobre o lado 1 da espira triangular e (b) a força total sobre a espira.

**\*8.11** Uma linha de transmissão trifásica consiste de três condutores que são suportados nos pontos *A*, *B* e *C*, formando um triângulo equilátero, como mostrado na Figura 8.35. Em determinado instante, tanto o condutor *A* quanto o *B*, são percorridos por uma corrente de 75 A, enquanto o condutor *C* é percorrido pela corrente de retorno de 150 A. Determine a força por metro sobre o condutor *C* nesse instante.

**\*8.12** Um tubo infinitamente longo, de raio interno *a* e raio externo *b* é feito de um material condutor magnético. O tubo é percorrido por uma corrente total *I* e está colocado ao longo do eixo *z*. Se o tubo for submetido a um campo magnético constante  $B_0 \mathbf{a}_\rho$ , determine a força, por unidade de comprimento, que age sobre o tubo.

**\*8.13** Um condutor infinitamente longo está imerso em um volume de ferro ( $\mu = 2.000\mu_0$ ), mas isolado eletricamente do mesmo, como mostrado na Figura 8.36. Utilizando a teoria das imagens, estime a densidade de fluxo magnético no ponto *P*.

**8.14** Um galvanômetro tem uma bobina retangular, de lado 10 por 30 mm, pivotada em torno do centro do lado menor. Essa bobina é montada em um campo magnético radial, tal que um campo magnético constante de 0,4 Wb/m<sup>2</sup> sempre age através do plano da seção reta da bobina. Se a bobina tem 1.000 espiras e é percorrida por uma corrente de 2 mA, determine o torque exercido sobre ela.

**8.15** Um pequeno ímã, colocado na origem, gera  $\mathbf{B} = -0,5\mathbf{a}_z$  mWb/m<sup>2</sup> em (10, 0, 0). Determine  $\mathbf{B}$  em:  
 (a) (0, 3, 0);  
 (b) (3, 4, 0);  
 (c) (1, 1, -1).

**8.16** Um bloco de ferro ( $\mu = 5.000\mu_0$ ) está colocado em um campo magnético uniforme com 1,5 Wb/m<sup>2</sup>. Se o ferro consiste de  $8,5 \times 10^{25}$  átomos/m<sup>3</sup>, calcule: (a) a magnetização  $\mathbf{M}$ ; (b) a densidade de corrente magnética média.

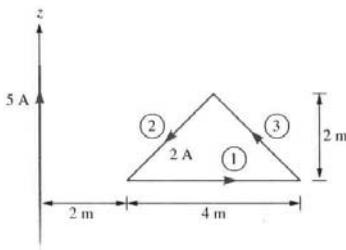


Figura 8.34 Referente ao Problema 8.10.

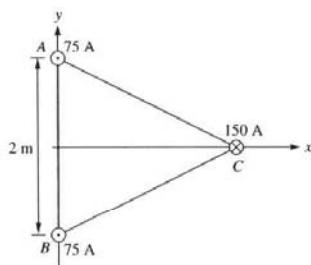


Figura 8.35 Referente ao Problema 8.11.

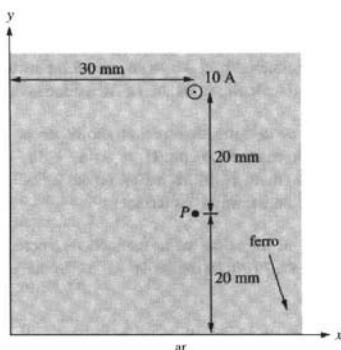


Figura 8.36 Referente ao Problema 8.13.

**8.17** Em um certo material, para o qual  $\mu = 6,5\mu_0$ ,

$$\mathbf{H} = 10\mathbf{a}_x + 25\mathbf{a}_y - 40\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Determine:

- a susceptibilidade magnética  $\chi_m$  do material;
- a densidade de fluxo magnético  $\mathbf{B}$ ;
- a magnetização  $\mathbf{M}$ ;
- a densidade de energia magnética.

**8.18** Em um material ferromagnético ( $\mu = 4,5\mu_0$ ),

$$\mathbf{B} = 4y\mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$$

Calcule: (a)  $\chi_m$ , (b)  $\mathbf{H}$ , (c)  $\mathbf{M}$ , (d)  $\mathbf{J}_m$ .

**8.19** A intensidade de campo magnético é  $H = 1.200 \text{ A/m}$  em um material quando  $H$  é reduzido à  $400 \text{ A/m}$ ,  $B = 1,4 \text{ Wb/m}^2$ . Calcule a variação na magnetização  $M$ .

**8.20** Um cilindro condutor infinitamente longo, de raio  $a$  e de permeabilidade  $\mu_r\mu_0$ , está colocado ao longo do eixo  $z$ . Se o condutor é percorrido por uma corrente  $I$ , uniformemente distribuída, ao longo de  $\mathbf{a}_z$ , determine  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{J}_m$  para  $0 < \rho < a$ .

**8.21** Se  $\mathbf{M} = \frac{k_o}{a} (-y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y)$  dentro de um cubo de aresta  $a$ , determine  $\mathbf{J}_m$ . Assuma que  $k_o$  é uma constante.

**\*8.22** (a) Para a fronteira entre dois meios magnéticos, como mostrado na Figura 8.16, demonstre que as condições de fronteira para o vetor de magnetização são:

$$\frac{M_{1t}}{\chi_{m1}} - \frac{M_{2t}}{\chi_{m2}} = K \quad \text{e} \quad \frac{\mu_1}{\chi_{m1}} m_{1n} = \frac{\mu_2}{\chi_{m2}} M_{2n}$$

(b) Se a fronteira não tiver corrente, demonstre que, ao invés da equação (8.49), obtemos:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[ 1 + \frac{K\mu_2}{B_2 \operatorname{sen} \theta_2} \right]$$

**8.23** Se  $\mu_1 = 2\mu_o$  para a região 1 ( $0 < \phi < \pi$ ) e  $\mu_2 = 5\mu_o$  para a região 2 ( $\pi < \phi < 2\pi$ ) e  $\mathbf{B}_1 = 10\mathbf{a}_y + 15\mathbf{a}_\phi - 20\mathbf{a}_z$  mWb/m<sup>2</sup>, calcule: (a)  $\mathbf{B}_2$ , (b) as densidades de energia nos dois meios.

**8.24** A interface  $2x + y = 8$  entre dois meios não é percorrida por nenhuma corrente. Se o meio 1 ( $2x + y \geq 8$ ) é não magnético com  $\mathbf{H}_1 = -4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$  A/m, determine: (a) a densidade de energia magnética no meio 1; (b)  $\mathbf{M}_2$  e  $\mathbf{B}_2$  no meio 2 ( $2x + y \leq 8$ ), com  $\mu = 10\mu_o$ ; (c) os ângulos que  $\mathbf{H}_1$  e  $\mathbf{H}_2$  fazem com a normal à interface.

**8.25** A interface  $4x - 5z = 0$  entre dois meios magnéticos é percorrida por uma corrente de  $35 \mathbf{a}_x$  A/m. Se  $\mathbf{H}_1 = 25\mathbf{a}_x - 30\mathbf{a}_y + 45\mathbf{a}_z$  A/m na região  $4x - 5z \leq 0$ , onde  $\mu_{r1} = 5$ , calcule  $\mathbf{H}_2$  na região  $4x - 5z \geq 0$ , onde  $\mu_{r2} = 10$ .

**8.26** O plano  $z = 0$  separa o ar ( $z \geq 0, \mu = \mu_o$ ) do ferro ( $z \leq 0, \mu = 200\mu_o$ ). Dado que

$$\mathbf{H} = 10\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

no ar, encontre  $\mathbf{B}$  no ferro e o ângulo que esse vetor faz com essa interface.

**8.27** A região  $0 \leq z \leq 2$  m é preenchida com um bloco infinito de material magnético ( $\mu = 2,5\mu_o$ ). Se as superfícies do bloco em  $z = 0$  e  $z = 2$ , respectivamente, são percorridas por correntes de superfície de  $30\mathbf{a}_x$  A/m e  $-40\mathbf{a}_x$  A/m, como na Figura 8.37, calcule  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  para:

- (a)  $z < 0$ ;
- (b)  $0 < z < 2$ ;
- (c)  $z > 2$ .

**8.28** Em uma certa região, para a qual  $\chi_m = 19$ ,

$$\mathbf{H} = 5x^2yz\mathbf{a}_x + 10xy^2z\mathbf{a}_y - 15xyz^2\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Qual a quantidade de energia armazenada em  $0 < x < 1, 0 < y < 2$  e  $-1 < z < 2$ ?

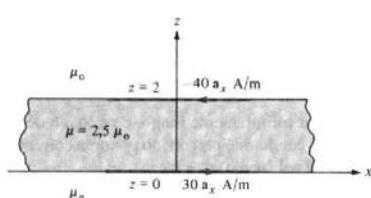


Figura 8.37 Referente ao Problema 8.27.

- 8.29** A curva de magnetização para uma liga de ferro é, aproximadamente, dada por  $B = 1/3H + H^2 \mu \text{ Wb/m}^2$ . Determine: (a)  $\mu_r$ , quando  $H = 210 \text{ A/m}$ ; (b) a energia armazenada no interior da liga, por unidade de volume, à medida que  $H$  aumenta de 0 a  $210 \text{ A/m}$ .

- \*8.30** (a) Se a seção reta do toróide da Figura 7.15 é um quadrado de lado  $a$ , demonstre que a auto-indutância do toróide é:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left[ \frac{2\rho_0 + a}{2\rho_0 - a} \right]$$

(b) Se o toróide tem uma seção reta circular como mostrada na Figura 7.15, demonstre que:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\rho_0}$$

onde  $\rho_0 \gg a$ .

- 8.31** Quando dois fios idênticos paralelos estão separados de 3 m, a indutância por unidade de comprimento é  $2,5 \mu\text{H/m}$ . Calcule o diâmetro de cada fio.

- 8.32** Um solenóide de comprimento 10 cm e raio 1 cm tem 450 espiras. Calcule sua indutância.

- 8.33** O núcleo de um toróide tem  $12 \text{ cm}^2$  de área de seção reta e é feito de um material com  $\mu_r = 200$ . Se o raio médio do toróide é 50 cm, calcule o número de espiras necessário para obter uma indutância de  $2,5 \text{ H}$ .

- 8.34** Demonstre que a indutância mútua entre a espira retangular e a corrente em uma linha infinita da Figura 8.4 é:

$$M_{12} = \frac{\mu b}{2\pi} \ln \left[ \frac{a + \rho_0}{\rho_0} \right]$$

Calcule  $M_{12}$  quando  $a = b = \rho_0 = 1 \text{ m}$ .

- \*8.35** Prove que a indutância mútua entre solenóides coaxiais, muito próximos entre si, de comprimento  $\ell_1$  e  $\ell_2$  ( $\ell_1 \gg \ell_2$ ),  $N_1$  e  $N_2$  espiras e raios  $r_1$  e  $r_2$ , com  $r_1 = r_2$ , é:

$$M_{12} = \frac{\mu N_1 N_2}{\ell_1} \pi r_1^2$$

- 8.36** Um anel de cobalto ( $\mu_r = 600$ ) tem um raio médio de 30 cm. Se uma bobina, enrolada sobre o anel, é percorrida por uma corrente de 12 A, determine o número de espiras necessário para estabelecer uma densidade de fluxo magnético média de  $1,5 \text{ Wb/m}$  no anel.

- 8.37** Considere a Figura 8.27. Se a corrente na bobina é 0,5 A, determine a fmm e a intensidade de campo magnético no entreferro de ar. Assuma que  $\mu = 500\mu_0$  e que todos os trechos tenham a mesma área de seção reta igual a  $10 \text{ cm}^2$ .

- 8.38** O circuito magnético da Figura 8.38 tem uma bobina de 2.000 espiras percorrida por uma corrente igual a 10 A. Assuma que todos os trechos têm a mesma área de seção reta de  $2 \text{ cm}^2$  e que o material do núcleo é ferro com  $\mu_r = 1.500$ . Calcule  $R$ ,  $F$  e  $\Psi$  para:

- (a) o núcleo;
- (b) o entreferro de ar.

**8.39** Considere o circuito magnético na Figura 8.39. Assumindo que o núcleo ( $\mu = 1000\mu_0$ ) tem uma seção reta uniforme de  $4 \text{ cm}^2$ , determine a densidade de fluxo no entreferro de ar.

**8.40** Um relé eletromagnético é modelado como mostrado na Figura 8.40. Qual a força sobre a armadura (parte móvel) do relé, se o fluxo no entreferro de ar é de  $2 \text{ mWb}$ ? A área do entreferro é de  $0,3 \text{ cm}^2$  e seu comprimento é de  $1,5 \text{ mm}$ .

**8.41** Um toróide com um entreferro de ar, mostrado na Figura 8.41, tem uma seção reta quadrada. Um condutor longo, percorrido por uma corrente  $I_2$ , é inserido no entreferro de ar. Se  $I_1 = 200 \text{ mA}$ ,  $N = 750$ ,  $\rho_o = 10 \text{ cm}$ ,  $a = 5 \text{ mm}$  e  $\ell_o = 1 \text{ cm}$ , calcule:

- a força no entreferro quando  $I_2 = 0$  e a permeabilidade relativa do toróide é de 300.
- a força sobre o condutor quando  $I_2 = 2 \text{ mA}$  e a permeabilidade do toróide é infinita. Despreze o vazamento do fluxo no entreferro em ambos os casos.

**8.42** Uma seção de um eletroímã com uma placa sob ele suportando uma carga é mostrada na Figura 8.42. O eletroímã tem uma área de contato de  $200 \text{ cm}^2$  por pólo, com o pólo do meio tendo um enrolamento de 100 espiras e  $I = 3 \text{ A}$ . Calcule a máxima massa que pode ser levantada. Suponha que as relutâncias do eletroímã e da placa sejam desprezíveis.

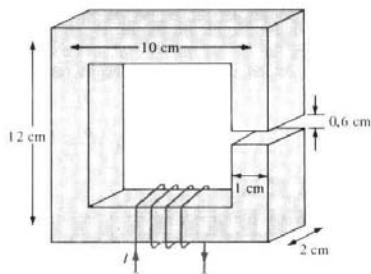


Figura 8.38 Referente ao Problema 8.38.

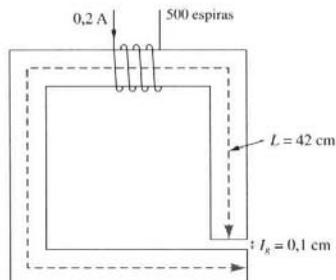


Figura 8.39 Referente ao Problema 8.39.

- 8.43** A Figura 8.43 mostra a seção reta de um sistema eletromecânico no qual uma peça móvel se desloca livremente através de uma luva não magnética. Assumindo que todas as “pernas” do núcleo tenham a mesma seção reta  $S$ , demonstre que:

$$\mathbf{F} = -\frac{2N^2 I^2 \mu_0 S}{(a + 2x)^2} \mathbf{a}_x$$

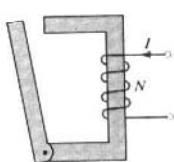


Figura 8.40 Referente ao Problema 8.40.

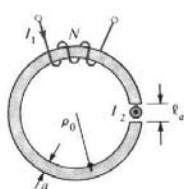


Figura 8.41 Referente ao Problema 8.41.

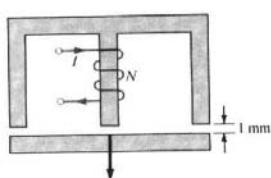


Figura 8.42 Referente ao Problema 8.42.

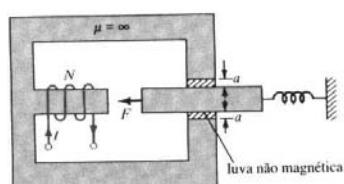


Figura 8.43 Referente a Problema 8.43.

---

PARTE **4**

---

## ONDAS E APLICAÇÕES

# Capítulo 9

## EQUAÇÕES DE MAXWELL

Você quer ser um herói? Não seja o tipo de pessoa que observa as outras tomarem atitudes grandiosas ou que não sabe o que está acontecendo. Vá em frente e faça as coisas acontecerem. As pessoas que agem dessa maneira têm um desejo ardoroso de que as coisas aconteçam, de ir adiante, de servir a mais pessoas, de dar o melhor de si e de ajudar a melhorar o mundo ao seu redor.

— GLENN VAN EKEREN

### 9.1 INTRODUÇÃO

Na Parte II (Capítulos 4 a 6) deste livro, centramos nosso estudo, principalmente, em campos eletrostáticos denotados por  $\mathbf{E}(x, y, z)$ . Na Parte III (Capítulos 7 e 8), nos dedicamos aos campos magnetostáticos representados por  $\mathbf{H}(x, y, z)$ . Restringimos, consequentemente, nossa discussão aos campos EM estáticos ou invariáveis no tempo. De agora em diante, examinaremos situações em que os campos elétricos e magnéticos são dinâmicos ou variáveis no tempo. Em primeiro lugar, deve-se mencionar que, no caso de campos EM estáticos, os campos elétrico e magnético são independentes um do outro, enquanto que, no caso de campos EM dinâmicos, os dois campos são interdependentes. Em outras palavras, um campo elétrico variável no tempo necessariamente implica um campo magnético correspondente variável no tempo. Em segundo lugar, os campos EM variáveis no tempo, representados por  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  e  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ , são de maior importância prática do que os campos EM estáticos. Entretanto, a familiaridade com os campos estáticos promove uma boa fundamentação para compreender os campos dinâmicos. Em terceiro lugar, reembremos que os campos eletrostáticos são usualmente gerados por cargas elétricas estáticas, enquanto que os campos magnetostáticos são devido ao movimento das cargas elétricas com velocidade uniforme (corrente contínua) ou devido a cargas magnéticas estáticas (pólos magnéticos). Campos magnéticos variáveis no tempo ou ondas são usualmente gerados por cargas aceleradas ou por correntes variáveis no tempo, tais como as mostradas na Figura 9.1. Qualquer corrente pulsada produzirá radiação (campos variáveis no tempo). É importante observar que correntes pulsadas do tipo mostrado na Figura 9.1(b) são causas da emissão irradiada por placas de lógica digital. Em resumo:

Cargas estacionárias	→	campos eletrostáticos
Correntes contínuas	→	campos magnetostáticos
Correntes variáveis no tempo	→	campos eletromagnéticos (ou ondas)

Nosso objetivo neste capítulo é construir sólidos fundamentos para nossos estudos subsequentes. Isto envolverá dois conceitos da maior importância: (1) força eletromotriz baseada nos experimentos de Faraday e (2) corrente de deslocamento, que resulta da hipótese de Maxwell. Como resultado desses conceitos, as equações de Maxwell apresentadas na Seção 7.6 e as condições de fronteira para campos estáticos EM serão modificadas de forma a contemplar as variações no tempo dos campos. Deve ser enfatizado que as equações de Maxwell resumem as leis do eletromagnetismo e devem ser a base de nossas discussões no restante do livro. Por essa razão, a Seção 9.5 deve ser considerada como a essência deste livro.

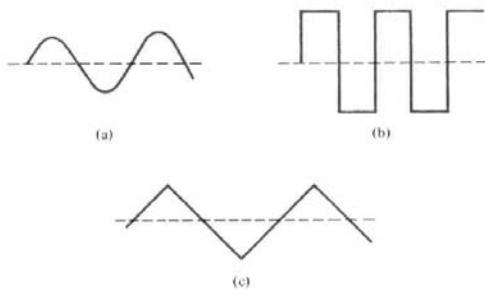


Figura 9.1 Vários tipos de corrente variável no tempo: (a) sinusoidal; (b) retangular; (c) triangular.

## 9.2 LEI DE FARADAY

Após a descoberta experimental de Oersted (sobre a qual Biot–Savart e Ampère basearam suas leis) de que a corrente contínua produz um campo magnético, parecia lógico investigar a hipótese de que um campo magnético poderia produzir eletricidade. Em 1831, aproximadamente 11 anos após a descoberta de Oersted, Michael Faraday, em Londres, e Joseph Henry, em Nova York, descobriram que um campo magnético variável no tempo poderia produzir uma corrente elétrica.<sup>1</sup>

De acordo com os experimentos de Faraday, um campo magnético estático não produz fluxo de corrente, mas um campo magnético variável no tempo produz uma tensão induzida (denominada *fem* ou, simplesmente, *fem*) em um circuito fechado, o que causa um fluxo de corrente.

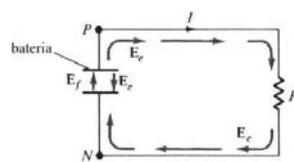
Faraday descobriu que a **fem induzida**,  $V_{\text{fem}}$  (em volts), em qualquer circuito fechado, é igual à taxa de variação no tempo do fluxo magnético enlaçado pelo circuito.

Essa é a *lei de Faraday* e pode ser expressa como

$$V_{\text{fem}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d\Psi}{dt} \quad (9.1)$$

onde  $N$  é o número de espiras no circuito e  $\Psi$  é o fluxo em cada espira. O sinal negativo mostra que a tensão induzida age de tal forma a se opor ao fluxo que o produziu. Essa propriedade é conhecida como *lei de Lenz*,<sup>2</sup> destaca o fato de que o sentido de fluxo da corrente no circuito é tal que o campo magnético produzido pela corrente induzida se opõe ao campo magnético original.

Relembre que descrevemos o campo elétrico como uma região em que cargas elétricas sofrem a ação de força. Os campos elétricos considerados até agora são causados por cargas elétricas. Em tais campos, as linhas de fluxo começam e terminam em uma carga. Entretanto, há outros tipos de campos elétricos não diretamente causados por cargas elétricas. Estes são campos produzidos por fem's. Fontes de fem's incluem geradores elétricos, baterias, termopares, células de carga e células fotovoltaicas; todos convertem energia não elétrica em energia elétrica.

Figura 9.2 Circuito mostrando a fem que produz um campo  $E_f$  e campos eletrostáticos  $E_e$ .

<sup>1</sup> Para mais detalhes sobre a experiência de Michael Faraday (1791–1867) e Joseph Henry (1797–1878), veja W. F. Magie, *A Source Book in Physics*, Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1963, p. 472–519.

<sup>2</sup> Em homenagem a Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804–1865), professor de Física russo.

Considere o circuito elétrico da Figura 9.2, onde uma bateria é a fonte de fem. A ação eletroquímica da bateria resulta em um campo  $\mathbf{E}_f$  produzido por uma fem. Devido ao acúmulo de cargas nos terminais da bateria, um campo eletrostático  $\mathbf{E}_e$  ( $= -\nabla V$ ) também existe. O campo elétrico total em qualquer ponto do circuito é:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_e \quad (9.2)$$

Observe que, fora da bateria,  $\mathbf{E}_e$  é zero, dentro da bateria,  $\mathbf{E}_f$  e  $\mathbf{E}_e$  têm orientações opostas, e a orientação de  $\mathbf{E}_e$  no interior da bateria é oposta a do campo fora dela. Se integrarmos a equação (9.2) sobre o circuito fechado,

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} + 0 = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{através da bateria}) \quad (9.3a)$$

onde  $\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = 0$  porque  $\mathbf{E}_e$  é conservativo. A fem da bateria é a integral de linha do campo produzido pela fem, isto é,

$$V_{\text{fem}} = \int_N^P \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} = - \int_N^P \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = IR \quad (9.3b)$$

já que  $\mathbf{E}_f$  e  $\mathbf{E}_e$  são iguais, mas opostos dentro da bateria (veja Figura 9.2). Isso deve ser considerado como a diferença de potencial ( $V_p - V_N$ ) entre os terminais da bateria a circuito aberto. É importante notar que:

1. Um campo eletrostático  $\mathbf{E}_e$  não pode manter uma corrente contínua em um circuito fechado, uma vez que  $\oint_L \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = 0 = IR$ .
2. Um campo  $\mathbf{E}_f$  produzido por uma fem é não conservativo.
3. Exceto em eletrostática, a tensão e a diferença de potencial são usualmente não equivalentes.

### 9.3 FEM DE MOVIMENTO E FEM DE TRANSFORMADOR

Tendo considerado a relação entre fem e campo elétrico, podemos examinar como a lei de Faraday associa os campos elétricos com os campos magnéticos. Para um circuito com uma só espira ( $N = 1$ ), a equação (9.1) torna-se:

$$V_{\text{fem}} = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (9.4)$$

Em termos de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , a equação (9.4) pode ser escrita como

$$V_{\text{fem}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.5)$$

onde  $\Psi$  foi substituído por  $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , e  $S$  é a área superficial do circuito delimitado pelo caminho fechado  $L$ . É evidente, da equação (9.5), que, em uma situação de campos variáveis no tempo, tanto o campo elétrico quanto o magnético estão presentes e estão interrelacionados. Observe que  $d\mathbf{l}$  e  $d\mathbf{S}$  na equação (9.5) estão de acordo com a regra da mão direita e com o teorema de Stokes. Isso deve ser observado na Figura 9.3. A variação do fluxo com o tempo, que aparece na equação (9.1) ou na equação (9.5), pode ser causada de três maneiras:

1. quando se tem uma espira estacionária em um campo magnético  $\mathbf{B}$  variável no tempo;
2. quando se tem a área de uma espira variável no tempo em um campo magnético  $\mathbf{B}$  estático;
3. quando se tem a área de uma espira variável no tempo em um campo magnético  $\mathbf{B}$  variável no tempo;

Cada uma dessas situações será considerada separadamente.

### A. Espira estacionária em um campo magnético $\mathbf{B}$ variável no tempo (fem de transformador)

Esse é o caso ilustrado na Figura 9.3, onde uma espira condutora estacionária está imersa em um campo magnético  $\mathbf{B}$  variável no tempo. A equação (9.5) torna-se:

$$V_{\text{fem}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.6)$$

Essa fem induzida pela corrente variável no tempo (que produz o campo magnético  $\mathbf{B}$  variável no tempo) em uma espira estacionária é muitas vezes denominada como *fem de transformador* em Análise de Sistemas de Potência, uma vez que está relacionada à operação de um transformador. Ao aplicar o teorema de Stokes ao termo do meio na equação (9.6), obtemos:

$$\oint_L (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.7)$$

Para as duas integrais se igualarem, os integrandos devem ser iguais, isto é:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.8)$$

Essa é uma das equações de Maxwell para campos variáveis no tempo. Essa equação mostra que o campo elétrico  $\mathbf{E}$  variável no tempo é não conservativo ( $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ ). Isso não implica que os princípios de conservação da energia sejam violados. O trabalho realizado para deslocar uma carga em um caminho fechado na presença de um campo elétrico variável no tempo, por exemplo, é devido à energia proveniente do campo magnético variável no tempo. Observe que a Figura 9.3 obedece a lei de Lenz, isto é, a corrente induzida  $I$  flui de forma a produzir um campo magnético que se opõe a  $\mathbf{B}(t)$ .

### B. Espira em movimento em um campo $\mathbf{B}$ estático (fem de movimento)

Quando uma espira condutora se move em um campo  $\mathbf{B}$  estático, uma fem é induzida na espira. Remembremos da equação (8.2) que a força sobre uma carga em movimento com velocidade uniforme  $\mathbf{u}$  em um campo magnético  $\mathbf{B}$  é

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (8.2)$$

Definimos o *campo elétrico de movimento*  $\mathbf{E}_m$  como

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{Q} = \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (9.9)$$

Se considerarmos uma espira condutora, movendo-se com velocidade uniforme  $\mathbf{u}$ , como constituída de um grande número de elétrons livres, a fem induzida na espira será

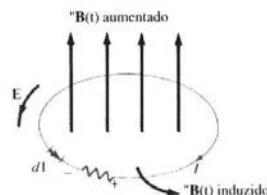


Figura 9.3 Fem induzida devida a uma espira estacionária imersa em um campo magnético  $\mathbf{B}$  variável no tempo.

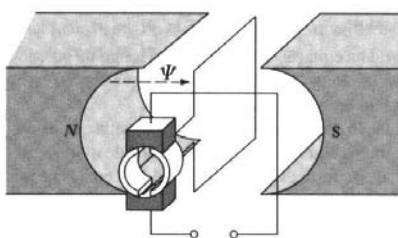


Figura 9.4 Máquina de corrente contínua.

$$V_{\text{fem}} = \oint_L \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (9.10)$$

Este tipo de fem é denominada *fem de movimento* ou *fem de fluxo cortante* porque é devido à ação do movimento. Este é o tipo de fem encontrada em máquinas elétricas como motores, geradores e alternadores. A Figura 9.4 ilustra uma máquina de corrente contínua de dois pólos com uma bobina de armadura e um comutador de duas barras. Embora a análise da máquina de corrente contínua esteja fora do escopo deste livro, podemos observar que uma tensão é gerada à medida que a bobina gira na presença do campo magnético. Um outro exemplo de fem de movimento é ilustrado na Figura 9.5, onde um bastão se move entre um par de trilhos. Neste exemplo,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{u}$  são perpendiculares entre si, tal que a equação (9.9), em conjunto com a equação (8.2), torna-se

$$\mathbf{F}_m = I\ell \times \mathbf{B} \quad (9.11)$$

ou

$$F_m = I\ell B \quad (9.12)$$

e a equação (9.10) torna-se

$$V_{\text{fem}} = uB\ell \quad (9.13)$$

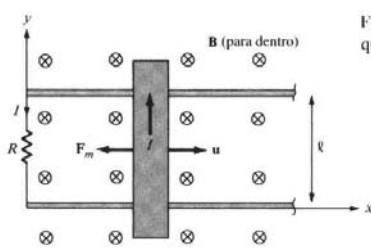
Aplicando o teorema de Stokes à equação (9.10),

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}_m) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

ou

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (9.14)$$

Observe que, diferentemente da equação (9.6), não há necessidade do sinal negativo na equação (9.10) porque a lei de Lenz já está considerada.

Figura 9.5 Fem induzida devido à uma espira que se move em um campo  $\mathbf{B}$  estático.

Aplicar a equação (9.10) nem sempre é fácil; deve-se ter algum cuidado. Os seguintes pontos devem ser observados:

1. A integral na equação (9.10) é zero ao longo da porção da espira para a qual  $\mathbf{u} = 0$ . Assim,  $d\mathbf{l}$  é tomado ao longo da porção da espira que corta o campo (ao longo do bastão na Figura 9.5), onde  $\mathbf{u}$  tem um valor diferente de zero.
2. A orientação da corrente induzida é a mesma que a de  $\mathbf{E}_m$  ou  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ . A orientação do caminho da integral na equação (9.10) é escolhida de modo a estar no sentido oposto ao da corrente induzida, dessa forma satisfazendo a lei de Lenz. Na equação (9.13), por exemplo, a integração sobre  $L$  é ao longo de  $-\mathbf{a}_y$ , enquanto que a corrente induzida flui no bastão ao longo de  $\mathbf{a}_y$ .

### C. Espira em movimento em um campo magnético variável no tempo

Esse é o caso geral em que uma espira condutora se movimenta em um campo magnético variável no tempo. Neste caso, tanto a fem de transformador quanto a de movimento estão presentes. Combinando as equações (9.6) e (9.10), tem-se a fem total dada por

$$V_{\text{fem}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (9.15)$$

ou a partir das equações (9.8) e (9.14),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (9.16)$$

Observe que a equação (9.15) é equivalente à equação (9.4), tal que  $V_{\text{fem}}$  pode ser encontrada usando ou a equação (9.15) ou a equação (9.4). De fato, a equação (9.4) pode ser sempre aplicada em lugar das equações (9.6), (9.10) e (9.15).

#### EXEMPLO 9.1

Uma barra condutora pode deslizar livremente sobre dois trilhos condutores, como mostrado na Figura 9.6. Calcule a tensão induzida na barra se:

- (a) a barra está parada em  $y = 8 \text{ cm}$  e  $\mathbf{B} = 4 \cos 10^6 t \mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$ ;
- (b) a barra desliza a uma velocidade  $\mathbf{u} = 20\mathbf{a}_y \text{ m/s}$  e  $\mathbf{B} = 4\mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$ ;
- (c) a barra desliza a uma velocidade  $\mathbf{u} = 20\mathbf{a}_y \text{ m/s}$  e  $\mathbf{B} = 4 \cos (10^6 t - y) \mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$

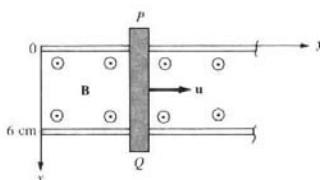


Figura 9.6 Referente ao Exemplo 9.1.

#### Solução:

- (a) Neste caso, temos uma fem de transformador dada por

$$\begin{aligned} V_{\text{fem}} &= - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_{y=0}^{0.08} \int_{x=0}^{0.06} 4(10^{-3})(10^6) \sin 10^6 t \, dx \, dy \\ &= 4(10^3)(0.08)(0.06) \sin 10^6 t \\ &= 19,2 \sin 10^6 t \, \text{V} \end{aligned}$$

A polaridade da tensão induzida (de acordo com a lei de Lenz) é tal que o ponto  $P$  na barra está em um potencial mais baixo do que o do ponto  $Q$ , quando  $\mathbf{B}$  está aumentando.

(b) Este é o caso da fem de movimento:

$$\begin{aligned} V_{\text{fem}} &= \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{x=\ell}^0 (u\mathbf{a}_y \times B\mathbf{a}_z) \cdot dx \mathbf{a}_x \\ &= -uB\ell = -20(4,10^{-3})(0,06) \\ &= -4,8 \text{ mV} \end{aligned}$$

(c) Ambas as fêms (de transformador e de movimento) estão presentes neste caso. Este problema pode ser resolvido de duas maneiras.

**Método 1:** usando a equação (9.15),

$$\begin{aligned} V_{\text{fem}} &= - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (9.1.1) \\ &= \int_{x=0}^{0,06} \int_0^y 4,10^{-3}(10^6) \sin(10^6t - y') dy' dx \\ &\quad + \int_{0,06}^0 [20\mathbf{a}_y \times 4,10^{-3} \cos(10^6t - y)\mathbf{a}_z] \cdot dx \mathbf{a}_x \\ &= 240 \cos(10^6t - y') \Big|_0^y - 80(10^{-3})(0,06) \cos(10^6t - y) \\ &= 240 \cos(10^6t - y) - 240 \cos 10^6t - 4,8(10^{-3}) \cos(10^6t - y) \\ &= 240 \cos(10^6t - y) - 240 \cos 10^6t \quad (9.1.2) \end{aligned}$$

porque a fem de movimento é desprezível se comparada à fem de transformador. Utilizando a identidade trigonométrica

$$\begin{aligned} \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ V_{\text{fem}} &= 480 \sin \left( 10^6t - \frac{y}{2} \right) \sin \frac{y}{2} \text{ V} \quad (9.1.3) \end{aligned}$$

**Método 2:** alternativamente, podemos aplicar a equação (9.4), nominalmente,

$$V_{\text{fem}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (9.1.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{y=0}^y \int_{x=0}^{0,06} 4 \cos(10^6t - y) dx dy \\ &= -4(0,06) \sin(10^6t - y) \Big|_{y=0}^y \\ &= -0,24 \sin(10^6t - y) + 0,24 \sin 10^6t \text{ mWb} \end{aligned}$$

Porém,

$$\frac{dy}{dt} = u \rightarrow y = ut = 20t$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Psi &= -0,24 \operatorname{sen}(10^6 t - 20t) + 0,24 \operatorname{sen} 10^6 t \text{ mWb} \\ V_{\text{fem}} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0,24(10^6 - 20) \cos(10^6 t - 20t) - 0,24(10^6) \cos 10^6 t \text{ mV} \\ &\approx 240 \cos(10^6 t - y) - 240 \cos 10^6 t \text{ V}\end{aligned}\quad (9.1.5)$$

que é o mesmo resultado da equação (9.1.2). Observe que, na equação (9.1.1), a dependência de  $y$  com o tempo é considerada em  $\int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$  e não devemos nos preocupar com ela em  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ . Por quê? Porque a espira é considerada estacionária quando computamos a fém de transformador. Esse é um ponto a considerar quando aplicamos a equação (9.1.1). Pela mesma razão, o segundo método é sempre mais fácil.

### EXERCÍCIO PRÁTICO 8.1

Considere a espira da Figura 9.5. Se  $\mathbf{B} = 0,5 \mathbf{a}_z \text{ Wb/m}^2$ ,  $R = 20 \Omega$ ,  $\ell = 10 \text{ cm}$  e a barra se movimenta com uma velocidade constante de  $8 \mathbf{a}_x \text{ m/s}$ , determine:

- (a) a fém induzida na barra;
- (b) a corrente através do resistor;
- (c) a força sobre a barra devido ao seu movimento;
- (d) a potência dissipada pelo resistor.

**Resposta:** (a) 0,4 V; (b) 20 mA; (c)  $-8 \mathbf{a}_x \text{ mN}$ ; (d) 8 mW.

### EXEMPLO 9.2

A espira mostrada na Figura 9.7 está imersa em um campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = 50 \mathbf{a}_z \text{ mWb/m}^2$ . Se o lado  $DC$  da espira "corta" as linhas de fluxo a uma frequência de 50 Hz, estando a espira sobre o plano  $xy$  no tempo  $t = 0$ , encontre:

- (a) a fém induzida em  $t = 1 \text{ ms}$ ;
- (b) a corrente induzida em  $t = 3 \text{ ms}$ .

#### Solução:

(a) Já que o campo  $\mathbf{B}$  é invariável no tempo, a fém induzida é de movimento, isto é,

$$V_{\text{fem}} = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

onde

$$\begin{aligned}d\mathbf{l} &= d\mathbf{l}_{DC} = dz \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{\rho}{dt} d\phi \mathbf{a}_\phi = \rho\omega \mathbf{a}_\phi \\ \rho &= AD = 4 \text{ cm}, \quad \omega = 2\pi f = 100\pi\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{u}$  e  $d\mathbf{l}$  estão em coordenadas cilíndricas, transformamos  $\mathbf{B}$  em coordenadas cilíndricas usando a equação (2.9):

$$\mathbf{B} = B_o \mathbf{a}_r = B_o (\cos \phi \mathbf{a}_\rho - \operatorname{sen} \phi \mathbf{a}_\phi)$$

onde  $B_o = 0,05$ . Portanto,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ 0 & \rho\omega & 0 \\ B_o \cos \phi & -B_o \operatorname{sen} \phi & 0 \end{vmatrix} = -\rho\omega B_o \cos \phi \mathbf{a}_z$$

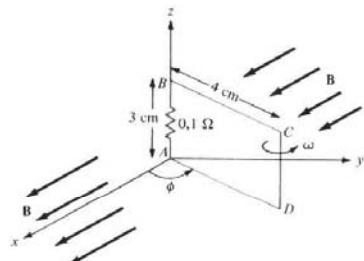


Figura 9.7 Referente ao Exemplo 9.2. A polaridade é para fem aumentando.

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} &= -\rho\omega B_0 \cos \phi dz = -0,04(100\pi)(0,05) \cos \phi dz \\ &= -0,2\pi \cos \phi dz \\ V_{\text{fem}} &= \int_{z=0}^{0,03} -0,2\pi \cos \phi dz = -6\pi \cos \phi \text{ mV} \end{aligned}$$

Para determinar  $\phi$ , relembrre que

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \rightarrow \phi = \omega t + C_o$$

onde  $C_o$  é uma constante de integração. Em  $t = 0$ ,  $\phi = \pi/2$  porque a espira está no plano  $yz$  neste instante de tempo,  $C_o = \pi/2$ . Desta forma,

$$\phi = \omega t + \frac{\pi}{2}$$

e

$$V_{\text{fem}} = -6\pi \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 6\pi \sin(100\pi t) \text{ mV}$$

Em  $t = 1 \text{ ms}$ ,  $V_{\text{fem}} = 6\pi \sin(0,1\pi) = 5,825 \text{ mV}$

(b) A corrente induzida é:

$$i = \frac{V_{\text{fem}}}{R} = 60\pi \sin(100\pi t) \text{ mA}$$

Em  $t = 3 \text{ ms}$ ,

$$i = 60\pi \sin(0,3\pi) \text{ mA} = 0,1525 \text{ A}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 9.2

Refaça o Exemplo 9.2 considerando, no entanto, um outro campo  $\mathbf{B}$  dado por:

- (a)  $\mathbf{B} = 50\mathbf{a}_y \text{ mWb/m}^2$  – isto é, o campo magnético está orientado ao longo de  $y$  positivo;
- (b)  $\mathbf{B} = 0,02t \mathbf{a}_x \text{ Wb/m}^2$  – isto é, o campo magnético é variável no tempo.

**Resposta:** (a)  $-17,93 \text{ mV}, -0,1108 \text{ A}$ ; (b)  $20,5 \mu\text{V}, -41,92 \text{ mA}$ .

**EXEMPLO 9.3**

O circuito magnético da Figura 9.8 tem uma seção reta uniforme de  $10^{-3} \text{ m}^2$ . Se o circuito é energizado por uma corrente  $i_1(t) = 3 \text{ sen } 100\pi t \text{ A}$  em um enrolamento com  $N_1 = 200$  espiras, determine a fem induzida no enrolamento de  $N_2 = 100$  espiras. Assuma que  $\mu = 500 \mu_0$ .

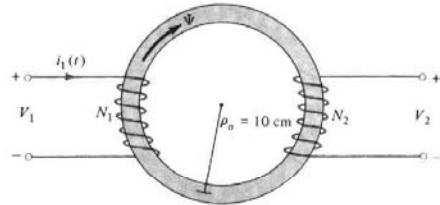


Figura 9.8 Circuito magnético do Exemplo 9.3.

**Solução:**

O fluxo no circuito é:

$$\Psi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{N_1 i_1}{\ell \mu S} = \frac{N_1 i_1 \mu S}{2\pi \rho_o}$$

De acordo com a lei de Faraday, a fem induzida no enrolamento secundário é:

$$\begin{aligned} V_2 &= -N_2 \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{N_1 N_2 \mu S}{2\pi \rho_o} \frac{di_1}{dt} \\ &= -\frac{100 \cdot (200) \cdot (500) \cdot (4\pi \times 10^{-7}) \cdot (10^{-3}) \cdot 300\pi \cos 100\pi t}{2\pi \cdot (10 \times 10^{-2})} \\ &= -6\pi \cos 100\pi t \text{ V} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 9.3**

Um núcleo magnético de seção reta uniforme de  $4 \text{ cm}^2$  é conectado a um gerador de 120 V, 60 Hz, como mostrado na Figura 9.9. Calcule a fem induzida  $V_2$  no enrolamento secundário.

**Resposta:** 72 V.

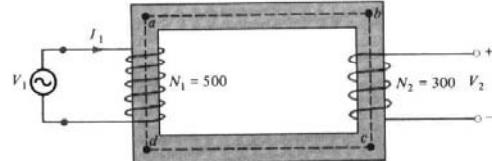


Figura 9.9 Referente ao Exercício Prático 9.3.

## 9.4 CORRENTE DE DESLOCAMENTO

Na seção precedente, essencialmente, reconsideramos a equação de Maxwell do rotacional para campos eletrostáticos e a modificamos para situações em que há variação temporal, a fim de satisfazer a lei de Faraday. Agora, reconsideraremos a equação de Maxwell do rotacional para campos magnéticos (lei circuital de Ampère) para situações com variação temporal.

Para campos EM estáticos, relembramos que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9.17)$$

Porém, a divergência do rotacional de qualquer campo vetorial é identicamente zero (veja o Exemplo 3.10). Portanto:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (9.18)$$

Entretanto, a continuidade da corrente expressa na equação (5.43) requer que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0 \quad (9.19)$$

Dessa forma, as equações (9.18) e (9.19) são, obviamente, incompatíveis para situações com variação temporal. Temos que modificar a equação (9.17) para compatibilizá-la com a equação (9.19). Para conseguir isso, adicionamos um termo na equação (9.17), tal que ela se torna

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \quad (9.20)$$

onde  $\mathbf{J}_d$  deve ser determinado e definido. Novamente, a divergência do rotacional de qualquer vetor é zero. Portanto:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d \quad (9.21)$$

A fim de compatibilizar a equação (9.21) com a equação (9.19),

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = -\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.22a)$$

ou

$$\boxed{\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \quad (9.22b)$$

Substituindo a equação (9.22b) na equação (9.20), resulta em

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \quad (9.23)$$

Esta é a equação de Maxwell (baseada na lei circuitual de Ampère) para campos variáveis no tempo. O termo  $\mathbf{J}_d = \partial \mathbf{D} / \partial t$  é conhecido como *densidade de corrente de deslocamento* e  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente de condução ( $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ).<sup>3</sup> A inserção do termo  $\mathbf{J}_d$  na equação (9.17) foi uma das maiores contribuições de Maxwell. Sem o termo  $\mathbf{J}_d$ , a propagação de ondas eletromagnéticas (ondas de rádio ou de TV, por exemplo) não poderia ter sido prevista, como Maxwell o fez. Em baixas freqüências,  $\mathbf{J}_d$  é usualmente desprezível quando comparado com  $\mathbf{J}$ . Entretanto, em freqüências de rádio, os dois ter-

<sup>3</sup> Relembre também que denotamos  $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}$  como densidade de corrente de convecção.

mos são comparáveis. Na época de Maxwell, fontes de alta freqüência não eram disponíveis, e a equação (9.23) não poderia ser verificada experimentalmente. Anos mais tarde, Hertz conseguiu gerar e detectar ondas de rádio verificando, dessa forma, a equação (9.23). Essa é uma das raras situações em que a argumentação matemática pavimentou o caminho da investigação experimental.

Tomando por base a densidade de corrente de deslocamento, definimos a *corrente de deslocamento* como:

$$I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.24)$$

Devemos ter em mente que a corrente de deslocamento é resultado de um campo elétrico variável no tempo. Um exemplo típico de tal corrente é a corrente através do capacitor quando uma fonte de tensão alternada é aplicada em seus terminais. Este exemplo, mostrado na Figura 9.10, serve para ilustrar a necessidade da corrente de deslocamento. Aplicando a forma não modificada da lei circuitual de Ampère ao caminho fechado  $L$ , mostrado na Figura 9.10(a), obtém-se

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{\text{env}} = I \quad (9.25)$$

onde  $I$  é a corrente através do condutor e  $S_1$  é a superfície plana limitada por  $L$ . Se usarmos a superfície  $S_2$  na forma de balão, que passa entre as placas do capacitor, como mostra a Figura 9.10(b),

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_{\text{env}} = 0 \quad (9.26)$$

porque nenhuma corrente de condução ( $\mathbf{J} = 0$ ) flui através de  $S_2$ . Isto é paradoxal porque foi utilizando, neste caso, o mesmo caminho fechado  $L$  da situação mostrada na Figura 9.10(a). Para resolver este conflito, precisamos incluir a corrente de deslocamento na lei circuitual de Ampère. A densidade de corrente total é  $\mathbf{J} + \mathbf{J}_d$ . Na equação (9.25),  $\mathbf{J}_d = 0$ , tal que esta equação permanece válida. Na equação (9.26),  $\mathbf{J} = 0$  tal que:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ}{dt} = I \quad (9.27)$$

Desta maneira, obtemos a mesma corrente para ambas as superfícies, embora a corrente seja de condução em  $S_1$  e de deslocamento em  $S_2$ .

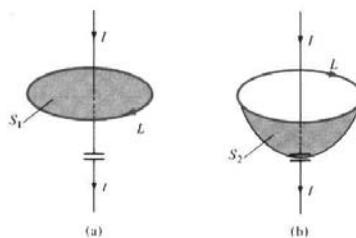


Figura 9.10 Duas superfícies de integração mostrando a necessidade de  $\mathbf{J}_d$  na lei circuitual de Ampère.

#### EXEMPLO 9.4

Um capacitor de placas paralelas, com área de placa de  $5 \text{ cm}^2$  e separação entre placas de  $3 \text{ mm}$ , tem uma tensão aplicada às suas placas de  $50 \sin 10^3 t \text{ V}$ . Calcule a corrente de deslocamento considerando que  $\epsilon = 2\epsilon_0$ .

**Solução:**

$$D = \epsilon E = \epsilon \frac{V}{d}$$

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon}{d} \frac{dV}{dt}$$

Portanto,

$$I_d = J_d \cdot S = \frac{\epsilon S}{d} \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

que é igual à corrente de condução dada por

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{dQ}{dt} = S \frac{d\rho_s}{dt} = S \frac{dD}{dt} = \epsilon S \frac{dE}{dt} = \frac{\epsilon S}{d} \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt} \\ I_d &= 2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{5 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-3}} \cdot 10^3 \times 50 \cos 10^3 t \\ &= 147,4 \cos 10^3 t \text{ nA} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 9.4**

No espaço livre,  $E = 20 \cos(\omega t - 50x) \mathbf{a}_y$  V/m. Calcule:

- (a)  $\mathbf{J}d$ ;
- (b)  $\mathbf{H}$ ;
- (c)  $\omega$ .

**Resposta:** (a)  $-20\omega\epsilon_0 \sin(\omega t - 50x) \mathbf{a}_y \text{ A/m}^2$ ; (b)  $0,4 \omega\epsilon_0 \cos(\omega t - 50x) \mathbf{a}_z \text{ A/m}$ ; (c)  $1,5 \times 10^{10} \text{ rad/s}$

**9.5 EQUAÇÕES DE MAXWELL NAS FORMAS FINAIS**

James Clerk Maxwell (1831–1879) é considerado o fundador da Teoria Eletromagnética na sua forma atual. O trabalho consagrado de Maxwell levou à descoberta das ondas eletromagnéticas.<sup>4</sup> A partir de seu trabalho teórico de aproximadamente cinco anos (entre os seus 35 e 40 anos), Maxwell publicou a primeira teoria unificada da eletricidade e do magnetismo. A teoria compreendeu todos os resultados já conhecidos, de cunho experimental e teórico, sobre eletricidade e magnetismo. Adicionalmente, Maxwell introduziu o conceito de corrente de deslocamento e fez a previsão da existência das ondas eletromagnéticas. As equações de Maxwell não foram amplamente aceitas por muitos cientistas até serem confirmadas posteriormente por Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894), um professor de Física alemão. Hertz foi bem-sucedido na sua tentativa de gerar e detectar ondas de rádio.

As leis do eletromagnetismo, que Maxwell compilou na forma de quatro equações, foram apresentadas na Tabela 7.2, na Seção 7.6, para condições estáticas. As formas mais gerais dessas equações são para condições com variação temporal e estão mostradas na Tabela 9.1. Observamos da tabela que as equações de divergência permanecem as mesmas, enquanto as equações de rotacional foram modificadas. A forma integral das equações de Maxwell evidencia as leis físicas subjacentes, enquanto a forma diferencial é usada mais freqüentemente na solução de problemas. Para um campo ser “classificado” como um campo eletromagnético, ele deve satisfazer todas as quatro equações de Maxwell. A importância das equações de Maxwell não pode ser subestimada porque elas resumem todas as leis conhecidas do eletromagnetismo. Até o final deste livro, nos referiremos a essas equações inúmeras vezes.

<sup>4</sup> O trabalho de James Clerk Maxwell (1831–1879), físico escocês, pode ser encontrado em seu livro, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. New York: Dover, vol. 1 e 2, 1954.

Já que esta seção pretende ser uma síntese de nossa discussão nesse livro, é importante mencionar outras equações que vão ser utilizadas lado a lado com as equações de Maxwell. A equação da força de Lorentz

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (9.28)$$

TABELA 9.1 Forma geral das equações de Maxwell

Forma diferencial	Forma integral	Comentários
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_v dv$	Lei de Gauss
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Demonstração da não existência da carga magnética isolada*
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	Lei de Faraday
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$	Lei circuital de Ampère

\* Esta também é referida como a lei de Gauss para campos magnéticos.

está associada às equações de Maxwell. Da mesma forma, a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (9.29)$$

está implícita nas equações de Maxwell. Os conceitos de linearidade, isotropia e homogeneidade do meio material também se aplicam para campos variáveis no tempo. Em um meio linear, homogêneo e isotrópico, caracterizado por  $\sigma$ ,  $\epsilon$  e  $\mu$ , as relações constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (9.30a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (9.30b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \rho_v \mathbf{u} \quad (9.30c)$$

permanecem válidas para campos variáveis no tempo. Conseqüentemente, as condições de fronteira

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = 0 \quad (9.31a)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K \quad \text{ou} \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K} \quad (9.31b)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad \text{ou} \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{a}_{n12} = \rho_s \quad (9.31c)$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{a}_{n12} = 0 \quad (9.31d)$$

permanecem válidas para campos variáveis no tempo. Entretanto, para um condutor perfeito ( $\sigma \approx \infty$ ) em um campo variável no tempo,

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{J} = 0 \quad (9.32)$$

e, portanto:

$$\mathbf{B}_n = 0, \quad \mathbf{E}_t = 0 \quad (9.33)$$

Para um dielétrico perfeito ( $\sigma = 0$ ), a equação (9.31) continua válida, à exceção de que  $\mathbf{K} = 0$ . Embora as equações (9.28) a (9.33) não sejam equações de Maxwell, elas estão associadas a essas.

Para completar esta seção resumo, apresentaremos, na Figura 9.11, uma estrutura que relaciona os vários campos vetoriais, elétrico e magnético, com as funções potenciais. Esse diagrama de fluxo

eletromagnético auxilia na visualização das relações fundamentais entre as grandezas de campo. Também mostra que é possível encontrar formulações alternativas para um dado problema de uma maneira relativamente simples. Deve-se observar que, nas Figuras 9.10(b) e 9.10(c), introduzimos  $\rho^m$  como a densidade de carga magnética livre (semelhante a  $\rho_s$ ), que é, evidentemente, nula, e  $\mathbf{A}_e$  como a densidade de corrente magnética (análoga a  $\mathbf{J}$ ). Usando termos da análise de tensões, as principais relações são classificadas como:

(a) equações de compatibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho^m = 0 \quad (9.34)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{J}_m \quad (9.35)$$

(b) equações constitutivas

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9.36)$$

e

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (9.37)$$

(c) equações de equilíbrio

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (9.38)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9.39)$$

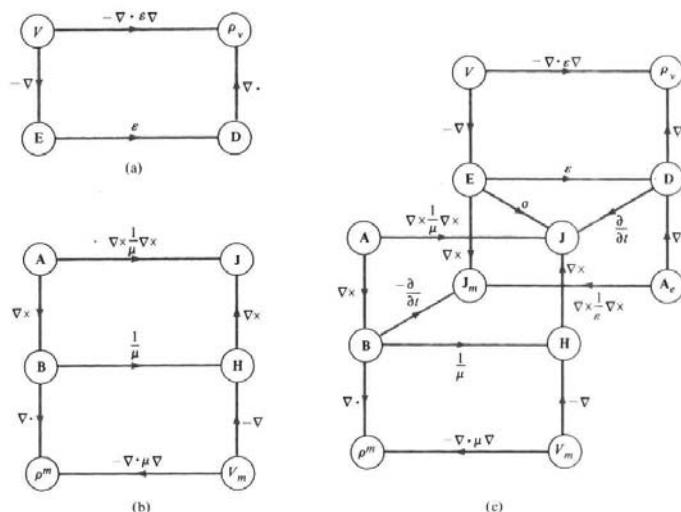


Figura 9.11 Diagrama de fluxo eletromagnético mostrando a relação entre potenciais e campos vetoriais: (a) sistema eletrostático; (b) sistema magnetostático; (c) sistema eletromagnético. [Adaptado com permissão do IEE Publishing Dept.]

## †9.6 POTENCIAIS VARIÁVEIS NO TEMPO

Para campos EM estáticos, obtemos o potencial elétrico escalar como

$$V = \int_v \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \quad (9.40)$$

e o potencial magnético vetorial como

$$\mathbf{A} = \int_v \frac{\mu J dv}{4\pi R} \quad (9.41)$$

Examinemos o que acontece com estes potenciais quando os campos são variáveis no tempo. Relembre que  $\mathbf{A}$  foi definido a partir do fato que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , que continua válido para campos variáveis no tempo. Assim, a relação

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (9.42)$$

continua válida para campos variáveis no tempo. Combinando a lei de Faraday, equação (9.8), com a equação (9.42), resulta em

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (9.43a)$$

ou

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.43b)$$

Já que o rotacional do gradiente de um campo escalar é identicamente zero (veja Exercício Prático 3.10), a solução para a equação (9.43b) é

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (9.44)$$

ou

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (9.45)$$

Das equações (9.42) e (9.45), podemos determinar os campos vetoriais  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  desde que os potenciais  $\mathbf{A}$  e  $V$  sejam conhecidos. Entretanto, precisamos encontrar algumas expressões para  $\mathbf{A}$  e para  $V$  similares àquelas das equações (9.40) e (9.41), que são adequadas para campos com variação temporal.

Da Tabela 9.1, ou da equação (9.38), sabemos que  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$  é válido para condições variáveis no tempo. Tomando a divergência da equação (9.45) e fazendo uso das equações (9.37) e (9.38), obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

ou

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (9.46)$$

Tomando o rotacional da equação (9.42) e incorporando as equações (9.23) e (9.45), resulta em

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J} + \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ &= \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (9.47)$$

onde se pressupõe que  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Ao aplicar a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (9.48)$$

à equação (9.47), obtém-se:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (9.49)$$

Um campo vetorial é univocamente definido quando seu rotacional e sua divergência forem especificados. O rotacional de  $\mathbf{A}$  foi especificado na equação (9.42). Por razões que ficarão evidentes em breve, escolhemos a divergência de  $\mathbf{A}$  como

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}} \quad (9.50)$$

Esta escolha relaciona  $\mathbf{A}$  com  $V$  e é denominada *condição de Lorentz para potenciais*. Tínhamos isto em mente quando escolhemos  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  para campos magnetostáticos na equação (7.59). Impondo a condição de Lorentz da equação (9.50), as equações (9.46) e (9.49) tornam-se, respectivamente,

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}} \quad (9.51)$$

e

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}} \quad (9.52)$$

que são as *equações de onda* a serem discutidas no próximo capítulo. A razão para escolher a condição de Lorentz torna-se óbvia quando examinamos as equações (9.51) e (9.52). Ela desacopla as equações (9.46) e (9.49) e também produz uma simetria entre as equações (9.51) e (9.52). Pode-se mostrar que a condição de Lorentz pode ser obtida da equação da continuidade. Portanto, nossa escolha da equação (9.50) não é arbitrária. Observe que as equações (6.4) e (7.60) são casos especiais estáticos das equações (9.51) e (9.52), respectivamente. Em outras palavras, os potenciais  $V$  e  $\mathbf{A}$  satisfazem as equações de Poisson para condições com variação temporal. Da mesma forma que as equações (9.40) e (9.41) são as soluções ou as formas integrais das equações (6.4) e (7.60), pode-se mostrar que as soluções<sup>5</sup> das equações (9.51) e (9.52) são

$$V = \int_v \frac{[\rho_v] dv}{4\pi R} \quad (9.53)$$

e

$$\mathbf{A} = \int_v \frac{\mu[\mathbf{J}] dv}{4\pi R} \quad (9.54)$$

O termo  $[\rho_v]$  (ou  $[\mathbf{J}]$ ) significa que o tempo  $t$  em  $\rho_v(x, y, z, t)$  [ou  $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ ] é substituído pelo *tempo de retardo*  $t'$  dado por

<sup>5</sup> Por exemplo, veja D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Reading MA: Addison-Wesley, 1983, p. 291–292.

$$t' = t - \frac{R}{\mu} \quad (9.55)$$

onde  $R \mid \mathbf{r}' - \mathbf{r} \mid$  é a distância entre o ponto fonte  $\mathbf{r}'$  e o ponto de observação  $\mathbf{r}$ , isto é, o ponto onde se quer o valor do potencial, e

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (9.56)$$

é a velocidade de propagação da onda. No espaço livre  $u = c = 3 \times 10^8$  m/s, é a velocidade da luz no vácuo. Os potenciais  $V$  e  $\mathbf{A}$  nas equações (9.53) e (9.54) são, respectivamente, denominados *potencial elétrico escalar com retardo* e *potencial magnético vetorial com retardo*. Dados  $\rho_c$  e  $\mathbf{J}$ ,  $V$  e  $\mathbf{A}$  podem ser determinados usando as equações (9.53) e (9.54). A partir de  $V$  e  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  podem ser determinados usando as equações (9.45) e (9.42), respectivamente.

## 9.7 CAMPOS HARMÔNICOS NO TEMPO

Até agora, consideramos a dependência temporal de campos EM como sendo arbitrária. De forma específica, assumiremos que os campos são harmônicos no tempo.

**Um campo harmônico no tempo** é aquele que varia periodicamente ou sinusoidalmente com o tempo.

Além de a análise sinusoidal ter valor prático em si, é também importante porque pode ser estendida para a maioria das formas de onda através do uso da transformada de Fourier. Sinusóides são expressas de maneira simples como fasores, com os quais é muito mais conveniente de se trabalhar.

Antes de aplicar fasores para campos EM, é útil fazer uma breve revisão do conceito de fator.

Um fator  $z$  é um número complexo que pode ser escrito como:

$$z = x + jy = r \angle \phi \quad (9.57)$$

ou

$$z = r e^{j\phi} = r (\cos \phi + j \sin \phi) \quad (9.58)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$ ,  $x$  é a parte real de  $z$ ,  $y$  é a parte imaginária de  $z$ ,  $r$  é a magnitude de  $z$ , dada por

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (9.59)$$

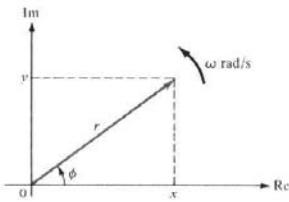
e  $\phi$  é a fase de  $z$ , dado por:

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \quad (9.60)$$

Aqui,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $r$  e  $\phi$  não devem ser confundidos com as variáveis coordenadas (letras diferentes poderiam ter sido usadas, mas é difícil encontrar letras melhores que essas). O fator  $z$  pode ser representado na *forma retangular* como  $z = x + jy$  ou, na *forma polar*, como  $z = r \angle \phi = r e^{j\phi}$ . As duas formas de representar  $z$  são descritas nas equações (9.57) a (9.60) e ilustradas na Figura 9.12. A soma e a subtração de fasores são melhor efetuadas na forma retangular, enquanto que a multiplicação e a divisão são melhor efetuadas na forma polar.

Dados os números complexos

$$z = x + jy = r \angle \phi, \quad z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 \angle \phi_1 \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 \angle \phi_2$$

Figura 9.12 Representação de um fasor  $z = x + jy = r \angle \phi$ .

as seguintes propriedades básicas devem ser observadas:

Adição:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (9.61a)$$

Subtração:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (9.61b)$$

Multiplicação:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \phi_1 + \phi_2 \quad (9.61c)$$

Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \phi_1 - \phi_2 \quad (9.61d)$$

Raiz quadrada:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle \phi/2 \quad (9.61e)$$

Complexo conjugado:

$$z^* = x - jy = r \angle -\phi = r e^{-j\phi} \quad (9.61f)$$

Outras propriedades dos números complexos podem ser encontradas no Apêndice A.2.

Para introduzir a dependência temporal, façamos

$$\phi = \omega t + \theta \quad (9.62)$$

onde  $\theta$  pode ser uma função do tempo, ou de coordenadas espaciais, ou pode ser uma constante. As partes real (Re) e imaginária (Im) de

$$r e^{j\phi} = r e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad (9.63)$$

são dadas, respectivamente, por

$$\text{Re}(r e^{j\phi}) = r \cos(\omega t + \theta) \quad (9.64a)$$

e

$$\text{Im}(r e^{j\phi}) = r \sin(\omega t + \theta) \quad (9.64b)$$

Portanto, uma corrente sinusoidal dada, por exemplo, por  $I(t) = I_o \cos(\omega t + \theta)$  é igual à parte real de  $I_o e^{j\theta} e^{j\omega t}$ . A corrente  $I'(t) = I_o \sin(\omega t + \theta)$ , que é a parte imaginária de  $I_o e^{j\theta} e^{j\omega t}$ , pode também ser

representada como a parte real de  $I_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} e^{-j90^\circ}$  porque  $\sin \alpha = \cos(\alpha - 90^\circ)$ . Entretanto, ao realizar as operações matemáticas, devemos ser coerentes usando ou a parte real ou a parte imaginária de uma grandeza, mas não ambas simultaneamente.

O termo complexo  $I_0 e^{j\theta}$ , que resulta quando subtendemos o fator tempo  $e^{j\omega t}$  em  $I(t)$ , é denominado o *fasor* corrente, denotado por  $I_s$ , isto é,

$$I_s = I_0 e^{j\theta} = I_0 \angle \theta \quad (9.65)$$

onde o subscrito  $s$  denota a forma fasorial de  $I(t)$ . Então, a *forma instantânea*  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \theta)$  pode ser expressa como

$$I(t) = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t}) \quad (9.66)$$

Em geral, um fasor pode ser um escalar ou um vetor. Se um vetor  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  é um campo harmônico no tempo, a *forma fasorial* de  $\mathbf{A}$  é  $\mathbf{A}_s(x, y, z)$ , estando essas duas grandezas relacionadas conforme:

$$\boxed{\mathbf{A} = \operatorname{Re}(\mathbf{A}_s e^{j\omega t})} \quad (9.67)$$

Por exemplo, se  $\mathbf{A} = A_0 \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{a}_y$ , podemos escrever  $\mathbf{A}$  como

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}(A_0 e^{-j\beta x} \mathbf{a}_y e^{j\omega t}) \quad (9.68)$$

Comparando esta equação com a equação (9.67), conclui-se que a forma fasorial de  $\mathbf{A}$  é:

$$\mathbf{A}_s = A_0 e^{-j\beta x} \mathbf{a}_y \quad (9.69)$$

Observe, da equação (9.67), que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\mathbf{A}_s e^{j\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{A}_s e^{j\omega t}) \end{aligned} \quad (9.70)$$

mostrando que determinar a derivada no tempo de um grandeza instantânea é equivalente a multiplicar sua forma fasorial por  $j\omega$ . Isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow j\omega \mathbf{A}_s \quad (9.71)$$

De forma similar,

$$\int \mathbf{A} dt \rightarrow \frac{\mathbf{A}_s}{j\omega} \quad (9.72)$$

Observe que a parte real é escolhida na equação (9.67), como na análise de circuitos; a parte imaginária igualmente poderia ter sido escolhida. Observe também a diferença básica entre a forma instantânea  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  e sua forma fasorial  $\mathbf{A}_s(x, y, z)$ . A primeira é dependente do tempo e é real, enquanto que a última é invariável no tempo e é geralmente complexa. É mais fácil trabalhar com  $\mathbf{A}_s$  e obter  $\mathbf{A}$  de  $\mathbf{A}_s$ , sempre que for necessário, utilizando a equação (9.67).

Apliquemos agora o conceito de fasor a campos EM variáveis no tempo. As grandezas campo  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{D}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{J}(x, y, z, t)$  e  $\rho_v(x, y, z, t)$  e suas derivadas podem ser expressas na forma fasorial usando as equações (9.67) e (9.71). Na forma fasorial, as equações de Maxwell para campos EM harmônicos no tempo em um meio linear, isotrópico homogêneo são apresentadas na Tabela 9.2. Da Tabela 9.2, observe que o fator tempo  $e^{j\omega t}$  desaparece porque está associado a cada termo e, portanto, resultam-se equações independentes do tempo. Eis a justificativa para uso de fasores: o fator tempo pode ser omitido em nossa análise de campos harmônicos no tempo e inserido quando necessário. Note, também, que, na Tabela 9.2, o fator tempo  $e^{j\omega t}$  foi assumido. É igualmente possível assumir o fator tempo  $e^{-j\omega t}$ . Neste caso, precisaremos substituir cada  $j$  na Tabela 9.2 por  $-j$ .

TABELA 9.2 Equações de Maxwell na forma harmônica temporal, assumindo  $e^{j\omega t}$  como fator tempo

Forma pontual	Forma integral
$\nabla \cdot \mathbf{D}_s = \rho_{ss}$	$\oint \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_{ss} dv$
$\nabla \cdot \mathbf{B}_s = 0$	$\oint \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega \mathbf{B}_s$	$\oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = -j\omega \int \mathbf{B}_s \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega \mathbf{D}_s$	$\oint \mathbf{H}_s \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{J}_s + j\omega \mathbf{D}_s) \cdot d\mathbf{S}$

**EXEMPLO 9.5**

Determine o valor dos números complexos:

$$(a) z_1 = \frac{j(3 - j4)^*}{(-1 + j6)(2 + j)^2}$$

$$(b) z_2 = \left[ \frac{1 + j}{4 - j8} \right]^{1/2}$$

**Solução:**(a) A solução pode ser obtida de duas maneiras: trabalhando com  $z$  na forma retangular ou na forma polar.**Método 1:** trabalhando com a forma retangular.

Seja:

$$z_1 = \frac{z_3 z_4}{z_5 z_6}$$

onde

$$\begin{aligned} z_3 &= j \\ z_4 &= (3 - j4)^* = \text{complexo conjugado de } (3 - j4) \\ &= 3 + j4 \end{aligned}$$

(Para encontrar o complexo conjugado de um número complexo, simplesmente substitua cada  $j$  por  $-j$ ).

$$z_5 = -1 + j6$$

e

$$z_6 = (2 + j)^2 = 4 - 1 + j4 = 3 + j4$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z_3 z_4 &= j(3 + j4) = -4 + j3 \\ z_5 z_6 &= (-1 + j6)(3 + j4) = -3 - j4 + j18 - 24 \\ &= -27 + j14 \end{aligned}$$

e

$$z_1 = \frac{-4 + j3}{-27 + j14}$$

Multiplicando e dividindo  $z_1$  por  $-27 - j14$  (racionalização), temos:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(-4 + j3)(-27 - j14)}{(-27 + j14)(-27 - j14)} = \frac{150 - j25}{27^2 + 14^2} \\ &= 0,1622 - j0,027 = 0,1644 \angle -9,46^\circ \end{aligned}$$

**Método 2:** trabalhando na forma polar.

$$z_3 = j = 1 \angle 90^\circ$$

$$z_4 = (3 - j4)^* = (5 \angle -53,13^\circ)^* = 5 \angle 53,13^\circ$$

$$z_5 = (-1 + j6) = \sqrt{37} \angle 99,46^\circ$$

$$z_6 = (2 + j)^2 = (\sqrt{5} \angle 26,56^\circ)^2 = 5 \angle 53,13^\circ$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1 \angle 90^\circ)(5 \angle 53,13^\circ)}{(\sqrt{37} \angle 99,46^\circ)(5 \angle 53,13^\circ)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{37}} \angle 90^\circ - 99,46^\circ = 0,1644 \angle -9,46^\circ \\ &= 0,1622 - j0,027 \end{aligned}$$

como obtido anteriormente.

(b) Seja

$$z_2 = \left[ \begin{matrix} z_7 \\ z_8 \end{matrix} \right]^{1/2}$$

onde

$$z_7 = 1 + j = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

e

$$z_8 = 4 - j8 = 4\sqrt{5} \angle -63,4^\circ$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{z_7}{z_8} &= \frac{\sqrt{2} \angle 45^\circ}{4\sqrt{5} \angle -63,4^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} \angle 45^\circ - -63,4^\circ \\ &= 0,1581 \angle 108,4^\circ \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{0,1581} \angle 108,4^\circ / 2 \\ &= 0,3976 \angle 54,2^\circ \end{aligned}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 9.5

Determine o valor dos números complexos:

$$(a) j^3 \left[ \frac{1+j}{2-j} \right]^2$$

$$(b) 6 \angle 30^\circ + j5 - 3 + e^{j45^\circ}$$

**Resposta:** (a)  $0,24 + j0,32$ ; (b)  $2,903 + j8,707$ .

**EXEMPLO 9.6**

Dado que  $\mathbf{A} = 10 \cos(10^8 t - 10x + 60^\circ) \mathbf{a}_z$  e  $\mathbf{B}_s = (20/j) \mathbf{a}_x + 10 e^{j2\pi x/3} \mathbf{a}_y$ , expresse  $\mathbf{A}$  na forma fasorial e  $\mathbf{B}_s$  na forma instantânea.

**Solução:**

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}[10e^{j(\omega t - 10x + 60^\circ)} \mathbf{a}_z]$$

onde  $\omega = 10^8$ . Portanto,

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}[10e^{j(60^\circ - 10x)} \mathbf{a}_z e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}(\mathbf{A}_s e^{j\omega t})$$

ou

$$\mathbf{A}_s = 10 e^{j(60^\circ - 10x)} \mathbf{a}_z$$

Se

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_s &= \frac{20}{j} \mathbf{a}_x + 10 e^{j2\pi x/3} \mathbf{a}_y = -j20 \mathbf{a}_x + 10 e^{j2\pi x/3} \mathbf{a}_y \\ &= 20 e^{-j\pi/2} \mathbf{a}_x + 10 e^{j2\pi x/3} \mathbf{a}_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \operatorname{Re}(\mathbf{B}_s e^{j\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}[20e^{j(\omega t - \pi/2)} \mathbf{a}_x + 10e^{j(\omega t + 2\pi x/3)} \mathbf{a}_y] \\ &= 20 \cos(\omega t - \pi/2) \mathbf{a}_x + 10 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{3}\right) \mathbf{a}_y \\ &= 20 \sin \omega t \mathbf{a}_x + 10 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{3}\right) \mathbf{a}_y\end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 9.6**

Se  $\mathbf{P} = 2 \sin(10t + x - \pi/4) \mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{Q}_s = e^{jx} (\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z) \sin \pi y$ , determine a forma fasorial de  $\mathbf{P}$  e a forma instantânea de  $\mathbf{Q}_s$ .

**Resposta:**  $2e^{j(x-3\pi/4)} \mathbf{a}_y, \sin \pi y \cos(\omega t + x)(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z)$ .

**EXEMPLO 9.7**

O campo elétrico e o campo magnético no espaço livre são dados por

$$\mathbf{E} = \frac{50}{\rho} \cos(10^6 t + \beta z) \mathbf{a}_\phi \text{ V/m}$$

$$\mathbf{H} = \frac{H_0}{\rho} \cos(10^6 t + \beta z) \mathbf{a}_\rho \text{ A/m}$$

Expressse estes vetores na forma fasorial e determine as constantes  $H_0$  e  $\beta$ , tais que os campos satisfaçam as equações de Maxwell.

**Solução:**

As formas instantâneas de  $\mathbf{E}$  e de  $\mathbf{H}$  são:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}(\mathbf{E}_s e^{j\omega t}), \quad \mathbf{H} = \operatorname{Re}(\mathbf{H}_s e^{j\omega t}) \quad (9.7.1)$$

onde  $\omega = 10^6$  e os fasores  $\mathbf{E}_s$  e  $\mathbf{H}_s$  são dados por

$$\mathbf{E}_s = \frac{50}{\rho} e^{j\beta z} \mathbf{a}_\phi, \quad \mathbf{H}_s = \frac{H_0}{\rho} e^{j\beta z} \mathbf{a}_\rho \quad (9.7.2)$$

Para o espaço livre,  $\rho_v = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$ , tal que as equações de Maxwell tornam-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0 \quad (9.7.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0 \quad (9.7.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_s \quad (9.7.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}_s \quad (9.7.6)$$

Substituindo a equação (9.7.2) nas equações (9.7.3) e (9.7.4), verifica-se, de imediato, que duas equações de Maxwell são satisfeitas, a saber:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_{\phi s}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\rho s}) = 0$$

Considere

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \nabla \times \left( \frac{H_0}{\rho} e^{j\beta z} \mathbf{a}_\rho \right) = \frac{jH_0 \beta}{\rho} e^{j\beta z} \mathbf{a}_\phi \quad (9.7.7)$$

Substituindo as equações (9.7.2) e (9.7.7) na equação (9.7.5), temos

$$\frac{jH_0 \beta}{\rho} e^{j\beta z} \mathbf{a}_\phi = j\omega \epsilon_0 \frac{50}{\rho} e^{j\beta z} \mathbf{a}_\phi$$

ou

$$H_0 \beta = 50 \omega \epsilon_0 \quad (9.7.8)$$

De maneira similar, substituindo a equação (9.7.2) na equação (9.7.6), resulta em

$$-j\beta \frac{50}{\rho} e^{j\beta z} \mathbf{a}_\rho = -j\omega \mu_0 \frac{H_0}{\rho} e^{j\beta z} \mathbf{a}_\rho$$

ou

$$\frac{H_0}{\beta} = \frac{50}{\omega \mu_0} \quad (9.7.9)$$

Multiplicando a equação (9.7.8) pela equação (9.7.9), obtém-se

$$H_0^2 = (50)^2 \frac{\epsilon_0}{\mu_0}$$

ou

$$H_0 = \pm 50 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = \pm \frac{50}{120\pi} = \pm 0,1326$$

Dividindo a equação (9.7.8) pela equação (9.7.9), chega-se a:

$$\beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

ou

$$\beta = \pm \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \pm \frac{\omega}{c} = \pm \frac{10^6}{3 \times 10^8} \\ = \pm 3,33 \times 10^{-3}$$

Tendo em vista a equação (9.7.8),  $\mathbf{H}_0 = 0,1326$ ,  $\beta = 3,33 \times 10^{-3}$  ou  $\mathbf{H}_0 = -0,1326$ ,  $\beta = -3,33 \times 10^{-3}$ , donde se conclui que somente estes valores satisfazem as quatro equações de Maxwell.

### EXERCÍCIO PRÁTICO 9.7

No ar,  $\mathbf{E} = \frac{\sin \theta}{r} \cos(6 \times 10^7 t - \beta r) \mathbf{a}_\phi$  V/m.

Determine  $\beta$  e  $\mathbf{H}$ .

**Resposta:** 0,2 rad/m,  $-\frac{1}{12\pi r^2} \cos \theta \sin(6 \times 10^7 t - 0,2r) \mathbf{a}_r - \frac{1}{120\pi r} \sin \theta \times \cos(6 \times 10^7 t - 0,2r) \mathbf{a}_\theta$  A/m.

### EXEMPLO 9.8

Em um meio caracterizado por  $\sigma = 0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon_0$  e

$$\mathbf{E} = 20 \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_y$$

determine  $\beta$  e  $\mathbf{H}$ .

#### Solução:

Este problema pode ser resolvido diretamente no domínio tempo ou utilizando fasores. Como no caso do exemplo anterior, determinamos  $\beta$  e  $\mathbf{H}$  ao fazer com que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  satisfaçam as quatro equações de Maxwell.

**Método 1 (domínio tempo):** começemos resolvendo este problema da forma mais trabalhosa, isto é, no domínio tempo. É evidente que a lei de Gauss para campos elétricos é satisfeita, isto é:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

Da lei de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \int (\nabla \times \mathbf{E}) dt$$

Contudo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{a}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{a}_z \\ = 20\beta \cos(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_x + 0$$

Assim,

$$\mathbf{H} = -\frac{20\beta}{\mu} \int \cos(10^8 t - \beta z) dt \mathbf{a}_x \\ = -\frac{20\beta}{\mu 10^8} \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_x \quad (9.8.1)$$

Prontamente, verifica-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

mostrando que a lei de Gauss para campos magnéticos é satisfeita. Por último, da lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \int (\nabla \times \mathbf{H}) dt \quad (9.8.2)$$

porque  $\sigma = 0$ .

Contudo,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{a}_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{20\beta^2}{\mu 10^8} \cos(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_y + 0 \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{H}$  na equação (9.8.1) foi substituído. Desta forma, a equação (9.8.2) torna-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{20\beta^2}{\mu \epsilon 10^8} \int \cos(10^8 t - \beta z) dt \mathbf{a}_y \\ &= \frac{20\beta^2}{\mu \epsilon 10^{16}} \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

Comparando este resultado com a expressão dada de  $\mathbf{E}$ , obtém-se

$$\frac{20\beta^2}{\mu \epsilon 10^{16}} = 20$$

ou

$$\begin{aligned} \beta &= \pm 10^8 \sqrt{\mu \epsilon} = \pm 10^8 \sqrt{\mu_0 \cdot 4\epsilon_0} = \pm \frac{10^8 (2)}{c} = \pm \frac{10^8 (2)}{3 \times 10^8} \\ &= \pm \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Da equação (9.8.1),

$$\mathbf{H} = \pm \frac{20 (2/3)}{4\pi \cdot 10^{-7} (10^8)} \sin\left(10^8 t \pm \frac{2z}{3}\right) \mathbf{a}_z$$

ou

$$\mathbf{H} = \pm \frac{1}{3\pi} \sin\left(10^8 t \pm \frac{2z}{3}\right) \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

**Método 2** (usando fasores):

$$\mathbf{E} = \operatorname{Im}(E_s e^{j\omega t}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_s = 20e^{-j\beta z} \mathbf{a}_y \quad (9.8.3)$$

onde  $\omega = 10^8$ .

Novamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_s = \frac{\nabla \times \mathbf{E}_s}{-j\omega\mu}$$

ou

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{-j\omega\mu} \left[ -\frac{\partial E_{ys}}{\partial z} \mathbf{a}_x \right] = -\frac{20\beta}{\omega\mu} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_x \quad (9.8.4)$$

Observe que  $\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$  é satisfeito.

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon\mathbf{E}_s \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_s = \frac{\nabla \times \mathbf{H}_s}{j\omega\epsilon} \quad (9.8.5)$$

Substituindo  $\mathbf{H}_s$  da equação (9.8.4) na equação (9.8.5), resulta em

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_{sx}}{\partial z} \mathbf{a}_y = \frac{20\beta^2 e^{-j\beta z}}{\omega^2 \mu \epsilon} \mathbf{a}_y$$

Comparando esta expressão com a dada para  $\mathbf{E}_s$  na equação (9.8.3), temos:

$$20 = \frac{20\beta^2}{\omega^2 \mu \epsilon}$$

ou

$$\beta = \pm \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \pm \frac{2}{3}$$

conforme obtido anteriormente. Da equação (9.8.4),

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s &= \pm \frac{20(2/3)}{10^8 (4\pi \times 10^{-7})} e^{\pm j\beta z} \mathbf{a}_x = \pm \frac{1}{3\pi} e^{\pm j\beta z} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H} &= \text{Im}(\mathbf{H}_s e^{j\omega t}) \\ &= \pm \frac{1}{3\pi} \sin(10^8 t \pm \beta z) \mathbf{a}_x \text{ A/m} \end{aligned}$$

como obtido anteriormente. Deve ser observado que trabalhar com fasores implica em uma considerável simplificação, se comparado com o trabalho no domínio tempo. Observe, também, que usamos

$$\mathbf{A} = \text{Im}(\mathbf{A}_s e^{j\omega t})$$

porque o  $\mathbf{E}$  é dado em termos de seno, e não em termos de cosseno. Poderíamos ter usado

$$\mathbf{A} = \text{Re}(\mathbf{A}_s e^{j\omega t})$$

neste caso, o seno é expresso em termos de cosseno e a equação (9.8.3) poderia ser escrita como

$$\mathbf{E} = 20 \cos(10^8 t - \beta z - 90^\circ) \mathbf{a}_y = \text{Re}(\mathbf{E}_s e^{j\omega t})$$

ou

$$\mathbf{E}_s = 20e^{-j\beta z - j90^\circ} \mathbf{a}_y = -j20e^{-j\beta z} \mathbf{a}_y$$

e, assim, procedemos da mesma maneira.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 9.8**

Um meio é caracterizado por  $\sigma = 0$ ,  $\mu = 2\mu_0$  e  $\epsilon = 5\epsilon_0$ . Se  $\mathbf{H} = 2 \cos(\omega t - 3y) \mathbf{a}_z \text{ A/m}$ , calcule  $\omega$  e  $\mathbf{E}$ .

**Resposta:**  $2,846 \times 10^8 \text{ rad/s}$ ,  $-476,8 \cos(2,846 \times 10^8 t - 3y) \mathbf{a}_x \text{ V/m}$

**RESUMO**

- Neste capítulo, introduzimos dois conceitos fundamentais: o de força eletromotriz (fem), embasado nos experimentos de Faraday, e o de corrente de deslocamento, que resulta da hipótese de Maxwell. Estes conceitos implicam em modificações nas equações rotacionais de Maxwell obtidas para campos EM estáticos para contemplar a dependência temporal dos campos.

- A lei de Faraday estabelece que a fem induzida é dada por ( $N = 1$ ):

$$V_{\text{fem}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Para fem de transformador,  $V_{\text{fem}} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$

e para fem de movimento,  $V_{\text{fem}} = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ .

- A corrente de deslocamento

$$I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S}$$

onde  $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  (densidade de corrente de deslocamento), representa uma modificação da lei circuitual de Ampère. Esta modificação, atribuída à Maxwell, previu a possibilidade de existência de ondas eletromagnéticas alguns anos antes de serem verificadas experimentalmente por Hertz.

- Na forma diferencial, as equações de Maxwell para campos dinâmicos são:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Cada uma destas equações diferenciais tem uma equação integral correspondente (veja tabelas 9.1 e 9.2), que pode ser deduzida a partir das formas diferenciais utilizando ou o teorema de Stokes ou o teorema da divergência. Qualquer campo EM deve satisfazer as quatro equações de Maxwell simultaneamente.

- O potencial elétrico escalar variável no tempo  $V(x, y, z, t)$  e o potencial magnético vetorial  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  satisfazem as equações de onda se a condição de Lorentz é assumida.
- Campos com variação harmônica no tempo são aqueles que variam sinusoidalmente no tempo. Eles são expressos de maneira mais simples na forma de fasores, com os quais é mais cômodo de se trabalhar. Utilizando a relação de Euler, o vetor instantâneo que representa uma grandeza vetorial  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  é associado à sua forma fasorial  $\mathbf{A}_i(x, y, z)$  de acordo com

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} [\mathbf{A}_i(x, y, z) e^{i\omega t}]$$

## QUESTÕES DE REVISÃO

**9.1** O fluxo através de cada espira de uma bobina de 100 espiras é  $(t^3 - 2t)$  mWb, onde  $t$  é dado em segundos. A fem induzida em  $t = 2$  s é:

- (a) 1 V
- (b) -1 V
- (c) 4 mV
- (d) 0,4 V
- (e) -0,4 V

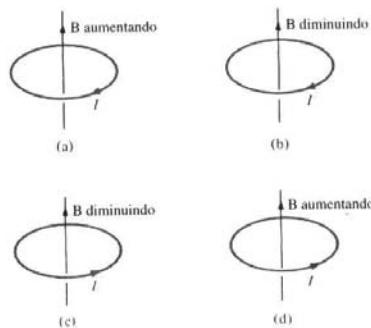


Figura 9.13 Referente à Questão de Revisão 9.2.

**9.2** Assumindo que as espiras estão paradas e que o campo magnético  $\mathbf{B}$  variável no tempo induz uma corrente elétrica  $I$ , indique quais das configurações na Figura 9.13 estão incorretas.

**9.3** Duas espiras condutoras 1 e 2 (idênticas, com exceção de que a 2 é seccionada) estão colocadas em um campo magnético uniforme que diminui a uma taxa constante, como mostra a Figura 9.14. Se o plano de cada espira é perpendicular às linhas de campo, qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

- (a) uma fem é induzida em ambas as espiras;
- (b) uma fem é induzida apenas na espira seccionada 2;
- (c) o aquecimento por efeito Joule em ambas as espiras;
- (d) o aquecimento por efeito Joule não ocorre em nenhuma das espiras.

**9.4** Uma espira gira em torno do eixo  $y$  em um campo magnético  $\mathbf{B} = B_0 \sin \omega t \mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup>. A tensão induzida na espira deve-se à:

- (a) fem de movimento;
- (b) fem de transformador;
- (c) combinação de fem de movimento e fem de transformador;
- (d) nenhuma das alternativas acima.

**9.5** Uma espira retangular é colocada em um campo magnético variável no tempo  $\mathbf{B} = 0,2 \cos 150 \pi t \mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup>, como mostrado na Figura 9.15.  $V_1$  não é igual a  $V_2$ .

- (a) Verdadeiro

(b) Falso

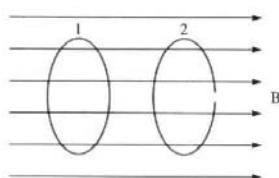


Figura 9.14 Referente a Questão de Revisão 9.3.

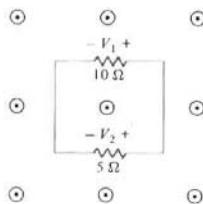


Figura 9.15 Referente a Questão de Revisão 9.5 e ao Problema 9.10.

**9.6** O conceito de corrente de deslocamento foi a maior contribuição de:

- (a) Faraday;
- (b) Lenz;
- (c) Maxwell;
- (d) Lorentz;
- (e) seu professor.

**9.7** Identifique quais das seguintes expressões não são equações de Maxwell para campos variáveis no tempo:

- (a)  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$
- (b)  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$
- (c)  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- (d)  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \left( \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$
- (e)  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

- 9.8** Diz-se que um campo EM não existe ou é não-maxwelliano se ele não satisfaz as equações de Maxwell e as equações de onda derivadas dessas. Qual dos seguintes campos no espaço livre é não-maxwelliano?

- (a)  $\mathbf{H} = \cos x \cos 10^6 t \mathbf{a}_x$
- (b)  $\mathbf{E} = 100 \cos \omega t \mathbf{a}_x$
- (c)  $\mathbf{D} = e^{-10y} \sin (10^5 - 10y) \mathbf{a}_z$
- (d)  $\mathbf{B} = 0,4 \sin 10^4 t \mathbf{a}_z$
- (e)  $\mathbf{H} = 10 \cos \left( 10^5 t - \frac{z}{10} \right) \mathbf{a}_x$
- (f)  $\mathbf{E} = \frac{\sin \theta}{r} \cos (\omega t - r\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) \mathbf{a}_\theta$
- (g)  $\mathbf{B} = (1 - \rho^2) \sin \omega t \mathbf{a}_z$

- 9.9** Qual das seguintes afirmativas não é verdadeira para um fasor?

- (a) Um fasor pode ser um escalar ou um vetor.
- (b) Um fasor pode ser uma grandeza com dependência temporal.
- (c) Um fasor  $V_o$  pode ser representado como  $V_o \angle \theta$  ou  $V_o e^{j\theta}$ , onde  $|V_o| = |V_s|$ .
- (d) Um fasor é uma grandeza complexa.

- 9.10** Se  $\mathbf{E}_s = 10 e^{j\omega t} \mathbf{a}_x$ , qual dessas não é uma representação correta de  $\mathbf{E}$ ?

- (a)  $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_s e^{j\omega t})$
- (b)  $\operatorname{Re}(\mathbf{E}_s e^{-j\omega t})$
- (c)  $\operatorname{Im}(\mathbf{E}_s e^{j\omega t})$
- (d)  $10 \cos(\omega t + j4x) \mathbf{a}_y$
- (e)  $10 \sin(\omega t + 4x) \mathbf{a}_y$

Respostas: 9.1b; 9.2b,d; 9.3a; 9.4c; 9.5a; 9.6c; 9.7a,c; 9.8b,d,g; 9.9a,c; 9.10d.

## PROBLEMAS

- 9.1** Uma espira circular condutora de raio 20 cm está no plano  $z = 0$  imersa em um campo magnético  $\mathbf{B} = 10 \cos 377t \mathbf{a}_z$  mWb/m<sup>2</sup>. Calcule a tensão induzida na espira.
- 9.2** Uma barra de comprimento  $\ell$  gira em torno do eixo  $z$  com uma velocidade angular  $\omega$ . Se  $\mathbf{B} = B_o \mathbf{a}_z$ , calcule a tensão induzida no condutor.
- 9.3** Uma espira retangular de 30 cm por 40 cm gira a 130 rad/s em um campo magnético de 0,06 Wb/m<sup>2</sup>, normal ao eixo de rotação. Se a espira tiver 50 voltas, determine a tensão induzida na espira.
- 9.4** A Figura 9.16 mostra uma espira condutora de 20 cm<sup>2</sup> de área e resistência 4 Ω. Se  $\mathbf{B} = 40 \cos 10^4 t \mathbf{a}_z$  mWb/m<sup>2</sup>, determine a corrente induzida na espira e indique sua orientação.
- 9.5** Determine a fem induzida na espira em forma de  $V$  da Figura 9.17. (a) Considere  $\mathbf{B} = 0,1 \mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup> e  $\mathbf{u} = 2\mathbf{a}_x$  m/s e assuma que a barra começa a deslizar a partir da origem, quando  $t = 0$ . (b) Repita a parte (a) para  $\mathbf{B} = 0,5x \mathbf{a}_z$  Wb/m<sup>2</sup>.

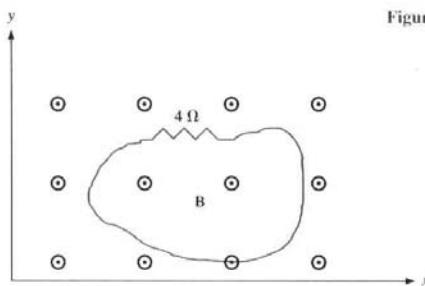


Figura 9.16 Referente ao Problema 9.4.

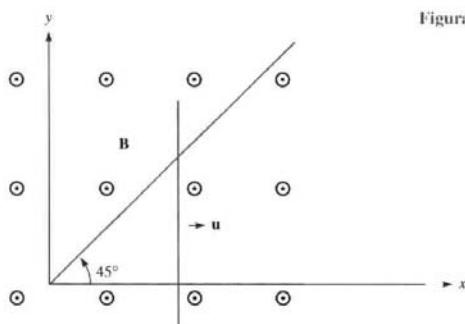


Figura 9.17 Referente ao Problema 9.5.

- \*9.6** Uma espira quadrada de lado  $a$  se afasta de um filamento infinitamente longo, percorrido por uma corrente  $I$ , ao longo de  $\mathbf{a}_z$ , com uma velocidade uniforme  $u_0 \mathbf{a}_y$ , como mostrado na Figura 9.18. Assumindo que  $\rho = \rho_0$  em  $t = 0$ , mostre que a fem induzida na espira em  $t > 0$  é dada por:

$$V_{\text{fem}} = \frac{u_0 a^2 \mu_0 I}{2\pi\rho(\rho + a)}$$

- \*9.7** Uma barra condutora se move com uma velocidade constante de  $3\mathbf{a}_z$  m/s paralelamente a um longo fio retílineo percorrido por uma corrente de  $15\text{ A}$ , como mostrado na Figura 9.19. Calcule a fem induzida na barra e determine qual extremidade da barra está a um potencial mais elevado.

- \*9.8** Uma barra condutora está conectada a um par de trilhos através de conectores flexíveis, em um campo magnético  $\mathbf{B} = 6 \cos 10t \mathbf{a}_x$  mWb/m $^2$ , como mostrado na Figura 9.20. Se o eixo  $z$  é a posição de equilíbrio da barra e sua velocidade é  $2 \cos 10t \mathbf{a}_y$  m/s, determine a tensão induzida na barra.

- 9.9** Um automóvel viaja a  $120\text{ km/h}$ . Se o campo magnético terrestre é de  $4,3 \times 10^{-5}\text{ Wb/m}^2$ , determine a tensão induzida no pára-choque de  $1,6\text{ m}$  de comprimento. Assuma que o ângulo entre o campo magnético terrestre e a normal do carro é  $65^\circ$ .

- \*9.10** Se a área da espira na Figura 9.15 é de  $10\text{ cm}^2$ , calcule  $V_1$  e  $V_2$ .

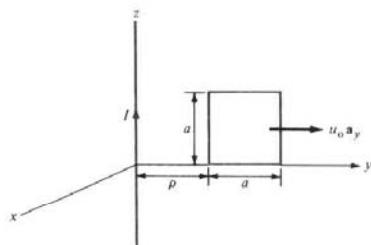


Figura 9.18 Referente ao Problema 9.6.

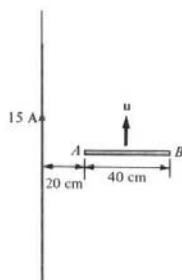


Figura 9.19 Referente ao Problema 9.7.

- 9.11** Uma barra magnética se movimenta em direção ao centro de uma bobina com 10 espiras e com resistência de  $15\ \Omega$ , como mostrado esquematicamente na Figura 9.21. Se o fluxo magnético através da bobina varia de  $0,45\text{ Wb}$  a  $0,64\text{ Wb}$  em  $0,02\text{ s}$ , qual a intensidade e orientação (do ponto de vista do fím) da corrente induzida?
- 9.12** A seção reta de um gerador homopolar na forma de um disco é mostrada na Figura 9.22. O disco tem um raio interno  $\rho_1 = 2\text{ cm}$  e um raio externo  $\rho_2 = 10\text{ cm}$  e gira em um campo magnético uniforme de  $15\text{ mWb/m}^2$ , a uma velocidade de  $60\text{ rad/s}$ . Calcule a tensão induzida.
- 9.13** Um gerador de  $50\text{ V}$  em  $20\text{ MHz}$  é conectado às placas de um capacitor de placas paralelas com dielétrico ar. Considerando a área de cada placa igual a  $2,8\text{ cm}^2$  e a separação entre elas de  $0,2\text{ mm}$ , determine o valor máximo da densidade de corrente de deslocamento e a corrente de deslocamento.
- 9.14** A razão  $J/J_d$  (densidade de corrente de condução por densidade de corrente de deslocamento) é muito importante em altas freqüências. Calcule a razão em  $1\text{ GHz}$  para:
- água destilada ( $\mu = \mu_0, \epsilon = 81\epsilon_0, \sigma = 2 \times 10^{-3}\text{ S/m}$ );
  - água do mar ( $\mu = \mu_0, \epsilon = 81\epsilon_0, \sigma = 25\text{ S/m}$ );
  - calcário ( $\mu = \mu_0, \epsilon = 5\epsilon_0, \sigma = 2 \times 10^{-4}\text{ S/m}$ ).
- 9.15** Assumindo que a água do mar tem  $\mu = \mu_0, \epsilon = 81\epsilon_0, \sigma = 20\text{ S/m}$ , determine a freqüência na qual a densidade de corrente de condução é, em intensidade, dez vezes a densidade de corrente de deslocamento.

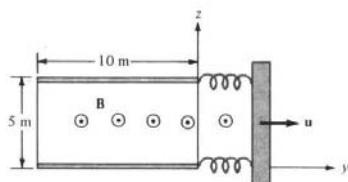


Figura 9.20 Referente ao Problema 9.8.

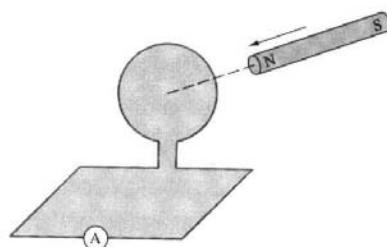


Figura 9.21 Referente ao Problema 9.11.

- 9.16** Um condutor com área de seção reta de  $10 \text{ cm}^2$  é percorrido por uma corrente de condução de  $0,2 \text{ sen } 10^7 t \text{ mA}$ . Dado que  $\sigma = 2,5 \times 10^5 \text{ S/m}$  e  $\epsilon_r = 6$ , calcule a intensidade da densidade de corrente de deslocamento.
- 9.17** (a) Escreva as equações de Maxwell para um meio linear e homogêneo em termos de  $\mathbf{E}_v$  e  $\mathbf{H}_v$  assumindo o fator tempo como  $e^{-j\omega t}$ .  
 (b) Escreva a forma pontual das equações de Maxwell da Tabela 9.2, em coordenadas cartesianas, na forma de oito equações escalares.
- 9.18** Demonstre que, em uma região livre de fontes ( $\mathbf{J} = 0$  e  $\rho_v = 0$ ), as equações de Maxwell podem ser reduzidas a duas. Identifique as duas equações mais gerais.
- 9.19** Demonstre que, em um condutor linear, homogêneo e isotrópico, a densidade de carga  $\rho_v$  satisfaz:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0$$

- 9.20** Assumindo uma região livre de fontes, deduza a equação de difusão:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- 9.21** Em uma certa região,

$$\mathbf{J} = (2ya_x + xza_y + z^3a_z) \text{ sen } 10^4 t \text{ A/m}$$

encontre  $\rho_v$  se  $\rho_v(x, y, 0, t) = 0$ .

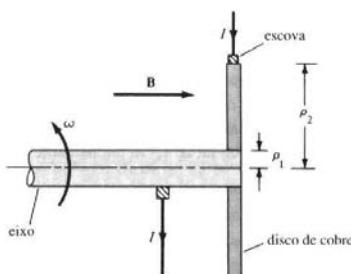


Figura 9.22 Referente ao Problema 9.12.

**9.22** Em uma região livre de cargas, na qual  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  e  $\mu = \mu_0$ ,

$$\mathbf{H} = 5 \cos(10^{11}t - 4y)\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

encontre: (a)  $\mathbf{J}_d$  e  $\mathbf{D}$ ; (b)  $\epsilon_r$ .

**9.23** Em uma certa região com  $\sigma = 0$ ,  $\mu = \mu_0$  e  $\epsilon = 6.25\epsilon_0$ , o campo magnético de uma onda EM é dado por

$$\mathbf{H} = 0.6 \cos \beta x \cos 10^9 t \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Encontre  $\beta$  e o  $\mathbf{E}$  correspondente utilizando as equações de Maxwell.

**\*9.24** Em um meio não magnético,

$$\mathbf{E} = 50 \cos(10^9 t - 8x)\mathbf{a}_y + 40 \sin(10^9 t - 8x)\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

encontre a constante dielétrica  $\epsilon_r$  e o  $\mathbf{H}$  correspondente.

**9.25** Verifique se os campos dados a seguir são campos EM genuinos, isto é, se eles satisfazem as equações de Maxwell. Assuma que os campos existem em regiões de carga livre.

(a)  $\mathbf{A} = 40 \sin(\omega t + 10x)\mathbf{a}_z$

(b)  $\mathbf{B} = \frac{10}{\rho} \cos(\omega t - 2\rho)\mathbf{a}_\phi$

(c)  $\mathbf{C} = \left( 3\rho^2 \cotg \phi \mathbf{a}_\rho + \frac{\cos \phi}{\rho} \mathbf{a}_\phi \right) \sin \omega t$

(d)  $\mathbf{D} = \frac{1}{r} \sin \theta \sin(\omega t - 5r)\mathbf{a}_\theta$

**\*\*9.26** Dada a energia eletromagnética total

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv$$

demonstre, a partir das equações de Maxwell, que

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$$

**9.27** No espaço livre,

$$\mathbf{H} = \rho (\sin \phi \mathbf{a}_\rho + 2 \cos \phi \mathbf{a}_\phi) \cos 4 \times 10^6 t \text{ A/m}$$

encontre  $\mathbf{J}_d$  e  $\mathbf{E}$ .

**9.28** O campo magnético irradiado por uma antena no espaço livre é dado por

$$\mathbf{H} = \frac{12 \sin \theta}{r} \cos(2\pi \times 10^8 t - \beta r) \mathbf{a}_\theta \text{ mA/m}$$

encontre o campo magnético  $\mathbf{E}$  correspondente em termos de  $\beta$ .

**\*9.29** O campo elétrico no ar é dado por  $\mathbf{E} = \rho t e^{-\rho-t} \mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$ . Encontre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{J}$ .

**\*\*9.30** No espaço livre ( $\rho_v = 0, \mathbf{J} = 0$ ). Demonstre que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} (\cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta) e^{j\omega(t-r/c)}$$

satisfaz a equação de onda da equação (9.52). Encontre o  $V$  correspondente. Considere  $c$  como a velocidade da luz no espaço livre.

**9.31** Determine o valor dos seguintes números complexos e expresse suas respostas na forma polar:

- (a)  $(4 \angle 30^\circ - 10 \angle 50^\circ)^{1/2}$
- (b)  $\frac{1 + j2}{6 + j8 - 7 \angle 15^\circ}$
- (c)  $\frac{(3 + j4)^2}{12 - j7 + (-6 + j10)^*}$
- (d)  $\frac{(3.6 \angle -200^\circ)^{1/2}}{(2.4 \angle 45^\circ)^2(-5 + j8)^*}$

**9.32** Expresse os campos harmônicos dados a seguir na forma de fasores:

- (a)  $\mathbf{E} = 4 \cos(\omega t - 3x - 10^\circ) \mathbf{a}_y - \sin(\omega t + 3x + 20^\circ) \mathbf{a}_z$
- (b)  $\mathbf{H} = \frac{\sin \theta}{r} \cos(\omega t - 5r) \mathbf{a}_\theta$
- (c)  $\mathbf{J} = 6e^{-3x} \sin(\omega t - 2x) \mathbf{a}_y + 10e^{-x} \cos(\omega t - 5x) \mathbf{a}_z$

**9.33** Expresse os seguintes fasores em suas formas instantâneas:

- (a)  $\mathbf{A}_s = (4 - 3j)e^{-j\beta z} \mathbf{a}_y$
- (b)  $\mathbf{B}_s = \frac{20}{\rho} e^{-j2z} \mathbf{a}_\rho$
- (c)  $\mathbf{C}_s = \frac{10}{r^2} (1 + j2)e^{-j\phi} \sin \theta \mathbf{a}_\phi$

**9.34** Dados  $\mathbf{A} = 4 \sin \omega t \mathbf{a}_r + 3 \cos \omega t \mathbf{a}_\theta$  e  $\mathbf{B}_s = j10ze^{-j\phi} \mathbf{a}_z$ , expresse  $\mathbf{A}$  na forma fasorial e  $\mathbf{B}_s$  na forma instantânea.

**9.35** Demonstre que, em um meio linear, homogêneo, isotrópico e livre de fontes, tanto  $\mathbf{E}_s$  quanto  $\mathbf{H}_s$  devem satisfazer a equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A}_s + \gamma^2 \mathbf{A}_s = 0$$

onde  $\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma$  e  $\mathbf{A}_s = \mathbf{E}_s$  ou  $\mathbf{H}_s$ .

# Capítulo 10

## PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELÉTROMAGNÉTICAS

Você vai longe na vida na medida em que for afetuoso com os jovens, piedoso com os idosos, solidário com os perseverantes e tolerante com os fracos e com os fortes. Porque, em algum momento de sua vida, você terá sido todos eles.

—GEORGE W. CARVER

### 10.1 INTRODUÇÃO

A nossa primeira aplicação das equações de Maxwell será relativa à propagação de onda eletromagnética. A existência de ondas EM, previstas pelas equações de Maxwell, foi inicialmente investigada por Heinrich Hertz. Depois de vários cálculos e experimentos, Hertz teve sucesso na geração e detecção de ondas de rádio, as quais são, às vezes, chamadas de ondas hertzianas, em sua homenagem.

Em geral, ondas são um meio de transportar energia ou informação.

Exemplos típicos de ondas EM incluem as ondas de rádio, os sinais de TV, os feixes de radar e os raios luminosos. Todas as formas de ondas EM compartilham três características principais: todas elas viajam em alta velocidade; ao se propagarem apresentam propriedades ondulatórias; elas são irradiadas a partir de uma fonte, sem a necessidade de um meio físico de propagação. O problema da irradiação de ondas EM será tratado no Capítulo 13.

Neste capítulo, nosso principal objetivo é resolver as equações de Maxwell e estudar a propagação de ondas EM nos seguintes meios materiais:

1. espaço livre ( $\sigma = 0, \epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$ );
2. dielétricos sem perdas ( $\sigma = 0, \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \mu = \mu_r \mu_0$  ou  $\sigma \ll \omega \epsilon$ );
3. dielétricos com perdas ( $\sigma \neq 0, \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \mu = \mu_r \mu_0$ );
4. bons condutores ( $\sigma \approx \infty, \epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_r \mu_0$  ou  $\sigma \gg \omega \epsilon$ ).

onde  $\omega$  é a freqüência angular das ondas. O Caso 3, dielétricos com perdas, é mais geral e será considerado primeiro. Depois que este caso geral for resolvido, derivaremos os outros (1, 2 e 4) como casos particulares pela seleção dos valores de  $\sigma$ ,  $\epsilon$  e  $\mu$ . Entretanto, antes de considerarmos a propagação de ondas nestes meios, é apropriado que estudemos as características das ondas em geral. Isto é importante para o entendimento correto das ondas EM. Para o leitor que estiver familiarizado com os conceitos associados às ondas, a Seção 10.2 é prescindível. Considerações sobre potência, reflexão e transmissão entre dois meios materiais diferentes serão discutidas no final do capítulo.

## †10.2 ONDAS EM GERAL

Um entendimento claro da propagação de ondas EM depende da compreensão do que são ondas em geral.

**Uma onda é uma função do espaço e do tempo.**

Um movimento ondulatório ocorre quando um distúrbio em um ponto  $A$ , em um instante  $t_0$ , está relacionado com o que ocorre em um ponto  $B$ , em um instante  $t > t_0$ . Uma equação de onda, como exemplificado pelas equações (9.51) e (9.52), é uma equação a derivadas parciais de segunda ordem. Em uma dimensão, uma equação de onda escalar tem a forma de

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0 \quad (10.1)$$

onde  $u$  é a *velocidade da onda*. A equação (10.1) é um caso especial da equação (9.51), na qual o meio é livre de fontes ( $\rho_s = 0, \mathbf{J} = 0$ ). Ela pode ser resolvida pelo procedimento que segue, semelhante ao Exemplo 6.5. As suas soluções têm a forma

$$E^- = f(z - ut) \quad (10.2a)$$

$$E^+ = g(z + ut) \quad (10.2b)$$

ou

$$E = f(z - ut) + g(z + ut) \quad (10.2c)$$

onde  $f$  e  $g$  representam qualquer função de  $z - ut$  e  $z + ut$ , respectivamente. Exemplos de tais funções incluem  $z \pm ut$ , sen  $k(z \pm ut)$ , cos  $k(z \pm ut)$  e  $e^{j(kz \pm \omega t)}$ , onde  $k$  é uma constante. Pode se mostrar facilmente que todas estas funções satisfazem a equação (10.1).

Se, em particular, assumimos uma dependência temporal harmônica (ou senoidal)  $e^{j\omega t}$ , a equação (10.1) torna-se

$$\frac{d^2 E_s}{dz^2} + \beta^2 E_s = 0 \quad (10.3)$$

onde  $\beta = \omega/u$  e  $E_s$  é a forma fasorial de  $E$ . A solução da equação (10.3) é semelhante ao Caso 3 do Exemplo 6.5 [veja equação (6.5.12)]. Com os fatores de tempo inseridos, as soluções possíveis para a equação (10.3) são

$$E^+ = A e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (10.4a)$$

$$E^- = B e^{j(\omega t + \beta z)} \quad (10.4b)$$

e

$$E = A e^{j(\omega t - \beta z)} + B e^{j(\omega t + \beta z)} \quad (10.4c)$$

onde  $A$  e  $B$  dão constantes reais.

No momento, vamos considerar a solução na forma da equação (10.4a). Tomando a parte imaginária desta equação, teremos

$$E = A \sin(\omega t - \beta z) \quad (10.5)$$

Esta é uma onda senoidal, escolhida por sua simplicidade; uma onda cossenoide seria obtida se tivéssemos tomado a parte real da equação (10.4a). Note as seguintes características da onda na equação (10.5):

1. Ela é harmônica no tempo porque assumimos dependência temporal  $e^{j\omega t}$  para chegarmos à equação (10.5).
2.  $A$  é a *amplitude* da onda e tem a mesma unidade de  $E$ .

3.  $(\omega t - \beta z)$  é a *fase* (em radianos) da onda que depende do tempo  $t$  e da variável espacial  $z$ .  
 4.  $\omega$  é a *freqüência angular* (em radianos/segundo) e  $\beta$  é a *constante de fase ou número de onda* (em radianos/metro).

Devido à dependência de  $E$  tanto com o tempo  $t$  quanto com a variável espacial  $z$ , podemos traçar o gráfico de  $E$  em função de  $t$ , mantendo  $z$  constante e vice-versa. Os gráficos de  $E(z, t = \text{constante})$  e  $E(t, z = \text{constante})$  são mostrados na Figura 10.1(a) e (b), respectivamente. Da figura 10.1(a) observamos que a onda se repete após uma distância  $\lambda$ ; portanto,  $\lambda$  é chamado de *comprimento de onda* (em metros). Da Figura 10.1(b) vemos que a onda leva um tempo  $T$  para se repetir. Consequentemente,  $T$  é conhecido como o *período* (em segundos). Como a onda leva um tempo  $T$  para se propagar por uma distância  $\lambda$  a uma velocidade  $u$ , teremos

$$\lambda = uT \quad (10.6a)$$

Como  $T = 1/f$ , onde  $f$  é a *freqüência* (número de ciclos por segundo) da onda, em Hertz (Hz), então:

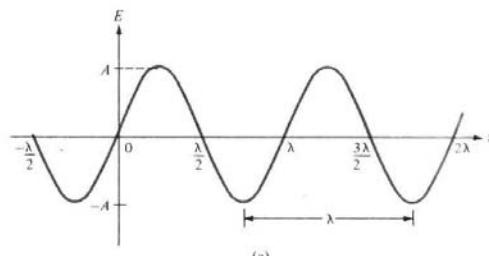
$$u = f\lambda \quad (10.6b)$$

Devido a esta relação fixa entre comprimento de onda e freqüência, podemos identificar a posição de uma estação de rádio dentro de sua faixa tanto em termos de freqüência como em comprimento de onda. Usualmente, a freqüência é preferida. Também, porque

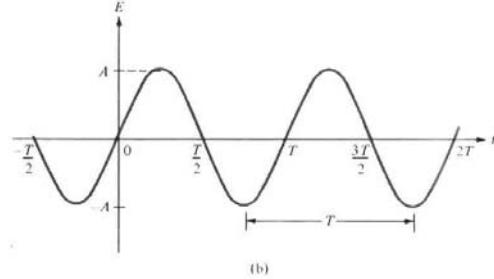
$$\omega = 2\pi f \quad (10.7a)$$

$$\beta = \frac{\omega}{u} \quad (10.7b)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (10.7c)$$



(a)



(b)

Figura 10.1 Traçado de  $E(z, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$ : (a) com  $t$  constante; (b) com  $z$  constante.

teremos, a partir das equações (10.6) e (10.7), que:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (10.8)$$

A equação (10.8) mostra que, para cada comprimento de onda propagado, a onda experimenta uma mudança de fase de  $2\pi$  radianos.

Mostraremos agora que a onda representada pela equação (10.5) viaja com uma velocidade  $u$  ao longo de  $+z$ . Para isto, consideremos um ponto fixo  $P$  na onda. Vamos desenhar a onda nos instantes  $t = 0$ ,  $T/4$  e  $T/2$ , como na Figura 10.2. Desta figura, é evidente que, conforme a onda avança com o tempo, o ponto  $P$  move-se ao longo de  $+z$ . O ponto  $P$  é um ponto de fase constante. Portanto,

$$\omega t - \beta z = \text{constante}$$

ou

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = u \quad (10.9)$$

a qual é idêntica à equação (10.7b). A equação (10.9) mostra que a onda viaja com velocidade  $u$  ao longo de  $+z$ . De forma similar, pode-se mostrar que a onda  $B \sin(\omega t + \beta z)$  na equação (10.4b) está se propagando com velocidade  $u$  ao longo de  $-z$ .

Em suma, notamos o seguinte:

1. uma onda é função tanto do espaço quanto do tempo;
2. embora o tempo  $t = 0$  seja selecionado arbitrariamente como referência, uma onda não tem início nem fim;
3. um sinal negativo em  $(\omega t \pm \beta z)$  está associado com a propagação de uma onda ao longo de  $+z$  (onda se propagando no sentido direto, ou positivo), enquanto um sinal positivo indica que a onda está se propagando ao longo de  $-z$  (onda se propagando no sentido inverso, ou negativo);
4. como  $\sin(-\psi) = -\sin\psi = \sin(\psi \pm \pi)$ , enquanto  $\cos(-\psi) = \cos(\psi)$ ,

$$\sin(\psi \pm \pi/2) = \pm \cos\psi \quad (10.10a)$$

$$\sin(\psi \pm \pi) = -\sin\psi \quad (10.10b)$$

$$\cos(\psi \pm \pi/2) = \mp \sin\psi \quad (10.10c)$$

$$\cos(\psi \pm \pi) = -\cos\psi \quad (10.10d)$$

onde  $\psi = \omega t \pm \beta z$ . Com a equação (10.10), qualquer onda harmônica no tempo pode ser representada na forma de seno ou cosseno.

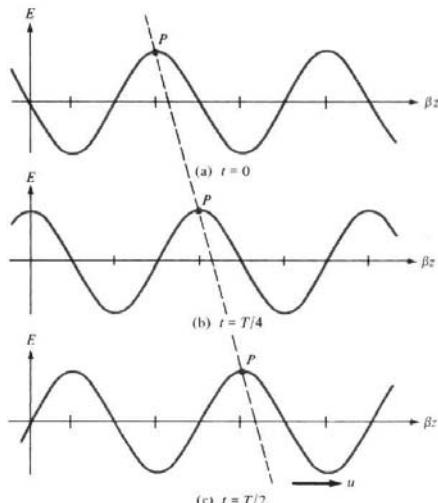
Um grande número de freqüências visualizadas em ordem numérica constituem um *espectro*. A Tabela 10.1 mostra em quais freqüências ocorrem diferentes tipos de energia no espectro EM. As freqüências usadas para comunicações de rádio estão localizadas próximas à parte inferior do espectro EM. Conforme a freqüência cresce, a energia EM torna-se perigosa para o homem.<sup>1</sup> Os fornos de microondas, por exemplo, podem causar lesões se não forem adequadamente blindados. As dificuldades práticas de usar energia EM para fins de comunicações também crescem com o aumento da freqüência, até que, finalmente, não possa mais ser usada. À medida que se aprimoram os métodos de comunicações, os limites superiores das freqüências utilizáveis são cada vez maiores. Os satélites de comunicações de hoje usam freqüências próximas a 14 GHz. Esta freqüência ainda está bem abaixo das freqüências da luz, mas, no ambiente fechado das fibras óticas, a própria luz pode ser usada para comunicações.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Veja a edição especial de março de 1987 do *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine* sobre "Effects of EM Radiation".

<sup>2</sup> Veja a edição de outubro de 1980 do *IEEE Proceedings* sobre "Optical-Fiber Communications".

TABELA 10.1 O Espectro Eletromagnético

Fenômeno EM	Exemplos de Usos	Intervalo de Freqüência Aproximado
Raios cósmicos	Física, Astronomia	Acima de $10^{14}$ GHz
Raios gama	Tratamento de câncer	$10^{10}$ – $10^{13}$ GHz
Raios X	Exames de raio X	$10^8$ – $10^9$ GHz
Radiação ultravioleta	Esterilização	$10^5$ – $10^6$ GHz
Luz visível	Visão humana	$10^3$ – $10^6$ GHz
Radiação infravermelha	Fotografia	$10^1$ – $10^4$ GHz
Microondas	Radar, estações repetidoras de microondas, comunicações por satélite	3–300 GHz
Ondas de rádio	Televisão UHF Televisão VHF, rádio FM Rádio em ondas curtas*	470–806 MHz 54–216 MHz 3–26 MHz
	Rádio AM**	535–1.605 KHz

Figura 10.2 Gráfico de  $E(z,t) = A \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$  nos tempos (a)  $t = 0$ ; (b)  $t = T/4$ ; (c)  $t = T/2$ . P se move ao longo de  $+z$  com velocidade  $u$ .**EXEMPLO 10.1**

O campo elétrico no espaço livre é dado por

$$\mathbf{E} = 50 \cos(10^8 t + \beta x) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

- Encontre a orientação de propagação da onda.
- Calcule  $\beta$  e o tempo que a onda leva para se propagar por uma distância de  $\lambda/2$ .
- Esbocie a onda a  $t = 0$ ,  $T/4$  e  $T/2$ .

\* N. de T. No Brasil, de acordo com a Resolução nº 79, de 24 de dezembro de 1998, da Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL), esta faixa de freqüência se estende de 3 a 28 MHz.

\*\* N. de T. No Brasil, de acordo com a Resolução nº 79, de 24 de dezembro de 1998, da Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL), esta faixa de freqüência se estende de 535 a 1.625 KHz.

**Solução:**

(a) Devido ao sinal positivo em  $(\omega t + \beta x)$ , inferimos que a onda está se propagando ao longo de  $-\mathbf{a}_x$ . Isto será confirmado na parte (c) deste exemplo.

(b) No espaço livre,  $\mu = c$ .

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3}$$

ou

$$\beta = 0,3333 \text{ rad/m}$$

Se  $T$  é o período da onda, isto significa que a onda leva  $T$  segundos para se deslocar por uma distância  $\lambda$  à velocidade  $c$ . Portanto, para se deslocar por uma distância  $\lambda/2$  levará

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10^8} = 31,42 \text{ ns}$$

Alternativamente, porque a onda está se propagando com a velocidade da luz  $c$ ,

$$\frac{\lambda}{2} = ct_1 \quad \text{ou} \quad t_1 = \frac{\lambda}{2c}$$

Porém,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 6\pi$$

Portanto,

$$t_1 = \frac{6\pi}{2(3 \times 10^8)} = 31,42 \text{ ns}$$

como obtido anteriormente.

(c) Em  $t = 0$ ,  $E_y = 50 \cos \beta x$

$$\begin{aligned} \text{Em } t = T/4, E_y &= 50 \cos \left( \omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \beta x \right) = 50 \cos (\beta x + \pi/2) \\ &= -50 \sin \beta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Em } t = T/2, E_y &= 50 \cos \left( \omega \cdot \frac{2\pi}{2\omega} + \beta x \right) = 50 \cos (\beta x + \pi) \\ &= -50 \cos \beta x \end{aligned}$$

O gráfico de  $E_y$  em função de  $x$  para  $t = 0, T/4, T/2$  é apresentado na Figura 10.3. Note que o ponto  $P$  (selecionado arbitrariamente) da onda se move ao longo de  $-\mathbf{a}_x$ , conforme  $t$  aumenta com o tempo. Isto mostra que a onda se desloca ao longo de  $-\mathbf{a}_x$ .

**EXERCÍCIO PRÁTICO 10.1**

No espaço livre,  $\mathbf{H} = 0,1 \cos (2 \times 10^8 t - kx) \mathbf{a}_y$  A/m. Calcule:

- (a)  $k, \lambda, T$ ;
- (b) o tempo  $t_1$  que a onda leva para se propagar por  $\lambda/8$ ;
- (c) esboce a onda no tempo  $t_1$ .

**Resposta:** (a)  $0,667 \text{ rad/m}; 9,425 \text{ m}; 31,42 \text{ ns}$ ; (b)  $3,927 \text{ ns}$ ; (c) veja Figura 10.4.

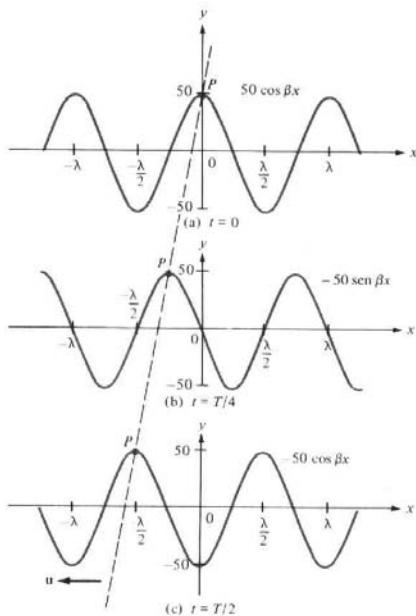
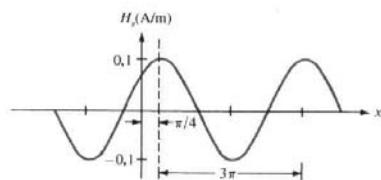
Figura 10.3 Referente ao Exemplo 10.1; onda se propagando ao longo de  $-\mathbf{a}_x$ .

Figura 10.4 Referente ao Exercício Prático 10.1(c).

### 10.3 PROPAGAÇÃO DE ONDA EM DIELÉTRICO COM PERDAS

Conforme mencionado na Seção 10.1, a propagação de onda em dielétricos com perdas é um caso geral do qual derivam, como casos especiais, a propagação de onda em outros meios. Portanto, esta seção é fundamental para as três seções que seguem.

**Um dielétrico com perdas** é um meio no qual ondas EM perdem energia, à medida que se propagam, devido à condutividade desse meio.

Em outras palavras, um dielétrico com perdas é um meio parcialmente condutor (dielétrico imperfeito ou condutor imperfeito) no qual  $\sigma \neq 0$ , ao contrário de um dielétrico sem perdas (dielétrico perfeito ou bom dielétrico), no qual  $\sigma = 0$ .

Considere um meio dielétrico com perdas, linear, isotrópico e homogêneo que está livre de cargas ( $\rho_r = 0$ ). Assumindo o fator  $e^{j\omega t}$  como subentendido, as equações de Maxwell (ver Tabela 9.2) tornam-se

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0 \quad (10.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0 \quad (10.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s, \quad (10.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_s \quad (10.14)$$

Determinando o rotacional em ambos os lados da equação (10.13), temos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}_s \quad (10.15)$$

Aplicando a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (10.16)$$

no lado esquerdo da equação (10.15) e utilizando as equações (10.11) e (10.14), obtemos

$$\cancel{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s)} - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_s$$

ou

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}_s - \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0} \quad (10.17)$$

onde

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \quad (10.18)$$

e  $\gamma$  é chamada a *constante de propagação* (por metro) do meio. Por um procedimento similar, pode ser mostrado que, para o campo  $\mathbf{H}_s$ ,

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s - \gamma^2 \mathbf{H}_s = 0 \quad (10.19)$$

As equações (10.17) e (10.19) são conhecidas como as equações vetoriais homogêneas de Helmholtz ou simplesmente como equações vetoriais de onda. Em coordenadas cartesianas, a equação (10.17), por exemplo, é equivalente a três equações de onda escalares, uma para cada componente de  $\mathbf{E}$  ao longo de  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$ , e  $\mathbf{a}_z$ .

Como  $\gamma$  nas equações (10.17) a (10.19) é uma quantidade complexa, podemos fazer

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \quad (10.20)$$

Obtemos  $\alpha$  e  $\beta$  das equações (10.18) e (10.20), notando que

$$-\operatorname{Re} \gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\epsilon \quad (10.21)$$

e

$$|\gamma^2| = \beta^2 + \alpha^2 = \omega\mu\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2} \quad (10.22)$$

Das equações (10.21) e (10.22), obtemos

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left[ \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]^2} - 1 \right]} \quad (10.23)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left[ \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]^2} + 1 \right]} \quad (10.24)$$

Sem perda de generalidade, se assumirmos que a onda se propaga ao longo de  $+a_z$  e que  $\mathbf{E}_s$  tem somente componente  $x$ , então

$$\mathbf{E}_s = E_{xz}(z)\mathbf{a}_x \quad (10.25)$$

Substituindo na equação (10.17), tem-se

$$(\nabla^2 - \gamma^2)E_{xz}(z) \quad (10.26)$$

Portanto,

$$\underbrace{\frac{\partial^2 E_{xz}(z)}{\partial x^2}}_0 + \underbrace{\frac{\partial^2 E_{xz}(z)}{\partial y^2}}_0 + \frac{\partial^2 E_{xz}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 E_{xz}(z) = 0$$

ou

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right] E_{xz}(z) = 0 \quad (10.27)$$

Esta é uma equação de onda escalar, uma equação diferencial, homogênea e linear, com solução (veja o Caso 2 no Exemplo 6.5)

$$E_{xz}(z) = E_o e^{-\gamma z} + E'_o e^{\gamma z} \quad (10.28)$$

onde  $E_o$  e  $E'_o$  são constantes. O fato de que o campo deve ser finito no infinito requer que  $E'_o = 0$ . Alternativamente,  $E'_o = 0$  porque  $e^{\gamma z}$  representa uma onda viajando ao longo de  $-a_z$ , se assumirmos que a onda está se propagando ao longo de  $a_z$ . De qualquer forma, independente do tipo de análise feita,  $E'_o = 0$ . Inserindo o fator temporal  $e^{j\omega t}$  na equação (10.28) e usando a equação (10.20), obtemos

$$\mathbf{E}(z, t) = \operatorname{Re} [E_{xz}(z)e^{j\omega t}\mathbf{a}_x] = \operatorname{Re} (E_o e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\mathbf{a}_x)$$

ou

$$\mathbf{E}(z, t) = E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \quad (10.29)$$

Um esboço de  $|\mathbf{E}|$  nos instantes  $t = 0$  e  $t = \Delta t$  são mostrados na Figura 10.5, onde é evidente que  $\mathbf{E}$  tem somente componente  $x$  e está viajando ao longo de  $+z$ . Tendo obtido  $\mathbf{E}(z, t)$ , obtemos  $\mathbf{H}(z, t)$ , ou seguindo procedimento similar ao utilizado para resolver a equação (10.19), ou usando a equação (10.29) em conjunto com as equações de Maxwell, como fizemos no Exemplo 9.8. Teremos como resultado

$$\mathbf{H}(z, t) = \operatorname{Re} (H_o e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_y) \quad (10.30)$$

onde

$$H_o = \frac{E_o}{\eta} \quad (10.31)$$

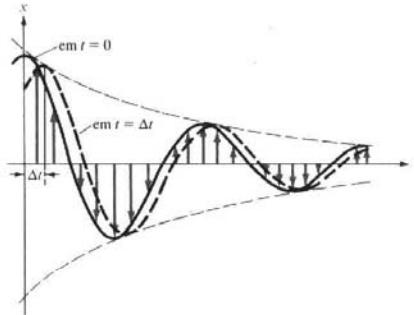


Figura 10.5 Campo  $E$  com componente  $x$  se propagando ao longo de  $+z$ , nos tempos  $t = 0$  e  $t = \Delta t$ . As setas indicam valores instantâneos de  $E$ .

e  $\eta$  é uma quantidade complexa conhecida como a *impedância intrínseca* (em ohms) do meio. Pode se mostrar, seguindo os passos tomados no Exemplo 9.8, que

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = |\eta|/\theta_\eta = |\eta|e^{j\theta_\eta} \quad (10.32)$$

com

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4}}, \quad \operatorname{tg} 2\theta_\eta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad (10.33)$$

onde  $0 \leq \theta_\eta \leq 45^\circ$ . Substituindo as equações (10.31) e (10.32) na equação (10.30), temos

$$\mathbf{H} = \operatorname{Re} \left[ \frac{E_0}{|\eta|e^{j\theta_\eta}} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_y \right]$$

ou

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \mathbf{a}_y} \quad (10.34)$$

Observe, a partir das equações (10.29) e (10.34), que conforme a onda se propaga ao longo de  $\mathbf{a}_z$ , ela decresce ou se atenua em amplitude por um fator  $e^{-\alpha z}$ . Portanto,  $\alpha$  é conhecida como a *constante de atenuação* ou *fator de atenuação* do meio e é uma medida da taxa de decaimento espacial da onda no meio, em nepers por metro (Np/m) ou em decibéis por metro (dB/m). Uma atenuação de 1 neper significa uma redução de  $e^{-1}$  do valor original, enquanto um aumento de um neper indica um acréscimo por um fator  $e$ . Portanto, para voltagens

$$1 \text{ Np} = 20 \log_{10} e = 8,686 \text{ dB} \quad (10.35)$$

Da equação (10.23), notamos que, se  $\sigma = 0$ , como é o caso de um meio sem perdas e espaço livre,  $\alpha = 0$  e a onda não é atenuada à medida que se propaga. A quantidade  $\beta$  é uma medida do deslocamento de fase por unidade de comprimento e é chamada *constante de fase* ou *número de onda*. Em termos de  $\beta$ , a velocidade da onda  $u$  e o comprimento de onda  $\lambda$  são, respectivamente, dados por [veja as equações (10.7b) e (10.8)]

$$u = \frac{\omega}{\beta}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (10.36)$$

Notamos também, das equações (10.29) e (10.34), que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  estão fora de fase por  $\theta_\eta$  em qualquer instante de tempo, devido à impedância intrínseca complexa do meio. Portanto, em qualquer tempo,  $\mathbf{E}$  está adiantado em relação a  $\mathbf{H}$  (ou  $\mathbf{H}$  atrasado em relação a  $\mathbf{E}$ ) por  $\theta_\eta$ . Finalmente, notamos que a razão entre os módulos da densidade de corrente de condução  $\mathbf{J}$  e da densidade de corrente de deslocamento  $\mathbf{J}_d$ , em um meio com perdas, é

$$\frac{|\mathbf{J}_s|}{|\mathbf{J}_{ds}|} = \frac{|\sigma \mathbf{E}_s|}{|j\omega \epsilon \mathbf{E}_s|} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \operatorname{tg} \theta$$

ou

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (10.37)$$

onde  $\operatorname{tg} \theta$  é conhecida como a *tangente de perdas* e  $\theta$  é o *ângulo de perdas* do meio, conforme ilustrado na Figura 10.6. Embora não haja uma fronteira bem determinada entre bons condutores e dielétricos com perdas,  $\operatorname{tg} \theta$  ou  $\theta$  podem ser usados para quantificar as perdas em um meio. Um meio é dito um bom dielétrico (sem perdas ou perfeito) se a  $\operatorname{tg} \theta$  é muito pequena ( $\sigma \ll \omega \epsilon$ ), ou um bom condutor se a  $\operatorname{tg} \theta$  é muito grande ( $\sigma \gg \omega \epsilon$ ). Do ponto de vista da propagação da onda, o comportamento característico de um meio depende não só dos seus parâmetros constitutivos  $\sigma$ ,  $\epsilon$  e  $\mu$ , mas também da frequência de operação. Um meio que se comporta como um bom condutor em baixas freqüências pode ser um bom dielétrico em freqüências altas. Das equações (10.33) e (10.37), observe que

$$\theta = 2\theta_\eta \quad (10.38)$$

Da equação (10.14)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_s &= (\sigma + j\omega \epsilon) \mathbf{E}_s = j\omega \epsilon \left[ 1 - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon} \right] \mathbf{E}_s \\ &= j\omega \epsilon_c \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (10.39)$$

onde

$$\epsilon_c = \epsilon \left[ 1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right] \quad (10.40a)$$

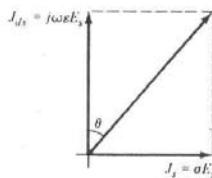


Figura 10.6 O ângulo de perdas para um meio com perdas.

ou

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (10.40b)$$

e  $\epsilon' = \epsilon$ ,  $\epsilon'' = \sigma/\omega$ ;  $\epsilon_c$  é chamada *permissividade complexa* do meio. Observamos que a razão entre  $\epsilon'$  e  $\epsilon$  é a tangente de perdas do meio, isto é,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad (10.41)$$

Em seções subsequentes, vamos considerar a propagação de onda em outros tipos de meio, os quais podem ser vistos como casos especiais dos que foram considerados até aqui. Portanto, vamos deduzir suas equações das que foram obtidas para o caso geral, tratado nesta seção. O estudante é aconselhado a não simplesmente memorizar as fórmulas, mas a observar como elas são facilmente obtidas das fórmulas para o caso geral.

## 10.4 ONDAS PLANAS EM DIELÉTRICOS SEM PERDAS

Em um dielétrico sem perdas,  $\sigma \ll \omega\epsilon$ . É um caso especial do tratado na Seção 10.3, exceto que

$$\boxed{\sigma = 0, \quad \epsilon = \epsilon_0\epsilon_r, \quad \mu = \mu_0\mu_r} \quad (10.42)$$

Substituindo nas equações (10.23) e (10.24), obtemos

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (10.43a)$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (10.43b)$$

Também

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \angle 0^\circ \quad (10.44)$$

Portanto,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  estão em fase no tempo.

## 10.5 ONDAS PLANAS NO ESPAÇO LIVRE

Este é um caso especial do que foi considerado na Seção 10.3. Neste caso:

$$\boxed{\sigma = 0, \quad \epsilon = \epsilon_0, \quad \mu = \mu_0} \quad (10.45)$$

Este pode também ser considerado um caso especial da Seção 10.4. Portanto, simplesmente substituímos  $\epsilon$  por  $\epsilon_0$  e  $\mu$  por  $\mu_0$  na equação (10.43) ou substituímos a equação (10.45) diretamente nas equações (10.23) e (10.24). De qualquer maneira, obtemos

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{\omega}{c} \quad (10.46a)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (10.46b)$$

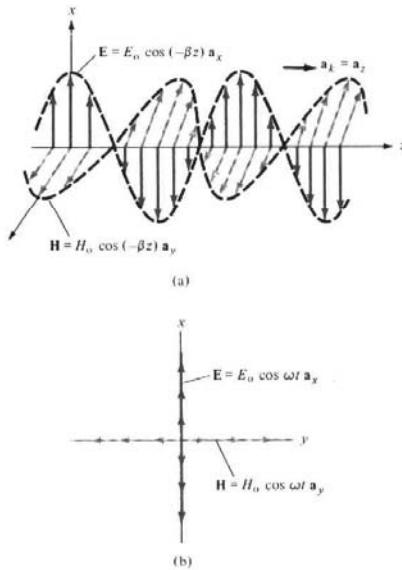


Figura 10.7 (a) Gráficos de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  em função de  $z$  em  $t = 0$ ; (b) gráfico de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  em  $z = 0$ . Os vetores indicam valores instantâneos.

onde  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s é a velocidade da luz no vácuo. O fato de as ondas EM se propagarem no vácuo com a velocidade da luz é importante. Isso demonstra que a luz é a manifestação de uma onda EM. Em outras palavras, a luz é characteristicamente eletromagnética.

Pela substituição dos parâmetros constitutivos da equação (10.45) na equação (10.33),  $\theta_\eta = 0$  e  $\eta = \eta_o$ , onde  $\eta_o$  é chamado de a *impedância intrínseca do espaço livre*, e é dada por

$$\boxed{\eta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \approx 377 \Omega} \quad (10.47)$$

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \quad (10.48a)$$

então,

$$\mathbf{H} = H_0 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y = \frac{E_0}{\eta_o} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \quad (10.48b)$$

Os gráficos de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são mostrados na Figura 10.7(a). Em geral, se  $\mathbf{a}_E$ ,  $\mathbf{a}_H$  e  $\mathbf{a}_k$  forem vetores unitários ao longo do campo  $\mathbf{E}$ , do campo  $\mathbf{H}$  e da orientação de propagação da onda, pode ser demonstrado que (veja Problema 10.14)

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_H$$

ou

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_H = -\mathbf{a}_E$$

ou

$$\mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_k \quad (10.49)$$

Tanto o campo  $\mathbf{E}$  quanto  $\mathbf{H}$  (ou onda EM) são, em qualquer ponto, normais à direção de propagação da onda, isto é, normais a  $\mathbf{a}_k$ . Isto significa que os campos estão em um plano que é transverso ou normal à direção de propagação. Formam uma onda EM que não tem componente dos campos elétrico ou magnético na direção de propagação. Essa onda é chamada *transversal eletromagnética* (TEM). É também chamada de *onda plana uniforme* porque  $\mathbf{E}$  (ou  $\mathbf{H}$ ) tem a mesma magnitude ao longo de qualquer plano transverso, definido por  $z = \text{constante}$ . A orientação na qual aponta o campo elétrico é chamada *polarização* da onda TEM.<sup>1</sup> A onda da equação (10.29), por exemplo, está polarizada na direção  $x$ . Isto pode ser observado na figura 10.7(b), onde é dada uma ilustração de ondas planas uniformes. Uma onda plana uniforme não pode existir fisicamente, pois ela se estende até o infinito e representaria uma energia infinita. Entretanto, estas ondas são simples de entender e de importância fundamental. Elas servem como aproximações para ondas existentes na prática, como as geradas por uma antena de rádio, a grandes distâncias das emissoras de rádio. Embora a nossa discussão a partir da equação (10.48) considere o espaço livre, ela se aplica também a qualquer outro meio isotrópico.

## 10.6 ONDAS PLANAS EM BONS CONDUTORES

Este é um outro caso especial do que foi tratado na Seção 10.3. Um condutor perfeito, ou bom condutor, é um condutor com  $\sigma \gg \omega\epsilon$ , de tal maneira que  $\sigma/\omega\epsilon \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\sigma = \infty, \quad \epsilon = \epsilon_0, \quad \mu = \mu_0\mu_r \quad (10.50)$$

Logo, as equações (10.23) e (10.24) tornam-se

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu\sigma} \quad (10.51a)$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (10.51b)$$

Também,

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ \quad (10.52)$$

portanto,  $\mathbf{E}$  está adiantado em relação a  $\mathbf{H}$  de  $45^\circ$ . Se

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \quad (10.53a)$$

então

$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - 45^\circ) \mathbf{a}_y \quad (10.53b)$$

<sup>1</sup> Alguns livros definem polarização de maneira distinta.

Portanto, à medida que  $\mathbf{E}$  (ou  $\mathbf{H}$ ) se propaga em um meio condutor, a sua amplitude é atenuada por um fator  $e^{-\alpha z}$ . A distância  $\delta$ , mostrada na Figura 10.8, na qual a amplitude da onda decresce por um fator  $e^{-1}$  (em torno de 37%) é chamada *profundidade de penetração pelicular* do meio, isto é,

$$E_o e^{-\alpha \delta} = E_o e^{-1}$$

ou

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (10.54a)$$

**A profundidade de penetração pelicular** é uma medida da profundidade de penetração de uma onda EM no meio.

A equação (10.54a) é válida, em geral, para qualquer meio material. Para bons condutores, as equações (10.51a) e (10.54a) resultam em

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (10.54b)$$

A ilustração para um bom condutor na Figura 10.8 está exagerada. Entretanto, para um meio parcialmente condutor, a profundidade pelicular pode ser consideravelmente grande. Note, das equações (10.51a), (10.52) e (10.54b), que, para um bom condutor,

$$\eta = \frac{1}{\sigma \delta} \sqrt{2} e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sigma \delta} \quad (10.55)$$

Também, para bons condutores, a equação (10.53a) pode ser escrita como

$$\mathbf{E} = E_o e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \mathbf{a}_x$$

mostrando que  $\delta$  mede o amortecimento exponencial da onda conforme ela se propaga pelo condutor. A profundidade pelicular no cobre é mostrada para várias freqüências na Tabela 10.2. Da tabela, notamos que a profundidade de penetração pelicular decresce com o aumento da freqüência. Portanto,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  dificilmente se propagam através de bons condutores.

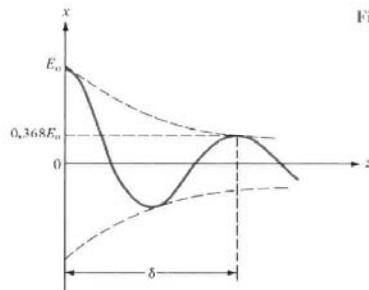


Figura 10.8 Ilustração da profundidade pelicular.

TABELA 10.2 Profundidade pelicular no cobre\*

Freqüência (Hz)	10	60	100	500	$10^4$	$10^8$	$10^{10}$
Profundidade pelicular (mm)	20,8	8,6	6,6	2,99	0,66	$6,6 \times 10^{-1}$	$6,6 \times 10^{-4}$

\* Para o cobre,  $\sigma = 5,8 \times 10^7$  mhos/m,  $\mu = \mu_0 \cdot \delta = 66,1/\sqrt{f}$  (em mm)

O fenômeno pelo qual a intensidade de campo em um condutor decresce rapidamente é conhecido como *efeito pelicular*. Os campos e as correntes associadas são confinados em uma camada muito fina (película) da superfície condutora. Para um fio de raio  $a$ , por exemplo, em altas freqüências é uma boa aproximação assumir que toda a corrente flui em um anel circular de espessura  $\delta$ , como mostrado na Figura 10.9. O efeito pelicular aparece de diferentes formas em problemas, como: atenuação em ondas guiadas, resistência efetiva ou ca em linhas de transmissão e em blindagens eletromagnéticas. Este efeito é utilizado em muitas aplicações. Por exemplo, como a profundidade pelicular é muito pequena na prata, a diferença de performance entre um componente de prata pura e um componente de latão, com uma camada de prata depositada, é desprezível. Portanto, películas de prata são usadas para reduzir o custo de material em componentes de guias de onda. Pela mesma razão, condutores tubulares ociosos são usados no lugar de condutores sólidos nas antenas externas de televisão. A blindagem eletromagnética efetiva de dispositivos elétricos pode ser obtida utilizando invólucros condutores com espessuras de algumas profundidades peliculares.

A profundidade pelicular é útil no cálculo da *resistência ca* que é função do efeito pelicular. A resistência na equação (5.16) é chamada de *resistência cc*, isto é,

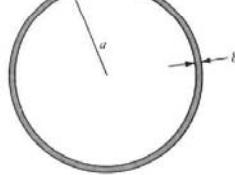
$$R_{cc} = \frac{\ell}{\sigma S} \quad (5.16)$$

Definimos a *resistência superficial ou pelicular*  $R_s$  (em  $\Omega/m^2$ ) para um bom condutor como a parte real de  $\eta$ . Portanto, da equação (10.55):

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \quad (10.56)$$

Esta é a resistência para uma unidade de largura e uma unidade de comprimento do condutor. Ela é equivalente à resistência cc para uma unidade de comprimento do condutor, tendo uma seção reta de área  $1 \times \delta$ . Portanto, para uma dada largura  $w$  e comprimento  $\ell$ , a resistência para ca é calculada usando a expressão da resistência para cc da equação (5.16), assumindo um fluxo de corrente uniforme na espessura  $\delta$ , isto é,

$$R_{ca} = \frac{\ell}{\sigma \delta w} = \frac{R_s \ell}{w} \quad (10.57)$$

Figura 10.9 Profundidade pelicular em altas freqüências,  $\delta \ll a$ .

onde  $S = \delta w$ . Para um fio condutor de raio  $a$  (veja Figura 10.9),  $w = 2\pi a$ , então,

$$\frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{\frac{\ell}{\sigma 2\pi a \delta}}{\frac{\ell}{\sigma \pi a^2}} = \frac{a}{2\delta}$$

Como  $\delta \ll a$  em altas freqüências, isto mostra que  $R_{ca}$  é muito maior do que  $R_{cc}$ . Em geral, a razão entre a resistência ca e a resistência cc começa em 1,0 para cc e freqüências muito baixas e aumenta à medida que a freqüência cresce. Também, embora a maior parte da corrente seja distribuída de uma maneira não uniforme em uma espessura  $5\delta$  do condutor, a perda de potência é igual à obtida supondo que a mesma é uniformemente distribuída em uma espessura  $\delta$  e zero no restante do condutor. Esta é mais uma das razões pelas quais  $\delta$  é chamada de profundidade pelicular.

### EXEMPLO 10.2

Um dielétrico com perdas tem uma impedância intrínseca de  $200 \angle 30^\circ \Omega$  em uma freqüência. Se, nesta freqüência, a onda plana que se propaga no material tem o campo magnético

$$\mathbf{H} = 10 e^{-\alpha x} \cos\left(\omega t - \frac{1}{2}x\right) \mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

encontre  $\mathbf{E}$  e  $\alpha$ . Determine a profundidade pelicular e a polarização da onda.

**Solução:**

A onda se propaga ao longo de  $\mathbf{a}_z$ , tal que  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_z$ ;  $\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_y$ , portanto

$$-\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_H = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$$

ou

$$\mathbf{a}_E = -\mathbf{a}_z$$

Também  $H_o = 10$ , portanto,

$$\frac{E_o}{H_o} = \eta = 200 \angle 30^\circ = 200 e^{j\pi/6} \rightarrow E_o = 2000 e^{j\pi/6}$$

Com exceção da diferença de amplitude e da diferença de fase,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sempre tem a mesma forma. Conseqüentemente,

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}(2000 e^{j\pi/6} e^{-\gamma x} e^{j\omega t} \mathbf{a}_E)$$

ou

$$\mathbf{E} = -2e^{-\alpha x} \cos\left(\omega t - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \mathbf{a}_z \text{ kV/m}$$

Sabendo que  $\beta = 1/2$ , precisamos de  $\sigma$  para determinar  $\alpha$ . Como

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left[ \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]^2} - 1 \right]}$$

e

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left[ \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]^2} + 1 \right]$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left[ \frac{\sqrt{1 + \left[ \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]^2} - 1}{\sqrt{1 + \left[ \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]^2} + 1} \right]^{1/2}$$

Contudo,  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \tan 2\theta_g = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ . Portanto,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left[ \frac{2 - 1}{2 + 1} \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,2887 \text{ Np/m}$$

e

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 2\sqrt{3} = 3,464 \text{ m}$$

A onda tem uma componente  $E_z$ ; portanto, está polarizada ao longo de  $z$ .

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 10.2

Uma onda plana se propagando em um meio com  $\epsilon_r = 8$ ,  $\mu_r = 2$  tem  $\mathbf{E} = 0,5 e^{-\sqrt{3}z} \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_x$  V/m. Determine:

- (a)  $\beta$ ;
- (b) a tangente de perdas;
- (c) a impedância da onda;
- (d) a velocidade da onda;
- (e) o campo  $\mathbf{H}$ .

**Resposta:** (a)  $1,374 \text{ rad/m}$ ; (b)  $0,5154$ ; (c)  $177,72 / 13,63^\circ \Omega$ ; (d)  $7,278 \times 10^7 \text{ m/s}$ ;  
 (e)  $2,817 e^{-\sqrt{3}z} \sin(10^8 t - \beta z - 13,63^\circ) \mathbf{a}_y$  mA/m.

#### EXEMPLO 10.3

Em um meio sem perdas, para o qual  $\eta = 60\pi$ ,  $\mu_r = 1$  e  $\mathbf{H} = -0,1 \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_x + 0,5 \sin(\omega t - z) \mathbf{a}_y$  A/m, calcule  $\epsilon_r$ ,  $\omega$  e  $\mathbf{E}$ .

#### Solução:

Neste caso,  $\sigma = 0$ ,  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ , portanto,

$$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

ou

$$\sqrt{\epsilon_r} = \frac{120\pi}{\eta} = \frac{120\pi}{60\pi} = 2 \quad \rightarrow \quad \epsilon_r = 4$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \frac{\omega}{c} \sqrt{4} = \frac{2\omega}{c}$$

ou

$$\omega = \frac{\beta c}{2} = \frac{1(3 \times 10^8)}{2} = 1,5 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

Do campo **H** fornecido, o campo **E** pode ser calculado de duas formas: usando as técnicas (baseadas nas equações de Maxwell) desenvolvidas neste capítulo ou usando diretamente as equações de Maxwell, como no capítulo anterior.

**Método 1:** para usar as técnicas desenvolvidas neste capítulo, fazemos

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$$

onde  $\mathbf{H}_1 = -0,1 \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{H}_2 = 0,5 \sin(\omega t - z) \mathbf{a}_y$  e o campo elétrico correspondente é

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

onde  $\mathbf{E}_1 = E_{10} \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_{E_1}$  e  $\mathbf{E}_2 = E_{20} \sin(\omega t - z) \mathbf{a}_{E_2}$ . Note que, embora **H** tenha componentes ao longo de  $\mathbf{a}_x$  e  $\mathbf{a}_y$ , esse campo não tem componente na direção de propagação. Portanto, é uma onda TEM.

Para  $\mathbf{E}_1$ :

$$\mathbf{a}_{E_1} = -(\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_{H_1}) = -(\mathbf{a}_z \times -\mathbf{a}_x) = \mathbf{a}_y$$

$$E_{10} = \eta H_{10} = 60\pi (0,1) = 6\pi$$

Logo,

$$\mathbf{E}_1 = 6\pi \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_y$$

Para  $\mathbf{E}_2$ :

$$\mathbf{a}_{E_2} = -(\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_{H_2}) = -(\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y) = \mathbf{a}_x$$

$$E_{20} = \eta H_{20} = 60\pi (0,5) = 30\pi$$

Logo,

$$\mathbf{E}_2 = 30\pi \sin(\omega t - z) \mathbf{a}_x$$

Adicionando  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{E}_2$  temos  $\mathbf{E}$ , isto é,

$$\mathbf{E} = 94,25 \sin(1,5 \times 10^8 t - z) \mathbf{a}_x + 18,85 \cos(1,5 \times 10^8 t - z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

**Método 2:** podemos aplicar as equações de Maxwell diretamente.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \oint \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \int \nabla \times \mathbf{H} dt$$

pois  $\sigma = 0$ . Porém,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x(z) & H_y(z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \mathbf{a}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{a}_y$$

$$= H_{2o} \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_x + H_{1o} \sin(\omega t - z) \mathbf{a}_y$$

onde  $H_{1o} = -0,1$  e  $H_{2o} = 0,5$ . Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \int \nabla \times \mathbf{H} dt = \frac{H_{2o}}{\epsilon \omega} \sin(\omega t - z) \mathbf{a}_x - \frac{H_{1o}}{\epsilon \omega} \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_y$$

$$= 94,25 \sin(\omega t - z) \mathbf{a}_x + 18,85 \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

como esperado.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 10.3

Uma onda plana em um meio não magnético tem  $\mathbf{E} = 50 \sin(10^8 t + 2z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$ . Encontre:

- (a) a orientação de propagação da onda;
- (b)  $\lambda, f$  e  $\epsilon_r$ ;
- (c)  $\mathbf{H}$ .

**Resposta:** (a) ao longo de  $-z$ ; (b) 3,142 m, 15,92 MHz, 36; (c)  $0,7958 \sin(10^8 t + 2z) \mathbf{a}_x \text{ A/m}$ .

#### EXEMPLO 10.4

Uma onda plana uniforme propagando-se em um meio tem

$$\mathbf{E} = 2e^{-\alpha z} \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_y \text{ V/m.}$$

Se o meio é caracterizado por  $\epsilon_r = 1$ ,  $\mu_r = 1$  e  $\sigma = 3 \text{ mhos/m}$ , encontre  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\mathbf{H}$ .

#### Solução:

Precisamos determinar a tangente de perdas para saber se o meio é um dielétrico com perdas ou um bom condutor.

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{3}{10^8 \times 1 \times \frac{10^{-9}}{36\pi}} = 3393 \gg 1$$

o que mostra que o meio pode ser considerado como um bom condutor na frequência de operação. Logo,

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu \omega \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20(10^8)(3)}{2}}^{1/2}$$

$$= 61,4$$

$$\alpha = 61,4 \text{ Np/m}, \quad \beta = 61,4 \text{ rad/m}$$

Também,

$$\begin{aligned} |\eta| &= \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} = \left[ \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20(10^8)}{3} \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{800\pi}{3}} \\ \operatorname{tg} 2\theta_\eta &= \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 3393 \quad \rightarrow \quad \theta_\eta = 45^\circ = \pi/4 \end{aligned}$$

Assim

$$\mathbf{H} = H_0 e^{-\alpha z} \operatorname{sen} \left( \omega t - \beta z - \frac{\pi}{4} \right) \mathbf{a}_H$$

onde

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$$

e

$$H_0 = \frac{E_0}{|\eta|} = 2 \sqrt{\frac{3}{800\pi}} = 69,1 \times 10^{-3}$$

Portanto,

$$\mathbf{H} = -69,1 e^{-61,4z} \operatorname{sen} \left( 10^8 t - 61,42z - \frac{\pi}{4} \right) \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 10.4

Uma onda plana propagando-se ao longo de  $+y$  em um meio com perdas ( $\epsilon_r = 4$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 10^{-2}$  mhos/m) tem  $\mathbf{E} = 30 \cos(10^9 \pi t + \pi/4) \mathbf{a}_z \text{ V/m}$  em  $y = 0$ . Encontre:

- (a)  $\mathbf{E}$  em  $y = 1 \text{ m}$ ,  $t = 2 \text{ ns}$ ;
- (b) a distância percorrida pela onda para ter uma mudança de fase de  $10^\circ$ ;
- (c) a distância percorrida pela onda para ter sua amplitude reduzida de 40%;
- (d)  $\mathbf{H}$  em  $y = 2 \text{ m}$ ,  $t = 2 \text{ ns}$ .

**Resposta:** (a)  $2,787 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$ ; (b)  $8,325 \text{ mm}$ ; (c)  $542 \text{ mm}$ ; (d)  $-4,71 \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$

#### EXEMPLO 10.5

Uma onda plana  $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$  está incidindo sobre um bom condutor em  $z = 0$ . Encontre a densidade de corrente no condutor.

**Solução:**

Como a densidade de corrente  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , esperamos que  $\mathbf{J}$  satisfaça a equação de onda na equação (10.17), isto é,

$$\nabla^2 \mathbf{J}_s - \gamma^2 \mathbf{J}_s = 0$$

Também, o  $\mathbf{E}$  incidente tem somente uma componente  $x$  e varia com  $z$ . Portanto,  $\mathbf{J} = J_s(z, t) \mathbf{a}_x$  e

$$\frac{d^2}{dz^2} J_{sx} - \gamma^2 J_{sx} = 0$$

que é uma equação diferencial ordinária com solução (veja o Caso 2 do Exemplo 6.5):

$$J_{xx} = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}$$

A constante  $B$  deve ser zero porque  $J_{xx}$  é finito para  $z \rightarrow \infty$ . Porém, para um bom condutor,  $\sigma \gg \omega \epsilon$ , tal que  $\alpha = \beta = 1/\delta$ . Portanto,

$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha(1 + j) = \frac{(1 + j)}{\delta}$$

e

$$J_{xx} = Ae^{-z(1+j)\delta}$$

ou

$$J_{xx} = J_{xx}(0) e^{-z(1+j)\delta}$$

onde  $J_{xx}(0)$  é a densidade de corrente na superfície do condutor.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 10.5

Dada a densidade de corrente do Exemplo 10.5, encontre a magnitude da corrente total através de uma fita de profundidade infinita ao longo de  $z$  e largura  $w$  na direção  $y$ .

**Resposta:**  $\frac{J_{xx}(0)w\delta}{\sqrt{2}}$

#### EXEMPLO 10.6

Para o cabo coaxial de cobre da Figura 7.12, considere  $a = 2$  mm,  $b = 6$  mm e  $t = 1$  mm. Calcule a resistência cc para 2 m de comprimento do cabo em 100 MHz.

**Solução:**

Seja

$$R = R_o + R_i$$

onde  $R_o$  e  $R_i$  são as resistências dos condutores externo e interno, respectivamente. Para cc

$$R_i = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{\ell}{\sigma \pi a^2} = \frac{2}{5,8 \times 10^7 \pi [2 \times 10^{-3}]^2} = 2,744 \text{ m}\Omega$$

$$\begin{aligned} R_o &= \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{\ell}{\sigma \pi [(b + t)^2 - b^2]} = \frac{\ell}{\sigma \pi [t^2 + 2bt]} \\ &= \frac{2}{5,8 \times 10^7 \pi [1 + 12] \times 10^{-6}} \\ &= 0,8429 \text{ m}\Omega \end{aligned}$$

Portanto,  $R_{cc} = 2,744 + 0,8429 = 3,587 \text{ m}\Omega$

Para  $f = 100$  MHz:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{R_s \ell}{w} = \frac{\ell}{\sigma \delta 2 \pi a} = \frac{\ell}{2 \pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \\ &= \frac{2}{2 \pi \times 2 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{\pi \times 10^8 \times 4 \pi \times 10^{-7}}{5,8 \times 10^7}} \\ &= 0,41 \Omega \end{aligned}$$

Como  $\delta = 6,6 \mu\text{m} \ll t = 1 \text{ mm}$ ,  $w = 2\pi b$  para o condutor externo. Portanto,

$$\begin{aligned} R_o &= \frac{R_s \ell}{w} = \frac{\ell}{2\pi b} \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \\ &= \frac{2}{2\pi \times 6 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{\pi \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5,8 \times 10^7}} \\ &= 0,1384 \Omega \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_{ca} = 0,41 + 0,1384 = 0,5484 \Omega$$

que é aproximadamente 150 vezes maior do que  $R_{cc}$ . Portanto, para a mesma corrente efetiva  $i$ , a perda ôhmica no cabo ( $i^2 R$ ) em 100 MHz é 150 vezes maior do que a perda de potência em cc.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 10.6

Para um fio de alumínio com um diâmetro de 2,6 mm, calcule a razão entre a resistência ca e a resistência cc em:

- (a) 10 MHz;
- (b) 2 GHz.

**Resposta:** (a) 24,16; (b) 341,7.

## 10.7 POTÊNCIA E O VETOR DE POYNTING

Conforme mencionado anteriormente, a energia pode ser transportada de um ponto (onde estiver localizado um transmissor) a outro ponto (com um receptor) por meio de ondas EM. A taxa de transporte desta energia pode ser obtida a partir das equações de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (10.58a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10.58b)$$

Fazendo o produto ponto de  $\mathbf{E}$  com ambos os lados da equação (10.58b), obtemos

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma E^2 + \mathbf{E} \cdot \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10.59)$$

Porém, para quaisquer campos vetoriais  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  (veja Apêndice A.10):

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).$$

Aplicando esta identidade vetorial à equação (10.59) (fazendo  $\mathbf{A} = \mathbf{H}$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ ), obtemos:

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \sigma E^2 + \mathbf{E} \cdot \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10.60)$$

Da equação (10.58a),

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{H} \cdot \left( -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \quad (10.61)$$

portanto, a equação (10.60) torna-se:

$$-\frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \sigma E^2 + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Reordenando os termos e tomado a integral de volume de ambos os lados:

$$\int_v \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left[ \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right] dv - \int_v \sigma E^2 dv \quad (10.62)$$

Aplicando o teorema da divergência ao lado esquerdo da equação, obtemos:

$$\oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left[ \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right] dv - \int_v \sigma E^2 dv \quad (10.63)$$

↓                          ↓                          ↓

Potência total que deixa o volume	Taxa de decréscimo da energia armazenada nos campos elétrico e magnético	potência ôhmica dissipada
=	-	

(10.64)

A equação (10.63) é conhecida como o *teorema de Poynting*.<sup>4</sup> Os vários termos desta equação são identificados usando conceitos de conservação de energia para campos EM. O primeiro termo do lado direito da equação (10.63) é interpretado como a taxa de decréscimo da energia armazenada nos campos elétrico e magnético. O segundo termo é a potência dissipada no caso de meio ser condutor ( $\sigma \neq 0$ ). A quantidade  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , no lado esquerdo da equação (10.63), é conhecida como o *veto de Poynting*  $\mathcal{P}$ , dado em watts por metro quadrado ( $\text{W/m}^2$ ), isto é,

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} \quad (10.65)$$

Esta equação representa o vetor densidade de potência instantânea associada com o campo EM em um dado ponto. A integral do vetor de Poynting, sobre qualquer superfície fechada, fornece a potência líquida que flui para fora de um volume  $v$ .

**O teorema de Poynting** estabelece que a potência líquida que flui para fora de um volume  $v$  é igual à taxa temporal de decréscimo da energia armazenada em  $v$  menos as perdas por condução.

O teorema está ilustrado na Figura 10.10.

Deve se notar que  $\mathcal{P}$  é perpendicular tanto a  $\mathbf{E}$  como a  $\mathbf{H}$ , estando, portanto, ao longo da orientação de propagação  $\mathbf{a}_k$  para ondas planas uniformes. Então

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_E \times \mathbf{a}_H \quad (10.49)$$

O fato de  $\mathcal{P}$  apontar na orientação de  $\mathbf{a}_k$  tem como consequência que  $\mathcal{P}$  seja considerado como um vetor “apontador”.

Ainda, se assumimos que

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

então

$$\mathbf{H}(z, t) = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \mathbf{a}_y$$

<sup>4</sup> J. H. Poynting, “On the transfer of energy in the electromagnetic field”, *Phil Trans.*, vol. 174, 1883, p. 343.

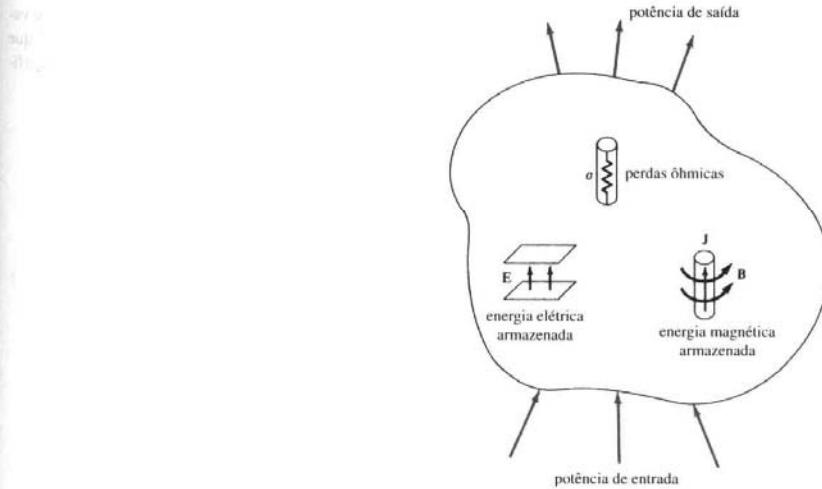


Figura 10.10 Ilustração do balanço de potência para campos EM.

e

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z, t) &= \frac{E_0^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \mathbf{a}_z \\ &= \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos \theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)] \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (10.66)$$

uma vez que  $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$ . Para determinarmos a média temporal do vetor de Poynting,  $\mathcal{P}_{\text{méd}}(z)$  (em  $\text{W/m}^2$ ), que é de maior interesse prático do que o vetor de Poynting instantâneo  $\mathcal{P}(z, t)$ , integramos a equação (10.66) sobre o período  $T = 2\pi/\omega$ , isto é,

$$\mathcal{P}_{\text{méd}}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(z, t) dt \quad (10.67)$$

Pode-se demonstrar que (ver Problema 10.28) isto é equivalente a:

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{méd}}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*)} \quad (10.68)$$

Substituindo a equação (10.66) na equação (10.67), obtemos

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{méd}}(z) = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \mathbf{a}_z} \quad (10.69)$$

A potência média total que atravessa uma dada superfície  $S$  é dada por

$$\boxed{P_{\text{méd}} = \int_S \mathcal{P}_{\text{méd}} \cdot d\mathbf{S}} \quad (10.70)$$

Devemos notar a diferença entre  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_{\text{méd}}$  e  $P_{\text{méd}}$ .  $\mathcal{P}(x, y, z, t)$  é o vetor de Poynting, em watts/m<sup>2</sup>, e varia com o tempo.  $\mathcal{P}_{\text{méd}}(x, y, z)$ , também em watts/m<sup>2</sup>, é a média temporal do vetor de Poynting  $\mathcal{P}$ , que é um vetor, mas é independente do tempo.  $P_{\text{méd}}$  é a potência média total que atravessa uma superfície, em watts; é uma grandeza escalar.

### EXEMPLO 10.7

Em um meio não magnético:

$$\mathbf{E} = 4 \sin(2\pi \times 10^7 t - 0.8x) \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Encontre:

- (a)  $\epsilon_r$ ,  $\eta$ ;
- (b) a média temporal da potência transmitida pela onda;
- (c) a potência total que atravessa 100 cm<sup>2</sup> do plano  $2x + y = 5$ .

**Solução:**

- (a) Como  $\alpha = 0$  e  $\beta \neq \omega/c$ , o meio não é o espaço livre, mas é um meio sem perdas.

$$\beta = 0,8, \quad \omega = 2\pi \times 10^7, \quad \mu = \mu_0 \text{ (não magnético)}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Portanto,

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$$

ou

$$\sqrt{\epsilon_r} = \frac{\beta c}{\omega} = \frac{0,8(3 \times 10^8)}{2\pi \times 10^7} = \frac{12}{\pi}$$

$$\epsilon_r = 14,59$$

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} = 120\pi \cdot \frac{\pi}{12} = 10\pi^2 \\ &= 98,7 \Omega \end{aligned}$$

$$(b) \mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{E_o^2}{\eta} \sin^2(\omega t - \beta x) \mathbf{a}_x$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{méd}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P} dt = \frac{E_o^2}{2\eta} \mathbf{a}_x = \frac{16}{2 \times 10\pi^2} \mathbf{a}_x \\ &= 81 \mathbf{a}_x \text{ mW/m}^2 \end{aligned}$$

- (c) No plano  $2x + y = 5$  (veja Exemplo 3.5 ou 8.5):

$$\mathbf{a}_n = \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{5}}$$

Portanto, a potência total é:

$$\begin{aligned} P_{\text{méd}} &= \int \mathcal{P}_{\text{méd}} \cdot d\mathbf{S} = \mathcal{P}_{\text{méd}} \cdot S \mathbf{a}_n \\ &= (81 \times 10^{-3} \mathbf{a}_x) \cdot (100 \times 10^{-4}) \left[ \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{5}} \right] \\ &= \frac{162 \times 10^{-5}}{\sqrt{5}} = 724,5 \mu\text{W} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 10.7**

No espaço livre,  $\mathbf{H} = 0,2 \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{a}_z$  A/m. Encontre a potência total que atravessa:

- uma placa quadrada de 10 cm de lado no plano  $x + y = 1$ ;
- um disco circular de 5 cm de raio no plano  $x = 1$ .

**Resposta:** (a) 0; (b) 59,22 mW.

## 10.8 REFLEXÃO DE UMA ONDA PLANA COM INCIDÊNCIA NORMAL

Até aqui, temos considerado ondas planas uniformes se propagando em meios ilimitados e homogêneos. Quando uma onda plana em um meio encontra um meio diferente, ela é parcialmente refletida e parcialmente transmitida. A proporção da onda incidente que é refletida ou transmitida depende dos parâmetros constitutivos ( $\epsilon, \mu, \sigma$ ) dos meios envolvidos. Aqui, vamos supor que a onda plana incidente é perpendicular à superfície de separação entre os dois meios. A incidência oblíqua da onda plana será considerada na seção seguinte, depois de entendermos o caso mais simples da incidência normal.

Suponha que uma onda plana que se propaga ao longo de  $+z$  incide com orientação normal à fronteira  $z = 0$  entre o meio 1 ( $z < 0$ ), caracterizado por  $\sigma_1, \epsilon_1, \mu_1$ , e o meio 2 ( $z > 0$ ), caracterizado por  $\sigma_2, \epsilon_2, \mu_2$ , conforme mostrado na Figura 10.11. Na figura, os índices  $i, r$  e  $t$  denotam, respectivamente, as ondas incidente, refletida e transmitida. As ondas incidente, refletida e transmitida, mostradas na Figura 10.11, são obtidas como segue:

**Onda Incidente:**

$(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$  se propaga ao longo de  $+\mathbf{a}_z$  no meio 1. Se suprimirmos o fator temporal  $e^{j\omega t}$  e assumirmos que

$$\mathbf{E}_{ix}(z) = E_{io} e^{-\gamma_1 z} \mathbf{a}_x \quad (10.71)$$

então,

$$\mathbf{H}_{ix}(z) = H_{io} e^{-\gamma_1 z} \mathbf{a}_y = \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \mathbf{a}_y \quad (10.72)$$

**Onda Refletida:**

$(\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r)$  se propaga ao longo de  $-\mathbf{a}_z$  no meio 1. Se

$$\mathbf{E}_{rx}(z) = E_{ri} e^{\gamma_1 z} \mathbf{a}_x \quad (10.73)$$

então,

$$\mathbf{H}_{rx}(z) = H_{ri} e^{\gamma_1 z} (-\mathbf{a}_y) = -\frac{E_{ri}}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \mathbf{a}_y \quad (10.74)$$

onde se supõe  $\mathbf{E}_{rx}$  ao longo de  $\mathbf{a}_x$ . Assumiremos por coerência que, para incidência normal,  $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_r$  e  $\mathbf{E}_t$  têm a mesma polarização.

**Onda Transmitida:**

$(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t)$  se propaga ao longo de  $+\mathbf{a}_z$  no meio 2. Se

$$\mathbf{E}_{tx}(z) = E_{to} e^{-\gamma_2 z} \mathbf{a}_x \quad (10.75)$$

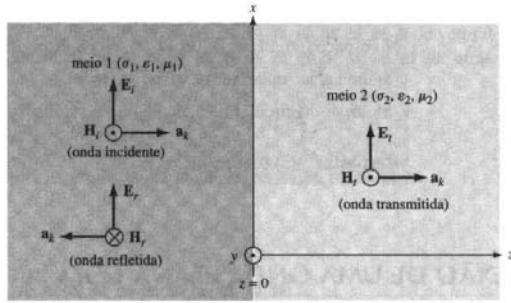


Figura 10.11 Uma onda plana incidindo com orientação normal na interface entre dois meios diferentes.

então

$$\mathbf{H}_{ts}(z) = H_{io} e^{-\gamma_2 z} \mathbf{a}_y = \frac{E_{io}}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z} \mathbf{a}_y \quad (10.76)$$

Nas equações (10.71) a (10.76),  $E_{io}$ ,  $E_{ro}$  e  $E_{to}$  são, respectivamente, as magnitudes dos campos elétricos incidente, refletido e transmitido em  $z = 0$ .

Note que, na Figura 10.11, o campo total no meio 1 compreende os campos incidente e refletido, enquanto o meio 2 só tem o campo transmitido, isto é,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t$$

Na interface  $z = 0$ , as condições de fronteira requerem que as componentes tangenciais dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sejam contínuas. Como as ondas são transversais, os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são inteiramente tangenciais à interface. Portanto, em  $z = 0$ ,  $\mathbf{E}_{tg} = \mathbf{E}_{2tg}$  e  $\mathbf{H}_{tg} = \mathbf{H}_{2tg}$ , o que implica em

$$\mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0) \quad \rightarrow \quad E_{io} + E_{ro} = E_{to} \quad (10.77)$$

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_t(0) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\eta_1} (E_{io} - E_{ro}) = \frac{E_{to}}{\eta_2} \quad (10.78)$$

Das equações (10.77) e (10.78), obtemos

$$E_{ro} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{io} \quad (10.79)$$

e

$$E_{ro} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{io} \quad (10.80)$$

Definiremos, agora, o *coeficiente de reflexão*  $\Gamma$  e o *coeficiente de transmissão*  $\tau$ , a partir das equações (10.79) e (10.80), como

$$\Gamma = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (10.81a)$$

ou

$$E_{ro} = \Gamma E_{io} \quad (10.81b)$$

e

$$\tau = \frac{E_{io}}{E_{ro}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (10.82a)$$

ou

$$E_{io} = \tau E_{ro} \quad (10.82b)$$

Note que:

1.  $1 + \Gamma = \tau$ ;
  2. tanto  $\Gamma$  quanto  $\tau$  não têm dimensão e podem ser complexos;
  3.  $0 \leq |\Gamma| \leq 1$ .
- (10.83)

O caso considerado acima é geral. Vamos agora considerar o caso especial em que o meio 1 é um dielétrico perfeito (sem perdas,  $\sigma_1 = 0$ ) e o meio 2 é um condutor perfeito ( $\sigma_2 = \infty$ ). Para este caso,  $\eta_2 = 0$ . Portanto,  $\Gamma = -1$  e  $\tau = 0$ , mostrando que a onda é totalmente refletida. Isto é possível, pois os campos em um condutor perfeito devem se anular. Portanto, não pode haver onda transmitida ( $\mathbf{E}_2 = 0$ ). A onda totalmente refletida se combina com a onda incidente para formar uma *onda estacionária*. Uma onda estacionária “pára” e não se desloca. Ela consiste de duas ondas viajantes ( $\mathbf{E}_i$  e  $\mathbf{E}_r$ ) de mesma amplitude, mas com orientações opostas. Combinando as equações (10.71) e (10.73), temos a onda estacionária no meio 1 dada por:

$$\mathbf{E}_{1s} = \mathbf{E}_{is} + \mathbf{E}_{rs} = (E_{io}e^{-\gamma_1 z} + E_{ro}e^{\gamma_1 z}) \mathbf{a}_x \quad (10.84)$$

Porém

$$\Gamma = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = -1, \sigma_1 = 0, \alpha_1 = 0, \gamma_1 = j\beta_1$$

Logo,

$$\mathbf{E}_{1s} = -E_{io}(e^{j\beta_1 z} - e^{-j\beta_1 z}) \mathbf{a}_x$$

ou

$$\mathbf{E}_{1s} = -2jE_{io} \sin \beta_1 z \mathbf{a}_x \quad (10.85)$$

Portanto,

$$\mathbf{E}_1 = \text{Re}(\mathbf{E}_{1s} e^{j\omega t})$$

ou

$$\boxed{\mathbf{E}_1 = 2E_{io} \sin \beta_1 z \sin \omega t \mathbf{a}_x} \quad (10.86)$$

Por um procedimento semelhante pode se mostrar que a componente do campo magnético desta onda é:

$$\boxed{\mathbf{H}_1 = \frac{2E_{io}}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t \mathbf{a}_y} \quad (10.87)$$

Um esboço da onda estacionária da equação (10.86) é apresentado na Figura 10.12, para  $t = 0, T/8, T/4, 3T/8, T/2$  e assim por diante, onde  $T = 2\pi/\omega$ . Da figura, notamos que a onda não se propaga, mas oscila.

Quando os meios 1 e 2 são, ambos, sem perdas, teremos um outro caso especial ( $\sigma_1 = 0 = \sigma_2$ ). Neste caso,  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são reais, assim como  $\Gamma$  e  $\tau$ . Vamos considerar os seguintes casos:

## CASO A

Se  $\eta_2 > \eta_1$ ,  $\Gamma > 0$ . Novamente, há uma onda estacionária no meio 1, mas há também uma onda transmitida no meio 2. Entretanto, as ondas incidente e refletida têm amplitudes diferentes. Pode ser mostrado que os valores máximos de  $|E_1|$  ocorrem para

$$-\beta_1 z_{\max} = n\pi$$

ou

$$z_{\max} = -\frac{n\pi}{\beta_1} = -\frac{n\lambda_1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.88)$$

e os valores mínimos de  $|E_i|$  ocorrem para

$$-\beta_1 z_{\min} = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

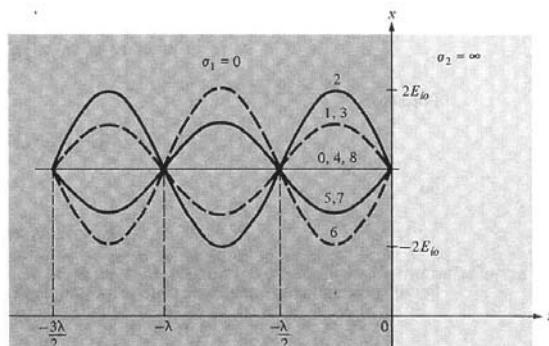
OU

$$z_{\min} = -\frac{(2n+1)\pi}{2\beta_1} = -\frac{(2n+1)}{4}\lambda_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.89)$$

## CASO B

Se  $\eta_j < \eta_i$ ,  $\Gamma < 0$ . Neste caso, a localização dos máximos de  $|E_i|$  é dada pela equação (10.89), enquanto a localização dos mínimos de  $|E_i|$  são dados pela equação (10.88). Tudo isto está ilustrado na Figura 10.13. Note que:

1. os mínimos de  $|H_z|$  ocorrem onde existem os máximos de  $|E_z|$  e vice-versa;
  2. a onda transmitida no meio 2 (não mostrada na Figura 10.13) é uma onda puramente viajante e, consequentemente, não existem máximos ou mínimos nesta região.



**Figura 10.12** Ondas estacionárias  $E = 2E_0 \sin \beta z \sin \omega t \mathbf{a}_z$ ; as curvas 0, 1, 2, 3, 4, ... correspondem, respetivamente, aos tempos  $t = 0, T/8, T/4, 3T/8, T/2, \dots; \lambda = 2\pi/\beta$ .

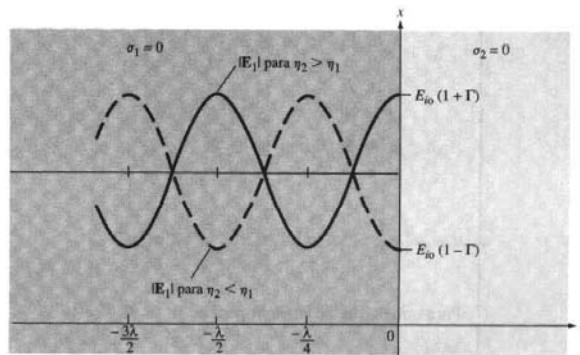


Figura 10.13. Onda estacionária devida à reflexão na interface entre dois meios sem perdas;  $\lambda = 2\pi/\beta_1$ .

A razão entre  $|E_1|_{\max}$  e  $|E_1|_{\min}$  (ou  $|H_1|_{\max}$  para  $|H_1|_{\min}$ ) é chamada *taxa de onda estacionária s*, isto é,

$$s = \frac{|E_1|_{\max}}{|E_1|_{\min}} = \frac{|H_1|_{\max}}{|H_1|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (10.90)$$

ou

$$|\Gamma| = \frac{s - 1}{s + 1} \quad (10.91)$$

Como  $|\Gamma| \leq 1$ , segue que  $1 \leq s \leq \infty$ . A taxa de onda estacionária não tem dimensão e é, muitas vezes, expressa em (dB) como a seguir:

$$s \text{ em dB} = 20 \log_{10} s \quad (10.92)$$

#### EXEMPLO 10.8

No espaço livre ( $z \leq 0$ ), uma onda plana com

$$\mathbf{H} = 10 \cos(10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

incide perpendicularmente sobre um meio sem perdas ( $\epsilon = 2\epsilon_0$ ,  $\mu = 8\mu_0$ ) que ocupa a região  $z \geq 0$ . Determine a onda refletida  $\mathbf{H}_r$ ,  $\mathbf{E}_r$  e a onda transmitida  $\mathbf{H}_t$ ,  $\mathbf{E}_t$ .

#### Solução:

Este problema pode ser resolvido de duas maneiras diferentes.

**Método 1:** considere o problema como ilustrado na Figura 10.14. Para o espaço livre,

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3}$$

$$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi$$

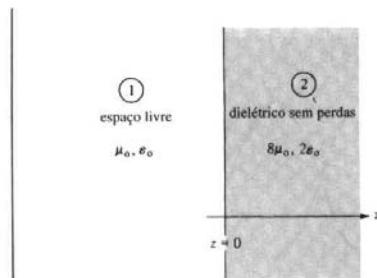


Figura 10.14 Referente ao Exemplo 10.8.

Para o meio dielétrico sem perdas,

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_r} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \frac{\omega}{c} \cdot (4) = 4\beta_1 = \frac{4}{3}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 2 \eta_0$$

Dado que  $\mathbf{H}_i = 10 \cos(10^8 t - \beta_1 z) \mathbf{a}_x$ , então

$$\mathbf{E}_i = E_{io} \cos(10^8 t - \beta_1 z) \mathbf{a}_{E_i}$$

onde

$$\mathbf{a}_{E_i} = \mathbf{a}_{H_i} \times \mathbf{a}_{k_i} = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$$

e

$$E_{io} = \eta_1 H_{io} = 10 \eta_0$$

Portanto,

$$\mathbf{E}_i = -10\eta_0 \cos(10^8 t - \beta_1 z) \mathbf{a}_y \text{ mV/m}$$

Ainda:

$$\frac{E_{ro}}{E_{io}} = \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2\eta_0 - \eta_0}{2\eta_0 + \eta_0} = \frac{1}{3}$$

$$E_{ro} = \frac{1}{3} E_{io}$$

Então,

$$\mathbf{E}_r = -\frac{10}{3} \eta_0 \cos\left(10^8 t + \frac{1}{3} z\right) \mathbf{a}_y \text{ mV/m}$$

de onde facilmente obtemos  $\mathbf{H}_r$ , como a seguir:

$$\mathbf{H}_r = -\frac{10}{3} \cos\left(10^8 t + \frac{1}{3} z\right) \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

De forma similar,

$$\frac{E_{io}}{E_{lo}} = \tau = 1 + \Gamma = \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad E_{lo} = \frac{4}{3} E_{io}$$

Então,

$$\mathbf{E}_t = E_{lo} \cos(10^8 t - \beta_2 z) \mathbf{a}_{E_t}$$

onde  $\mathbf{a}_{E_t} = \mathbf{a}_{E_i} = -\mathbf{a}_y$ . Portanto,

$$\mathbf{E}_t = -\frac{40}{3} \eta_0 \cos\left(10^8 t - \frac{4}{3} z\right) \mathbf{a}_y \text{ mV/m}$$

onde obtemos

$$\mathbf{H}_t = \frac{20}{3} \cos\left(10^8 t - \frac{4}{3} z\right) \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

**Método 2:** alternativamente, podemos obter  $\mathbf{H}_r$  e  $\mathbf{H}_i$  diretamente de  $\mathbf{H}_t$  usando

$$\frac{H_{ro}}{H_{lo}} = -\Gamma \quad \text{e} \quad \frac{H_{lo}}{H_{io}} = \tau \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

Então,

$$H_{ro} = -\frac{1}{3} H_{lo} = -\frac{10}{3}$$

$$H_{lo} = \frac{4}{3} \frac{\eta_0}{2\eta_0} \cdot H_{io} = \frac{2}{3} H_{io} = \frac{20}{3}$$

e

$$\mathbf{H}_r = -\frac{10}{3} \cos(10^8 t + \beta_1 z) \mathbf{a}_t \text{ mA/m}$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{20}{3} \cos(10^8 t - \beta_2 z) \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$$

conforme obtido anteriormente.

Note que as condições de fronteira em  $z = 0$ , isto é,

$$\mathbf{E}_t(0) + \mathbf{E}_r(0) = \mathbf{E}_t(0) = -\frac{40}{3} \eta_0 \cos(10^8 t) \mathbf{a}_y$$

e

$$\mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) = \mathbf{H}_i(0) = \frac{20}{3} \cos(10^8 t) \mathbf{a}_x$$

estão satisfeitas. Estas condições sempre podem ser utilizadas para verificar  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ .

**EXERCÍCIO PRÁTICO 10.8**

Uma onda plana uniforme de 5 GHz  $\mathbf{E}_{ir} = 10 e^{-j\beta z} \mathbf{a}_x$  V/m, que se propaga no espaço livre, incide perpendicularmente sobre um dielétrico plano sem perdas ( $z > 0$ ), tendo  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ . Encontre a onda refletida  $\mathbf{E}_{rs}$  e a onda transmitida  $\mathbf{E}_{rt}$ .

**Resposta:**  $-3,333 \exp(j\beta_1 z) \mathbf{a}_x$  V/m,  $6,667 \exp(-j\beta_2 z) \mathbf{a}_x$  V/m, onde  $\beta_2 = 2\beta_1 = 200\pi/3$ .

**EXEMPLO 10.9**

Considere uma onda plana uniforme no ar dada por

$$\mathbf{E}_i = 40 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x + 30 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

- (a) Encontre  $\mathbf{H}_i$ .
- (b) Se a onda incide sobre um plano condutor perfeito perpendicular ao eixo  $z$ , em  $z = 0$ , encontre as ondas refletidas  $\mathbf{E}_r$  e  $\mathbf{H}_r$ .
- (c) Quais são os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  totais para  $z \leq 0$ ?
- (d) Calcule a média temporal do vetor de Poynting para  $z \leq 0$  e  $z \geq 0$ .

**Solução:**

- (a) Este é um problema semelhante ao Exemplo 10.3. Podemos considerar que a onda é composta por duas ondas  $\mathbf{E}_{i1}$  e  $\mathbf{E}_{i2}$ , onde

$$\mathbf{E}_{i1} = 40 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{E}_{i2} = 30 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$$

À pressão atmosférica, o ar tem  $\epsilon_r = 1,0006 = 1$ . Portanto, o ar pode ser considerado como se fosse o espaço livre. Seja  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i1} + \mathbf{H}_{i2}$ ,

$$\mathbf{H}_{i1} = H_{i10} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_{H_i}$$

onde

$$H_{i10} = \frac{E_{i10}}{\eta_0} = \frac{40}{120\pi} = \frac{1}{3\pi}$$

$$\mathbf{a}_{H_i} = \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

Portanto,

$$\mathbf{H}_{i1} = \frac{1}{3\pi} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$$

De forma semelhante,

$$\mathbf{H}_{i2} = H_{i20} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_{H_i}$$

onde

$$H_{i20} = \frac{E_{i20}}{\eta_0} = \frac{30}{120\pi} = \frac{1}{4\pi}$$

$$\mathbf{a}_{H_i} = \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$$

Portanto,

$$\mathbf{H}_{i2} = -\frac{1}{4\pi} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= \mathbf{H}_{i1} + \mathbf{H}_{i2} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x + \frac{1}{3\pi} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \text{ mA/m} \end{aligned}$$

Este problema também pode ser resolvido utilizando o Método 2 do Exemplo 10.3.

(b) Como o meio 2 é um condutor perfeito,

$$\frac{\sigma_2}{\omega\epsilon_2} \gg 1 \rightarrow \eta_2 \ll \eta_1$$

isto é,

$$\Gamma = -1, \quad \tau = 0$$

mostrando que os campos incidentes  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são totalmente refletidos.

$$E_{ro} = \Gamma E_{io} = -E_{io}$$

Portanto,

$$\mathbf{E}_r = -40 \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x - 30 \sin(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

$\mathbf{H}_r$  pode ser calculado a partir de  $\mathbf{E}_r$ , exatamente como foi feito na parte (a) deste exemplo ou usando o Método 2 do exemplo anterior, partindo de  $\mathbf{H}_i$ . Em ambos os casos, obtemos

$$\mathbf{H}_r = \frac{1}{3\pi} \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y - \frac{1}{4\pi} \sin(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

(c) Pode se mostrar que campo total no ar

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r$$

é uma onda estacionária. Os campos totais no condutor são

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t = 0, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t = 0.$$

(d) Para  $z \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1\text{med}} &= \frac{|\mathbf{E}_{1y}|^2}{2\eta_1} \mathbf{a}_k = \frac{1}{2\eta_1} [E_{io}^2 \mathbf{a}_z - E_{ro}^2 \mathbf{a}_z] \\ &= \frac{1}{240\pi} [(40^2 + 30^2) \mathbf{a}_z - (40^2 + 30^2) \mathbf{a}_z] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para  $z \geq 0$ ,

$$\mathcal{P}_{2\text{med}} = \frac{|\mathbf{E}_{2y}|^2}{2\eta_2} \mathbf{a}_k = \frac{E_{ro}^2}{2\eta_2} \mathbf{a}_z = 0$$

pois toda a energia incidente é refletida.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 10.9**

A onda plana  $\mathbf{E} = 50 \operatorname{sen}(\omega t - 5x)\mathbf{a}_y$  V/m em um meio sem perdas ( $\mu = 4\mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ ) incide sobre um meio com perdas ( $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ,  $\sigma = 0,1$  mhos/m) perpendicular ao eixo  $x$  em  $x = 0$ . Encontre:

- (a)  $\Gamma$ ,  $\tau$  e  $s$ ;
- (b)  $\mathbf{E}_r$  e  $\mathbf{H}_r$ ;
- (c)  $\mathbf{E}_t$  e  $\mathbf{H}_t$ ;
- (d) a média temporal dos vetores de Poynting nos dois meios.

**Resposta:** (a)  $0,8186 \angle 171,1^\circ$ ,  $0,2295 \angle 33,56^\circ$ ,  $10,025$ ; (b)  $40,93 \operatorname{sen}(\omega t + 5x + 171,9^\circ)\mathbf{a}_y$  V/m,  $-54,3 \operatorname{sen}(\omega t + 5x + 171,9^\circ)\mathbf{a}_z$  mA/m; (c)  $11,47 e^{-6,021x} \operatorname{sen}(\omega t - 7,826x + 33,56^\circ)\mathbf{a}_y$  V/m,  $120,2 e^{-6,021x} \operatorname{sen}(\omega t - 7,826x - 4,01^\circ)\mathbf{a}_z$  mA/m; (d)  $0,5469 \mathbf{a}_x$  W/m<sup>2</sup>,  $0,5469 \exp(-12,04x) \mathbf{a}_x$  W/m<sup>2</sup>.

**†10.9 REFLEXÃO DE UMA ONDA PLANA COM INCIDÊNCIA OBLÍQUA**

Consideremos, agora, uma situação mais geral do que a descrita na Seção 10.8. Para simplificar a análise, vamos supor que estamos tratando de meios sem perdas. (Podemos estender os resultados aqui obtidos para meios com perdas simplesmente substituindo  $\epsilon$  por  $\epsilon_c$ .) Pode se mostrar (veja os Problemas 10.14 e 10.15) que uma onda plana uniforme pode ser representada pela expressão geral

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ = \operatorname{Re} [E_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \quad (10.93)$$

onde  $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$  é o raio ou vetor posição e  $\mathbf{k} = k_x\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y + k_z\mathbf{a}_z$  é o *vetor número de onda* ou *vetor propagação*;  $\mathbf{k}$  tem sempre a mesma orientação da propagação da onda. O módulo de  $\mathbf{k}$  está relacionado a  $\omega$  através da relação de dispersão:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (10.94)$$

Portanto, para um meio sem perdas,  $k$  é essencialmente o mesmo  $\beta$  das seções anteriores. Com a forma geral de  $\mathbf{E}$  na equação (10.93), as equações de Maxwell se reduzem a

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (10.95a)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (10.95b)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (10.95c)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (10.95d)$$

mostrando que (i)  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{k}$  são mutuamente ortogonais e (ii)  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  estão no mesmo plano

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}$$

Da equação (10.95a), o campo  $\mathbf{H}$ , correspondente ao campo  $\mathbf{E}$  da equação (10.93), é:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{a}_k \times \mathbf{E}}{\eta} \quad (10.96)$$

Tendo expressado  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  na forma geral, podemos, agora, considerar a incidência oblíqua de uma onda plana uniforme em uma interface plana, conforme ilustrado na Figura 10.15(a). O plano definido pelo vetor propagação  $\mathbf{k}$  e um vetor unitário  $\mathbf{a}_n$ , normal à superfície de separação entre os dois meios, é chamado *plano de incidência*. O ângulo  $\theta_i$  entre  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{a}_n$  é o *ângulo de incidência*.

Novamente, tanto a onda incidente quanto a onda refletida estão no meio 1, enquanto a onda transmitida (ou refratada) está no meio 2. Sejam

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{io} \cos(k_{ix}x + k_{iy}y + k_{iz}z - \omega_i t) \quad (10.97a)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{ro} \cos(k_{rx}x + k_{ry}y + k_{rz}z - \omega_r t) \quad (10.97b)$$

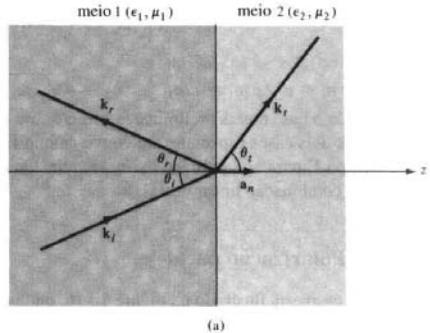
$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{to} \cos(k_{tx}x + k_{ty}y + k_{tz}z - \omega_t t) \quad (10.97c)$$

onde  $k_i$ ,  $k_r$  e  $k_t$ , com suas componentes normal e tangencial, são mostrados na Figura 10.15(b). Como a componente tangencial de  $\mathbf{E}$  deve ser contínua na fronteira  $z = 0$ :

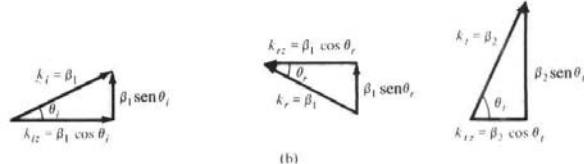
$$\mathbf{E}_i(z = 0) + \mathbf{E}_r(z = 0) = \mathbf{E}_t(z = 0) \quad (10.98)$$

Estas condições de fronteira só serão satisfeitas pelas ondas da equação (10.97), para qualquer  $x$  e  $y$ , se

1.  $\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$
2.  $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x$
3.  $k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y$



(a)



(b)

Figura 10.15 Incidência oblíqua de uma onda plana: (a) ilustração de  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  e  $\theta_t$ ; (b) ilustração das componentes normal e tangencial de  $\mathbf{k}$ .

A condição 1 implica que a frequência não mude. As condições 2 e 3 requerem que as componentes tangenciais dos vetores de propagação sejam contínuas (denominadas de *condição de casamento de fase*). Isto significa que os vetores de propagação  $\mathbf{k}_i$ ,  $\mathbf{k}_r$  e  $\mathbf{k}_t$  devem estar todos contidos no plano de incidência. Portanto, devido às condições 2 e 3,

$$k_i \operatorname{sen} \theta_i = k_r \operatorname{sen} \theta_r \quad (10.99)$$

$$k_i \operatorname{sen} \theta_i = k_t \operatorname{sen} \theta_t \quad (10.100)$$

onde  $\theta_r$  é o ângulo de reflexão e  $\theta_t$  é o ângulo de transmissão. Contudo, para meios sem perdas:

$$k_i = k_r = \beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \quad (10.101a)$$

$$k_t = \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \quad (10.101b)$$

Das equações (10.99) e (10.101a) fica claro que

$$\boxed{\theta_r = \theta_i} \quad (10.102)$$

isto é, o ângulo de reflexão  $\theta_r$  é igual ao ângulo de incidência  $\theta_i$ , como na ótica. Também, das equações (10.100) e (10.101),

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_t}{\operatorname{sen} \theta_i} = \frac{k_i}{k_t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \quad (10.103)$$

onde  $u = \omega/k$  é a velocidade de fase. A equação (10.103) é a conhecida *lei de Snell* e pode ser escrita como

$$\boxed{n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_t} \quad (10.104)$$

onde  $n_1 = c \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = c/u_1$  e  $n_2 = c \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = c/u_2$  são os *índices de refração* dos meios.

Com base nestas preliminares gerais sobre a incidência oblíqua, vamos agora considerar, em detalhe, dois casos especiais: um com o campo  $\mathbf{E}$  perpendicular ao plano de incidência e outro com o campo  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência. Qualquer outra polarização pode ser considerada como uma combinação linear destas duas.

### A. Polarização paralela

Este caso está ilustrado na Figura 10.16, onde o campo  $\mathbf{E}$  se encontra no plano  $xz$ , que é o plano de incidência. No meio 1 temos tanto o campo incidente como o refletido, dados por

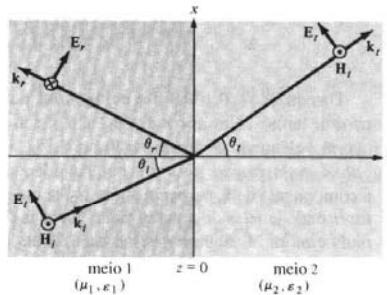
$$\mathbf{E}_{is} = E_{io}(\cos \theta_i \mathbf{a}_x - \operatorname{sen} \theta_i \mathbf{a}_z) e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (10.105a)$$

$$\mathbf{H}_{is} = \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_i + z \cos \theta_i)} \mathbf{a}_y \quad (10.105b)$$

$$\mathbf{E}_{rs} = E_m(\cos \theta_r \mathbf{a}_x + \operatorname{sen} \theta_r \mathbf{a}_z) e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)} \quad (10.106a)$$

$$\mathbf{H}_{rs} = -\frac{E_{ro}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \operatorname{sen} \theta_r - z \cos \theta_r)} \mathbf{a}_y \quad (10.106b)$$

onde  $\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$ . Observe, atentamente, como cada componente de campo foi obtida. O artifício para obter as componentes consiste em, primeiramente, determinar o vetor propagação  $\mathbf{k}$ , conforme mostrado na Figura 10.15(b), para as ondas incidente, refletida e transmitida. Uma vez conhecido  $\mathbf{k}$ , podemos definir  $\mathbf{E}_s$  tal que  $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$  ou  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_s = 0$  e, então,  $\mathbf{H}_s$  é obtido de  $\mathbf{H}_s = \frac{\mathbf{k}}{\omega \mu} \times \mathbf{E}_s = \mathbf{a}_k \times \frac{\mathbf{E}_s}{\eta}$ .

Figura 10.16 Incidência oblíqua com  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência.

Os campos transmitidos estão no meio 2 e são dados por

$$\mathbf{E}_{tx} = E_{to}(\cos \theta_t \mathbf{a}_x - \sin \theta_t \mathbf{a}_z) e^{-j\beta_2(x \sen \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (10.107a)$$

$$\mathbf{H}_{tx} = \frac{E_{to}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x \sen \theta_i + z \cos \theta_i)} \mathbf{a}_y \quad (10.107b)$$

onde  $\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$ . Se estiverem erradas as suposições feitas com respeito às orientações relativas nas equações (10.105) a (10.107), o resultado final obtido nos mostrará isso através do seu sinal.

Assumindo que  $\theta_r = \theta_i$  e que as componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$  e de  $\mathbf{H}$  sejam contínuas na fronteira  $z = 0$ , obtemos

$$(E_{io} + E_{ro}) \cos \theta_i = E_{ro} \cos \theta_t \quad (10.108a)$$

$$\frac{1}{\eta_1} (E_{io} - E_{ro}) = \frac{1}{\eta_2} E_{ro} \quad (10.108b)$$

Expressando  $E_{ro}$  e  $E_{io}$  em termos de  $E_{ro}$ , obtemos

$$\boxed{\Gamma_{||} = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}} \quad (10.109a)$$

ou

$$E_{ro} = \Gamma_{||} E_{io} \quad (10.109b)$$

e

$$\boxed{\tau_{||} = \frac{E_{io}}{E_{ro}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}} \quad (10.110a)$$

ou

$$E_{io} = \tau_{||} E_{ro} \quad (10.110b)$$

As equações (10.109) e (10.110) são chamadas *equações de Fresnel*. Note que estas equações se reduzem às equações (10.81) e (10.82) quando  $\theta_i = \theta_t = 0$ , como esperado. Como  $\theta_i$  e  $\theta_t$  estão relacionados de acordo com a lei de Snell (equação 10.103), as equações (10.109) e (10.110) podem ser expressas em termos de  $\theta_i$  pela substituição

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_t} = \sqrt{1 - (u_2/u_1)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i} \quad (10.111)$$

Das equações (10.109) e (10.110), facilmente se mostra que

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \eta_1 \left( \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_r} \right) \quad (10.112)$$

Da equação (10.109a) fica evidente ser possível que  $\Gamma_{\parallel} = 0$ , pois o numerador é a diferença entre dois termos. Nestas condições, não há reflexão ( $E_{rr} = 0$ ). O ângulo de incidência para o qual isto ocorre é chamado de *ângulo de Brewster*  $\theta_{B_{\parallel}}$ . O ângulo de Brewster é também conhecido como o *ângulo de polarização*, pois uma onda incidente com polarização arbitrária será refletida somente com a componente de  $\mathbf{E}$  perpendicular ao plano de incidência. O efeito Brewster é utilizado em tubos de *laser* onde janelas de quartzo são colocadas em ângulo de Brewster para controlar a polarização da onda emitida. O ângulo de Brewster é obtido colocando-se  $\theta_i = \theta_{B_{\parallel}}$ , situação em que  $\Gamma_{\parallel} = 0$  na equação (10.109), isto é,

$$\eta_2 \cos \theta_i = \eta_1 \cos \theta_{B_{\parallel}}$$

ou

$$\eta_2^2 (1 - \sin^2 \theta_i) = \eta_1^2 (1 - \sin^2 \theta_{B_{\parallel}})$$

Introduzindo a equação (10.103) ou (10.104), temos:

$$\boxed{\sin^2 \theta_{B_{\parallel}} = \frac{1 - \mu_2 \epsilon_1 / \mu_1 \epsilon_2}{1 - (\epsilon_1 / \epsilon_2)^2}} \quad (10.113)$$

É de importância prática considerar o caso em que os meios dielétricos não são somente sem perdas, mas também não ferromagnéticos, isto é,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Para esta situação, a equação (10.113) torna-se

$$\sin^2 \theta_{B_{\parallel}} = \frac{1}{1 + \epsilon_1 / \epsilon_2} \rightarrow \sin \theta_{B_{\parallel}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}$$

ou

$$\tan \theta_{B_{\parallel}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (10.114)$$

mostrando que há um ângulo de Brewster para qualquer combinação de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ .

### B. Polarização perpendicular

Neste caso, o campo  $\mathbf{E}$  é perpendicular ao plano de incidência (plano  $xz$ ), conforme mostrado na Figura 10.17. Este caso também pode ser visto como o caso em que o campo  $\mathbf{H}$  é paralelo ao plano de incidência. Os campos incidentes e refletidos no meio 1 são dados por

$$\mathbf{E}_{is} = E_{io} e^{-j\beta_i(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \mathbf{a}_y \quad (10.115a)$$

$$\mathbf{H}_{is} = \frac{E_{io}}{\eta_1} (-\cos \theta_i \mathbf{a}_x + \sin \theta_i \mathbf{a}_z) e^{-j\beta_i(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (10.115b)$$

$$\mathbf{E}_{rs} = E_{ro} e^{-j\beta_r(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \mathbf{a}_y \quad (10.116a)$$

$$\mathbf{H}_{rs} = \frac{E_{ro}}{\eta_1} (\cos \theta_r \mathbf{a}_x + \sin \theta_r \mathbf{a}_z) e^{-j\beta_r(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \quad (10.116b)$$

enquanto os campos transmitidos para o meio 2 são dados por

$$\mathbf{E}_{ts} = E_{io} e^{-j\beta_2(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \mathbf{a}_y \quad (10.117a)$$

$$\mathbf{H}_{ts} = \frac{E_{io}}{\eta^2} (-\cos \theta_i \mathbf{a}_x + \sin \theta_i \mathbf{a}_z) e^{-j\beta_2(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \quad (10.117b)$$

Observe que nas definições das componentes dos campos, equações (10.115) a (10.117), as equações de Maxwell (10.95) são sempre satisfeitas. Novamente, assumindo que as componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sejam contínuas em  $z = 0$  e fazendo  $\theta_r$  igual a  $\theta_i$ , temos:

$$E_{io} + E_{ro} = E_{io} \quad (10.118a)$$

$$\frac{1}{\eta_1} (E_{io} - E_{ro}) \cos \theta_i = \frac{1}{\eta_2} E_{io} \cos \theta_i \quad (10.118b)$$

Expressando  $E_{ro}$  e  $E_{io}$  em termos de  $E_{io}$ , conclui-se que

$$\boxed{\Gamma_\perp = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i}} \quad (10.119a)$$

ou

$$E_{ro} = \Gamma_\perp E_{io} \quad (10.119b)$$

e

$$\boxed{\tau_\perp = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i}} \quad (10.120a)$$

ou

$$E_{ro} = \tau_\perp E_{io} \quad (10.120b)$$

que são as *equações de Fresnel* para a polarização perpendicular. Das equações (10.119) e (10.120), é fácil mostrar que

$$1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp \quad (10.121)$$

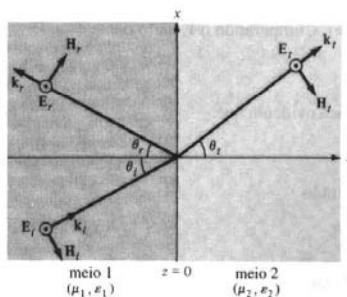


Figura 10.17 Incidência oblíqua com  $\mathbf{E}$  perpendicular ao plano de incidência.

que é equivalente à equação (10.83) para incidência normal. Também, quando  $\theta_i = \theta_r = 0$ , as equações (10.119) e (10.120) tornam-se as equações (10.81) e (10.82), como devem.

Para não haver reflexão,  $\Gamma_\perp = 0$  (ou  $E_r = 0$ ). Este é o mesmo caso da transmissão total ( $\tau_\perp = 1$ ). Substituindo  $\theta_r$  pelo ângulo de Brewster correspondente  $\theta_{B_\perp}$ , obtemos

$$\eta_2 \cos \theta_{B_\perp} = \eta_1 \cos \theta_i$$

ou

$$\eta_2^2 (1 - \sin^2 \theta_{B_\perp}) = \eta_1^2 (1 - \sin^2 \theta_i)$$

Incorporando a equação (10.104), temos:

$$\sin^2 \theta_{B_\perp} = \frac{1 - \mu_1 \epsilon_2 / \mu_2 \epsilon_1}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2} \quad (10.122)$$

Note que, para meios não magnéticos ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ),  $\sin^2 \theta_{B_\perp} \rightarrow \infty$  na equação (10.122). Portanto,  $\theta_{B_\perp}$  não existe, pois o seno de um ângulo nunca é maior do que um. Também, se  $\mu_1 \neq \mu_2$  e  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ , a equação (10.122) se reduz a

$$\sin \theta_{B_\perp} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

ou

$$\operatorname{tg} \theta_{B_\perp} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \quad (10.123)$$

Embora esta situação seja teoricamente possível, na prática é rara.

#### EXEMPLO 10.10

Uma onda EM se propaga no espaço livre com a componente de campo elétrico:

$$\mathbf{E}_s = 100 e^{j(0.866y+0.5z)} \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

Determine:

- (a)  $\omega$  e  $\lambda$ ;
- (b) o campo magnético;
- (c) a média temporal da potência transmitida pela onda.

**Solução:**

- (a) Comparando o  $\mathbf{E}$  dado com

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = E_0 e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} \mathbf{a}_x$$

fica evidente que

$$k_x = 0, \quad k_y = 0,866, \quad k_z = 0,5$$

Então

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{(0,866)^2 + (0,5)^2} = 1$$

Contudo, no espaço livre

$$k = \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Portanto,

$$\omega = kc = 3 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi = 6,283 \text{ m}$$

(b) Da equação (10.96), o campo magnético correspondente é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_s &= \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_s \\ &= \frac{(0,866 \mathbf{a}_y + 0,5 \mathbf{a}_z)}{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8} \times 100 \mathbf{a}_x e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{H}_s = (1,33 \mathbf{a}_y - 2,3 \mathbf{a}_z) e^{j(0,866y+0,5z)} \text{ mA/m}$$

(c) A média temporal da potência é

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{med}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) = \frac{E_0^2}{2\eta} \mathbf{a}_k \\ &= \frac{(100)^2}{2(120\pi)} (0,866 \mathbf{a}_y + 0,5 \mathbf{a}_z) \\ &= 11,49 \mathbf{a}_y + 6,631 \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2\end{aligned}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 10.10

Refaça o Exemplo 10.10 para

$$\mathbf{E} = (10\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) \cos(\omega t + 2y - 4z) \text{ V/m}$$

no espaço livre.

**Resposta:** (a)  $1,342 \times 10^9 \text{ rad/s}$ ,  $1,405 \text{ m}$ ; (b)  $-29,66 \cos(1,342 \times 10^9 t + 2y - 4z) \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$ ; (c)  $-0,07415 \mathbf{a}_y + 0,1489 \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2$ .

### EXEMPLO 10.11

Uma onda plana uniforme no ar

$$\mathbf{E} = 8 \cos(\omega t - 4x - 3z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

incide em um dielétrico ( $z \geq 0$ ) com  $\mu_r = 1,0$ ,  $\epsilon_r = 2,5$  e  $\sigma = 0$ . Encontre:

- (a) a polarização da onda;
- (b) o ângulo de incidência;
- (c) o campo refletido  $\mathbf{E}$ ;
- (d) o campo transmitido  $\mathbf{H}$ .

**Solução:**

(a) A partir do campo incidente  $\mathbf{E}$ , fica evidente que o vetor de propagação é

$$\mathbf{k}_i = 4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z \rightarrow k_i = 5 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

Então,

$$\omega = 5c = 15 \times 10^8 \text{ rad/s.}$$

Um vetor unitário normal à interface ( $z = 0$ ) é  $\mathbf{a}_z$ . O plano que contém  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{a}_z$  é dado por  $y = \text{constante}$ , isto é, um plano  $xz$ , é o plano de incidência. Como  $\mathbf{E}_i$  é perpendicular a este plano, temos polarização perpendicular (semelhante à situação mostrada na Figura 10.17).

(b) Os vetores de propagação estão ilustrados na Figura 10.18, onde fica evidente que

$$\tan \theta_i = \frac{k_{ix}}{k_{iz}} = \frac{4}{3} \rightarrow \theta_i = 53,13^\circ$$

Alternativamente, sem usar a Figura 10.18, podemos obter  $\theta_i$  a partir do fato de  $\theta_i$  ser o ângulo entre  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{a}_n$ , isto é,

$$\cos \theta_i = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_n = \left( \frac{4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z}{5} \right) \cdot \mathbf{a}_z = \frac{3}{5}$$

ou

$$\theta_i = 53,13^\circ$$

(c) Uma maneira fácil de encontrar  $\mathbf{E}_r$  é aplicando a equação (10.116 a), uma vez que constatamos ser este problema semelhante ao considerado na Seção 10.9(b). Suponhamos que não tivéssemos nos dado conta disto.

Seja

$$\mathbf{E}_r = E_{ro} \cos(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}_y$$

que tem a mesma forma do campo  $\mathbf{E}_i$  dado. O vetor unitário  $\mathbf{a}_y$  é escolhido porque a componente tangencial de  $\mathbf{E}$  deve ser contínua na interface. Da Figura 10.18,

$$\mathbf{k}_r = k_{rx} \mathbf{a}_x - k_{rz} \mathbf{a}_z$$

onde

$$k_{rx} = k_r \sin \theta_r, \quad k_{rz} = k_r \cos \theta_r$$

Porém,  $\theta_r = \theta_i$  e  $k_r = k_i = 5$ , pois tanto  $k_r$  quanto  $k_i$  estão no mesmo meio. Então,

$$k_r = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z$$

Para encontrar  $E_{ro}$ , precisamos  $\theta_r$ . Da lei de Snell,

$$\begin{aligned} \sin \theta_r &= \frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2} = \frac{c \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{c \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \sin \theta_i \\ &= \frac{\sin 53,13^\circ}{\sqrt{2,5}} \end{aligned}$$

ou

$$\theta_r = 30,39^\circ$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\perp &= \frac{E_{ro}}{E_{io}} \\ &= \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_r}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_r} \end{aligned}$$

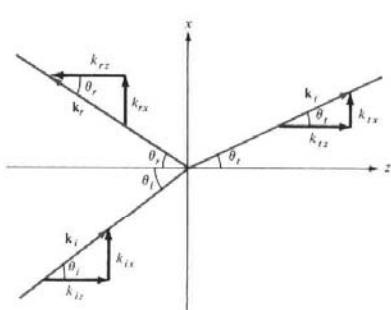


Figura 10.18 Vetores de propagação para o Exemplo 10.11.

onde  $\eta_1 = \eta_0 = 377$ ,  $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r_2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_2}}} = \sqrt{\frac{377}{\sqrt{2,5}}} = 238,4$

$$\Gamma_\perp = \frac{238,4 \cos 35,13^\circ - 377 \cos 30,39^\circ}{238,4 \cos 53,13^\circ + 377 \cos 30,39^\circ} = -0,389$$

Então,

$$E_{ro} = \Gamma_\perp E_{lo} = -0,389 (8) = -3,112$$

e

$$\mathbf{E}_r = -3,112 \cos(15 \times 10^8 t - 4x + 3z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

(d) De forma semelhante, seja o campo elétrico transmitido

$$\mathbf{E}_t = E_{lo} \cos(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}_y$$

onde

$$\begin{aligned} k_t &= \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_{r_2} \epsilon_{r_2}} \\ &= \frac{15 \times 10^8}{3 \times 10^8} \sqrt{1 \times 2,5} = 7,906 \end{aligned}$$

Da Figura 10.18,

$$k_{tx} = k_t \sin \theta_t = 4$$

$$k_{tz} = k_t \cos \theta_t = 6,819$$

ou

$$\mathbf{k}_t = 4 \mathbf{a}_x + 6,819 \mathbf{a}_z$$

Observe que  $k_{tx} = k_{tz} = k_t$ , como esperado.

$$\begin{aligned} \tau_\perp &= \frac{E_{ro}}{E_{lo}} = \frac{2 \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_t} \\ &= \frac{2 \times 238,4 \cos 53,13^\circ}{238,4 \cos 53,13^\circ + 377 \cos 30,39^\circ} \\ &= 0,611 \end{aligned}$$

O mesmo resultado poderia ser obtido da relação  $\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp}$ . Então,

$$E_{t0} = \tau_{\perp} E_{00} = 0,611 \times 8 = 4,888$$

$$\vec{E}_t = 4,888 \cos(15 \times 10^8 t - 4x - 6,819z) \mathbf{a}_y$$

$\mathbf{H}_t$  é obtido facilmente de  $\mathbf{E}_t$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \frac{1}{\mu_2 \omega} \mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t = \frac{\mathbf{a}_{k_t} \times \mathbf{E}_t}{\eta_2} \\ &= \frac{4\mathbf{a}_z + 6,819 \mathbf{a}_z}{7,906 (238,4)} \times 4,888 \mathbf{a}_y \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_t &= (-17,69 \mathbf{a}_x + 10,37 \mathbf{a}_z) \cos(15 \times 10^8 t - 4x - 6,819z) \text{ mA/m.} \end{aligned}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 10.11

Se a onda plana do Exercício Prático 10.10 incide sobre um dielétrico para o qual  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  e que ocupa a região  $z \geq 0$ , calcule:

- (a) os ângulos de incidência, de reflexão e de transmissão;
- (b) os coeficientes de reflexão e de transmissão;
- (c) o campo  $\mathbf{E}$  total no espaço livre;
- (d) o campo total  $\mathbf{E}$  no dielétrico;
- (e) o ângulo de Brewster.

**Resposta:** (a)  $26,56^\circ$ ,  $26,56^\circ$ ,  $12,92^\circ$ ; (b)  $-0,295$ ,  $0,647$ ; (c)  $(10\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) \cos(\omega t + 2y - 4z) + (-2,946\mathbf{a}_y + 1,473\mathbf{a}_z) \cos(\omega t + 2y + 4z)$  V/m; (d)  $(7,055\mathbf{a}_y + 1,618\mathbf{a}_z) \cos(\omega t + 2y - 8,718z)$  V/m; (e)  $63,43^\circ$ .

#### RESUMO

- A equação de onda é da forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

com solução

$$\Phi = A \sin(\omega t - \beta z)$$

onde  $u$  = velocidade da onda,  $A$  = amplitude da onda,  $\omega$  = freqüência angular ( $= 2\pi f$ ) e  $\beta$  = constante de fase. Também  $\beta = \omega/u = 2\pi/\lambda$  ou  $u = f\lambda = \lambda/T$ , onde  $\lambda$  = comprimento de onda e  $T$  = período.

- Em um meio com perdas e livre de cargas, a equação de onda, baseada nas equações de Maxwell, é da forma

$$\nabla^2 \mathbf{A}_s - \gamma^2 \mathbf{A}_s = 0$$

onde  $\mathbf{A}_s$  representa  $\mathbf{E}_s$  ou  $\mathbf{H}_s$ , e  $\gamma = \alpha + j\beta$  é a constante de propagação. Se assumirmos  $\mathbf{E}_s = E_{0s}(z)\mathbf{a}_x$ , obtemos ondas EM da forma

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{H}(z, t) = H_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \mathbf{a}_y$$

onde  $\alpha$  = constante de atenuação,  $\beta$  = constante de fase e  $\eta = |\eta|/\theta_0$  é a impedância intrínseca do meio. O inverso de  $\alpha$  é a profundidade de penetração pelicular ( $\delta = 1/\alpha$ ). As relações entre  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$ , conforme colocadas acima, permanecem válidas para ondas EM.

3. A propagação da onda em outros tipos de meios pode ser obtida como casos especiais da propagação em um meio com perdas. Para o espaço livre,  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$ . Para meios dielétricos sem perdas,  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  e  $\mu = \mu_0\mu_r$ . E para bons condutores,  $\sigma \approx \infty$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$ , ou  $\sigma/\omega\epsilon \rightarrow 0$ .
4. Um meio é classificado como dielétrico com perdas, dielétrico sem perdas ou bom condutor dependendo de sua tangente de perdas, dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{|\mathbf{J}_s|}{|\mathbf{J}_{d_s}|} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$$

onde  $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$  é a permissividade complexa do meio. Para dielétrico sem perdas,  $\operatorname{tg} \theta \ll 1$ . Para bons condutores,  $\operatorname{tg} \theta \gg 1$ . Para um dielétrico com perdas,  $\operatorname{tg} \theta$  é da ordem da unidade.

5. Em um bom condutor os campos tendem a se concentrar em uma profundidade  $\delta$  a partir da superfície do condutor. Este fenômeno é chamado efeito pelicular. Para um condutor de largura  $w$  e comprimento  $\ell$ , a resistência efetiva ou resistência ca é

$$R_{ca} = \frac{\ell}{\sigma w \delta}$$

onde  $\delta$  é a profundidade pelicular.

6. O vetor de Poynting  $\mathcal{P}$  é o vetor fluxo de potência, cuja orientação é a mesma da propagação da onda e cuja magnitude é igual à potência que atravessa uma unidade de área perpendicular à orientação desse vetor.

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad \mathcal{P}_{\text{med}} = 1/2 \operatorname{Re} (\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*)$$

7. Se uma onda plana incide perpendicularmente de um meio 1 para um meio 2, o coeficiente de reflexão  $\Gamma$  e o coeficiente de transmissão  $\tau$  são dados por

$$\Gamma = \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \tau = \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = 1 + \Gamma$$

A taxa de onda estacionária  $s$  é definida como

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

8. Para incidência oblíqua a partir de um meio sem perdas 1 para um meio sem perdas 2, temos os coeficientes de Fresnel

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i}, \quad \tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i}$$

para polarização paralela e

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i}, \quad \tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_i}$$

para polarização perpendicular. Como na ótica:

$$\begin{aligned} \theta_r &= \theta_i \\ \frac{\operatorname{sen} \theta_r}{\operatorname{sen} \theta_i} &= \frac{\beta_1}{\beta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \end{aligned}$$

A transmissão total ou a ausência de reflexão ( $\Gamma = 0$ ) ocorre quando o ângulo de incidência  $\theta_i$  é igual ao ângulo de Brewster.

## QUESTÕES DE REVISÃO

**10.1** Qual das expressões não é uma forma correta para a onda  $E_x = \cos(\omega t - \beta z)$ ?

- (a)  $\cos(\beta z - \omega t)$
- (b)  $\sin(\beta z - \omega t - \pi/2)$
- (c)  $\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)$
- (d)  $\operatorname{Re}(e^{i(\omega t - \beta z)})$
- (e)  $\cos\beta(z - ut)$

**10.2** Identifique quais das funções seguintes não satisfaz a equação de onda:

- (a)  $50e^{i\omega(t-3z)}$
- (b)  $\sin\omega(10z + 5t)$
- (c)  $(x + 2t)^2$
- (d)  $\cos^2(y + 5t)$
- (e)  $\sin x \cos t$
- (f)  $\cos(5y + 2x)$

**10.3** Qual das afirmativas que seguem não é verdadeira para ondas em geral?

- (a) As ondas podem ser função somente do tempo.
- (b) As ondas podem ser senoidais ou cossenoïdais.
- (c) As ondas devem ser função do tempo e do espaço.
- (c) Por razões práticas, as ondas devem ser finitas em extensão.

**10.4** A componente de campo elétrico de uma onda no espaço livre é dada por  $\mathbf{E} = 10 \cos(10^7 t + kz) \mathbf{a}_y$ , V/m. Pode se inferir que:

- (a) A onda se propaga ao longo de  $\mathbf{a}_y$ .
- (b) O comprimento de onda é  $\lambda = 188,5$  m.
- (c) A amplitude da onda é 10 V/m.
- (d) O número de onda  $k$  vale 0,33 rad/m.
- (e) A onda se atenua à medida que se propaga.

**10.5** Dado que  $\mathbf{H} = 0,5 e^{-0,1t} \sin(10^6 t - 2x) \mathbf{a}_z$  A/m, quais das afirmativas que seguem são incorretas?

- (a)  $\alpha = 0,1$  Np/m.
- (b)  $\beta = -2$  rad/m.
- (c)  $\omega = 10^6$  rad/s.
- (d) A onda se propaga ao longo de  $\mathbf{a}_z$ .
- (e) A onda é polarizada na direção  $z$ .
- (f) O período da onda é 1  $\mu$ s.

**10.6** Qual é o fator principal para determinar se um meio é o espaço livre, um dielétrico sem perdas, um dielétrico com perdas ou um bom condutor?

- (a) A constante de atenuação.
- (b) Os parâmetros constitutivos ( $\sigma, \epsilon, \mu$ ).

- (c) A tangente de perdas.
- (d) O coeficiente de reflexão.

**10.7** Em um certo meio,  $\mathbf{E} = 10 \cos(10^8 t - 3y) \mathbf{a}_x$  V/m. Que tipo de meio é esse?

- (a) Espaço livre.
- (b) Dielétrico imperfeito.
- (c) Dielétrico sem perdas.
- (d) Condutor perfeito.

**10.8** As ondas eletromagnéticas se propagam com maior velocidade em condutores do que em dielétricos.

- (a) Verdadeiro
- (b) Falso

**10.9** Em um bom condutor,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  estão em fase no tempo.

- (a) Verdadeiro
- (b) Falso

**10.10** O vetor de Poynting significa, fisicamente, a densidade de potência que entra ou sai de um determinado volume em um campo variável com o tempo.

- (a) Verdadeiro
- (b) Falso

*Respostas:* 10.1b; 10.2d,f; 10.3a; 10.4 b,c; 10.5 b,f; 10.6c; 10.7c; 10.8b; 10.9b; 10.10a.

## PROBLEMAS

**10.1** Uma onda EM, em um determinado meio, é descrita por

$$\mathbf{E} = 25 \sin(2\pi \times 10^6 t - 6x) \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

- (a) Determine a orientação de propagação da onda.
- (b) Calcule o período  $T$ , o comprimento de onda  $\lambda$  e a velocidade  $u$ .
- (c) Esboce a onda em  $t = 0, T/8, T/4$  e  $T/2$ .

**10.2** (a) Obtenha as equações (10.23) e (10.24) a partir das equações (10.18) e (10.20).

(b) Usando a equação (10.29) em conjunto com as equações de Maxwell, mostre que

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

(c) A partir do item (b), obtenha as equações (10.32) e (10.33).

**10.3** A 50 MHz, um material dielétrico com perdas é caracterizado por  $\epsilon = 3.6\epsilon_0$ ,  $\mu = 2.1\mu_0$  e  $\sigma = 0.08$  S/m. Se  $\mathbf{E}_s = 6e^{-7t} \mathbf{a}_z$  V/m, calcule: (a)  $\gamma$ , (b)  $\lambda$ , (c)  $u$ , (d)  $\eta$  e (e)  $\mathbf{H}_s$ .

**10.4** Um material com perdas tem  $\mu = 5\mu_0$  e  $\epsilon = 2\epsilon_0$ . Se a 5 MHz, a constante de fase é 10 rd/m, calcule:

- (a) a tangente de perdas;
- (b) a condutividade do material;
- (c) a permissividade complexa;
- (d) a constante de atenuação;
- (e) a impedância intrínseca.

\*10.5 Um material não magnético tem uma impedância intrínseca  $240 \angle 30^\circ \Omega$ . Encontre sua:

- (a) tangente de perdas;
- (b) constante dielétrica;
- (c) permissividade complexa;
- (d) constante de atenuação em 1 MHz;

10.6 A amplitude de uma onda que se propaga em um meio não magnético com perdas se reduz de 18% a cada metro. Se a onda opera a 10 MHz e o campo elétrico está adiantado com relação ao magnético de  $24^\circ$ , calcule: (a) a constante de propagação; (b) o comprimento de onda; (c) a profundidade de penetração pelicular; (d) a condutividade do meio.

10.7 A água do mar tem um papel importante no estudo das comunicações submarinas. Assumindo que, para a água do mar,  $\sigma = 4 \text{ S/m}$ ,  $\epsilon_r = 80$ ,  $\mu_r = 1$  e  $f = 100 \text{ MHz}$ , calcule: (a) a velocidade de fase; (b) o comprimento de onda; (c) a profundidade de penetração pelicular; (d) a impedância intrínseca.

10.8 Em um certo meio, com  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ,

$$\mathbf{H} = 12e^{-0.1y} \sin(\pi \times 10^8 t - \beta y) \mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

encontre: (a) o período da onda  $T$ ; (b) o comprimento de onda  $\lambda$ ; (c) o campo elétrico  $\mathbf{E}$ ; (d) a diferença de fase entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ .

10.9 Em um meio,

$$\mathbf{E} = 16e^{-0.05x} \sin(2 \times 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

encontre: (a) a constante de propagação; (b) o comprimento de onda; (c) a velocidade da onda; (d) a profundidade de penetração pelicular.

10.10 Uma onda uniforme no ar tem

$$\mathbf{E} = 10 \cos(2\pi \times 10^6 t - \beta z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

- (a) Calcule  $\beta$  e  $\lambda$ .
- (b) Faça o gráfico da onda para  $z = 0$  e  $\lambda/4$ .
- (b) Encontre  $\mathbf{H}$ .

10.11 A componente do campo magnético de uma onda EM, propagando-se em um meio não magnético ( $\mu = \mu_0$ ), é:

$$\mathbf{H} = 25 \sin(2 \times 10^8 t + 6x) \mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

Determine:

- (a) a orientação de propagação da onda;
- (b) a permissividade do meio;
- (c) o módulo do campo elétrico.

10.12 Se  $\mathbf{H} = 10 \sin(\omega t - 4z) \mathbf{a}_x \text{ mA/m}$  em um material para o qual  $\sigma = 0$ ,  $\mu = \mu_0$  e  $\epsilon = 4\epsilon_0$ , calcule  $\omega$ ,  $\lambda$  e  $\mathbf{J}_d$ .

10.13 Um fabricante produz um ferrite com  $\mu = 750\mu_0$ ,  $\epsilon = 5\epsilon_0$  e  $\sigma = 10^{-6} \text{ S/m}$  em 10 MHz.

- (a) Você classificaria este material como sendo sem perdas, com perdas ou condutor?
- (b) Calcule  $\beta$  e  $\lambda$ .
- (c) Determine a diferença de fase entre dois pontos separados por 2 m.
- (d) Encontre a impedância intrínseca.

- \*10.14** Assumindo que os campos dependentes do tempo  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  e  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ , onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y + k_z\mathbf{a}_z$  é o vetor número de onda e  $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$  é o vetor radial, mostre que  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  pode ser expressa como  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu \omega \mathbf{H}$  e deduza que  $\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_H$ .

- 10.15** Considere os mesmos campos do Problema 10.14 e mostre que as equações de Maxwell, em uma região livre de cargas, podem ser escritas como

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \epsilon \mathbf{E}$$

Destas equações, deduza

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_H \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_H = -\mathbf{a}_E$$

- 10.16** A componente de campo magnético de uma onda plana em um dielétrico sem perdas é

$$\mathbf{H} = 30 \sin(2\pi \times 10^8 t - 5x) \mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

- (a) Se  $\mu_r = 1$ , encontre  $\epsilon_r$ .
- (b) Calcule o comprimento de onda e a velocidade.
- (c) Determine a impedância da onda.
- (d) Determine a polarização da onda.
- (e) Encontre a componente de campo elétrico correspondente.
- (f) Encontre a densidade de corrente de deslocamento.

- 10.17** Em um meio não magnético,

$$\mathbf{E} = 50 \cos(10^9 t - 8x) \mathbf{a}_y + 40 \sin(10^9 t - 8x) \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

encontre a constante dielétrica  $\epsilon_r$  e o campo magnético  $\mathbf{H}$  correspondente.

- 10.18** Em um certo meio,

$$\mathbf{E} = 10 \cos(2\pi \times 10^7 t - \beta x) (\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \text{ V/m}$$

Se  $\mu = 50\mu_0$ ,  $\epsilon = 2\epsilon_0$  e  $\sigma = 0$ , encontre  $\beta$  e  $\mathbf{H}$ .

- 10.19** Quais dos seguintes meios podem ser considerados como condutores em 8 MHz?

- (a) Solo úmido pantanoso ( $\epsilon = 15\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 10^{-2} \text{ S/m}$ ).
- (b) Germânio intrínseco ( $\epsilon = 16\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 0,025 \text{ S/m}$ ).
- (c) Água do mar ( $\epsilon = 81\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 25 \text{ S/m}$ ).

- 10.20** Calcule a profundidade de penetração pelicular e a velocidade de propagação para uma onda plana uniforme de 6 MHz de frequência, propagando-se em policloreto de vinila, PVC, ( $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 4$ ,  $\tan \theta_\eta = 7 \times 10^{-2}$ ).

- 10.21** Uma onda plana uniforme, em um meio com perdas, tem uma constante de fase de 1,6 rad/m em 10<sup>7</sup> Hz e sua amplitude é reduzida de 60% para cada 2 metros de propagação. Encontre a profundidade de penetração pelicular e a velocidade da onda.

- 10.22** (a) Determine a resistência para corrente contínua (cc) de um fio de cobre, de seção reta circular, ( $\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 1$ ) de 1,2 mm de raio e 600 m de comprimento.  
 (b) Encontre a resistência ca em 100 MHz.

- (c) Calcule a freqüência aproximada para a qual as resistências para corrente contínua (cc) e para corrente alternada (ca) são iguais.

**10.23** Um tubo de alumínio de 40 metros de comprimento ( $\sigma = 3,5 \times 10^7 \text{ S/m}$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 1$ ), com raios interno e externo de 9 mm e 12 mm, conduz uma corrente total de  $6 \sin 10^6 \pi t \text{ A}$ . Encontre a profundidade de penetração pelicular e a resistência efetiva do cano.

**10.24** Mostre que, em um bom condutor, a profundidade de penetração pelicular  $\delta$  é sempre muito menor que o comprimento de onda.

**10.25** Guias de onda de latão são muitas vezes recobertos com prata para reduzir as perdas. Considerando que a espessura mínima da prata ( $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\sigma = 6,1 \times 10^7 \text{ S/m}$ ) deve ser  $5\delta$ , encontre a espessura mínima requerida para operação do guia de ondas em 12 GHz.

**10.26** Uma onda plana uniforme, em um meio não magnético sem perdas, tem:

$$\mathbf{E}_s = (5\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y)e^{-\gamma z}, \gamma = 0,2 + j3,4/\text{m}$$

- (a) Calcule a amplitude da onda em  $z = 4 \text{ m}$ .  
 (b) Encontre a perda de energia, em dB, da onda no intervalo  $0 < z < 3 \text{ m}$ .  
 (c) Calcule o vetor de Poynting em  $z = 4 \text{ e } t = T/8$ . Considere  $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$ .

**10.27** Em um material não magnético,

$$\mathbf{H} = 30 \cos(2\pi \times 10^8 t - 6x) \mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

encontre: (a) a impedância intrínseca; (b) o vetor de Poynting; (c) a média temporal da potência que atravessa a superfície  $x = 1,0 < y < 2,0 < z < 3 \text{ m}$ .

**\*10.28** Mostre que as equações (10.67) e (10.68) são equivalentes.

**10.29** Em uma linha de transmissão com um dielétrico sem perdas ( $\epsilon = 4,5\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ),

$$\mathbf{E} = \frac{40}{\rho} \sin(\omega t - 2z) \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$$

encontre: (a)  $\omega$  e  $\mathbf{H}$ ; (b) o vetor de Poynting; (c) a média temporal da potência que atravessa a superfície  $z = 1 \text{ m}$ ,  $2 \text{ mm} < \rho < 3 \text{ mm}$ ,  $0 < \phi < 2\pi$ .

**10.30** (a) Para incidência normal sobre uma interface dielétrico-dielétrico, para as quais  $\mu_1 = \mu_2 + \mu_0$ , definimos  $R$  e  $T$  como os coeficientes de reflexão e transmissão da potência média, isto é,  $P_{r,\text{med}} = RP_{t,\text{med}}$  e  $P_{t,\text{med}} = TP_{t,\text{med}}$ . Mostre que

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Onde  $n_1$  e  $n_2$  são os índices de refração dos meios.

- (b) Determine a razão  $n_1/n_2$  para que as ondas refletida e transmitida tenham a mesma potência média.

**10.31** A onda plana  $\mathbf{E} = 30 \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_x$ , no ar, incide normalmente sobre um meio sem perdas ( $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ) em  $z = 0$ . (a) Encontre  $\Gamma$ ,  $\tau$  e  $s$ . (b) Calcule os campos elétrico e magnético refletidos.

**10.32** Uma onda plana uniforme no ar, com

$$\mathbf{H} = 4 \sin(\omega t - 5x) \mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

incide perpendicularmente sobre um material plástico com parâmetros  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 4\epsilon_0$  e  $\sigma = 0$ . (a) Encontre o campo elétrico total no ar. (b) Calcule a média temporal da densidade de potência no plástico. (c) Encontre a taxa de onda estacionária.

- 10.33** Uma onda plana no espaço livre, com  $\mathbf{E} = 3.6 \cos(\omega t - 3x) \mathbf{a}_y$  V/m está incidindo normalmente em uma interface em  $x = 0$ . Se um meio sem perdas, com  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon_r = 12.5$  existe para  $x \geq 0$  e a onda refletida tem  $\mathbf{H}_r = -1.2 \cos(\omega t + 3x) \mathbf{a}_z$  mA/m, encontre  $\mu_2$ .

- 10.34** A região 1 é um meio sem perdas, para o qual  $y \geq 0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 4\epsilon_0$ , enquanto a região 2 é o espaço livre,  $y \leq 0$ . Se uma onda plana  $\mathbf{E} = 5 \cos(10^6 t - \beta y) \mathbf{a}_z$  V/m existe na região 1, encontre: (a) a componente total do campo elétrico na região 2; (b) a média temporal do vetor de Poynting na região 1; (c) a média temporal do vetor de Poynting na região 2.

- 10.35** Uma onda plana no espaço livre ( $z \leq 0$ ) está incidindo na direção da normal em um grande bloco de um material com  $\epsilon_r = 12$ ,  $\mu_r = 3$ ,  $\sigma = 0$ , que ocupa  $z \geq 0$ . Se o campo elétrico incidente é

$$\mathbf{E} = 30 \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

encontre: (a)  $\omega$ ; (b) a taxa de ondas estacionárias; (c) o campo magnético refletido; (d) a densidade de potência média da onda transmitida.

- 10.36** Uma onda plana uniforme de 30 MHz com

$$\mathbf{H} = 10 \sin(\omega t + \beta x) \mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

existe em uma região  $x \geq 0$ , tendo  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon_0 = 9\epsilon_0$ ,  $\mu = 4\mu_0$ . Em  $x = 0$ , a onda encontra o espaço livre. Determine: (a) a polarização da onda; (b) a constante de fase  $\beta$ ; (c) a densidade de corrente de deslocamento na região  $x \geq 0$ ; (d) os campos magnético refletido e transmitido e (e) a densidade média de potência em cada região.

- 10.37** Uma onda plana uniforme no ar incide perpendicularmente sobre um material dielétrico sem perdas, infinito, tendo  $\epsilon = 3\epsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$ . Se a onda incidente é  $\mathbf{E}_i = 10 \cos(\omega t - z) \mathbf{a}_y$  V/m, encontre: (a)  $\lambda$  e  $\omega$  da onda no ar e da onda transmitida para o meio dielétrico; (b) o campo  $\mathbf{H}$  incidente; (c)  $\Gamma$  e  $\tau$ ; (d) o campo elétrico total e a média temporal da potência nas duas regiões.

- \*10.38** Um sinal no ar ( $z \geq 0$ ) com componente de campo elétrico

$$\mathbf{E} = 10 \sin(\omega t + 3z) \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

incide perpendicularmente sobre a superfície do oceano em  $z = 0$ , conforme a Figura 10.19. Assumindo que a superfície do oceano é plana e que  $\epsilon = 80\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 4 \text{ mhos/m}$  no oceano, determine:

- (a)  $\omega$ ;
- (b) o comprimento de onda do sinal no ar;
- (c) a tangente de perdas e a impedância intrínseca do oceano;
- (d) os campos  $\mathbf{E}$  refletido e transmitido.

- 10.39** Represente, graficamente, a onda estacionária da equação (10.87) em  $t = 0, T/8, T/4, 3T/8, T/2$ , e assim por diante, onde  $T = 2\pi/\omega$ .

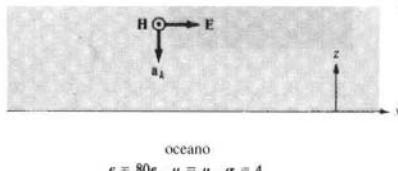


Figura 10.19 Referente ao Problema 10.38.

$$\epsilon = 80\epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma = 4$$

**10.40** Uma onda plana uniforme está incidindo com um ângulo  $\theta_i = 45^\circ$  em um par de placas dielétricas justapostas, conforme mostrado na Figura 10.20. Determine os ângulos de transmissão  $\theta_{r1}$  e  $\theta_{r2}$  nas placas.

**10.41** Mostre que o campo

$$\mathbf{E}_x = 20 \operatorname{sen}(k_x x) \cos(k_y y) \mathbf{a}_z$$

onde  $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ , pode ser representado como a superposição de quatro ondas planas viajantes. Encontre o  $\mathbf{H}_s$  correspondente.

**10.42** Mostre que, para meios dielétricos não magnéticos, os coeficientes de reflexão e de transmissão, para incidência oblíqua, tornam-se

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_r)}, \quad \tau_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_i \operatorname{sen} \theta_r}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_r) \cos(\theta_i - \theta_r)}$$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_r)}, \quad \tau_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i \operatorname{sen} \theta_r}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_r)}$$

\***10.43** Uma onda polarizada paralelamente no ar com

$$\mathbf{E} = (8\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z) \operatorname{sen}(\omega t - 4y - 3z) \text{ V/m}$$

incide em um semi-espacô dielétrico, conforme mostra a Figura 10.21. Encontre: (a) o ângulo de incidência  $\theta_i$ ; (b) a média temporal da densidade de potência no ar ( $\mu = \mu_0$  e  $\epsilon = \epsilon_0$ ); (c) os campos  $\mathbf{E}$  refletido e transmitido.

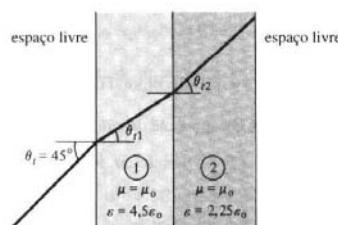


Figura 10.20 Referente ao Problema 10.40.

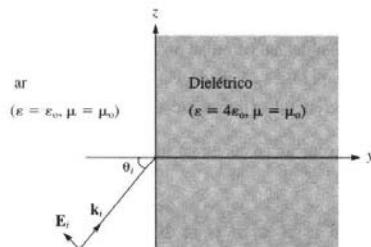


Figura 10.21 Referente ao Problema 10.43.

**10.44** Em um meio dielétrico ( $\epsilon = 9\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ), uma onda plana com

$$\mathbf{H} = 0,2 \cos(10^9 t - kx - k\sqrt{8}z) \mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

está incidindo na interface com o ar em  $z = 0$ . Encontre:

- (a)  $\theta_i$  e  $\theta_r$ ;
- (b)  $k$ ;
- (c) o comprimento de onda no dielétrico e no ar;
- (d) o  $\mathbf{E}$  incidente;
- (e) o campo  $\mathbf{E}$  transmitido e refletido;
- (f) o ângulo de Brewster.

**\*10.45** Uma onda plana, no ar, com

$$\mathbf{E} = (8\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) \sin(\omega t + 3x - 4y) \text{ V/m}$$

está incidindo sobre uma placa de cobre em  $y \geq 0$ . Encontre  $\omega$  e a onda refletida. Suponha que o cobre é um condutor perfeito (*Sugestão*: escreva as componentes do campo em ambos os meios, tendo em vista as condições de fronteira.)

**10.46** Uma onda polarizada está incidindo do ar sobre poliestireno com  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = 2,6\epsilon_0$ , em ângulo de Brewster. Determine o ângulo de transmissão.

# Capítulo 11

## LINHAS DE TRANSMISSÃO

Existe uma história a respeito de quatro homens chamados: Todos, Alguém, Qualquer Um e Ninguém. Havia uma tarefa importante a ser realizada e foi pedido a Todos que a fizesse. Todos estava certo que Alguém a faria. Qualquer Um poderia ter feito, mas Ninguém fez. Alguém ficou zangado por isto, porque era o trabalho de Qualquer Um. Todos pensou que Qualquer Um poderia ter feito e Ninguém compreendeu que Todos não a faria. Terminou que Todos culpou Alguém quando realmente Ninguém fez o que Qualquer Um poderia ter feito.

— ANÔNIMO

### 11.1 INTRODUÇÃO

Nossa discussão no capítulo anterior foi essencialmente sobre propagação de ondas em meios ilimitados, isto é, meios de extensão infinita. Esta propagação, na qual existe uma onda plana uniforme por todo o espaço, é dita não guiada, e a energia EM associada à onda se espalha por uma grande área. A propagação de ondas em meios ilimitados é usada pelos serviços de radiodifusão e TV, onde a informação é transmitida para qualquer pessoa que possa estar interessada. Este tipo de propagação não se aplica em uma situação como a conversação telefônica, onde a informação é recebida de forma privada, por uma pessoa apenas.

Uma outra maneira de transmitir potência ou informação é através de estruturas de guiamento. As estruturas de guiamento servem para guiar (ou orientar) a propagação da energia de sua fonte até a carga. Exemplos típicos destas estruturas são as linhas de transmissão e os guias de onda. Os guias de onda serão discutidos no capítulo seguinte, enquanto que as linhas de transmissão serão consideradas neste capítulo.

As linhas de transmissão são normalmente utilizadas na distribuição de potência (em baixas freqüências) e em telecomunicações (em altas freqüências). Vários tipos de linhas de transmissão, tais como o par trançado e cabos coaxiais (malha fina e malha grossa), são usadas em redes de computadores, como a Ethernet e a Internet.

Uma linha de transmissão consiste basicamente de dois ou mais condutores paralelos usados para conectar uma fonte à uma carga. A fonte pode ser um gerador hidrelétrico, um transmissor ou um oscilador, e a carga pode ser uma fábrica, uma antena ou um osciloscópio, respectivamente. Tipicamente, linhas de transmissão incluem o cabo coaxial, uma linha a dois fios condutores (linha bifilar), uma linha planar ou de placas paralelas, um fio paralelo a um plano condutor e a linha de microfitas. Estas linhas são mostradas na Figura 11.1. Note que cada uma destas linhas consiste de dois condutores em paralelo. Os cabos coaxiais são usados de forma rotineira em laboratórios e na conexão de aparelhos de TV às antenas de TV. Linhas de microfitas (similares às da Figura 11.1e) são particularmente importantes em circuitos integrados, onde fitas metálicas que conectam elementos eletrônicos são depositadas em substratos dielétricos.

Os problemas de linhas de transmissão são usualmente resolvidos utilizando a Teoria de Campos EM e Teoria de Circuitos Elétricos, as duas principais teorias nas quais está baseada a Engenharia Elétrica.

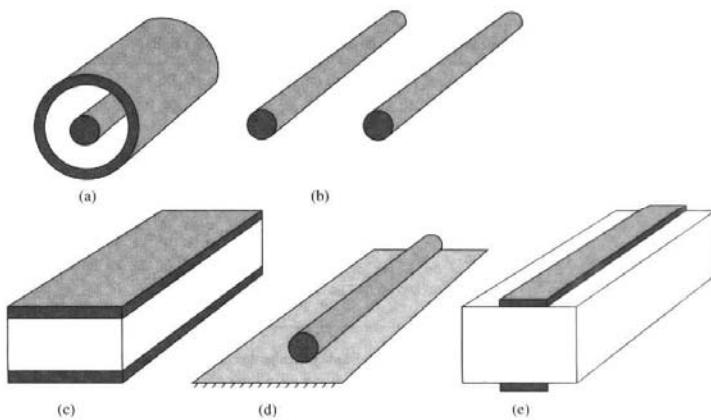


Figura 11.1 Vistas das seções retas de linhas de transmissão típicas: (a) linha coaxial; (b) linha a dois fios (bifilar); (c) linha planar; (d) fio sobre plano condutor; (e) linha de microfitas.

Neste capítulo, usaremos a Teoria de Circuitos porque ela é de tratamento matemático mais fácil. Os conceitos básicos de propagação de ondas (como constante de propagação, coeficiente de reflexão e taxa de onda estacionária) apresentados no capítulo anterior se aplicam aqui.

Nossa análise de linhas de transmissão incluirá a dedução das equações de linhas transmissão e de parâmetros característicos, o uso da carta de Smith, várias aplicações práticas de linhas de transmissão e transientes em linhas de transmissão.

## 11.2 PARÂMETROS DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

É usual e conveniente descrever as linhas de transmissão em termos dos parâmetros da linha, que são a resistência por unidade de comprimento  $R$ , a indutância por unidade de comprimento  $L$ , a condutância por unidade de comprimento  $G$  e a capacitância por unidade de comprimento  $C$ . Cada uma das linhas apresentadas na Figura 11.1 tem fórmulas específicas para o cálculo de  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$ . Para o cabo coaxial, a linha bifilar e a linhar planar, as fórmulas para o cálculo de  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  são dadas na Tabela 11.1. As dimensões das linhas são dadas na Figura 11.2. Algumas das fórmulas<sup>1</sup> da Tabela 11.1 foram deduzidas nos Capítulos 6 e 8. Deve se notar que:

1. Os parâmetros de linha  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  não são parâmetros discretos, mas distribuídos, conforme mostra a Figura 11.3. Queremos dizer com isto que os parâmetros estão distribuídos uniformemente ao longo de todo o comprimento da linha.
2. Para cada linha, os condutores são caracterizados por  $\sigma_c$ ,  $\mu_c$ ,  $\epsilon_c = \epsilon_0$ , e o dielétrico homogêneo que separa os condutores é caracterizado por  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\epsilon$ .
3.  $G \neq 1/R$ ;  $R$  é a resistência para ca, por unidade de comprimento, dos condutores utilizados na linha, e  $G$  é a condutância, por unidade de comprimento, devido ao dielétrico que separa os condutores.

<sup>1</sup> Fórmulas semelhantes para outras linhas de transmissão podem ser obtidas de manuais de engenharia ou manuais de referência – por exemplo M. A. R. Guston, *Microwave Transmission-line Impedance Data*. London: Van Nostrand Reinhold, 1972.

TABELA 11.1 Parâmetros de linha distribuídos, para altas freqüências\*

Parâmetros	Linha Coaxial	Linha Bifilar	Linha Planar
$R (\Omega/m)$	$\frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$ ( $\delta \ll a, c - b$ )	$\frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$ ( $\delta \ll a$ )	$\frac{2}{w \delta \sigma_c}$ ( $\delta \ll t$ )
$L (\text{H/m})$	$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$	$\frac{\mu d}{w}$
$G (\text{S/m})$	$\frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$	$\frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1} \frac{d}{2a}}$	$\frac{\sigma w}{d}$
$C (\text{F/m})$	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$	$\frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2a}}$	$\frac{\epsilon w}{d}$ ( $w \gg d$ )

\* $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma_c}}$  = profundidade pelicular do condutor;  $\cosh^{-1} \frac{d}{2a} = \ln \frac{d}{a}$  se  $[d/a]^2 \gg 1$ .

4. O valor de  $L$  mostrado na Tabela 11.1 é a indutância externa por unidade de comprimento, isto é,  $L = L_{\text{ext}}$ . Os efeitos da indutância interna  $L_{\text{in}} (= R/\omega)$  são desprezíveis em altas freqüências, nas quais opera a maior parte dos sistemas de comunicações.

5. Para cada linha,

$$LC = \mu\epsilon \quad \epsilon = \frac{G}{C} \quad (11.1)$$

Como uma preparação para a seção seguinte, vamos considerar como uma onda EM se propaga em uma linha de transmissão a dois condutores. Por exemplo, consideremos uma linha coaxial conectando um gerador ou fonte a uma carga, como na Figura 11.4(a). Quando o interruptor  $S$  é fechado, o condutor interno fica positivo em relação ao condutor externo, tal que o campo  $E$  é radial e aponta para fora, conforme a Figura 11.4(b).

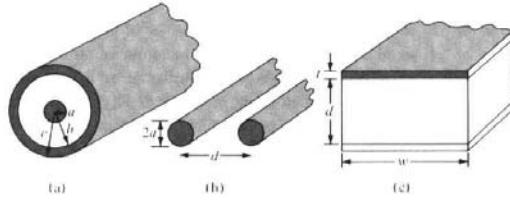


Figura 11.2 Linhas de transmissão usuais: (a) linha coaxial; (b) linha a dois fios (bifilar); (c) linha planar.

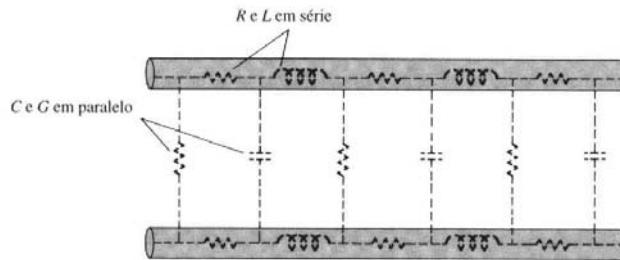


Figura 11.3 Parâmetros distribuídos de uma linha de transmissão a dois condutores.

De acordo com a lei de Ampère, o campo  $\mathbf{H}$  circunda o condutor que conduz a corrente, como na Figura 11.4(b). O vetor de Poynting ( $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ) aponta ao longo da linha de transmissão. Portanto, o fechamento do interruptor estabelece um campo eletromagnético, que aparece como uma onda transversal eletromagnética (TEM) que se propaga ao longo da linha. Esta onda é uma onda plana não uniforme e através dela é transmitida energia ao longo da linha.

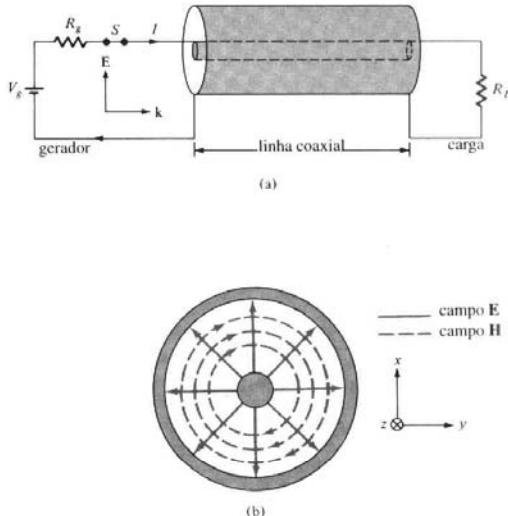


Figura 11.4 (a) Linha coaxial conectando o gerador à carga; (b) campo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  na linha coaxial.

### 11.3 EQUAÇÕES DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

Conforme mencionado na seção anterior, uma linha de transmissão a dois condutores suporta uma onda TEM, isto é, o campo elétrico e o campo magnético na linha são transversais à direção de propagação. Uma propriedade importante das ondas TEM é que os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  estão univocamente relacionados com a tensão  $V$  e a corrente  $I$ , respectivamente:

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (11.2)$$

Em vista disto, usaremos as grandezas  $V$  e  $I$  da Teoria de Circuitos no estudo das linhas de transmissão, ao invés de utilizar os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  (utilizando as equações de Maxwell e as condições de fronteira). O modelo de circuitos é mais simples e mais conveniente.

Examinaremos uma porção incremental  $\Delta z$  de uma linha de transmissão a dois condutores. Dejamos encontrar um circuito equivalente para esta linha e obter a equação da linha. Da Figura 11.3, podemos esperar que o circuito equivalente de uma porção da linha seja como mostrado na Figura 11.5. O modelo da Figura 11.5 está em termos dos parâmetros da linha  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$ , e pode representar qualquer uma das linhas de transmissão a dois condutores da Figura 11.3. O modelo é o chamado circuito equivalente tipo  $L$ . Outros tipos são possíveis (veja Problema 11.1). No modelo da Figura 11.5, assumimos que a onda se propaga no sentido  $+z$ , do gerador para a carga.

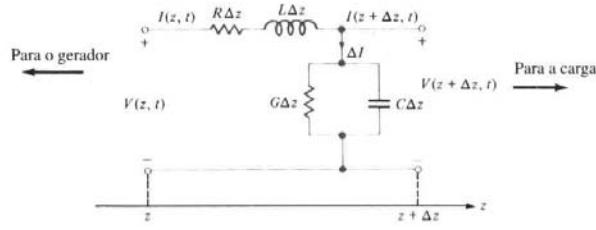


Figura 11.5 Circuito equivalente tipo  $L$  para um comprimento diferencial  $\Delta z$  de uma linha de transmissão a dois condutores.

Pela aplicação da lei de Kirchhoff de tensão na malha externa do circuito na Figura 11.5, obtemos

$$V(z, t) = R \Delta z I(z, t) + L \Delta z \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} + V(z + \Delta z, t)$$

ou

$$-\frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} = R I(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \quad (11.3)$$

Tomando o limite da equação (11.3) conforme  $\Delta z \rightarrow 0$ , tem-se

$$\boxed{-\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = R I(z, t) + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}} \quad (11.4)$$

De forma semelhante, aplicando a lei de Kirchhoff das correntes para a corrente no nó principal do circuito da Figura 11.5, resulta em

$$\begin{aligned} I(z, t) &= I(z + \Delta z, t) + \Delta I \\ &= I(z + \Delta z, t) + G \Delta z V(z + \Delta z, t) + C \Delta z \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{I(z + \Delta z, t) - I(z, t)}{\Delta z} = G V(z + \Delta z, t) + C \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} \quad (11.5)$$

Conforme  $\Delta z \rightarrow 0$ , a equação (11.5) torna-se

$$\boxed{-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = G V(z, t) + C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}} \quad (11.6)$$

Se assumirmos dependência temporal harmônica, de tal maneira que

$$V(z, t) = \text{Re} [V_s(z) e^{j\omega t}] \quad (11.7a)$$

$$I(z, t) = \text{Re} [I_s(z) e^{j\omega t}] \quad (11.7b)$$

onde  $V_s(z)$  e  $I_s(z)$  são as formas fasoriais de  $V(z, t)$  e  $I(z, t)$ , respectivamente, as equações (11.4) e (11.6) tornam-se

$$-\frac{dV_s}{dz} = (R + j\omega L) I_s \quad (11.8)$$

$$-\frac{dI_s}{dz} = (G + j\omega C) V_s \quad (11.9)$$

Nas equações diferenciais (11.8) e (11.9),  $V_s$  e  $I_s$  estão acopladas. Para separá-las, tomamos a segunda derivada de  $V_s$  na equação (11.8) e empregamos a equação (11.9) tal que obtemos

$$\frac{d^2V_s}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) V_s$$

ou

$$\boxed{\frac{d^2V_s}{dz^2} - \gamma^2 V_s = 0} \quad (11.10)$$

onde

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} \quad (11.11)$$

Tomando a segunda derivada de  $I_s$  na equação (11.9) e empregando a equação (11.8), temos

$$\frac{d^2I_s}{dz^2} - \gamma^2 I_s = 0 \quad (11.12)$$

Nota-se que as equações (11.10) e (11.12) são, respectivamente, as equações de onda para a tensão e a corrente, semelhantes na forma às equações de onda obtidas para ondas planas nas equações (10.17) e (10.19). Portanto, em nossa notação,  $\gamma$  na equação (11.11) é a constante de propagação (em 1metro),  $\alpha$  é a constante de atenuação (em neper por metro ou decibéis<sup>2</sup> por metro) e  $\beta$  é a constante de fase (em radianos por metro). O comprimento de onda  $\lambda$  e a velocidade da onda  $u$  são dados, respectivamente, por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (11.13)$$

$$\boxed{u = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda} \quad (11.14)$$

As soluções das equações diferenciais lineares e homogêneas (11.10) e (11.12) são semelhantes ao Caso 2 do Exemplo 6.5, ou seja,

$$V_s(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{\gamma z} \quad \xrightarrow{+z} \quad \xleftarrow{-z} \quad (11.15)$$

e

$$I_s(z) = I_o^+ e^{-\gamma z} + I_o^- e^{\gamma z} \quad \xrightarrow{+z} \quad \xleftarrow{-z} \quad (11.16)$$

<sup>2</sup>Lembre, da equação (10.35), que 1 Np = 8,686 dB.

onde  $V_o^+$ ,  $V_o^-$ ,  $I_o^+$  e  $I_o^-$  são as amplitudes das ondas. Os sinais + e - representam ondas se propagando ao longo de  $+z$  e  $-z$ , respectivamente, conforme indicado pelas setas. Portanto, obtemos uma expressão para a tensão instantânea

$$\begin{aligned} V(z, t) &= \operatorname{Re}[V_o(z) e^{j\omega t}] \\ &= V_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + V_o^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \end{aligned} \quad (11.17)$$

A **impedância característica**  $Z_o$  da linha é a razão entre a onda de tensão e a onda de corrente, que se propagam no sentido positivo, em qualquer ponto da linha.

$Z_o$  é análoga a  $\eta$ , a impedância intrínseca do meio onde ocorre a propagação. Substituindo as equações (11.15) e (11.16) nas equações (11.8) e (11.9), e igualando os coeficientes dos termos  $e^{\gamma z}$  e  $e^{-\gamma z}$ , obtemos

$$Z_o = \frac{V_o^+}{I_o^+} = -\frac{V_o^-}{I_o^-} = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{\gamma}{G + j\omega C} \quad (11.18)$$

ou

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = R_o + jX_o \quad (11.19)$$

onde  $R_o$  e  $X_o$  são as partes real e imaginária de  $Z_o$ .  $R_o$  não deve ser confundido com  $R$ : enquanto  $R$  é dado em ohms/m,  $R_o$  é em ohms. A constante de propagação  $\gamma$  e a impedância característica  $Z_o$  são propriedades importantes da linha porque ambas dependem dos parâmetros da linha  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$ , e da freqüência de operação. O recíproco de  $Z_o$  é a admittância característica  $Y_o$ , isto é  $Y_o = 1/Z_o$ .

A linha de transmissão considerada até aqui é a *linha com perdas*, na qual os condutores que compõem a linha são imperfeitos ( $\sigma_c \neq \infty$ ) e o dielétrico no qual os condutores estão inseridos tem perda ( $\sigma \neq 0$ ). Tendo considerado este caso geral, podemos agora considerar dois casos especiais, isto é, da linha de transmissão sem perdas e da linha de transmissão sem distorção.

#### A. Linha sem perdas ( $R = 0 = G$ )

Uma linha de transmissão é dita **sem perdas** se os condutores da linha são perfeitos ( $\sigma_c \approx \infty$ ) e o meio dielétrico que os separa é sem perdas ( $\sigma = 0$ ).

Para tal linha, fica evidente, a partir da Tabela 11.1, que, quando  $\sigma_c = \infty$  e  $\sigma = 0$ :

$$R = 0 = G \quad (11.20)$$

Esta é a condição necessária para que uma linha não tenha perdas. Portanto, para tal linha, a equação (11.20) faz com que as equações (11.11), (11.14) e (11.19) tornem-se

$$\alpha = 0, \quad \gamma = j\beta = j\omega \sqrt{LC} \quad (11.21a)$$

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = f\lambda \quad (11.21b)$$

$$X_o = 0, \quad Z_o = R_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.21c)$$

### B. Linha sem distorção ( $R/L = G/C$ )

Um sinal consiste, normalmente, de uma banda de freqüências. Se  $\alpha$  depender da freqüência, as amplitudes de ondas com componentes de freqüências diferentes serão atenuadas de forma diferente em uma linha com perdas. Isto resulta em distorção.

**Uma linha sem distorção** é uma linha na qual a constante de atenuação  $\alpha$  é independente da freqüência, enquanto que a constante de fase  $\beta$  é linearmente dependente da freqüência.

Da expressão geral para  $\alpha$  e  $\beta$  [na equação 11.11], obtemos uma linha sem distorção se os parâmetros da linha são tais que:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (11.22)$$

Portanto, para uma linha sem distorção,

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{RG} \left(1 + \frac{j\omega L}{R}\right) \left(1 + \frac{j\omega C}{G}\right) \\ &= \sqrt{RG} \left(1 + \frac{j\omega C}{G}\right) = \alpha + j\beta\end{aligned}$$

ou

$$\alpha = \sqrt{RG}, \quad \beta = \omega \sqrt{LC} \quad (11.23a)$$

mostrando que  $\alpha$  não depende da freqüência, enquanto  $\beta$  é uma função linear da freqüência. Também,

$$Z_o = \sqrt{\frac{R(1 + j\omega L/R)}{G(1 + j\omega C/G)}} = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_o + jX_o$$

ou

$$R_o = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad X_o = 0 \quad (11.23b)$$

e

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = f\lambda \quad (11.23c)$$

Note que:

1. A velocidade de fase é independente da freqüência porque a constante de fase  $\beta$  depende linearmente da freqüência. Teremos distorção na forma do sinal a menos que  $\alpha$  e  $u$  sejam independentes da freqüência.
2.  $u$  e  $Z_o$  permanecem os mesmos das linhas sem perdas.
3. Uma linha sem perdas é também uma linha sem distorção, mas uma linha sem distorção não é necessariamente sem perdas. Embora linhas sem perdas sejam desejáveis na transmissão de energia elétrica, as linhas telefônicas devem ser sem distorção.

Um resumo de nossa discussão está na Tabela 11.2. Na maior parte da análise, vamos restringir nossa discussão às linhas de transmissão sem perdas.

TABELA 11.2 Características das linhas de transmissão

Caso	Constante de Propagação $\gamma = \alpha + j\beta$	Impedância Característica $Z_o = R_o + jX_o$
Geral	$\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$	$\sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$
Sem perdas	$0 + j\omega\sqrt{LC}$	$\sqrt{\frac{L}{C}} + j0$
Sem distorção	$\sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}$	$\sqrt{\frac{L}{C}} + j0$

**EXEMPLO 11.1**

Uma linha de transmissão no ar tem impedância característica de  $70 \Omega$  e constante de fase de  $3 \text{ rad/m}$  a  $100 \text{ MHz}$ . Calcule a indutância por metro e a capacitância por metro da linha.

**Solução:**

Uma linha no ar pode ser considerada uma linha sem perdas desde que  $\sigma = 0$ . Portanto,

$$R = 0 = G \quad \text{ou} \quad \alpha = 0$$

$$Z_o = R_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.1.1)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (11.1.2)$$

Dividindo a equação (11.1.1) pela equação (11.1.2), obtemos

$$\frac{R_o}{\beta} = \frac{1}{\omega C}$$

ou

$$C = \frac{\beta}{\omega R_o} = \frac{3}{2\pi \times 100 \times 10^6 (70)} = 68,2 \text{ pF/m}$$

Da equação (11.1.1),

$$L = R_o^2 C = (70)^2 (68,2 \times 10^{-12}) = 334,2 \text{ nH/m}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 11.1**

Uma linha de transmissão, operando em  $500 \text{ MHz}$ , tem  $Z_o = 80 \Omega$ ,  $\alpha = 0,04 \text{ Np/m}$ ,  $\beta = 1,5 \text{ rad/m}$ . Encontre os parâmetros da linha  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$ .

**Resposta:**  $3,2 \Omega/\text{m}$ ,  $38,2 \text{ nH/m}$ ,  $5 \times 10^{-4} \text{ S/m}$ ,  $5,97 \text{ pF/m}$ .

**EXEMPLO 11.2**

Uma linha sem distorção tem  $Z_o = 60 \Omega$ ,  $\alpha = 20 \text{ mNp/m}$ ,  $u = 0,6c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Encontre  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$  e  $\lambda$  a  $100 \text{ MHz}$ .

**Solução:**

Para uma linha sem distorção,

$$RC = GL \quad \text{ou} \quad G = \frac{RC}{L}$$

portanto,

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.2.1)$$

$$\alpha = \sqrt{RG} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{Z_o} \quad (11.2.2a)$$

ou

$$R = \alpha Z_o \quad (11.2.2b)$$

Porém,

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.2.3)$$

Da equação (11.2.2b),

$$R = \alpha Z_o = (20 \times 10^{-3})(60) = 1,2 \Omega/m$$

Dividindo a equação (11.2.1) pela equação (11.2.3), resulta em,

$$L = \frac{Z_o}{u} = \frac{60}{0,6(3 \times 10^8)} = 333 \text{ nH/m}$$

Da equação (11.2.2a),

$$G = \frac{\alpha^2}{R} = \frac{400 \times 10^{-6}}{1,2} = 333 \mu\text{S/m}$$

Multiplicando a equação (11.2.1) pela equação (11.2.3), obtemos,

$$uZ_o = \frac{1}{C}$$

ou

$$C = \frac{1}{uZ_o} = \frac{1}{0,6(3 \times 10^8) 60} = 92,59 \text{ pF/m}$$

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{0,6(3 \times 10^8)}{10^8} = 1,8 \text{ m}$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 11.2

Uma linha telefônica tem  $R = 30 \Omega/\text{km}$ ,  $L = 100 \text{ mH/km}$ ,  $G = 0$  e  $C = 20 \mu\text{F/km}$ . Para  $f = 1 \text{ kHz}$ , obtenha:

- (a) a impedância característica da linha;
- (b) a constante de propagação;
- (c) a velocidade de fase.

**Resposta:** (a)  $70,75/-1,367^\circ \Omega$ ; (b)  $2,121 \times 10^{-4} + j8,888 \times 10^{-3}/\text{m}$ ; (c)  $7,069 \times 10^5 \text{ m/s}$ .

## 11.4 IMPEDÂNCIA DE ENTRADA, ROE E POTÊNCIA

Considere uma linha de transmissão de comprimento  $\ell$ , caracterizada por  $\gamma$  e  $Z_o$ , conectada a uma carga  $Z_C$ , conforme mostrado na Figura 11.6. Para o gerador a linha é vista como uma carga com impedância de entrada  $Z_{\text{ent}}$ . Nesta seção, é nossa intenção determinar a impedância de entrada, a razão de onda estacionária (ROE) e o fluxo de potência na linha.

Façamos a linha de transmissão se estender desde  $z = 0$  no gerador até  $z = \ell$ , na carga. Para iniciar, precisamos das ondas de tensão e de corrente, dadas pelas equações (11.15) e (11.16), isto é,

$$V_s(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{\gamma z} \quad (11.24)$$

$$I_s(z) = \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-\gamma z} - \frac{V_o^-}{Z_o} e^{\gamma z} \quad (11.25)$$

sendo que a equação (11.18) já foi incorporada na equação (11.25). Para encontrar  $V_o^+$  e  $V_o^-$ , as condições nos terminais devem ser dadas. Por exemplo, se forem dadas as condições na entrada da linha, digamos

$$V_o = V(z = 0), \quad I_o = I(z = 0) \quad (11.26)$$

e substituindo estas nas equações (11.24) e (11.25), resulta em

$$V_o^+ = \frac{1}{2} (V_o + Z_o I_o) \quad (11.27a)$$

$$V_o^- = \frac{1}{2} (V_o - Z_o I_o) \quad (11.27b)$$

Se a impedância de entrada nos terminais de entrada for  $Z_{\text{ent}}$ , então a tensão de entrada  $V_o$  e a corrente de entrada  $I_o$  são facilmente obtidas da Figura 11.6(b), como

$$V_o = \frac{Z_{\text{ent}}}{Z_{\text{ent}} + Z_g} V_g, \quad I_o = \frac{V_g}{Z_{\text{ent}} + Z_g} \quad (11.28)$$

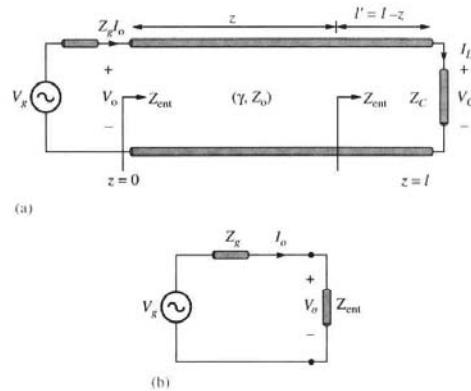


Figura 11.6 (a) Impedância de entrada de uma linha de transmissão terminada por uma carga; (b) circuito equivalente para calcular  $V_o$  e  $I_o$  na entrada da linha em termos de  $Z_{\text{ent}}$ .

Por outro lado, se forem dadas as condições na carga, isto é,

$$V_C = V(z = \ell), \quad I_C = I(z = \ell) \quad (11.29)$$

e, substituindo nas equações (11.24) e (11.25), obtemos:

$$V_o^+ = \frac{1}{2} (V_C + Z_o I_C) e^{\gamma\ell} \quad (11.30a)$$

$$V_o^- = \frac{1}{2} (V_C - Z_o I_C) e^{-\gamma\ell} \quad (11.30b)$$

Segundo, podemos determinar a impedância de entrada  $Z_{ent} = V_s(z)/I_s(z)$ , em qualquer ponto da linha. No gerador, por exemplo, as equações (11.24) e (11.25) dão origem a

$$Z_{ent} = \frac{V_s(z)}{I_s(z)} = \frac{Z_o(V_o^+ + V_o^-)}{V_o^+ - V_o^-} \quad (11.31)$$

Substituindo a equação (11.30) na equação (11.31) e utilizando o fato de que

$$\frac{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}}{2} = \cosh \gamma\ell, \quad \frac{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}{2} = \sinh \gamma\ell \quad (11.32a)$$

ou

$$\tanh \gamma\ell = \frac{\sinh \gamma\ell}{\cosh \gamma\ell} = \frac{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}} \quad (11.32b)$$

obtemos

$$Z_{ent} = Z_o \left[ \frac{Z_C + Z_o \tanh \gamma\ell}{Z_o + Z_C \tanh \gamma\ell} \right] \quad (\text{linhas com perdas}) \quad (11.33)$$

Embora a equação (11.33) tenha sido obtida para a impedância de entrada  $Z_{ent}$  na extremidade do gerador, ela é uma expressão geral para o cálculo de  $Z_{ent}$  em qualquer ponto da linha. Para encontrar  $Z_{ent}$  a uma distância  $\ell'$  da carga, conforme a Figura 11.6(a), substituímos  $\ell$  por  $\ell'$ . No Apêndice A.3 encontramos uma fórmula para o cálculo da tangente hiperbólica de um número complexo, necessária para o cálculo da equação (11.33).

Para uma linha sem perdas,  $\gamma = j\beta$ ,  $\tanh j\beta\ell = j \operatorname{tg} \beta\ell$  e  $Z_o = R_o$ ; portanto, a equação (11.33) fica

$$Z_{ent} = Z_o \left[ \frac{Z_C + jZ_o \operatorname{tg} \beta\ell}{Z_o + jZ_C \operatorname{tg} \beta\ell} \right] \quad (\text{linhas sem perdas}) \quad (11.34)$$

mostrando que a impedância de entrada tem uma dependência periódica com a distância  $\ell$  da carga. O parâmetro  $\beta\ell$  na equação (11.34) é usualmente referido como o *comprimento elétrico* da linha e pode ser expresso em graus ou em radianos.

Definiremos agora  $\Gamma_C$  como o *coeficiente de reflexão da tensão* (na carga).  $\Gamma_C$  é a razão entre a onda refletida de tensão e a onda incidente de tensão na carga, isto é

$$\Gamma_C = \frac{V_o^- e^{\gamma\ell}}{V_o^+ e^{-\gamma\ell}} \quad (11.35)$$

Substituindo  $V_o^-$  e  $V_o^+$  da equação (11.30) na equação (11.35) e introduzindo  $V_c = Z_c I_c$ , obtemos

$$\Gamma_c = \frac{Z_c - Z_o}{Z_c + Z_o} \quad (11.36)$$

**O coeficiente de reflexão da tensão**, em qualquer ponto na linha, é a razão entre as amplitudes das ondas de tensão refletida e incidente.

Isto é,

$$\Gamma(z) = \frac{V_o^- e^{\gamma z}}{V_o^+ e^{-\gamma z}} = \frac{V_o^-}{V_o^+} e^{2\gamma z}$$

Contudo,  $z = \ell - \ell'$ . Substituindo essa relação na equação anterior e considerando a equação (11.35), temos

$$\Gamma(z) = \frac{V_o^-}{V_o^+} e^{2\gamma\ell} e^{-2\gamma\ell'} = \Gamma_c e^{-2\gamma\ell'} \quad (11.37)$$

**O coeficiente de reflexão da corrente**, em qualquer ponto na linha, é igual ao coeficiente de reflexão da tensão naquele ponto, com sinal negativo.

Portanto, o coeficiente de reflexão da corrente na carga é  $I_o^- e^{\gamma\ell}/I_o^+ e^{-\gamma\ell} = -\Gamma_c$ .

Da mesma forma como fizemos para ondas planas, definimos a *razão de onda estacionárias*  $s$  (também representada por ROE) como

$$s = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_c|}{1 - |\Gamma_c|} \quad (11.38)$$

É fácil mostrar que  $I_{\max} = V_{\max}/Z_o$  e  $I_{\min} = V_{\min}/Z_o$ . A impedância de entrada  $Z_{\text{ent}}$ , da equação (11.34), tem máximos e mínimos que ocorrem, respectivamente, nos máximos e mínimos das ondas estacionárias da tensão e corrente. Pode se também mostrar que

$$|Z_{\text{ent}}|_{\max} = \frac{V_{\max}}{I_{\min}} = sZ_o \quad (11.39a)$$

e

$$|Z_{\text{ent}}|_{\min} = \frac{V_{\min}}{I_{\max}} = \frac{Z_o}{s} \quad (11.39b)$$

A fim de demonstrar este conceito, considere uma linha sem perdas com impedância característica de  $Z_o = 50 \Omega$ . Por simplicidade, vamos assumir que a linha é terminada em uma carga resistiva pura  $Z_c = 100 \Omega$  e que a tensão na carga é 100 V (rms). As condições na linha estão mostradas na Figura 11.7. Note, nesta figura, que as condições na linha se repetem a cada meio comprimento de onda.

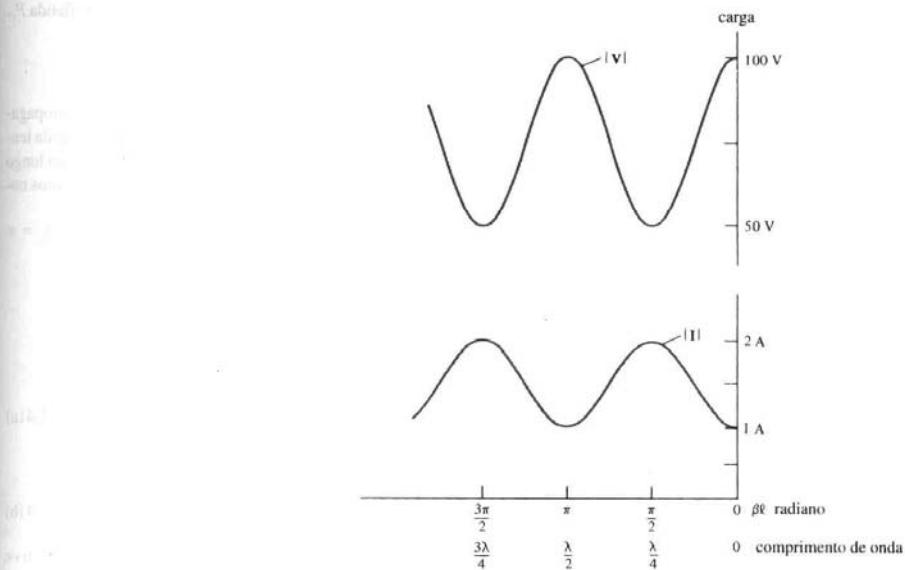


Figura 11.7 Formas de onda de tensão e de corrente em uma linha sem perdas terminada por uma carga resistiva.

Conforme mencionado no início deste capítulo, as linhas de transmissão são utilizadas para transferir potência de uma fonte à uma carga. A potência média de entrada a uma distância  $\ell$  da carga é dada por uma equação semelhante à equação (10.68), isto é,

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_s(\ell) I_s^*(\ell)]$$

onde é utilizado o fator  $\frac{1}{2}$  porque estamos tratando com valores de pico, ao invés de valores rms. Supondo uma linha sem perdas, podemos substituir as equações (11.24) e (11.25) para obter

$$\begin{aligned} P_{\text{méd}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ V_o^+ (e^{j\beta\ell} + \Gamma e^{-j\beta\ell}) \frac{V^+*}{Z_o} (e^{-j\beta\ell} - \Gamma^* e^{j\beta\ell}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{|V_o^+|^2}{Z_o} (1 - |\Gamma|^2 + \Gamma e^{-2j\beta\ell} - \Gamma^* e^{2j\beta\ell}) \right] \end{aligned}$$

Como os últimos dois termos são puramente imaginários, obtemos

$$P_{\text{méd}} = \frac{|V_o^+|^2}{2Z_o} (1 - |\Gamma|^2)$$

(11.40)

O primeiro termo é a potência incidente  $P_i$ , enquanto que o segundo termo é a potência refletida  $P_r$ . Portanto, a equação (11.40) pode ser escrita como

$$P_t = P_i - P_r$$

onde  $P_t$  é a potência de entrada ou potência transmitida. O sinal negativo está associado à propagação da onda refletida, pois consideramos o sentido de referência como sendo o da propagação da tensão/corrente para a direita. Devemos notar que, da equação (11.40), a potência é constante ao longo da linha e não depende de  $\ell$ , pois estamos tratando de uma linha sem perdas. Também devemos notar que a máxima potência é transferida para a carga quando  $\Gamma = 0$ , como esperado.

Vamos agora considerar os casos especiais em que a linha está conectada às cargas  $Z_C = 0$ ,  $Z_C = \infty$  e  $Z_C = Z_o$ . Estes casos especiais podem ser deduzidos facilmente do caso geral.

#### A. Linha em curto ( $Z_C = 0$ )

Para este caso, a equação (11.34) torna-se

$$Z_{cc} = Z_{ent} \Big|_{Z_C=0} = jZ_o \operatorname{tg} \beta\ell \quad (11.41a)$$

Também,

$$\Gamma_C = -1, \quad s = \infty \quad (11.41b)$$

Nota-se, pela equação (11.41a), que  $Z_{ent}$  é uma reatância pura, que pode ser capacitiva ou indutiva, dependendo do valor de  $\ell$ . A dependência de  $Z_{ent}$  com  $\ell$  é mostrada na Figura 11.8(a).

#### B. Linha em aberto ( $Z_C = \infty$ )

Neste caso, a equação (11.34) torna-se

$$Z_{ca} = \lim_{Z_C \rightarrow \infty} Z_{ent} = \frac{Z_o}{j \operatorname{tg} \beta\ell} = -jZ_o \operatorname{cotg} \beta\ell \quad (11.42a)$$

e

$$\Gamma_C = 1, \quad s = \infty \quad (11.42b)$$

A dependência de  $Z_{ent}$  com  $\ell$  é mostrada na Figura 11.8(b). Observe que, das equações (11.41a) e (11.42a), obtém-se

$$Z_{cc} Z_{ca} = Z_o^2 \quad (11.43)$$

#### C. Linha casada ( $Z_C = Z_o$ )

Do ponto de vista prático, esta é a situação mais desejada. Para este caso, a equação (11.34) se reduz a

$$Z_{ent} = Z_o \quad (11.44a)$$

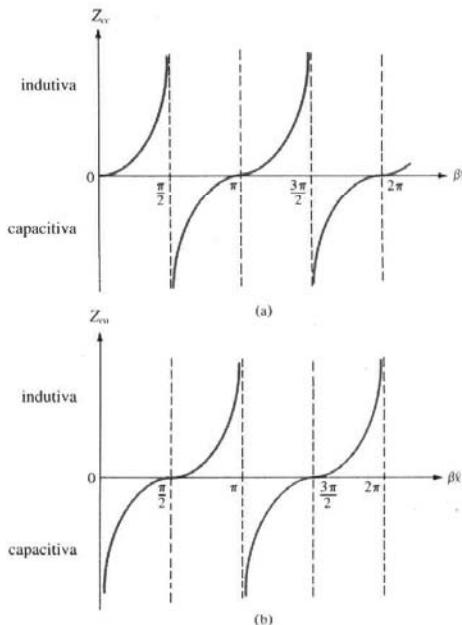


Figura 11.8 Impedância de entrada de uma linha sem perdas: (a) quando em curto; (b) quando em aberto.

e

$$\Gamma_C = 0, \quad s = 1 \quad (11.44b)$$

isto é,  $V_o^- = 0$ . Toda a onda é transmitida e não há reflexão. A potência incidente é totalmente absorvida pela carga. Portanto, é possível a máxima transmissão de potência quando a linha de transmissão está casada com a carga.

**EXEMPLO 11.3**

Certa linha de transmissão, que opera a  $\omega = 10^6$  rad/s, tem  $\alpha = 8$  dB/m,  $\beta = 1$  rad/m e  $Z_o = 60 + j40$   $\Omega$  e tem 2 m de comprimento. Se a linha está conectada à uma fonte de  $10\angle 0^\circ$  V,  $Z_g = 40 \Omega$  e está terminada por uma carga de  $20 + j50 \Omega$ , determine:

- (a) a impedância de entrada;
- (b) a corrente na entrada da linha;
- (c) a corrente na metade da linha.

**Solução:**

- (a) Como 1 Np = 8,686 dB,

$$\alpha = \frac{8}{8,686} = 0,921 \text{ Np/m}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,921 + j1 \text{ /m}$$

$$\gamma\ell = 2(0,921 + j1) = 1,84 + j2$$

Usando a fórmula para a  $\tgh(x+jy)$  que está no Apêndice A.3, obtemos

$$\tgh \gamma\ell = 1,033 - j0,03929$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{ent}} &= Z_o \left( \frac{Z_C + Z_o \tgh \gamma\ell}{Z_o + Z_C \tgh \gamma\ell} \right) \\ &= (60 + j40) \left[ \frac{20 + j50 + (60 + j40)(1,033 - j0,03929)}{60 + j40 + (20 + j50)(1,033 - j0,03929)} \right] \\ Z_{\text{ent}} &= 60,25 + j38,79 \Omega \end{aligned}$$

(b) A corrente na entrada da linha é  $I(z = 0) = I_o$ . Da equação (11.28), obtemos

$$\begin{aligned} I(z = 0) &= \frac{V_g}{Z_{\text{ent}} + Z_g} = \frac{10}{60,25 + j38,79 + 40} \\ &= 93,03 \angle -21,15^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

(c) Para encontrarmos a corrente em qualquer ponto da linha, precisamos  $V_o^+$  e  $V_o^-$ . Porém,

$$I_o = I(z = 0) = 93,03 \angle -21,15^\circ \text{ mA}$$

$$V_o = Z_{\text{ent}} I_o = (71,66 \angle 32,77^\circ)(0,09303 \angle -21,15^\circ) = 6,667 \angle 11,62^\circ \text{ V}$$

Da equação (11.27),

$$\begin{aligned} V_o^+ &= \frac{1}{2} (V_o + Z_o I_o) \\ &= \frac{1}{2} [6,667 \angle 11,62^\circ + (60 + j40)(0,09303 \angle -21,15^\circ)] = 6,687 \angle 12,08^\circ \\ V_o^- &= \frac{1}{2} (V_o - Z_o I_o) = 0,0518 \angle 260^\circ \end{aligned}$$

No meio da linha,  $z = \ell/2$ ,  $\gamma z = 0,921 + j1$ . Portanto, a corrente neste ponto é

$$\begin{aligned} I_s(z = \ell/2) &= \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-\gamma z} - \frac{V_o^-}{Z_o} e^{\gamma z} \\ &= \frac{(6,687 e^{j12,08^\circ}) e^{-0,921-j1}}{60 + j40} - \frac{(0,0518 e^{j260^\circ}) e^{0,921+j1}}{60 + j40} \end{aligned}$$

Observe que  $j1$  está dado em radianos e é equivalente a  $j57,3^\circ$ . Portanto,

$$\begin{aligned} I_s(z = \ell/2) &= \frac{6,687 e^{j12,08^\circ} e^{-0,921} e^{-j57,3^\circ}}{72,1 e^{j33,69^\circ}} - \frac{0,0518 e^{j260^\circ} e^{0,921} e^{j57,3^\circ}}{72,1 e^{j33,69^\circ}} \\ &= 0,0369 e^{-j78,91^\circ} - 0,001805 e^{j283,61^\circ} \\ &= 6,673 - j34,456 \text{ mA} \\ &= 35,10 \angle 281^\circ \text{ mA} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 11.3**

Uma linha de transmissão de 40 m de comprimento, mostrada na Figura 11.9, tem  $V_g = 15\angle 0^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$ ,  $Z_0 = 30 + j60 \Omega$  e  $V_L = 5\angle -48^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$ . Se a linha está casada com a carga, determine:

- a impedância de entrada  $Z_{\text{ent}}$ ;
- a corrente  $I_{\text{ent}}$  e a tensão  $V_{\text{ent}}$  na entrada da linha;
- a constante de propagação  $\gamma$ .

**Resposta:** (a)  $30 + j60 \Omega$ ; (b)  $0,112\angle -63,43^\circ \text{ A}$ ,  $7,5\angle 0^\circ \text{ V}_{\text{rms}}$ ; (c)  $0,0101 + j0,2094/\text{m}$ .

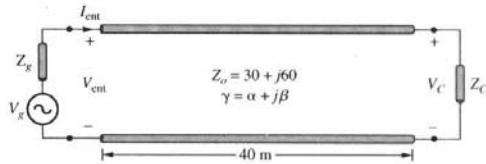


Figura 11.9 Referente ao Exercício Prático 11.3.

## 11.5 A CARTA DE SMITH

Antes do advento dos computadores digitais e das calculadoras, os engenheiros criaram diversos métodos auxiliares (tabelas, cartas, gráficos, etc.) para facilitar os cálculos para projetos e análises. Métodos gráficos foram desenvolvidos para reduzir os procedimentos cansativos envolvidos nos cálculos das características de linhas de transmissão. Dos métodos gráficos, a carta de Smith<sup>3</sup> é a mais utilizada. Basicamente, ela é uma indicação gráfica da variação da impedância da linha de transmissão, conforme nos movemos ao longo da linha. Com um pequeno treinamento, o seu uso se torna bastante simples. Vamos, inicialmente, examinar como a carta de Smith é construída e, depois, vamos aplicá-la em nossos cálculos das características de linhas de transmissão, como  $\Gamma_C$ ,  $s$  e  $Z_{\text{ent}}$ . Embora possa ser aplicada a linhas com perdas ( $Z_o = R_o$ ), vamos supor que a linha que será analisada com a carta de Smith é sem perdas ( $Z_o = R_o$ ).

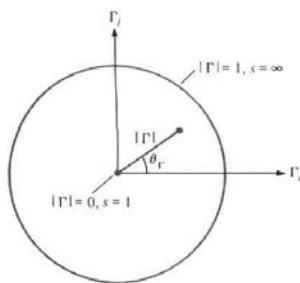


Figura 11.10 Círculo unitário no qual a carta de Smith é construída.

<sup>3</sup>Desenvolvida por Phillip H. Smith em 1939. Veja os artigos de P. H. Smith, "Transmission line calculator", *Electronics*, vol. 12, p. 29–31, 1939, e "An improved transmission line calculator", *Electronics* vol. 17, p. 130–133, 318–325, 1944.

Conforme mostrado na Figura 11.10, a carta de Smith é desenhada dentro de um círculo de raio unitário ( $|\Gamma| \leq 1$ ). A carta é construída baseando-se na equação (11.36)<sup>4</sup>, isto é,

$$\Gamma = \frac{Z_C - Z_o}{Z_C + Z_o} \quad (11.45)$$

ou

$$\Gamma = |\Gamma| \angle \theta_\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i \quad (11.46)$$

onde  $\Gamma_r$  e  $\Gamma_i$  são as partes real e imaginária do coeficiente de reflexão  $\Gamma$ .

Ao invés de termos cartas de Smith para cada linha de transmissão com diferentes impedâncias características, como  $Z_o = 60, 100$  e  $120 \Omega$ , preferimos ter apenas uma que seja válida para todas as linhas. Obtemos isto utilizando uma carta normalizada, onde todas as impedâncias são normalizadas com relação à impedância característica  $Z_o$  da linha que está sendo considerada. Por exemplo, para a impedância de carga  $Z_C$  a *impedância normalizada* é dada por

$$z_C = \frac{Z_C}{Z_o} = r + jx \quad (11.47)$$

Substituindo a equação (11.47) nas equações (11.45) e (11.46), obtemos

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i = \frac{z_C - 1}{z_C + 1} \quad (11.48a)$$

ou

$$z_C = r + jx = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i} \quad (11.48b)$$

Normalizando e igualando os termos, obtemos

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (11.49a)$$

$$x = \frac{2 \Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad (11.49b)$$

Arranjando os termos da equação (11.49), chegamos a

$$\left[ \Gamma_r - \frac{r}{1+r} \right]^2 + \Gamma_i^2 = \left[ \frac{1}{1+r} \right]^2 \quad (11.50)$$

e

$$\left[ \Gamma_r - 1 \right]^2 + \left[ \Gamma_i - \frac{1}{x} \right]^2 = \left[ \frac{1}{x} \right]^2 \quad (11.51)$$

As equações (11.50) e (11.51) são similares a

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 \quad (11.52)$$

<sup>4</sup> Sempre que não houver um subscrito em  $\Gamma$ , vamos supor que o mesmo se refere ao coeficiente de reflexão de tensão na carga ( $\Gamma_c = \Gamma$ ).

que é a equação geral de um círculo de raio  $a$  centrado em  $(h, k)$ . Portanto, a equação (11.50) fornece *círculos de r constante* (*círculos resistivos*) com

$$\text{centro em } (\Gamma_r, \Gamma_i) = \left( \frac{r}{1+r}, 0 \right) \quad (11.53\text{a})$$

$$\text{raio} = \frac{1}{1+r} \quad (11.53\text{b})$$

A Tabela 11.3 apresenta valores típicos de resistências normalizadas e correspondentes a diferentes centros e raios de círculos de  $r$  constante. Exemplos típicos de círculos  $r$ , com base nos dados da Tabela 11.3, são mostrados na Figura 11.11.

De forma semelhante, a equação (11.51) representa *círculos de x constante* (*círculos de reatâncias*) com

$$\text{centro em } (\Gamma_r, \Gamma_i) = \left( 1, \frac{1}{x} \right) \quad (11.54\text{a})$$

$$\text{raio} = \frac{1}{x} \quad (11.54\text{b})$$

TABELA 11.3 Raios e centros de círculos  $r$  para valores típicos de  $r$

Resistência Normalizada ( $r$ )	Raio $\left( \frac{1}{1+r} \right)$	Centro $\left( \frac{r}{1+r}, 0 \right)$
0	1	(0, 0)
1/2	2/3	(1/3, 0)
1	1/2	(1/2, 0)
2	1/3	(2/3, 0)
5	1/6	(5/6, 0)
$\infty$	0	(1, 0)

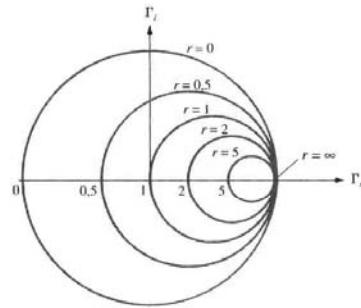


Figura 11.11 Círculos  $r$  típicos para  $r = 0; 0,5; 1; 2; 5$  e  $\infty$ .

A Tabela 11.4 apresenta centros e raios de círculos  $x$  para valores típicos de  $x$ . A Figura 11.12 apresenta os gráficos correspondentes. Note que, enquanto  $r$  é sempre positivo,  $x$  pode ser positivo (para impedâncias indutivas) ou negativo (para impedâncias capacitivas).

Se sobreponermos os círculos  $r$  e os círculos  $x$ , obtemos a carta de Smith, mostrada na Figura 11.13. Exemplificando, podemos localizar na carta a impedância normalizada  $z = 2 + j$  como sendo o ponto de interseção entre o círculo  $r = 2$  e o círculo  $x = -5$ . Este é o ponto  $P_1$  da Figura 11.13. De forma semelhante,  $z = 1 - j0,5$  é localizado por  $P_2$ , ponto onde os círculos  $r = 1$  e  $x = -0,5$  se cortam.

Além dos círculos  $r$  e  $x$  (mostrados na carta de Smith), podemos desenhar *círculos s* ou *círculos de relação de onda estacionária constante* (nem sempre mostrados na carta de Smith), os quais são centrados na origem, com  $s$  variando de 1 até  $\infty$ . O valor da relação de onda estacionária  $s$  é determinado pelo ponto em que um círculo  $s$  cruza o eixo  $\Gamma_r$ . Exemplos típicos de círculos  $s$  para  $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$  são mostrados na Figura 11.13.

Como  $|r|$  e  $s$  estão relacionados pela equação (11.38), os círculos  $s$  são, às vezes, referidos como círculos  $|r|$ , com  $|r|$  variando linearmente de 0 até 1, conforme nos movemos do centro  $O$  para a periferia da carta, enquanto  $s$  varia de forma não linear de 1 até  $\infty$ .

Os seguintes aspectos devem ser observados com relação à carta de Smith:

- No ponto  $P_{\infty}$  da carta  $r = 0$  e  $x = 0$ , isto é,  $Z_c = 0 + j0$ , mostrando que  $P_{\infty}$  representa um curto circuito na linha de transmissão. No ponto  $P_{\text{ab}}$ ,  $r = \infty$  e  $x = \infty$ , ou  $Z_c = \infty + j\infty$ , o que implica que  $P_{\text{ab}}$  corresponde a um circuito aberto na linha. Também, em  $P_{\text{ca}}$ ,  $r = 0$  e  $x = 0$ , mostrando que  $P_{\text{ca}}$  é uma outra localização para um curto circuito na linha.

TABELA 11.4 Raios e centros de círculos  $x$  para valores típicos de  $x$

Reatância Normalizada ( $x$ )	Raio $\left(\frac{1}{x}\right)$	Centro $\left(1, \frac{1}{x}\right)$
0	$\infty$	$(1, \infty)$
$\pm 1/2$	2	$(1, \pm 2)$
$\pm 1$	1	$(1, \pm 1)$
$\pm 2$	1/2	$(1, \pm 1/2)$
$\pm 5$	1/5	$(1, \pm 1/5)$
$\pm \infty$	0	$(1, 0)$

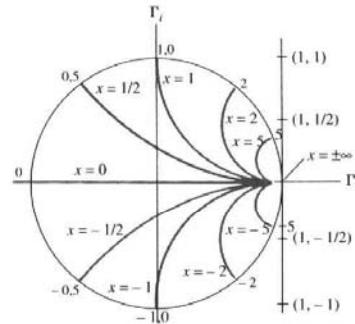


Figura 11.12 Círculos  $x$  típicos para  $x = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm \infty$ .

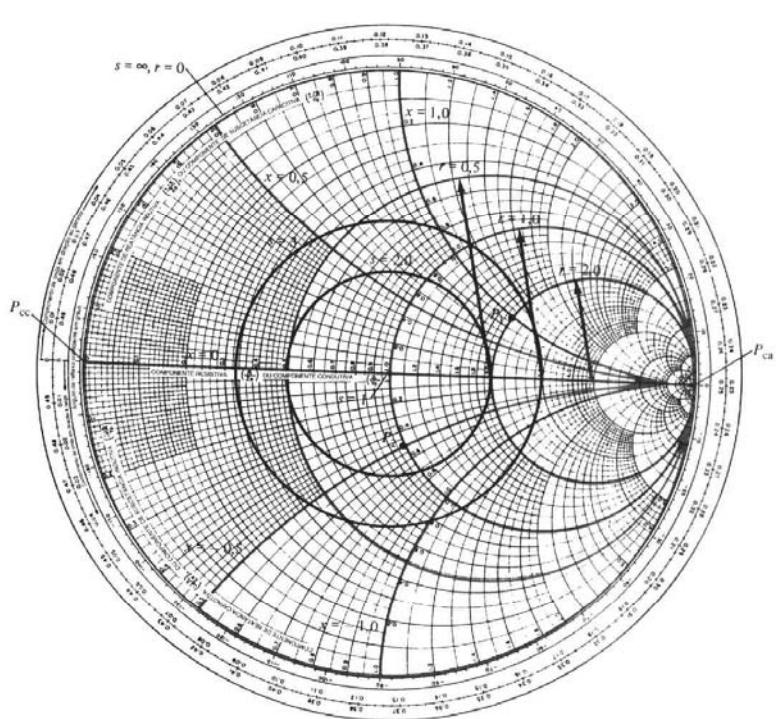


Figura 11.13 Ilustração dos círculos  $r$ ,  $x$  e  $s$  na carta de Smith.

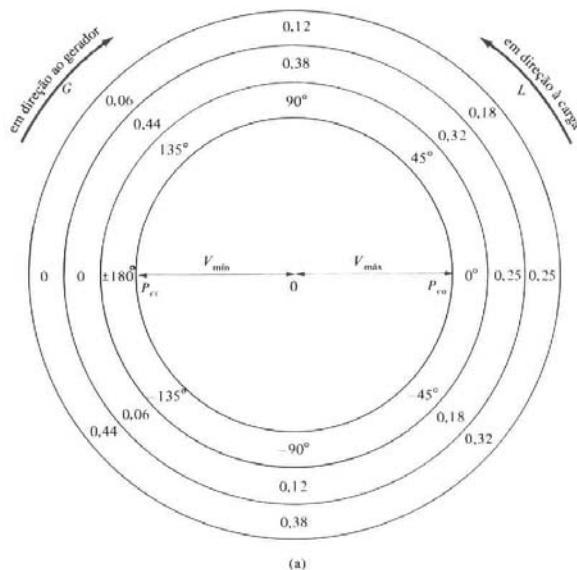
2. Uma volta completa ( $360^\circ$ ) em torno da carta de Smith representa uma distância de  $\lambda/2$  na linha. Movimento no sentido horário na carta representa movimento na linha em direção ao gerador (ou de afastamento em relação à carga), conforme mostrado pela seta  $G$  nas Figuras 11.14(a) e (b). De forma semelhante, movimento no sentido anti-horário na carta corresponde a um movimento na linha em direção à carga (ou de afastamento em relação ao gerador), conforme mostrado pela seta  $L$  na Figura 11.14. Note, a partir da Figura 11.14(b), que, se já estamos na carga, não faz sentido o movimento em direção à carga (porque já estamos lá). O mesmo pode ser dito para o caso de já estarmos na extremidade do gerador.
3. Conforme ilustrado na Figura 11.14(a), existem três escalas ao redor da periferia da carta de Smith. Estas escalas são incluídas por conveniência, mas, efetivamente, têm a mesma finalidade. Apenas uma escala seria suficiente. Essas escalas são utilizadas na determinação da distância à carga ou ao gerador, em graus ou comprimento de onda. A escala mais externa é usada para determinar a distância na linha medida a partir da extremidade do gerador, em com-

primertos de onda, e a escala seguinte determina a distância a partir da carga, também em comprimentos de onda. A escala mais interna é um transferidor (em graus) e é principalmente utilizada para determinar  $\theta_r$ . Ela pode também ser usada para determinar distâncias em relação à carga ou ao gerador. Como uma distância de  $\lambda/2$  na linha corresponde a um movimento de  $360^\circ$  na carta, a distância de  $\lambda$  na linha corresponde a um movimento de  $720^\circ$  na carta.

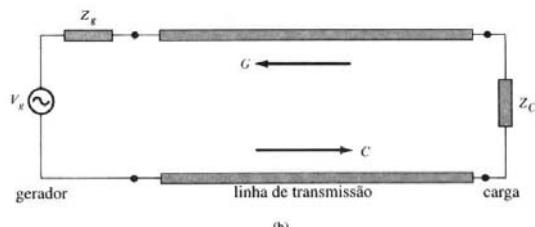
$$\boxed{\lambda \rightarrow 720^\circ} \quad (11.55)$$

Portanto, podemos ignorar as duas escalas externas e usar o transferidor (escala mais interna) para os cálculos de  $\theta_r$  e distâncias.

4. O valor de  $V_{\max}$  ocorre no ponto em que está localizado na carta  $Z_{\text{ent,max}}$  [veja a equação (11.39a)], isto é, no eixo positivo de  $\Gamma_o$ , ou sobre  $OP_{ca}$ , na Figura 11.14(a).  $V_{\min}$  está localizado na carta no mesmo ponto de  $Z_{\text{ent,min}}$ , isto é, na parte negativa do eixo  $\Gamma_o$ , ou sobre  $P_{ce}$ , na Figura 11.14(a). Note que  $V_{\max}$  e  $V_{\min}$  (ou  $Z_{\text{ent,max}}$  e  $Z_{\text{ent,min}}$ ) estão separados por  $\lambda/4$  (ou  $180^\circ$ ).
5. A carta de Smith é usada tanto como carta de impedância como de admitância ( $Y = 1/Z$ ). Como carta de admitância (admitância normalizada  $y = Y/Y_o = (g + jb)$ ), os círculos  $g$  e  $b$  correspondem aos círculos  $r$  e  $x$ , respectivamente.



(a)



(b)

Figura 11.14 (a) Carta de Smith ilustrando as escalas da periferia e movimentos em torno da mesma; (b) movimentos correspondentes ao longo da linha de transmissão.

Com base nestas propriedades, a carta de Smith pode ser usada, entre outras coisas, para determinar: (a)  $|\Gamma|$  e  $s$ , (b)  $Z_{\text{ent}}$  ou  $Y_{\text{ent}}$  e (c) a localização de  $V_{\text{máx}}$  e  $V_{\text{min}}$ , desde que sejam dados  $Z_o$ ,  $Z_c$  e o comprimento da linha. Alguns exemplos mostrarão com clareza como podemos fazer isto e muito mais com a ajuda da carta de Smith, um compasso e uma régua.

#### EXEMPLO 11.4

Uma linha de transmissão sem perdas, de 30 metros de comprimento, com  $Z_o = 50 \Omega$  e operando em 2 MHz é terminada com uma carga  $Z_c = 60 + j40 \Omega$ . Se a velocidade de propagação na linha é  $u = 0,6c$ , determine:

- o coeficiente de reflexão  $\Gamma$ ;
- a relação de onda estacionária  $s$ ;
- a impedância de entrada.

#### Solução:

Este problema será resolvido com e sem a carta de Smith.

#### Método 1: (sem a carta de Smith)

$$(a) \Gamma = \frac{Z_c - Z_o}{Z_c + Z_o} = \frac{60 + j40 - 50}{50 + j40 + 50} = \frac{10 + j40}{110 + j40} \\ = 0,3523 \angle 56^\circ$$

$$(b) s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0,3523}{1 - 0,3523} = 2,088$$

(c) Como  $u = \omega/\beta$ , ou  $\beta = \omega/u$ ,

$$\beta\ell = \frac{\omega\ell}{u} = \frac{2\pi(2 \times 10^6)(30)}{0,6(3 \times 10^8)} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

Note que  $\beta\ell$  é o comprimento elétrico da linha.

$$\begin{aligned} Z_{\text{ent}} &= Z_o \left[ \frac{Z_c + jZ_o \operatorname{tg} \beta\ell}{Z_o + jZ_c \operatorname{tg} \beta\ell} \right] \\ &= \frac{50(60 + j40 + j50 \operatorname{tg} 120^\circ)}{[50 + j(60 + j40) \operatorname{tg} 120^\circ]} \\ &= \frac{50(6 + j4 - j5\sqrt{3})}{(5 + 4\sqrt{3} - j6\sqrt{3})} = 24,01 \angle 3,22^\circ \\ &= 23,97 + j1,35 \Omega \end{aligned}$$

#### Método 2: (usando a carta de Smith).

- Calcule a impedância normalizada da carga

$$z_c = \frac{Z_c}{Z_o} = \frac{60 + j40}{50} \\ = 1,2 + j0,8$$

Localize  $z_c$  na carta de Smith da Figura 11.15, no ponto  $P$ , onde os círculos  $r = 1,2$  e  $x = 0,8$  se cruzam. Para obter  $|\Gamma|$  em  $z_c$ , prolongue  $OP$  até encontrar o círculo  $r = 0$ , no ponto  $Q$ , e meça  $OP$  e  $OQ$ . Como  $OQ$  corresponde a  $|\Gamma| = 1$ , então, em  $P$ ,

$$|\Gamma| = \frac{OP}{OQ} = \frac{3,2 \text{ cm}}{9,1 \text{ cm}} = 0,3516$$

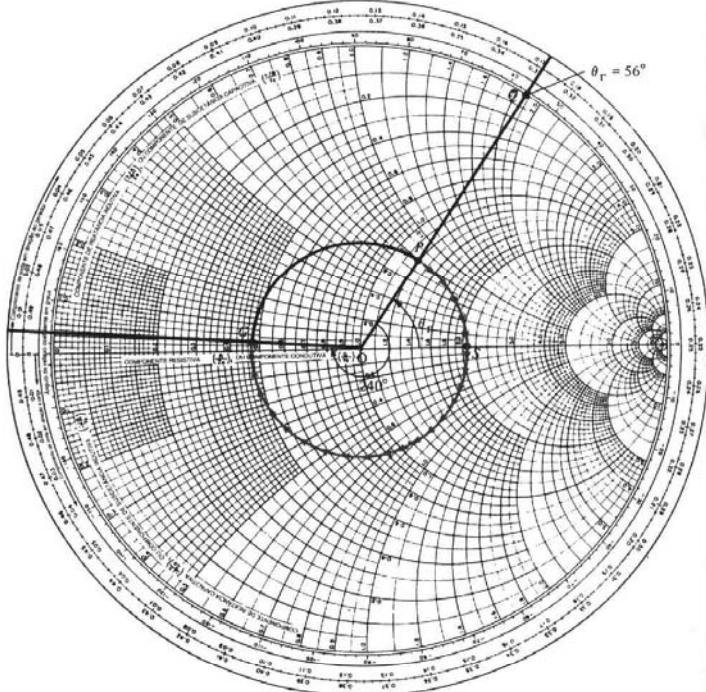


Figura 11.15 Referente ao Exemplo 11.4

Note que  $OP = 3,2$  cm e  $OQ = 9,1$  cm foram obtidos da carta de Smith utilizada pelo autor. A carta de Smith da Figura 11.15 está reduzida. Entretanto, a razão  $OP/OQ$  se mantém a mesma.

O ângulo  $\theta_r$  é lido diretamente na carta, como sendo o ângulo entre  $OS$  e  $OP$ , isto é,

$$\theta_r = \text{ângulo } POS = 56^\circ$$

Portanto,

$$\Gamma = 0,3516 \angle 56^\circ$$

- (b) Para obter a razão de onda estacionária  $s$ , desenhe um círculo com raio  $OP$  centrado em  $O$ . Este é o círculo de  $s$  ou  $| \Gamma |$  constante. Localize o ponto  $S$ , onde o círculo  $s$  encontra o eixo  $\Gamma_r$ . [Isto é facilmente obtido colocando  $\Gamma_i = 0$  na equação (11.49a)]. O valor de  $r$  neste ponto é  $s$ , isto é,

$$\begin{aligned} s &= r \text{ (para } r \geq 1) \\ &= 2,1 \end{aligned}$$

- (c) Para obter  $Z_{\text{ent}}$ , expresse, primeiro,  $\ell$  em termos do comprimento de onda  $\lambda$  ou em graus.

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{0,6(3 \times 10^8)}{2 \times 10^6} = 90 \text{ m}$$

$$\ell = 30 \text{ m} = \frac{30}{90} \lambda = \frac{\lambda}{3} \rightarrow \frac{720^\circ}{3} = 240^\circ$$

Como  $\lambda$  corresponde a um movimento angular de  $720^\circ$  na carta, o comprimento da linha corresponde a um movimento angular de  $240^\circ$ . Isto significa um movimento de  $240^\circ$  em direção ao gerador (ou de afastamento em relação à carga, no sentido horário) sobre o círculo  $s$ , a partir do ponto  $P$  em direção ao ponto  $G$ . Em  $G$ , obtemos

$$z_{\text{ent}} = 0,47 + j0,035$$

Portanto,

$$Z_{\text{ent}} = Z_0 z_{\text{ent}} = 50(0,47 + j0,035) = 23,5 + j1,75 \Omega$$

Embora os resultados obtidos utilizando a carta de Smith sejam aproximados, para fins de engenharia eles são suficientemente próximos aos obtidos, de forma exata, no Método 1.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 11.4

Uma linha de transmissão sem perdas de  $70 \Omega$  tem  $s = 1,6$  e  $\theta_\Gamma = 300^\circ$ . Se a linha tem um comprimento de  $0,6 \lambda$ , obtenha:

- (a)  $\Gamma, Z_C Z_{\text{ent}}$ ;
- (b) a distância do primeiro mínimo de tensão à carga.

**Resposta:** (a)  $0,228 \angle 300^\circ, 80,5 - j33,6 \Omega, 47,6 - j17,5 \Omega$ ; (b)  $\lambda/6$ .

#### EXEMPLO 11.5

Uma carga de  $100 + j150 \Omega$  é conectada a uma linha de transmissão sem perdas de  $75 \Omega$ . Encontre:

- (a)  $\Gamma$ ;
- (b)  $s$ ;
- (c) a admitância da carga  $Y_L$ ;
- (d)  $Z_{\text{ent}}$  a  $0,4 \lambda$  da carga;
- (e) a localização de  $V_{\text{máx}}$  e  $V_{\text{min}}$  com relação à carga, se a linha tiver um comprimento de  $0,6 \lambda$ ;
- (f)  $Z_{\text{ent}}$  no gerador.

**Solução:**

- (a) Podemos usar a carta de Smith para resolver este problema. A impedância normalizada da carga é:

$$z_C = \frac{Z_C}{Z_0} = \frac{100 + j150}{75} = 1,33 + j2$$

Esta impedância está localizada no ponto  $P$  na carta de Smith, da Figura 11.16. Em  $P$ , obtemos:

$$|\Gamma| = \frac{OP}{OQ} = \frac{6 \text{ cm}}{9,1 \text{ cm}} = 0,659$$

$$\theta_\Gamma = \text{ângulo } POS = 40^\circ$$

Portanto,

$$\Gamma = 0,659 \angle 40^\circ$$

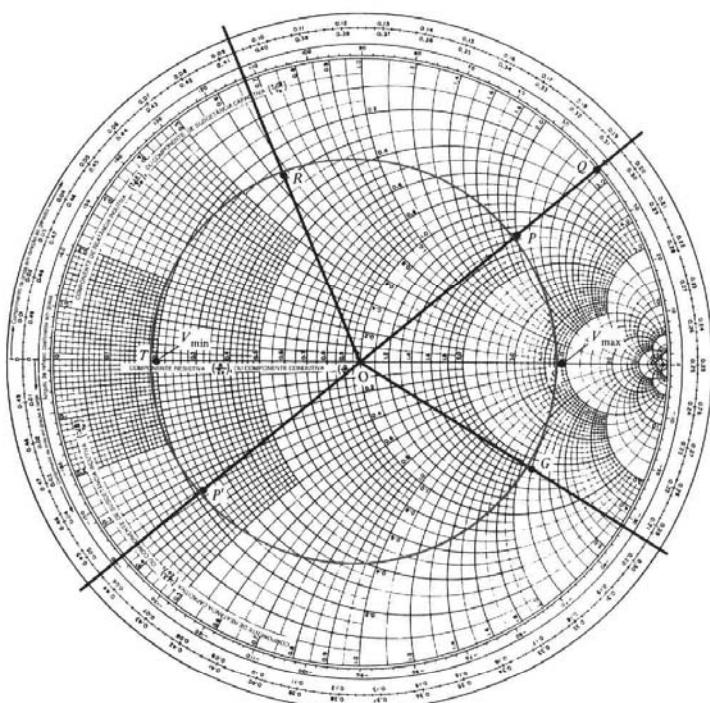


Figura 11.16 Referente ao Exemplo 11.5.

Conferindo:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{Z_C - Z_0}{Z_C + Z_0} = \frac{100 + j150 - 75}{100 + j150 + 75} \\ &= 0,659 \angle 40^\circ\end{aligned}$$

(b) Traçando o círculo  $s$  constante que passa por  $P$ , obtemos:

$$s = 4,82$$

Conferindo:

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0,659}{1 - 0,659} = 4,865$$

(c) Para obtermos  $Y_L$ , prolongamos  $PO$  até  $POP'$ , onde o círculo de  $s$  constante encontra  $POP'$ . Em  $P'$ , obtemos

$$y_C = 0,228 - j0,35$$

A admitância na carga é:

$$Y_C = Y_o y_C = \frac{1}{75} (0,228 - j0,35) = 3,04 - j4,67 \text{ mS}$$

Conferindo:

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{100 + j150} = 3,07 - j4,62 \text{ mS}$$

- (d) A distância de  $0,4\lambda$  corresponde a um movimento angular de  $0,4 \times 720^\circ = 288^\circ$  no círculo de  $s$  constante. A partir de  $P$ , nos movemos  $288^\circ$  em direção ao gerador (no sentido horário) sobre o círculo  $s$ , para alcançarmos o ponto  $R$ . Em  $R$ , temos:

$$z_{\text{ent}} = 0,3 + j0,63$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Z_{\text{ent}} &= Z_o z_{\text{ent}} = 75 (0,3 + j0,63) \\ &= 22,5 + j47,25 \Omega \end{aligned}$$

Conferindo:

$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} (0,4\lambda) = 360^\circ (0,4) = 144^\circ$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{ent}} &= Z_o \left[ \frac{Z_C + jZ_o \operatorname{tg} \beta\ell}{Z_o + jZ_C \operatorname{tg} \beta\ell} \right] \\ &= \frac{75 (100 + j150 + j75 \operatorname{tg} 144^\circ)}{[75 + j(100 + j150) \operatorname{tg} 144^\circ]} \\ &= 54,41 \angle 65,25^\circ \end{aligned}$$

ou

$$Z_{\text{ent}} = 21,9 + j47,6 \Omega$$

- (e) A distância de  $0,6\lambda$  na linha de transmissão corresponde a um movimento angular de

$$0,6 \times 720^\circ = 432^\circ = 1 \text{ volta} + 72^\circ$$

Portanto, partimos do ponto  $P$  (extremidade da linha onde fica a carga) e nos movemos  $432^\circ$  ao longo do círculo  $s$ , ou uma volta mais  $72^\circ$ , e alcançamos o ponto do gerador em  $G$ . Note que, para atingirmos  $G$  a partir de  $P$ , passamos uma vez por  $T$  (localização de  $V_{\min}$ ) e duas vezes pelo ponto  $S$  (localização de  $V_{\max}$ ). Portanto, partindo da carga,

$$\text{O primeiro } V_{\max} \text{ está localizado em } \frac{40^\circ}{720^\circ} \lambda = 0,055\lambda$$

$$\text{O segundo } V_{\max} \text{ está localizado em } 0,055\lambda + \frac{\lambda}{2} = 0,555\lambda$$

e o único  $V_{\min}$  está localizado em  $0,055\lambda + \lambda/4 = 0,3055\lambda$

- (f) Em  $G$  (extremidade do gerador):

$$z_{\text{ent}} = 1,8 - j2,2$$

$$Z_{\text{ent}} = 75(1,8 - j2,2) = 135 - j165 \Omega$$

Isto pode ser conferido usando a equação (11.34), onde  $\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} (0,6\lambda) = 216^\circ$ .

Através deste exemplo, podemos verificar o trabalho e o tempo que é economizado pelo uso da carta de Smith.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 11.5**

Uma linha de transmissão sem perdas de  $60 \Omega$  é terminada por uma carga de  $60 + j60 \Omega$ .

(a) Encontre  $\Gamma$  e  $s$ . Se  $Z_{\text{ent}} = 120 - j60 \Omega$ , qual é a distância (em comprimentos de onda) entre o gerador e a carga? Resolva sem a utilização da carta de Smith.

(b) Resolva o item (a) usando a carta de Smith. Calcule  $Z_{\text{ent,max}}$  e  $Z_{\text{ent,min}}$ . Qual é a distância (em comprimentos de onda) entre o primeiro máximo de tensão e a carga?

**Resposta:** (a)  $0,4472/63,43^\circ$ ,  $2,618, \frac{\lambda}{8}(1 + 4n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; (b)  $0,4457/62^\circ$ ,  $2,612, \frac{\lambda}{8}(1 + 4n)$ ,  $157,1 \Omega$ ,  $22,92 \Omega$ ,  $0,0861 \lambda$ .

## 11.6 ALGUMAS APLICAÇÕES DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

As linhas de transmissão são utilizadas para diversas finalidades. Vamos aqui considerar como as linhas de transmissão são usadas para realizar o casamento de impedâncias com uma carga e para medir impedâncias.

### A. Transformador de quarto de onda (casamento)

Quando  $Z_o \neq Z_c$  dizemos que a carga está *descasada* e existe uma onda refletida na linha. Entretanto, para transferência máxima de potência, é desejável que a carga esteja casada com a linha de transmissão ( $Z_o = Z_c$ ), de tal maneira que não haja reflexão ( $|\Gamma| = 0$  ou  $s = 1$ ). O casamento é obtido usando seções curto circuitadas de linhas de transmissão.

Relembremos que, quando  $\ell = \lambda/4$  ou  $\beta\ell = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) = \pi/2$ , a equação (11.34) fica

$$Z_{\text{ent}} = Z_o \left[ \frac{Z_C + jZ_o \operatorname{tg} \pi/2}{Z_o + jZ_C \operatorname{tg} \pi/2} \right] = \frac{Z_o^2}{Z_C} \quad (11.56)$$

isto é,

$$\frac{Z_{\text{ent}}}{Z_o} = \frac{Z_o}{Z_C}$$

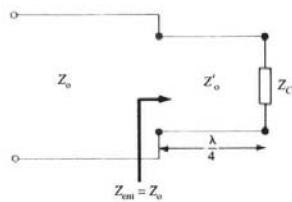
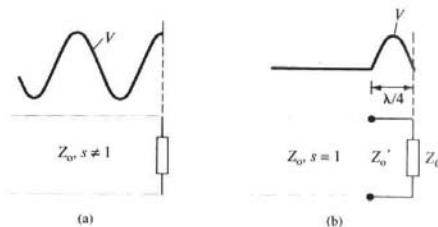
ou

$$z_{\text{ent}} = \frac{1}{z_C} \rightarrow y_{\text{ent}} = z_L \quad (11.57)$$

Portanto, pela adição de uma linha de  $\lambda/4$  na carta de Smith, obtemos a admitância de entrada correspondente a uma dada impedância de carga.

Também, uma carga descasada  $Z_c$  pode ser casada adequadamente com a linha (com impedância característica  $Z_o$ ) pela inserção de uma linha de transmissão com o comprimento  $\lambda/4$  (com uma impedância característica  $Z'_o$ ) antes da carga, conforme mostrado na Figura 11.17. A seção  $\lambda/4$  da linha de transmissão é denominada de *transformador de quarto de onda* porque é usada para casamento de impedâncias como um transformador comum. A partir da equação (11.56),  $Z'_o$  deve ser selecionada de tal maneira que ( $Z_{\text{ent}} = Z_o$ )

$$Z'_o = \sqrt{Z_o Z_C} \quad (11.58)$$

Figura 11.17 Casamento de impedâncias utilizando um transformador de  $\lambda/4$ .Figura 11.18 Configuração de onda estacionária de tensão para uma carga descasada: (a) sem um transformador de  $\lambda/4$ ; (b) com um transformador de  $\lambda/4$ .

onde  $Z'_0$ ,  $Z_0$  e  $Z_C$  são todos reais. Por exemplo, se uma carga de  $120\ \Omega$  deve ser casada a uma linha de  $75\ \Omega$ , o transformador de quarto de onda deve ter uma impedância característica de  $\sqrt{(75)(120)} \approx 95\ \Omega$ . Este transformador de quarto de onda de  $95\ \Omega$  também casará uma carga de  $75\ \Omega$  a uma linha de  $120\ \Omega$ . As configurações de ondas estacionárias para a tensão com e sem o transformador de quarto de onda estão mostradas na Figura 11.18(a) e (b), respectivamente. Desta figura, observamos que, embora ainda exista uma onda estacionária entre o transformador e a carga, não existe onda estacionária à esquerda do transformador devido ao casamento. Contudo, a onda refletida (ou onda estacionária) é eliminada somente no comprimento de onda (ou frequência) desejado; mesmo em um comprimento de onda um pouco diferente haverá reflexão. Portanto, a principal desvantagem do transformador de quarto de onda é que ele é um dispositivo de banda estreita, ou dispositivo sensível à frequência.

### B. Sintonizador com toco simples (casamento)

A principal desvantagem do uso do transformador de quarto de onda como um dispositivo de casamento de impedâncias é eliminada pelo uso do sintonizador de *toco simple*. Conforme mostrado na Figura 11.19, o sintonizador consiste de uma seção de linha de transmissão de comprimento  $d$ , curto circuitada ou em circuito aberto, conectada em paralelo com a linha principal a uma distância  $\ell$  da carga. Note que a impedância característica do toco é igual à impedância da linha principal. É mais difícil utilizar um toco série, embora teoricamente possível. Um toco em circuito aberto irradia parte da energia em altas frequências. Consequentemente, os tocos curto-circuitados e em paralelo com a linha são os mais usados.

Como o objetivo é fazer  $Z_{ent} = Z_0$ , isto é,  $z_{ent} = 1$  ou  $y_{ent} = 1$  no ponto A da linha, primeiramente traçamos o círculo  $y = 1 + jb$  (círculo com  $r = 1$ ) na carta de Smith, conforme mostrado na Figura 11.20. Se um toco em paralelo de admitância  $y_s = -jb$  é introduzido no ponto A, então,

$$y_{ent} = 1 + jb + y_s = 1 + jb - jb = 1 + j0 \quad (11.59)$$

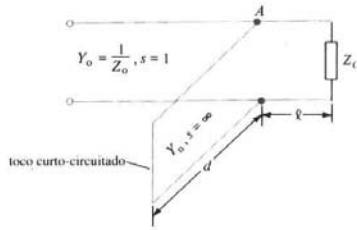
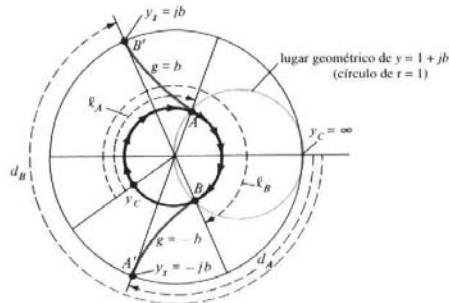


Figura 11.19 Casamento de impedâncias com um sintonizador de toco simples.

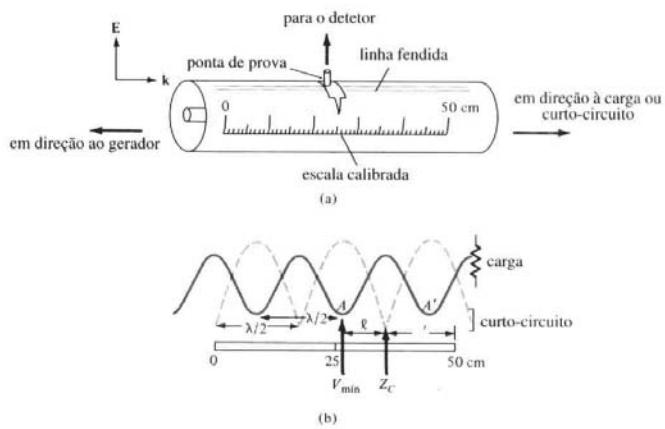
Figura 11.20 Utilização da carta de Smith para determinar  $\ell$  e  $d$  para um sintonizador de toco simples curto-circuitado.

conforme desejado. Dois valores de  $\ell$  ( $< \lambda/2$ ) podem ser obtidos, pois  $b$  pode ser positivo ou negativo. Em  $A$ ,  $y_s = -jb$ ,  $\ell = \ell_A$  e, em  $B$ ,  $y_s = jb$ ,  $\ell = \ell_B$ , conforme mostrado na Figura 11.20. Devido ao fato de que o toco é curto-circuitado ( $y'_L = \infty$ ), determinamos o comprimento  $d$  do mesmo pela distância de  $P_{cc}$  (onde  $z'_C = 0 + j0$ ) até a admittância desejada  $y_s$ . Para o toco em  $A$ , obtemos  $d = d_A$  como sendo a distância de  $P_{cc}$  a  $A'$ , onde  $A'$  corresponde a  $y_s = -jb$ , o qual está localizado na periferia da carta, conforme Figura 11.20. De forma semelhante, obtemos  $d = d_B$  como sendo a distância de  $P_{cc}$  a  $B'$  ( $y_s = jb$ ).

Portanto, obtemos  $d = d_A$  e  $d = d_B$ , correspondendo a  $A$  e  $B$ , respectivamente, conforme mostrado na Figura 11.20. Note que sempre teremos  $d_A + d_B = \lambda/2$ . Como temos dois possíveis tocos curto-circuitados, normalmente é escolhido o mais curto ou o que está mais próximo da carga. No lugar de um toco simples, pode também ser utilizado um toco duplo. Isto é chamado *casamento com duplo toco*, o qual permite o ajuste da impedância da carga.

### C. Linha fendida (medida de impedâncias)

As medidas de corrente e tensão em altas freqüências são muito difíceis de serem realizadas porque os dispositivos de medida adquirem dimensões apreciáveis e todo o circuito torna-se uma linha de transmissão. A linha fendida é um dispositivo simples, utilizado na determinação da impedância de uma carga desconhecida em altas freqüências, operando até a região de gigahertz. Ela consiste de uma seção de linha de transmissão que usa o ar como dielétrico (sem perdas), com uma fenda no condutor externo, conforme mostrado na Figura 11.21. A linha tem uma ponta de prova paralela ao campo  $E$  (veja Figura 11.4), que capta uma amostra do campo  $E$  e, consequentemente, mede a diferença de potencial entre a ponta de prova e o condutor externo.

Figura 11.21 (a) Linha fenda típica; (b) determinação da localização da carga  $Z_C$  e  $V_{min}$  na linha de transmissão

A linha fenda é usada, principalmente, em conjunto com a carta de Smith para determinar a relação de onda estacionária  $s$  (a razão entre a tensão máxima e a tensão mínima) e a impedância de carga  $Z_C$ . O valor de  $s$  pode ser lido diretamente no medidor do detetor quando a carga está conectada. Para determinarmos  $Z_C$ , substituímos, inicialmente, a carga por um curto-circuito e anotamos as posições dos mínimos de tensão (os quais são determinados com maior precisão que os máximos de tensão) na escala calibrada. Como os valores de impedância se repetem a cada meio comprimento de onda, quaisquer mínimos podem ser selecionados como ponto de referência da carga. Determinamos, agora, a distância do ponto de referência selecionado até a carga, substituindo o curto-circuito pela carga e anotando as novas posições dos mínimos de tensão. A distância  $\ell$  (distância de  $V_{min}$  até a carga), expressa em termos de  $\lambda$ , é usada para localizar a posição da carga em um círculo  $s$  da carta, conforme mostrado na Figura 11.22.

Podemos também localizar a carga usando  $\ell'$ , que é a distância de  $V_{min}$  até o gerador. Tanto  $\ell$  como  $\ell'$  podem ser usados para localizar  $Z_C$ .

O procedimento envolvido na utilização da linha fenda é resumido a seguir:

1. Com carga conectada, leia o valor de  $s$  no medidor do detetor. Com o valor de  $s$  conhecido, trace o círculo  $s$  na carta de Smith.
2. Com a carga substituída por um curto-circuito, localize o ponto de referência  $Z_C$  em um ponto mínimo de tensão.
3. Com a carga novamente conectada na linha anote a posição de  $V_{min}$  e determine  $\ell$ .
4. Marque, na carta de Smith, uma distância  $\ell$  a partir de  $V_{min}$  na direção da carga. Encontre o valor de  $Z_C$  neste ponto.

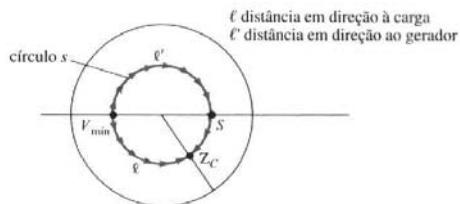


Figura 11.22 Determinação da impedância de carga com a carta de Smith utilizando dados obtidos com a linha fenda.

**EXEMPLO 11.6**

Com uma carga desconhecida conectada a uma linha fendida no ar, é medido um valor de  $s = 2$ , pelo indicador de ondas estacionárias, e são observados mínimos de tensão em 11 cm, 19 cm, .... Quando a carga é substituída por um curto, os mínimos passam para 16 cm, 24 cm, .... Se  $Z_0 = 50 \Omega$ , determine  $\lambda, f$  e  $Z_C$ .

**Solução:**

Consideremos a configuração de ondas estacionárias mostrada na Figura 11.23(a). Nesta figura, observamos que:

$$\frac{\lambda}{2} = 19 - 11 = 8 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad \lambda = 16 \text{ cm}$$

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{16 \times 10^{-2}} = 1,875 \text{ GHz}$$

Do ponto de vista elétrico, a carga pode estar localizada em 16 cm ou 24 cm. Se assumimos que a carga está em 24 cm, a carga estará a uma distância  $\ell$  de  $V_{\min}$ , onde:

$$\ell = 24 - 19 = 5 \text{ cm} = \frac{5}{16} \lambda = 0,3125 \lambda$$

Isto corresponde a um movimento angular de  $0,3125 \times 720^\circ = 225^\circ$  no círculo de  $s = 2$ . Partindo da localização de  $V_{\min}$  e movendo  $225^\circ$  em direção à carga (sentido anti-horário), alcançamos a posição de  $z_C$  conforme ilustrado na Figura 11.23(b). Portanto,

$$z_C = 1,4 + j0,75$$

e

$$Z_C = Z_0 z_C = 50 (1,4 + j0,75) = 70 + j37,5 \Omega$$

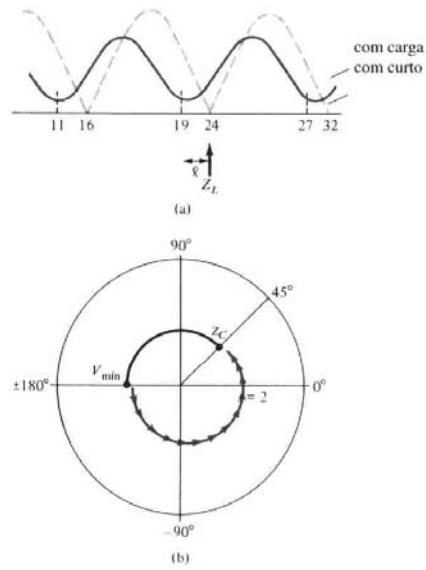


Figura 11.23 Determinação de  $Z_C$  usando uma linha fendida: (a) configuração de ondas estacionárias; (b) carta de Smith para o Exemplo 11.6.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 11.6**

As seguintes medidas foram obtidas usando a técnica da linha fendida: com carga,  $s = 1,8$ ,  $V_{\max}$  ocorreu em 23 cm, 33,5 cm, ...; com curto-círcuito,  $s = \infty$ ,  $V_{\max}$  ocorreu em 25 cm, 37,5 cm, .... Se  $Z_0 = 50 \Omega$ , determine  $Z_C$ .

**Resposta:**  $32,5 - j17,5 \Omega$ .

**EXEMPLO 11.7**

Uma antena com impedância de  $40 + j30 \Omega$  deve ser casada a uma linha de transmissão sem perdas de  $100 \Omega$ , com um toco curto-circuitado. Determine:

- a admitância necessária do toco;
- a distância entre o toco e a antena;
- o comprimento do toco;
- a razão de onda estacionária em cada parte do sistema.

**Solução:**

$$(a) z_C = \frac{Z_C}{Z_0} = \frac{40 + j30}{100} = 0,4 + j0,3$$

Localize  $z_C$  na carta de Smith, conforme a Figura 11.24, e trace o círculo  $s$  tal que  $y_C$  possa estar localizado em posição diametralmente oposta a  $z_C$ . Portanto,  $y_C = 1,6 - j1,2$ . Alternativamente, podemos encontrar  $y_C$  usando:

$$y_C = \frac{Z_0}{Z_C} = \frac{100}{40 + j30} = 1,6 - j1,2$$

Localize os pontos  $A$  e  $B$  onde o círculo  $s$  intercepta o círculo de  $g = 1$ . Em  $A$ ,  $y_s = -j1,04$  e, em  $B$ ,  $y_s = +j1,04$ . Portanto, a admitância necessária do toco é:

$$Y_s = Y_0 y_s = \pm j1,04 \frac{1}{100} = \pm j10,4 \text{ mS}$$

Tanto  $j10,4 \text{ mS}$  quanto  $-j10,4 \text{ mS}$  são valores possíveis.

(b) A partir da Figura 11.24, determinamos a distância entre a carga (neste caso a antena)  $y_C$  e o toco. Em  $A$ :

$$\ell_A = \frac{\lambda}{2} - \frac{(62^\circ - -39^\circ)\lambda}{720^\circ} = 0,36\lambda$$

Em  $B$ :

$$\ell_B = \frac{(62^\circ - 39^\circ)}{720^\circ} = 0,032\lambda$$

(c) Localize os pontos  $A'$  e  $B'$  correspondendo, respectivamente, às admitâncias  $-j1,04$  e  $j1,04$  do toco. Determine o comprimento do toco (distância de  $P_{cc}$  a  $A'$  e a  $B'$ ):

$$d_A = \frac{88^\circ}{720^\circ} \lambda = 0,1222\lambda$$

$$d_B = \frac{272^\circ \lambda}{720^\circ} = 0,3778\lambda$$

Note que  $d_A + d_B = 0,5 \lambda$ , como esperado.

(d) Da Figura 11.24,  $s = 2,7$ . Esta é a razão de onda estacionária no segmento da linha que fica entre o toco e a carga (veja Figura 11.18). Porque a linha é casada,  $s = 1$  à esquerda do toco e, porque o toco é curto-circuitado,  $s = \infty$  no toco.

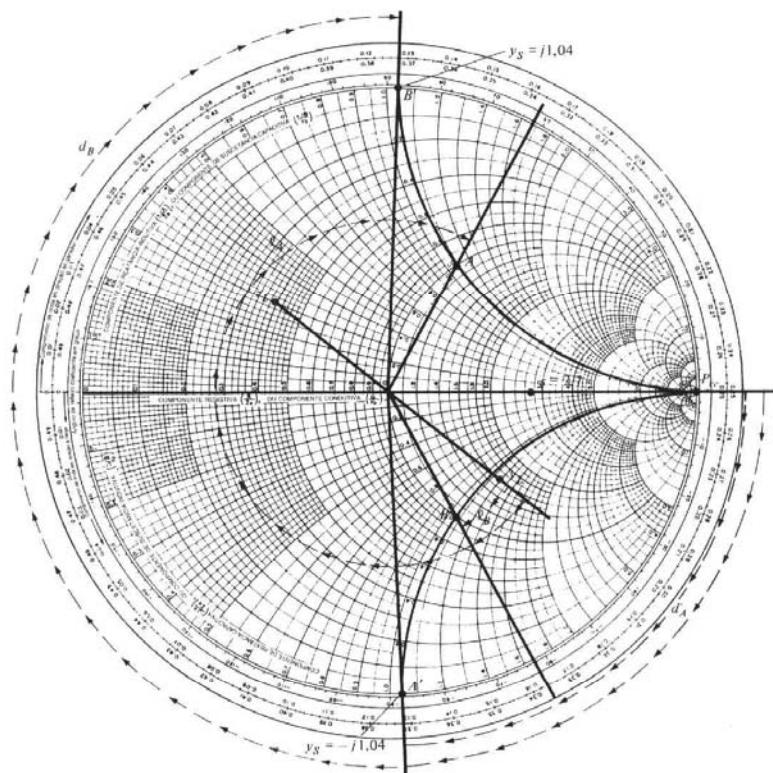


Figura 11.24 Referente ao Exemplo 11.7.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 11.7**

Uma linha de transmissão sem perdas de  $75 \Omega$  deve ser casada a uma carga de  $100 - j80 \Omega$  com um toco curto-circuitado. Calcule o comprimento do toco, a sua distância da carga e a sua admitância necessária.

**Resposta:**  $\ell_A = 0,093\lambda$ ,  $\ell_B = 0,272\lambda$ ,  $d_A = 0,126\lambda$ ,  $d_B = 0,374\lambda$ ,  $\pm j12,67 \text{ mS}$

## 11.7 TRANSIENTES EM LINHAS DE TRANSMISSÃO

Até aqui, em nossa discussão, consideramos que uma linha de transmissão opera em uma freqüência única. Em algumas aplicações práticas, tais como redes de computadores, sinais pulsados podem ser enviados pela linha. Utilizando-se a análise de Fourier, um pulso pode ser visto como uma superposição de ondas de várias freqüências. Portanto, o envio de um sinal pulsado em uma linha pode ser considerado como o envio simultâneo de ondas com diferentes freqüências.

Assim como na análise de circuitos, quando um gerador de pulsos ou uma bateria, conectado a uma linha de transmissão, é ligado, transcurre um certo tempo até que a corrente e a tensão na linha

atinja valores estacionários. Este tempo de transição é chamado *transiente*. O comportamento transiente, logo após o fechamento de um interruptor (ou devido à uma descarga elétrica), é usualmente analisado no domínio de freqüências usando transformadas de Laplace. Por conveniência, vamos tratar o problema no domínio do tempo.

Considere uma linha sem perdas de comprimento  $\ell$  e impedância característica  $Z_o$ , conforme mostrado na Figura 11.25(a). Suponha que a linha é acionada por um gerador de pulsos de tensão  $V_g$ , com impedância interna  $Z_g$ , localizado em  $z = 0$ , e terminada por uma carga  $Z_C$  puramente resistiva. No instante  $t = 0$  em que o interruptor é fechado, a corrente de partida "enxerga" somente  $Z_g$  e  $Z_o$ . Portanto, a situação inicial pode ser descrita pelo circuito equivalente da Figura 11.25(b). Desta figura, a corrente de partida em  $z = 0$  e  $t = 0^+$  é dada por

$$I(0, 0^+) = I_0 = \frac{V_g}{Z_g + Z_o} \quad (11.60)$$

e a tensão inicial é

$$V(0, 0^+) = V_o = I_0 Z_o = \frac{Z_o}{Z_g + Z_o} V_g \quad (11.61)$$

Depois que o interruptor é fechado, as ondas  $I^+ = I_0$  e  $V^+ = V_o$  se propagam em direção à carga com velocidade

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.62)$$

Como esta velocidade é finita, transcorre um certo tempo para que a onda, que se propaga no sentido positivo, alcance a carga e com ela interaja. A presença da carga não tem nenhum efeito sobre as ondas antes de transcorrer o tempo de trânsito, dado por

$$t_1 = \frac{\ell}{u} \quad (11.63)$$

Depois de  $t_1$  segundos, as ondas alcançam a carga. A tensão (ou corrente) na carga é a soma das ondas de tensão (ou de corrente) incidente e refletida. Portanto,

$$V(\ell, t_1) = V^+ + V^- = V_o + \Gamma_C V_o = (1 + \Gamma_C) V_o \quad (11.64)$$

e

$$I(\ell, t_1) = I^+ + I^- = I_0 - \Gamma_C I_0 = (1 - \Gamma_C) I_0 \quad (11.65)$$

onde  $\Gamma_C$  é o coeficiente de reflexão na carga dado pela equação (11.36), isto é,

$$\Gamma_C = \frac{Z_C - Z_o}{Z_C + Z_o} \quad (11.66)$$

As ondas refletidas  $V^- = \Gamma_C V_o$  e  $I^- = -\Gamma_C I_0$  viajam de volta para o gerador, adicionando-se às ondas  $V_o$  e  $I_0$  já existentes na linha. No tempo  $t = 2t_1$ , as ondas refletidas alcançam o gerador. Portanto,

$$V(0, 2t_1) = V^+ + V^- = \Gamma_G \Gamma_C V_o + (1 + \Gamma_C) V_o$$

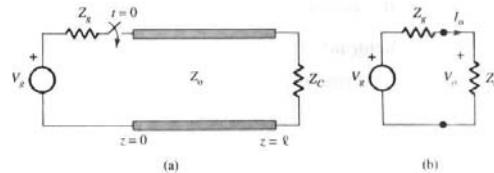


Figura 11.25 Transientes em uma linha de transmissão: (a) linha acionada por um gerador de pulsos; (b) circuito equivalente para  $z = 0$  e  $t = 0^+$ .

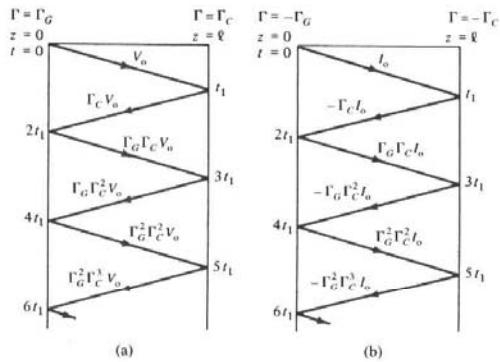


Figura 11.26 Diagrama de saltos para: (a) uma onda de tensão e (b) uma onda de corrente.

ou

$$V(0, 2t_1) = (1 + \Gamma_C + \Gamma_G \Gamma_C) V_o \quad (11.67)$$

e

$$I(0, 2t_1) = I^+ + I^- = -\Gamma_C(-\Gamma_G I_o) + (1 - \Gamma_C) I_o$$

ou

$$I(0, 2t_1) = (1 - \Gamma_C + \Gamma_C \Gamma_G) I_o \quad (11.68)$$

onde  $\Gamma_G$  é o coeficiente de reflexão no gerador, dado por

$$\Gamma_G = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} \quad (11.69)$$

Novamente, as ondas refletidas (na extremidade do gerador)  $V^+ = \Gamma_G \Gamma_C V_o$  e  $I^+ = \Gamma_G \Gamma_C I_o$  se propagam em direção à carga, continuando o processo até que toda a energia do pulso seja absorvida pelos resistores  $Z_g$  e  $Z_C$ .

Ao invés de acompanhar as ondas de tensão e de corrente de ida e de volta, é mais fácil levar em consideração as reflexões utilizando *diagramas de saltos*, também conhecidos como *diagramas de tela*. O diagrama de saltos consiste em uma linha em ziguezague indicando a posição da onda de tensão (ou de corrente) em relação à extremidade do gerador, conforme mostrado na Figura 11.26. No diagrama de saltos, a tensão (ou a corrente), em qualquer instante de tempo, pode ser determinada pela soma dos valores que aparecem no diagrama, acima daquele tempo.

**EXEMPLO 11.8**

Para a linha de transmissão da Figura 11.27, calcule e trace:

- a tensão nas extremidades da carga e do gerador para  $0 < t < 6 \mu s$ ;
- a corrente nas extremidades da carga e do gerador para  $0 < t < 6 \mu s$ .

**Solução:**

(a) Primeiro, calculamos os coeficientes de reflexão da tensão no gerador e na carga.

$$\Gamma_G = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma_C = \frac{Z_C - Z_o}{Z_C + Z_o} = \frac{200 - 50}{200 + 50} = \frac{3}{5}$$

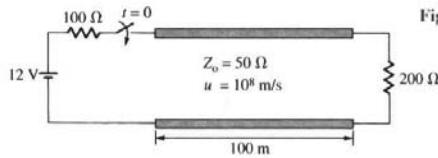


Figura 11.27 Referente ao Exemplo 11.8.

$$\text{O tempo de trânsito } t_1 = \frac{\ell}{u} = \frac{100}{10^8} = 1 \mu\text{s.}$$

A tensão inicial na extremidade do gerador é

$$V_o = \frac{Z_o}{Z_o + Z_g} V_g = \frac{50}{150} (12) = 4 \text{ V}$$

Os 4 volts são enviados para a carga. A subida do pulso chega na carga em  $t = t_1 = 1 \mu\text{s}$ . Uma parte do pulso,  $4(3/5) = 2.4 \text{ V}$ , é refletida de volta e alcança o gerador em  $t = 2t_1 = 2 \mu\text{s}$ . No gerador,  $2.4(1/3) = 0.8 \text{ V}$  é refletido e o processo continua. Todo o processo é melhor ilustrado pelo diagrama de saltos da tensão da Figura 11.28.

Do diagrama de saltos, podemos representar  $V(0, t)$  e  $V(\ell, t)$  em função do tempo, conforme mostrado na Figura 11.29. Da Figura 11.29, note que, conforme  $t \rightarrow \infty$ , as tensões tendem para o valor assintótico:

$$V_\infty = \frac{Z_C}{Z_C + Z_g} V_g = \frac{200}{300} (12) = 8 \text{ V}$$

Este resultado é esperado pela observação dos circuitos equivalentes para  $t = 0$  e  $t = \infty$ , apresentados na Figura 11.30 (para a demonstração, veja o Problema 11.46).

(b) Os coeficientes de reflexão da corrente nas extremidades do gerador e da carga são, respectivamente,  $-\Gamma_G = -1/3$  e  $-\Gamma_C = -3/5$ . A corrente inicial é

$$I_o = \frac{V_o}{Z_o} = \frac{4}{50} = 80 \text{ mA}$$

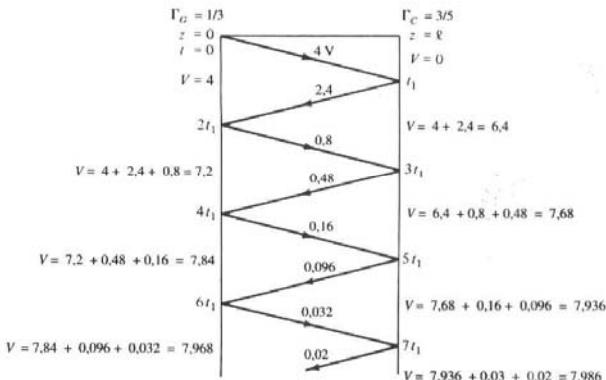


Figura 11.28 Diagrama de saltos da tensão referente ao Exemplo 11.8.

Novamente,  $I(0, t)$  e  $I(\ell, t)$  são facilmente obtidas do diagrama de saltos da corrente, conforme mostrado na Figura 11.31. Estas correntes são representadas na Figura 11.32. Note que  $I(\ell, t) = V(\ell, t)/Z_C$ . Portanto, a Figura 11.32(b) pode ser obtida tanto do diagrama de saltos da corrente da Figura 11.31 como pelo reescalonamento da Figura 11.29(b) através do fator  $1/Z_C = 1/200$ . Note que, a partir das Figuras 11.30(b) e 11.32, as correntes tendem para o valor assintótico:

$$I_\infty = \frac{V_g}{Z_g + Z_C} = \frac{12}{300} = 40 \text{ mA}$$

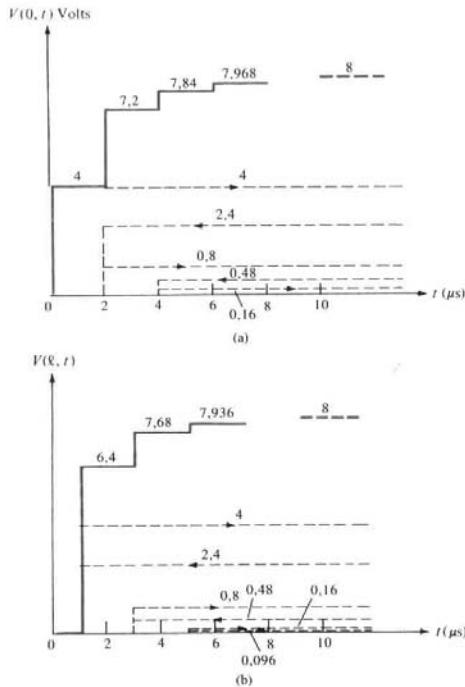


Figura 11.29 Tensão (fora de escala): (a) na extremidade do gerador; (b) na extremidade da carga.

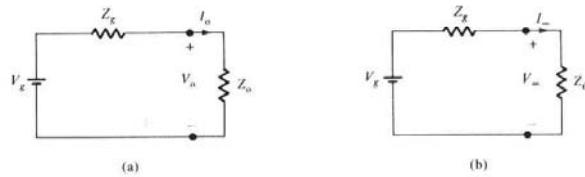


Figura 11.30 Circuitos equivalentes para a linha da Figura 11.27 em: (a)  $t = 0$  e (b)  $t = \infty$ .

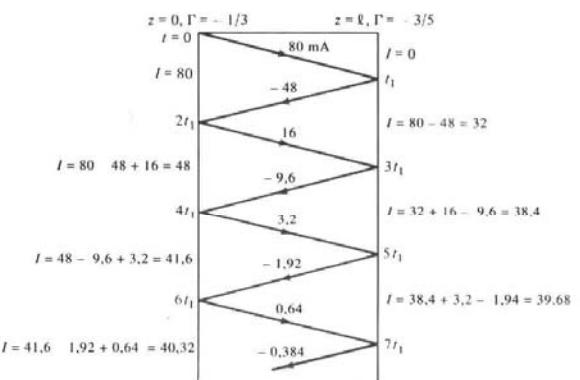


Figura 11.31 Diagrama de saltos da corrente para o Exemplo 11.8.

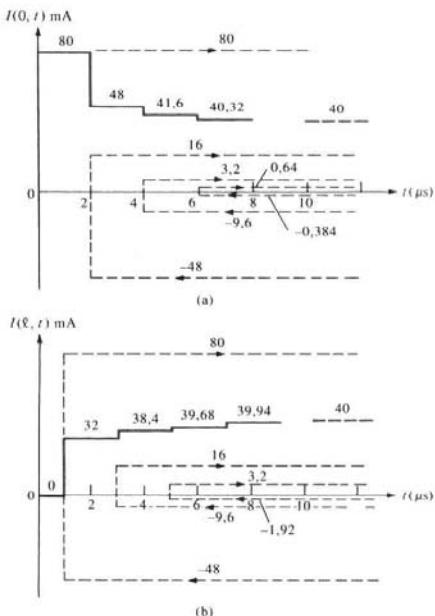


Figura 11.32 Corrente (fora de escala): (a) na extremidade do gerador; (b) na extremidade da carga, referente ao Exemplo 11.8.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 11.8**

Repita o Exemplo 11.8 para o caso em que a linha de transmissão está:

- (a) curto circuitada;
- (b) em circuito aberto.

**Resposta:** (a) Veja Figura 11.33.  
 (b) Veja Figura 11.34.

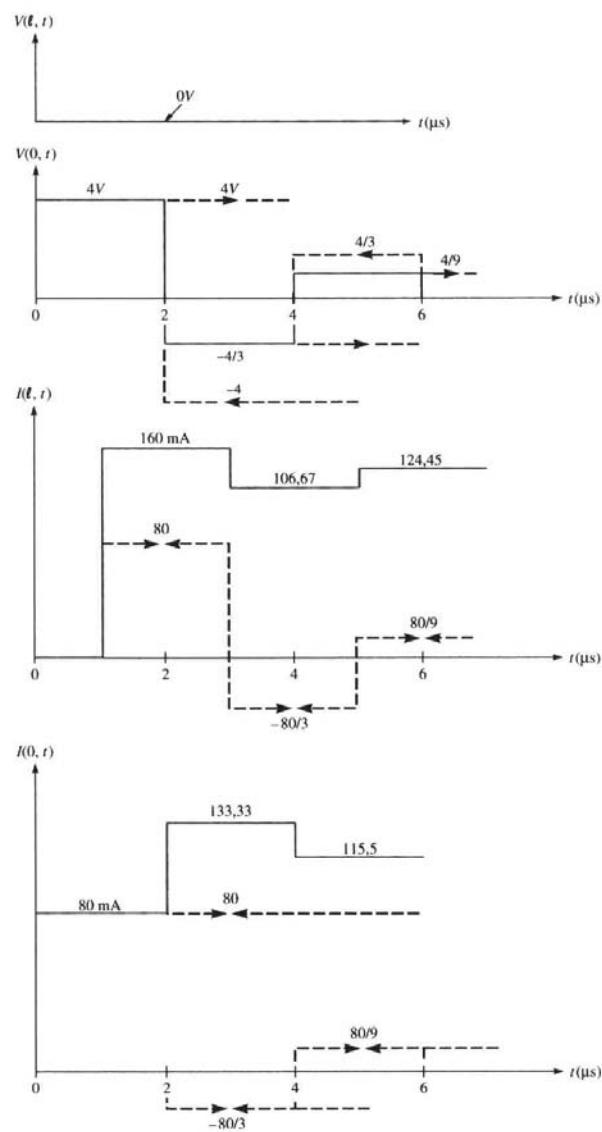


Figura 11.33 Referente ao Exercício Prático 11.8(a).

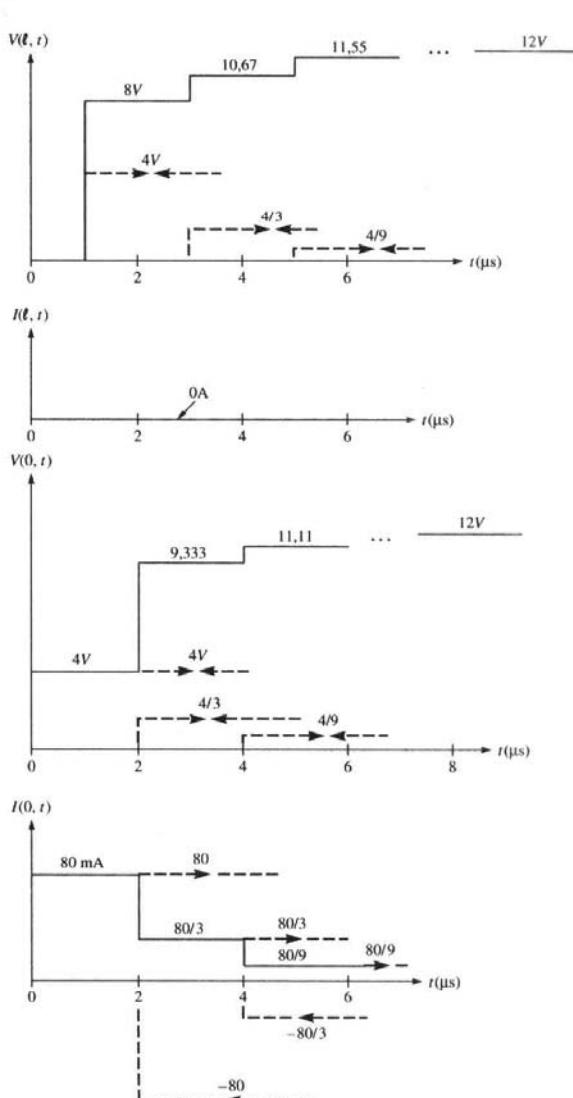


Figura 11.34 Referente ao Exercício Prático 11.8(b).

**EXEMPLO 11.9**

Uma linha de transmissão de  $75 \Omega$  e  $60 \text{ m}$  de comprimento é terminada por uma carga de  $100 \Omega$ . Se um pulso retangular de  $5 \mu\text{s}$  de largura e  $4 \text{ V}$  de amplitude é enviado por um gerador conectado à linha, represente  $I(0, t)$  e  $I(\ell, t)$  para  $0 < t < 15 \mu\text{s}$ . Tome  $Z_g = 25 \Omega$  e  $u = 0,1c$ .

**Solução:**

No exemplo anterior, ao ser ligada a bateria, é gerado na linha um degrau unitário, um pulso com largura infinita. Neste exemplo, o pulso tem um largura finita de  $5 \mu\text{s}$ . Vamos, primeiro, calcular os coeficientes de reflexão da tensão:

$$\Gamma_G = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} = -\frac{1}{2}$$

$$\Gamma_C = \frac{Z_C - Z_o}{Z_C + Z_o} = \frac{1}{7}$$

A tensão inicial e o tempo de trânsito são dados por

$$V_o = \frac{Z_o}{Z_o + Z_g} V_g = \frac{75}{100} (4) = 3 \text{ V}$$

$$t_1 = \frac{\ell}{u} = \frac{60}{0,1 (3 \times 10^8)} = 2 \mu\text{s}$$

O tempo que  $V_o$  leva para ir e voltar é  $2t_1 = 4 \mu\text{s}$ , que é menor que a duração do pulso de  $5 \mu\text{s}$ . Portanto, haverá superposição.

Os coeficientes de reflexão da corrente são:

$$-\Gamma_C = -\frac{1}{7} \quad \text{e} \quad -\Gamma_G = \frac{1}{2}$$

$$\text{A corrente inicial é } I_o = \frac{V_g}{Z_g + Z_o} = \frac{4}{100} = 40 \text{ mA.}$$

Se  $i$  e  $r$  representam, respectivamente, os pulsos incidente e refletido, na extremidade do gerador temos,

$$0 < t < 5 \mu\text{s}, \quad I_r = I_o = 40 \text{ mA}$$

$$4 < t < 9, \quad I_i = -\frac{1}{7} (40) = -5,714$$

$$I_r = \frac{1}{2} (-5,714) = -2,857$$

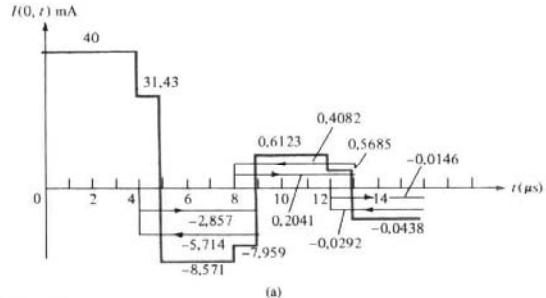
$$8 < t < 13, \quad I_i = -\frac{1}{7} (-2,857) = 0,4082$$

$$I_r = \frac{1}{2} (0,4082) = 0,2041$$

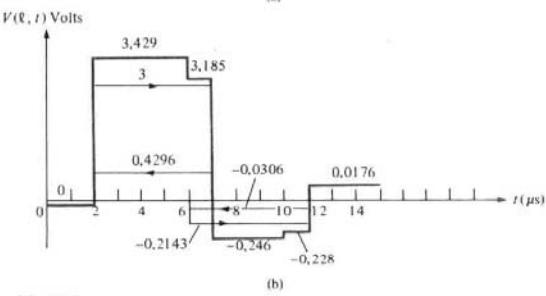
$$12 < t < 17, \quad I_i = -\frac{1}{7} (0,2041) = -0,0292$$

$$I_r = \frac{1}{2} (-0,0292) = -0,0146$$

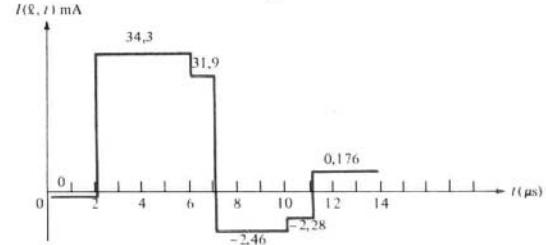
e, assim, sucessivamente. Assim, o gráfico de  $I(0, t)$  contra  $t$  é apresentado na Figura 11.35(a).



(a)



(b)



(c)

Figura 11.35 Referente ao Exemplo 11.9 (fora de escala).

Na extremidade da carga,

$$0 < t < 2 \mu s, \quad V = 0$$

$$2 < t < 7, \quad V_i = 3 \\ V_r = \frac{1}{7}(3) = 0,4296$$

$$6 < t < 11, \quad V_i = -\frac{1}{2}(0,4296) = -0,2143 \\ V_r = \frac{1}{7}(-0,2143) = -0,0306$$

$$10 < t < 14, \quad V_i = -\frac{1}{2}(-0,0306) = 0,0154$$

$$V_r = \frac{1}{7}(0,0154) = 0,0022$$

e, assim, sucessivamente. De  $V(\ell, t)$ , podemos obter  $I(\ell, t)$  como

$$I(\ell, t) = \frac{V(\ell, t)}{Z_o} = \frac{V(\ell, t)}{100}$$

Os gráficos de  $V(\ell, t)$  e  $I(\ell, t)$  são apresentados na Figura 11.35(b) e (c).

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 11.9

Repita o Exemplo 11.9 para o caso em que o pulso retangular é substituído pelo pulso triangular da Figura 11.36.

**Resposta:**  $(I_o)_{\max} = 100 \text{ mA}$ . Veja a Figura 11.37 para as formas de ondas de corrente.

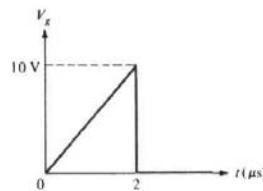


Figura 11.36 Pulso triangular para o Exercício Prático 11.9.

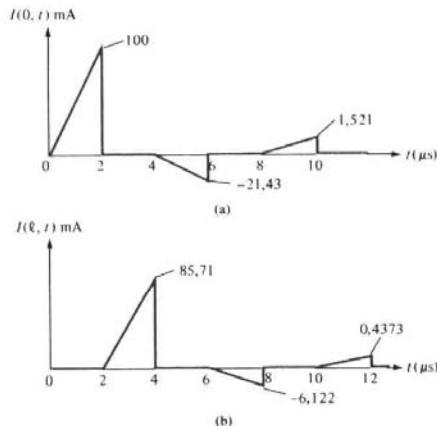


Figura 11.37 Ondas de corrente para o Exercício Prático 11.9.

## †11.8 LINHAS DE TRANSMISSÃO DE MICROFITAS

As linhas de transmissão de microfitas pertencem ao grupo de linhas conhecidas como linhas de transmissão de placas paralelas. Atualmente, elas são largamente utilizadas em eletrônica. Além de ser a forma de linha de transmissão mais usada em circuitos integrados de microondas, as microfitas são usadas como componentes de circuitos, como filtros, acopladores, ressoadores, antenas, etc. Em comparação com a linha coaxial, as linhas de microfita permitem maior flexibilidade e projetos mais compactos.

Uma linha de microfita consiste de um plano terra e uma fita condutora aberta, separados por um substrato dielétrico, conforme mostrado na Figura 11.38. Ela é construída pelo mesmo processo fotográfico utilizado nos circuitos integrados. A dedução analítica das propriedades características da linha é trabalhosa. Nesse estudo, vamos considerar somente aspectos básicos e fórmulas empíricas válidas para o cálculo da velocidade de fase, impedância intrínseca e perdas na linha.

Devido à estrutura aberta da linha de microfita, o campo EM não está confinado no dielétrico, mas está parcialmente presente no ar que circunda a linha, conforme mostrado na Figura 11.39. Deve-se que a frequência não seja muito alta, se propagará na linha uma onda que, para finalidades práticas, pode ser considerada uma onda TEM. Devido ao vazamento do campo no ar, a *permissividade relativa efetiva*  $\epsilon_{\text{ef}}$  é menor do que a permissividade relativa  $\epsilon_r$  do substrato. Um valor aproximado para  $\epsilon_{\text{ef}}$  pode ser obtido através de

$$\epsilon_{\text{ef}} = \frac{(\epsilon_r + 1)}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)}{2\sqrt{1 + 12h/w}} \quad (11.70)$$

onde  $w$  é a largura da linha e  $h$  é a espessura do substrato.

A impedância característica é dada pelas fórmulas aproximadas que seguem:

$$Z_o = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}} \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{h} \right), & w/h \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}} [w/h + 1,393 + 0,667 \ln(w/h + 1,444)]}, & w/h \geq 1 \end{cases} \quad (11.71)$$

A impedância característica de uma fita larga é, em geral, baixa, enquanto que a de uma fita estreita é alta.

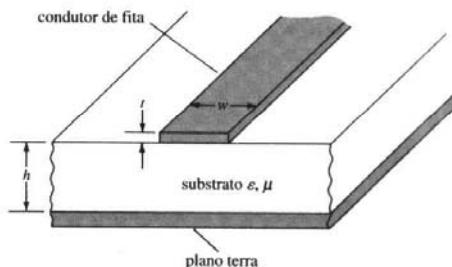


Figura 11.38 Linha de transmissão de microfitas.

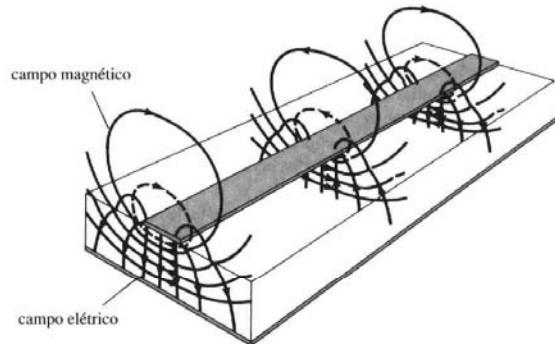


Figura 11.39 Configuração do campo EM de uma linha de microfita. Fonte: D. Roddy, *Microwave Technology*, 1986, com a permissão da Prentice Hall.

Para fins de projeto, se  $\epsilon_r$  e  $Z_0$  são conhecidos, a razão  $w/h$ , necessária para se obter um determinado  $Z_0$ , é dada por

$$\frac{w}{h} = \begin{cases} \frac{8e^A}{e^{2A} - 2}, & w/h < 2 \\ \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left[ \ln(B - 1) + 0,39 - \frac{0,61}{\epsilon_r} \right] \right\}, & w/h > 2 \end{cases} \quad (11.72)$$

onde

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r - 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left( 0,23 + \frac{0,11}{\epsilon_r} \right)$$

$$B = \frac{60\pi^2}{Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}$$

Conhecidos  $\epsilon_{ef}$  e  $Z_0$ , a constante de fase e a velocidade de fase de uma onda se propagando na microfita são dadas por

$$\beta = \frac{\omega \epsilon_{ef}}{c} \quad (11.74a)$$

$$u = \frac{c}{\epsilon_{ef}} \quad (11.74b)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. A atenuação (em dB/m) devido à condutividade finita dos condutores é dada por

$$\alpha_c \approx 8,686 \frac{R_s}{w Z_0} \quad (11.75)$$

onde  $R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta}$  é a resistência superficial do condutor. A atenuação (em dB/m) devido à perda no dielétrico é

$$\alpha_d = 27,3 \frac{(\epsilon_{\text{ef}} - 1) \epsilon_r \operatorname{tg} \theta}{(\epsilon_r - 1) \epsilon_{\text{ef}}} \quad (11.76)$$

onde  $\lambda = u/f$  é o comprimento de onda na linha e  $\operatorname{tg} \theta = \sigma/\omega \epsilon$  é a tangente de perdas do substrato. A constante de atenuação total é a soma da constante de atenuação devida aos condutores  $\alpha_c$  e a constante de atenuação devida ao dielétrico  $\alpha_d$ , isto é,

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d \quad (11.77)$$

Às vezes,  $\alpha_d$  é desprezível em comparação com  $\alpha_c$ . Embora ofereçam as vantagens de flexibilidade e baixo volume, as linhas de microfita não são utilizadas em linhas de transmissão longas devido à atenuação elevada.

#### EXEMPLO 11.10

Uma determinada linha de microfita tem quartzo fundido ( $\epsilon_r = 3,8$ ) como substrato. Se a razão entre a largura da linha e a espessura do substrato é  $w/h = 4,5$ , determine:

- a permissividade relativa efetiva do substrato;
- a impedância característica da linha;
- o comprimento de onda na linha em 10 GHz.

#### Solução:

- (a) Para  $w/h = 4,5$ , temos um fita larga. Da equação (11.70):

$$\epsilon_{\text{ef}} = \frac{4,8}{2} + \frac{2,8}{2} \left[ 1 + \frac{12}{4,5} \right]^{-1/2} = 3,131$$

- (b) Da equação (11.71):

$$Z_o = \frac{120\pi}{\sqrt{3,131[4,5 + 1,393 + 0,667 \ln(4,5 + 1,444)]}} = 9,576 \Omega$$

$$(c) \lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}} = \frac{3 \times 10^8}{10^{10}\sqrt{3,131}} = 1,69 \times 10^{-2} \text{ m} = 16,9 \text{ mm}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 11.10

Repita o Exemplo 11.10 para  $w/h = 0,8$ .

**Resposta:** (a) 2,75; (b) 84,03 Ω; (c) 18,09 mm.

**EXEMPLO 11.11**

Uma linha de microfita para 10 GHz tem os seguintes parâmetros:

$$h = 1 \text{ mm}$$

$$w = 0,8 \text{ mm}$$

$$\epsilon_r = 6,6$$

$$\tan \theta = 10^{-4}$$

$$\sigma_c = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$$

Calcule a atenuação devida às perdas nos condutores e no dielétrico.

**Solução:**

A razão  $w/h = 0,8$ . Portanto, das equações (11.70) e (11.71):

$$\epsilon_{\text{ef}} = \frac{7,2}{2} + \frac{5,6}{2} \left( 1 + \frac{12}{0,8} \right)^{-1/2} = 4,3$$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{4,3}} \ln \left( \frac{8}{0,8} + \frac{0,8}{4} \right) \\ = 67,17 \Omega$$

A resistência superficial do condutor é

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{\pi \times 10 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5,8 \times 10^7}} \\ = 2,609 \times 10^{-2} \Omega/\text{m}^2$$

Usando a equação (11.75), a constante de atenuação do condutor pode ser expressa como

$$\alpha_c = 8,686 \times \frac{2,609 \times 10^{-2}}{0,8 \times 10^{-3} \times 67,17} \\ = 4,217 \text{ dB/m}$$

Para obtermos a constante de atenuação do dielétrico, precisamos  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_{\text{ef}}}} = \frac{3 \times 10^8}{10 \times 10^9 \sqrt{4,3}} \\ = 1,447 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Aplicando a equação (11.76), obtemos:

$$\alpha_d = 27,3 \times \frac{3,492 \times 6,6 \times 10^{-4}}{5,6 \times 4,3 \times 1,447 \times 10^{-2}} \\ = 0,1706 \text{ dB/m}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 11.11**

Calcule a atenuação devida às perdas ôhmicas em 20 GHz para uma linha de microfita com condutores de cobre, de 2,5 mm de largura, sobre um substrato de alumina. Considere a impedância característica da linha como sendo 50 Ω.

**Resposta:** 2,564 dB/m.

## RESUMO

- Uma linha de transmissão é descrita pelos seus parâmetros distribuídos  $R$  (em  $\Omega/m$ ),  $L$  (em  $H/m$ ),  $G$  (em  $S/m$ ) e  $C$  (em  $F/m$ ). As fórmulas para o cálculo de  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  para a linha coaxial, bifilar e plana são apresentadas na Tabela 11.1.
- Os parâmetros distribuídos são utilizados em um modelo de circuito equivalente para representar um comprimento diferencial da linha. As equações das linhas de transmissão são obtidas pela aplicação das leis de Kirchhoff para um comprimento de linha que tende a zero. As ondas de tensão e de corrente na linha são

$$V(z, t) = V_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + V_o^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

$$I(z, t) = \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) - \frac{V_o^-}{Z_o} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

mostrando que, na linha, temos duas ondas se propagando em sentidos opostos.

- A impedância característica  $Z_o$  da linha (análoga à impedância intrínseca  $\eta$  para ondas planas em um meio) é dada por

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

e a constante de propagação  $\gamma$  (em  $1/\text{metro}$ ) é dada por

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

O comprimento de onda e a velocidade são:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}, \quad u = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda$$

- O caso geral é o da linha de transmissão com perdas ( $G \neq 0, R \neq 0$ ), considerado acima. Para uma linha sem perdas,  $R = 0, G = 0$ . Para uma linha sem distorção,  $R/L = G/C$ . É desejável que linhas de transmissão de potência sejam sem perdas e linhas telefônicas sem distorção.
- O coeficiente de reflexão da tensão na extremidade da carga é definido como

$$\Gamma_C = \frac{V_o^-}{V_o^+} = \frac{Z_C - Z_o}{Z_C + Z_o}$$

e a relação de onda estacionária é

$$s = \frac{1 + |\Gamma_C|}{1 - |\Gamma_C|}$$

onde  $Z_C$  é a impedância da carga.

- Em qualquer ponto da linha, a relação entre o fasor tensão e o fasor corrente é a impedância nesse ponto olhando para a carga e será a impedância de entrada da linha se este ponto estiver no início da linha. Para uma linha com perdas,

$$Z(z) = \frac{V_s(z)}{I_s(z)} = Z_{ent} = Z_o \left[ \frac{Z_C + Z_o \operatorname{tgh} \gamma \ell}{Z_o + Z_C \operatorname{tgh} \gamma \ell} \right]$$

onde  $\ell$  é a distância da carga neste ponto. Para uma linha sem perdas ( $\alpha = 0$ ),  $\operatorname{tgh} \gamma \ell = j \operatorname{tg} \beta \ell$ ; para uma linha em curto,  $Z_C = 0$ . Para uma linha aberta,  $Z_C = \infty$ . E para uma linha casada,  $Z_C = Z_o$ .

- A carta de Smith é um método gráfico de se obter características da linha, tais como  $\Gamma$ ,  $s$  e  $Z_{ent}$ . Ela é construída dentro de um círculo de raio unitário e está baseada na fórmula para o cálculo de  $\Gamma_C$ , dada acima. Para cada  $r$  e  $x$ , ela tem dois círculos explícitos (os círculos de resistência e de reatância) e um círculo implícito (círculo de  $s$  constante). A carta é um meio conveniente para determinar a posição de um sintonizador de toco simples e seu comprimento. É também utilizada com a linha fendida para determinar o valor desconhecido de uma impedância de carga.

8. Quando uma tensão contínua é aplicada subitamente à entrada de uma linha, um pulso se propaga para frente e para traz na linha. O comportamento transiente é analisado através do diagrama de saltos.
9. Linhas de transmissão de microfita são úteis em circuitos integrados de microondas. Foram apresentadas fórmulas úteis para a construção de linhas de microfita e determinação de perdas na linha.

## QUESTÕES DE REVISÃO

**11.1** Quais das afirmativas seguintes não são verdadeiras para os parâmetros de linha  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$ ?

- (a)  $R$  e  $L$  são elementos em série.
- (b)  $G$  e  $C$  são elementos em paralelo.
- (c)  $G = \frac{1}{R}$
- (d)  $LC = \mu\epsilon$  e  $RG = \sigma\epsilon$ .
- (d) Tanto  $R$  quanto  $G$  dependem da condutividade dos condutores que formam a linha.
- (e) Somente  $R$  depende explicitamente da frequência.
- (f) Os parâmetros não são localizados, mas distribuídos.

**11.2** Para uma linha de transmissão com perdas, a impedância característica da linha não depende:

- (a) da frequência de operação da linha;
- (b) do comprimento da linha;
- (c) da carga que termina a linha;
- (d) da condutividade dos condutores;
- (e) da condutividade do dielétrico que separa os condutores.

**11.3** Qual das seguintes condições não garante uma linha de transmissão sem distorção?

- (a)  $R = 0 = G$ .
- (b)  $RC = GL$ .
- (c) Intervalo de frequências muito baixas ( $R \gg \omega L$ ,  $G \gg \omega C$ ).
- (d) Intervalo de frequências muito altas ( $R \ll \omega L$ ,  $G \ll \omega C$ ).

**11.4** Quais das afirmativas que seguem não são verdadeiras para uma linha sem perdas?

- (a)  $Z_{ent} = -jZ_0$  para uma linha curto circuitada com  $\ell = \lambda/8$ .
- (b)  $Z_{ent} = j\infty$  para uma linha curto circuitada com  $\ell = \lambda/4$ .
- (c)  $Z_{ent} = jZ_0$  para uma linha aberta com  $\ell = \lambda/2$ .
- (d)  $Z_{ent} = Z_0$  para uma linha casada.
- (e) A meio comprimento de onda da carga,  $Z_{ent} = Z_C$ , e esse valor se repete a partir daí a cada meio comprimento de onda.

**11.5** Uma linha de transmissão sem perdas, de 50 cm de comprimento, com  $L = 10 \mu\text{H/m}$  e  $C = 40 \text{ pF/m}$ , está operando em 30 MHz. O seu comprimento elétrico é:

- (a)  $20\lambda$
- (b)  $0,2\lambda$
- (c)  $108^\circ$
- (d)  $40\pi$
- (e) Nenhum dos valores acima

**11.6** Case as impedâncias normalizadas que seguem com os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* sobre a carta de Smith da Figura 11.40.

- |  |   |
|--|---|
| (i) $0 + j0$   | (ii) $1 + j0$   |
| (iii) $0 - j1$   | (iv) $0 + jl$   |
| (v) $\infty + j\infty$                                   | (vi) $\left[ \frac{Z_{\text{ent}}}{Z_0} \right]_{\min}$ |
| (vii) $\left[ \frac{Z_{\text{ent}}}{Z_0} \right]_{\max}$ | (viii) Carga casada ( $\Gamma = 0$ )                    |

**11.7** Uma linha de transmissão sem perdas de 500 metros é terminada por uma carga localizada no ponto *P* na carta de Smith da Figura 11.41. Se  $\lambda = 150$  m, quantos máximos de tensão existem na linha?

- (a) 7
- (b) 6
- (c) 5
- (d) 3
- (e) Nenhum

**11.8** Marque verdadeiro (V) ou falso (F) em cada uma das afirmativas que seguem.

- (a) Todos os círculos  $r$  e  $x$  passam pelo ponto  $(\Gamma_r, \Gamma_i) = (1,0)$ .
- (b) Toda a impedância se repete a cada  $\lambda/4$  na carta de Smith.
- (c) Um círculo  $s = 2$  é o mesmo que um círculo  $|\Gamma| = 0,5$  na carta de Smith.
- (d) O princípio básico de todo o sistema de casamento é a eliminação da onda refletida entre a fonte e o dispositivo de casamento.
- (e) A linha fendida é somente usada para determinar  $Z_c$ .
- (f) Em qualquer ponto de uma linha de transmissão, o coeficiente de reflexão da corrente é o inverso do coeficiente de reflexão da tensão naquele ponto.

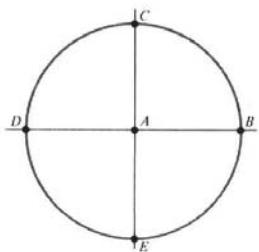


Figura 11.40 Referente a Questão de Revisão 11.6.

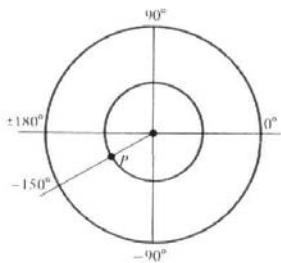


Figura 11.41 Referente à Questão de Revisão 11.7.

**11.9** Em uma linha no ar, são encontrados máximos adjacentes em 12,5 cm e 37,5 cm. A freqüência de operação é:

- (a) 1,5 GHz
- (b) 600 MHz
- (c) 300 MHz
- (d) 1,2 GHz

**11.10** Dois pulsos idênticos, cada um com amplitude de 12 V e duração de  $2 \mu\text{s}$ , incidem, em  $t = 0$ , em uma linha de transmissão de 400 metros de comprimento terminada em uma carga. Se os dois pulsos estão separados por  $3 \mu\text{s}$  (semelhante ao caso da Figura 11.53) e  $u = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$ , em que momento a contribuição do segundo pulso para  $V_c(\ell, t)$  começa a se sobrepor à contribuição do primeiro pulso?

- (a)  $t = 0,5 \mu\text{s}$
- (b)  $t = 2 \mu\text{s}$
- (c)  $t = 5 \mu\text{s}$
- (d)  $t = 5,5 \mu\text{s}$
- (e)  $t = 6 \mu\text{s}$

*Respostas:* 11.1c,d,e; 11.2b,c; 11.3c; 11.4a,c; 11.5c; 11.6 (i) D,B; (ii) A; (iii) E; (iv) C; (v) B; (vi) D; (vii) B; (viii) A; 11.7a; 11.8 (a) V; (b) F; (c) F; (d) V; (e) F; (f) F; 11.9b; 11.10e.

### PROBLEMAS

**11.1** Uma linha de transmissão planar, preenchida com ar, com  $w = 30 \text{ cm}$ ,  $d = 1,2 \text{ cm}$  e  $t = 3 \text{ mm}$ , tem placas condutoras com  $\epsilon_r = 7 \times 10^7 \text{ S/m}$ . Calcule  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e  $G$  em 500 MHz.

**11.2** Os fios de conexão de cobre de um diodo têm 16 mm de comprimento e raio de 0,3 mm. Eles estão separados por uma distância de 2 mm, conforme mostrado na Figura 11.42. Encontre a capacidade entre os fios e a resistência ca em 10 MHz.

**\*11.3** Na Seção 11.3, foi mencionado que o circuito equivalente da Figura 11.5 não é o único possível. Mostre que as equações (11.4) e (11.6) permanecem as mesmas se forem utilizados os circuitos equivalentes tipo  $\Pi$  e tipo T mostrados na Figura 11.43.

**11.4** Uma linha planar sem perdas de  $78 \Omega$  foi projetada, mas não alcançou seus objetivos. Que fração da largura da fita deve ser adicionada ou removida para se alcançar a impedância característica de  $75 \Omega$ ?

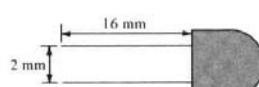


Figura 11.42 O diodo do Problema 11.2.

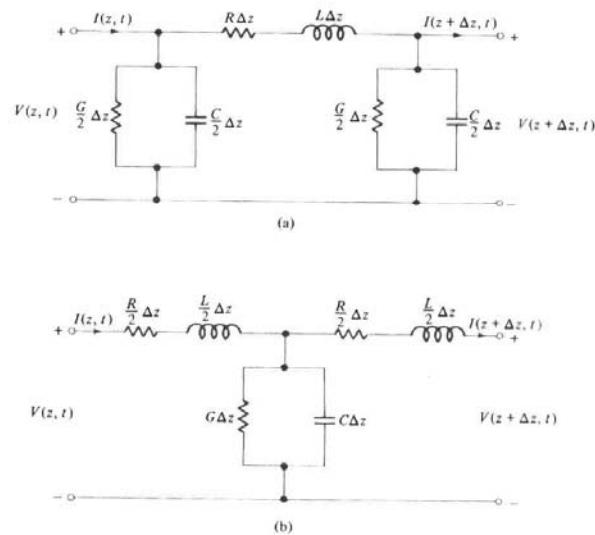


Figura 11.43 Referente ao problema 11.3: (a) circuito equivalente tipo Π; (b) circuito equivalente tipo T.

**11.5** Uma linha telefônica tem os seguintes parâmetros:

$$R = 40 \Omega/m \quad G = 400 \mu S/m, \quad L = 0,2 \mu H/m, \quad C = 0,5 nF/m$$

- (a) Se a linha opera em 10 MHz, calcule a impedância característica  $Z_o$  e a velocidade  $u$ . (b) Depois de quantos metros a tensão na linha cai de 30 dB?

**11.6** Uma linha sem distorção, que opera em 120 MHz, tem  $R = 20 \Omega/m$ ,  $L = 0,3 \mu H/m$  e  $C = 63 pF/m$ . (a) Determine  $\gamma$ ,  $u$  e  $Z_o$ . (b) Que distância se propagará uma onda de tensão antes que sua amplitude caia para 20% do valor inicial? (c) Que distância a onda deve se propagar para sofrer uma mudança de fase de  $45^\circ$ ?

**11.7** Mostre que para uma linha bifilar sem perdas:

$$(a) \text{ a velocidade de fase } u = c = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$(b) \text{ a impedância característica } Z_o = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}.$$

O resultado do item (a) é verdadeiro para outras linhas de transmissão sem perdas?

**11.8** O par trançado, que pode ser aproximado pela linha bifilar, é muito utilizado na indústria telefônica. Considere uma linha formada por dois fios de cobre de 0,12 cm de diâmetro cuja separação entre centros é de 0,32 cm. Se os fios estão separados por um dielétrico com  $\epsilon = 3,5\epsilon_0$ , encontre  $L$ ,  $C$  e  $Z_o$ .

**11.9** Uma linha sem perdas tem uma onda de tensão dada por

$$V(z, t) = V_o \sin(\omega t - \beta z)$$

Encontre a onda de corrente correspondente.

**11.10** Em uma linha sem distorção, a onda de tensão é dada por

$$V(\ell') = 120e^{0.0025\ell'} \cos(10^8 t + 2\ell') + 60e^{-0.0025\ell'} \cos(10^8 t - 2\ell')$$

onde  $\ell'$  é a distância a partir da carga. Se  $Z_c = 300 \Omega$ , encontre: (a)  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $u$ ; (b)  $Z_o$  e  $I(\ell')$ .

**11.11** (a) Mostre que um coeficiente de transmissão pode ser definido como

$$\tau_C = \frac{V_C}{V_o^+} = 1 + \Gamma_C = \frac{2Z_C}{Z_C + Z_o}$$

(b) Encontre  $\tau_C$  quando a linha é terminada por: (i) uma carga cujo valor é  $nZ_o$ ; (ii) um circuito aberto; (iii) um curto-circuito; (iv)  $Z_c = Z_o$  (linha casada).

**11.12** Uma linha coaxial com 5,6 m de comprimento tem como parâmetros distribuídos  $R = 6,5 \Omega/m$ ,  $L = 3,4 \mu H/m$ ,  $G = 8,4 \mu S/m$  e  $C = 21,5 \text{ pF/m}$ . Se a linha opera em 2 MHz, calcule a impedância característica e o tempo de propagação entre os extremos da linha.

**11.13** Uma linha de transmissão sem perdas, operando em 4,5 GHz, tem  $L = 2,4 \mu H/m$  e  $Z_o = 85 \Omega$ . Calcule a constante de fase  $\beta$  e a velocidade de fase  $u$ .

**11.14** Um cabo coaxial de  $50 \Omega$  alimenta uma antena dipolo cuja impedância é  $75 + j20 \Omega$ . Encontre  $\Gamma$  e  $s$ .

**11.15** Mostre que uma linha de transmissão com perdas, de comprimento  $\ell$ , tem uma impedância de entrada  $Z_{ce} = Z_o \operatorname{tgh} \gamma \ell$  quando curto circuitada e  $Z_{ca} = Z_o \operatorname{cotgh} \gamma \ell$  quando em circuito aberto. Confirme as equações (11.37) e (11.39).

**11.16** Encontre a impedância de entrada do cabo coaxial curto-circuitado, da Figura 11.44, se  $Z_o = 65 + j38 \Omega$ ,  $\gamma = 0,7 + j2,5 /m$ ,  $\ell = 0,8 \text{ m}$ .

**11.17** Para a linha de transmissão sem perdas da Figura 11.45: (a) encontre  $\Gamma$  e  $s$ ; (b) determine a impedância  $Z_{ent}$  no gerador.

**11.18** Uma linha de transmissão de quarto de onda sem perdas de  $100 \Omega$  é terminada por uma carga  $Z_c = 210 \Omega$ . Se a tensão na extremidade de recepção é 80 V, qual é a tensão na extremidade de emissão?

**11.19** Uma linha sem perdas de  $500 \Omega$  tem  $V_c = 10e^{j25^\circ} \text{ V}$  e  $Z_c = 50e^{j30^\circ}$ . Encontre a corrente a  $\lambda/8$  da carga.

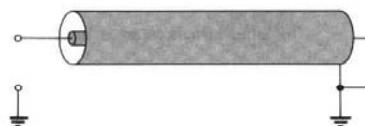


Figura 11.44 Referente ao Problema 11.16.

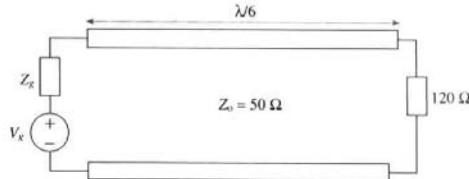


Figura 11.45 Referente ao Problema 11.17.

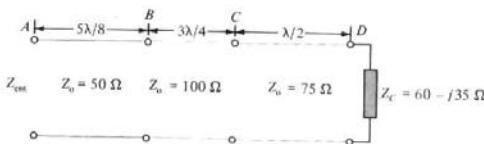


Figura 11.46 Referente ao Problema 11.22.

**11.20** Uma linha sem perdas de  $60 \Omega$  é conectada a um gerador, que tem  $V_g = 10\angle 0^\circ V_{rms}$  e  $Z_g = 50 - j40 \Omega$ , e é terminada por uma carga de  $j40 \Omega$ . Se a linha tem um comprimento de 100 metros e  $\beta = 0,25 \text{ rad/m}$ , calcule  $Z_{ent}$  e  $V$ :

- na extremidade de emissão;
- na extremidade de recepção;
- a 4 m da carga;
- a 3 m do gerador.

**11.21** Uma linha de transmissão sem perdas, com impedância característica de  $75 \Omega$ , é terminada por uma carga de  $120 \Omega$ . A linha tem um comprimento de  $1,25 \lambda$ . Se a linha for energizada por uma fonte de  $100 \text{ V (rms)}$  com uma impedância interna de  $50 \Omega$ , determine: (a) a impedância de entrada e (b) a amplitude da tensão na carga.

**\*11.22** Três linhas de transmissão estão conectadas conforme a Figura 11.46. Determine  $Z_{ent}$ .

**\*11.23** Considere o quadripolo mostrado na Figura 11.47(a). A relação entre as variáveis de entrada e de saída pode ser escrita, em forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Mostre que, para a linha com perdas da Figura 11.47(b), a matriz  $ABCD$  é:

$$\begin{bmatrix} \cosh \gamma \ell & Z_0 \operatorname{senh} \gamma \ell \\ \frac{1}{Z_0} \operatorname{senh} \gamma \ell & \cosh \gamma \ell \end{bmatrix}$$

**11.24** Uma linha sem perdas de  $50 \Omega$  tem 4,2 metros de comprimento. Para a freqüência de operação de 300 MHz, a impedância no centro da linha é  $80 - j60 \Omega$ . Encontre a impedância de entrada no gerador e o coeficiente de reflexão da tensão na carga. Considere  $u = 0,8c$ .

- 11.25** Uma linha de  $60 \Omega$  no ar, operando em 20 MHz, tem 10 metros de comprimento. Se a impedância de entrada é  $90 + j150 \Omega$ , calcule  $Z_c$ ,  $\Gamma$  e  $s$ .
- 11.26** Uma linha de transmissão de  $75 \Omega$  é terminada por uma carga de  $120 + j80 \Omega$ . (a) Encontre  $\Gamma$  e  $s$ .  
(b) Determine a que distância da carga a impedância é puramente resistiva.
- 11.27** Uma linha de transmissão de  $75 \Omega$  é terminada por uma carga de impedância  $Z_c$ . Se a linha tem um comprimento de  $5\lambda/8$ , calcule  $Z_{\text{ent}}$  quando: (a)  $Z_c = j45 \Omega$ ; (b)  $Z_c = 25 - j65$ .
- 11.28** Determine a impedância de entrada normalizada a  $\lambda/8$  da carga se: (a) a impedância normalizada da linha é  $2 + j$ ; (b) a admitância normalizada é  $0,2 - j0,5$ ; (c) o coeficiente de reflexão na carga é  $0,3 + j0,4$ .
- 11.29** Uma linha de transmissão é terminada por uma carga com admitância  $Y_c = (0,6 + j0,8)/Z_o$ . Encontre a impedância normalizada a  $\lambda/6$  da carga.
- 11.30** Uma linha de transmissão de  $80 \Omega$ , que opera em 12 MHz, é terminada por uma carga  $Z_c$ . A 22 metros da carga, a impedância de entrada é  $100 - j120 \Omega$ . Se  $u = 0,8c$ :
- calcule  $\Gamma_c$ ,  $Z_{\text{ent,max}}$  e  $Z_{\text{ent,min}}$ ;
  - calcule  $Z_c$ ,  $s$  e a impedância de entrada a 28 metros da carga;
  - quanto  $Z_{\text{ent,max}}$  e  $Z_{\text{ent,min}}$  existem entre a carga e a impedância de entrada de  $100 - j120 \Omega$ ?
- 11.31** Uma antena, conectada a uma linha sem perdas de  $150 \Omega$ , produz um relação de onda estacionária de 2,6. Se as medidas indicam que os máximos de tensão estão separados por 120 cm e que o último máximo está a 40 cm da antena, calcule:
- a frequência de operação;
  - a impedância da antena;
  - o coeficiente de reflexão. Suponha que  $u = c$ .
- 11.32** A relação de onda estacionária observada em uma linha de transmissão sem perdas de  $100 \Omega$  é 8. Se o primeiro máximo de tensão ocorre a  $0,3 \lambda$  da carga, calcule a impedância da carga e o coeficiente de reflexão de tensão na carga.
- 11.33** Uma linha de transmissão de  $50 \Omega$  é terminada por uma carga com impedância desconhecida. A relação de onda estacionária na linha é  $s = 2,4$  e um máximo de tensão é observado a  $\lambda/8$  da carga.  
(a) Determine a impedância da carga. (b) Qual a distância entre o primeiro mínimo de tensão e a carga?
- 11.34** Uma linha sem perdas de  $75 \Omega$  é terminada por uma impedância de carga desconhecida  $Z_c$ . A uma distância  $0,2 \lambda$  da carga, a tensão é  $V_s = 2 + j V$  e a corrente é  $10 \text{ mA}$ . Encontre  $Z_c$  e  $s$ .

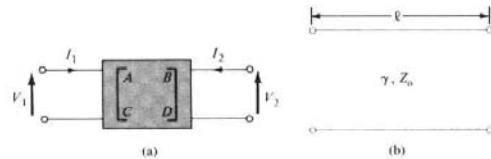


Figura 11.47 Referente ao Problema 11.23.

**11.35** Dois transformadores de  $\lambda/4$  são usados, em cascata, para conectar uma linha de  $50 \Omega$  a uma carga de  $75 \Omega$ , conforme a Figura 11.48.

- Determine a impedância característica  $Z_{o1}$  se  $Z_{o2} = 30 \Omega$  e se não houver onda refletida à esquerda de  $A$ .
- Se os melhores resultados são obtidos quando

$$\left[ \frac{Z_o}{Z_{o1}} \right]^2 = \frac{Z_{o1}}{Z_{o2}} = \left[ \frac{Z_{o2}}{Z_C} \right]^2$$

determine  $Z_{o1}$  e  $Z_{o2}$ .

**11.36** Duas antenas idênticas, cada uma com impedância de entrada de  $74 \Omega$ , são alimentadas por três linhas de transmissão sem perdas, de quarto de onda, de  $50 \Omega$ , idênticas, conforme mostrado na Figura 11.49. Calcule a impedância de entrada na extremidade da fonte.

**11.37** Se a linha do problema anterior é conectada a uma fonte de tensão de  $120 \text{ V}$  com impedância interna de  $80 \Omega$ , calcule a potência média fornecida a cada antena.

**11.38** Considere as três linhas sem perdas da Figura 11.50. Se  $Z_o = 50 \Omega$ , calcule:

- $Z_{em}$  na entrada da linha 1;
- $Z_{em}$  na entrada da linha 2;
- $Z_{em}$  na entrada da linha 3.

**11.39** Uma seção de uma linha de transmissão sem perdas é colocada em paralelo com uma linha principal, conforme a Figura 11.51. Se  $\ell_1 = \lambda/4$  e  $\ell_2 = \lambda/8$  e  $\ell_3 = 7\lambda/8$ , encontre  $y_{em1}$ ,  $y_{em2}$  e  $y_{em3}$ , sabendo que  $Z_o = 100 \Omega$  e  $Z_C = 200 + j150 \Omega$ . Repita o cálculo para o caso em que a linha em paralelo está em circuito aberto.

**11.40** Deseja-se casar um linha de  $50 \Omega$  a uma carga com impedância de  $60 - j50 \Omega$ . Projete um toco de  $50 \Omega$  para esta finalidade. Encontre o comprimento da linha e sua distância da carga.

**11.41** Um toco de  $0,12 \lambda$  de comprimento é usado para casar uma linha sem perdas de  $60 \Omega$  a uma carga. Se o toco está localizado a  $0,3 \lambda$  da carga, calcule:

- a impedância da carga  $Z_C$ ;
- o comprimento de um toco alternativo e sua distância da carga;
- a relação de onda estacionária observada entre o toco e a carga.

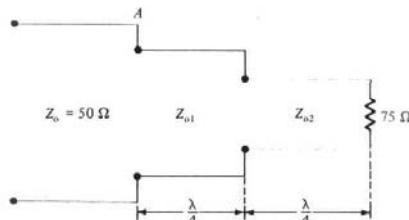


Figura 11.48 Transformador de duas seções, referente ao Problema 11.35.

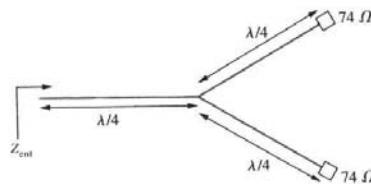


Figura 11.49 Referente aos Problemas 11.36 e 11.37.

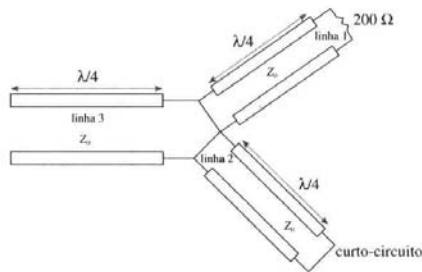


Figura 11.50 Referente ao Problema 11.38.

**11.42** Medidas em um linha sem perdas indicam  $s = 4,2$ , com o primeiro máximo de tensão a  $\lambda/4$  da carga. Determine a que distância da carga deve ser colocado um toco curto-circuitado e calcule o seu comprimento.

**11.43** Uma linha sem perdas de  $60 \Omega$ , terminada por uma carga  $Z_C$ , tem uma onda de tensão conforme a Figura 11.52. Encontre  $s$ ,  $\Gamma$  e  $Z_C$ .

**11.44** As medidas que seguiram foram realizadas em uma linha fenda de  $50 \Omega$ . Com carga  $s = 3,2$  e  $V_{\min}$  consecutivos a 12 cm e a 32 cm (os valores maiores observados para o lado da carga). Com curto-circuito,  $V_{\min}$  ocorre a 21 cm. Encontre a freqüência de operação e a impedância da carga.

**11.45** Uma linha fenda de  $50 \Omega$  no ar é usada para medir uma impedância de carga. Mínimos adjacentes foram encontrados a 14 cm e a 22,5 cm da carga, quando a carga desconhecida está conectada, e  $V_{\max} = 0,95$  V e  $V_{\min} = 0,45$  V. Quando a carga é substituída por um curto-circuito, os mínimos se deslocam 3,2 cm em direção à carga. Determine  $s$ ,  $\Gamma$  e  $Z_C$ .

**\*\*11.46** Mostre que, para uma tensão contínua  $V_g$  conectada em  $t = 0$  (veja Figura 11.30), os valores assintóticos ( $t \ll \ell/u$ ) de  $V(\ell, t)$  e  $I(\ell, t)$  são:

$$V_\infty = \frac{V_g Z_C}{Z_g + Z_C} \quad \text{e} \quad I_\infty = \frac{V_g}{Z_g + Z_C}$$

**11.47** Uma linha sem perdas de  $60 \Omega$  é conectada a um gerador de pulsos de  $40 \Omega$ . A linha tem 6 m de comprimento e é terminada por uma carga de  $100 \Omega$ . Se um pulso retangular de  $5 \mu s$  e 20 V de amplitude é enviado pela linha, encontre  $V(0,t)$  e  $I(\ell,t)$  para  $0 \leq t \leq 10 \mu s$ . Considere  $u = 3 \times 10^8$  m/s.

**11.48** O interruptor da Figura 11.53 é fechado em  $t = 0$ . Trace a tensão e a corrente à direita do interruptor para  $0 < t < 6 \ell/u$ . Considere  $Z_s = 50 \Omega$  e  $\ell/u = 2 \mu s$ . Suponha que a linha é sem perdas.

**11.49** Trace  $V(\ell,t)$  e  $I(\ell,t)$  para  $0 < t < 5 \mu s$ , para o sistema mostrado na Figura 11.54.

**\*11.50** Refira-se à Figura 11.55, onde  $Z_s = 25 \Omega$ ,  $Z_o = 50 \Omega$ ,  $Z_C = 150 \Omega$ ,  $\ell = 150$  m e  $u = c$ . Se o pulso mostrado na Figura 11.56 incide na linha em  $t = 0$ :

- trace os diagramas de salto de tensão e de corrente;
- determine  $V(0,t)$ ,  $V(\ell,t)$ ,  $I(0,t)$  e  $I(\ell,t)$  para  $0 < t < 8 \mu s$ .

**11.51** Uma linha de microfita tem 1 cm de espessura e 1,5 cm de largura. A fita condutora é feita de bronze ( $\sigma_r = 1,1 \times 10^7$  S/m), enquanto que o material do substrato é um dielétrico com  $\epsilon_r = 2,2$  e  $\operatorname{tg} \theta = 0,002$ . Se a linha opera em 2,5 GHz, encontre: (a)  $Z_o$  e  $\epsilon_{ef}$ ; (b)  $\alpha_c$  e  $\alpha_d$ ; (c) a distância ao longo da linha para que a onda diminua de 20 dB.

**11.52** Uma linha de microfita de  $50 \Omega$  tem um deslocamento de fase de  $45^\circ$  em 8 GHz. Se a espessura do substrato  $h = 8$  mm, com  $\epsilon_r = 4,6$ , encontre: (a) a largura da fita condutora; (b) o comprimento da linha de microfita.

**11.53** Um substrato de alumina ( $\epsilon = 9,6\epsilon_0$ ), de 2 mm de espessura, é usado na construção de um circuito de microfita. Se o projetista pode escolher a largura da fita entre 0,4 mm a 8,0 mm, qual é o intervalo de variação da impedância característica da linha?

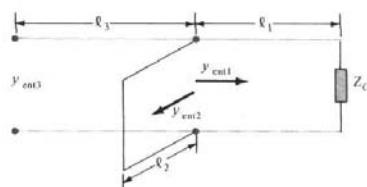


Figura 11.51 Referente ao Problema 11.39.

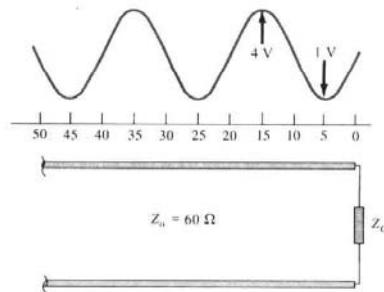


Figura 11.52 Referente ao Problema 11.43.

**11.54** Projete uma linha de microfita de  $75 \Omega$  em um substrato de 1,2 mm de espessura de duróide ( $\epsilon_r = 2,3$ ). Encontre a largura da fita condutora e a velocidade de fase.

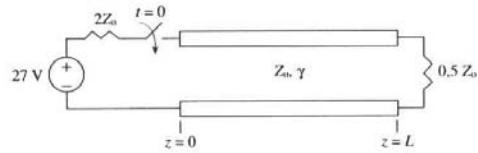


Figura 11.53 Referente ao Problema 11.48.

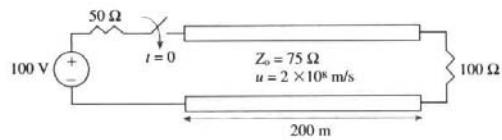


Figura 11.54 Referente ao Problema 11.49.

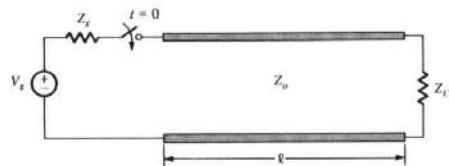


Figura 11.55 Referente ao Problema 11.50.

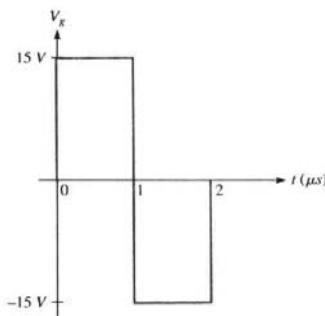


Figura 11.56 Dois pulsos retangulares para o Problema 11.50.

# Capítulo 12

## GUIAS DE ONDA

Se um homem escreve um livro melhor, prega um sermão melhor ou faz uma ratoeira melhor do que seu vizinho, o mundo baterá à sua porta.

—RALPH WALDO EMERSON

### 12.1 INTRODUÇÃO

Conforme mencionado no último capítulo, uma linha de transmissão pode ser usada para transmitir energia de um ponto (gerador) a outro (carga). Um guia de onda é um outro meio de se atingir o mesmo objetivo. Entretanto, um guia de onda difere de uma linha de transmissão em alguns aspectos, ~~em que a transmissão é feita através de um caso especial de prisma. Em primeiro lugar, uma linha de transmissão só pode suportar uma onda transversal eletromagnética (TEM), enquanto que um guia de onda pode suportar muitas configurações de campo diferentes. Em segundo lugar, em freqüências de microondas (3 – 300 GHz, aproximadamente), as linhas de transmissão se tornam ineficientes devido ao efeito peculiar e às perdas nos dielétricos. Os guias de onda são utilizados nessa faixa de freqüências para se obter maior largura de banda e menor atenuação do sinal. Além disso, as linhas de transmissão podem operar desde corrente contínua ( $f = 0$ ) até freqüências muito altas. Os guias de onda podem operar somente acima de uma certa freqüência, chamada freqüência de corte, e, portanto, atuam como filtros passa-alta. Portanto, guias de onda não podem transmitir corrente contínua e tornam-se excessivamente grandes em freqüências abaixo das freqüências de microondas.~~

Embora um guia de onda tenha a seção transversal uniforme, podendo ser de qualquer forma, os guias de onda mais comuns são os retangulares ou os circulares. Guias de onda típicos<sup>1</sup> aparecem na Figura 12.1. A análise do guia de onda circular é trabalhosa e requer familiaridade com as funções de Bessel, que estão além do nosso escopo.<sup>2</sup> Vamos considerar somente o guia de onda retangular. Assumindo que o guia é sem perdas ( $\sigma_r = \infty$ ,  $\sigma \approx 0$ ),<sup>3</sup> podemos aplicar as equações de Maxwell com as condições de fronteira apropriadas para obter os diferentes modos de propagação da onda e os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  correspondentes.

### 12.2 GUIA DE ONDA RETANGULAR

Considere o guia de onda retangular mostrado na Figura 12.2. Vamos assumir que ele está preenchido com um dielétrico sem perdas ( $\rho_v = 0$  e  $\mathbf{J} = 0$ ) e livre de cargas e de correntes ( $\sigma = 0$ ), e suas paredes são perfeitamente condutoras ( $\sigma_r = \infty$ ). Relembremos que, das equações (10.17) e (10.19), as equações de Maxwell na forma fasorial e em um meio sem perdas tornam-se

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + k^2 \mathbf{E}_s = 0 \quad (12.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s + k^2 \mathbf{H}_s = 0 \quad (12.2)$$

<sup>1</sup> Para outros tipos de guias de onda, veja J. A. Seeger, *Microwave Theory, Components and Devices*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1986, p. 128–133.

<sup>2</sup> A análise de guias de onda circulares pode ser encontrada em textos avançados de EM ou em textos relacionados ao EM, por exemplo, S. Y. Liao, *Microwave Devices and Circuits*, 3rd ed., Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990, p. 119–141.

<sup>3</sup> N. de T. Veja item 12.2.

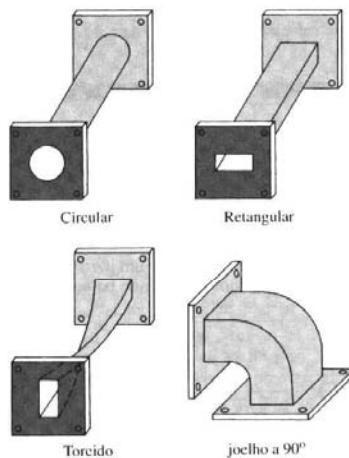


Figura 12.1 Guias de onda típicos.

onde

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (12.3)$$

e o fator temporal  $e^{j\omega t}$  está subentendido. Se fizermos

$$\mathbf{E}_s = (E_{xs}, E_{ys}, E_{zs}) \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_s = (H_{xs}, H_{ys}, H_{zs})$$

tanto a equação (12.1) como a equação (12.2) corresponderão a três equações escalares de Helmholtz. Em outras palavras, para obtermos os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , temos que resolver seis equações diferenciais escalares. Por exemplo, para a componente  $z$ , a equação (12.1) fica

$$\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial z^2} + k^2 E_{zs} = 0 \quad (12.4)$$

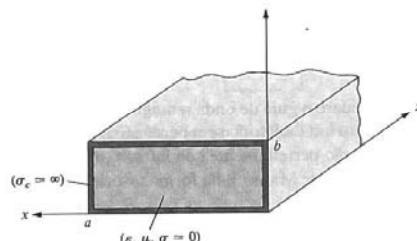


Figura 12.2 Um guia de onda retangular, com paredes perfeitamente condutoras, preenchido com um material sem perdas.

que é uma equação diferencial a derivadas parciais. Do Exemplo 6.5, sabemos que a equação (12.4) pode ser resolvida por separação de variáveis (solução produto). Assim, fazemos

$$E_{zx}(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (12.5)$$

onde  $X(x)$ ,  $Y(y)$  e  $Z(z)$  são funções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Substituindo a equação (12.5) na equação (12.4) e dividindo por  $XYZ$ , temos

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2 \quad (12.6)$$

Como as variáveis são independentes, cada termo da equação (12.6) deve ser constante. Portanto, a equação pode ser escrita como

$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 = -k^2 \quad (12.7)$$

onde  $-k_x^2 - k_y^2$  e  $\gamma^2$  são constantes de separação. Dessa forma, a equação (12.6) é separada em

$$X'' + k_x^2 X = 0 \quad (12.8a)$$

$$Y'' + k_y^2 Y = 0 \quad (12.8b)$$

$$Z'' - \gamma^2 Z = 0 \quad (12.8c)$$

Seguindo o mesmo raciocínio do Exemplo 6.5, obtemos a solução da equação (12.8) como sendo

$$X(x) = c_1 \cos k_x x + c_2 \sin k_x x \quad (12.9a)$$

$$Y(y) = c_3 \cos k_y y + c_4 \sin k_y y \quad (12.9b)$$

$$Z(z) = c_5 e^{\gamma z} + c_6 e^{-\gamma z} \quad (12.9c)$$

Substituindo as equações (12.9) na equação (12.5), obtemos

$$E_{zx}(x, y, z) = (c_1 \cos k_x x + c_2 \sin k_x x)(c_3 \cos k_y y + c_4 \sin k_y y) \\ + c_5 e^{\gamma z} + c_6 e^{-\gamma z} \quad (12.10)$$

Como é usual, se assumirmos que a onda se propaga através do guia de onda ao longo de  $+z$ , a constante multiplicativa  $c_5 = 0$ , pois a onda deve ser finita no infinito [isto é,  $E_{zx}(x, y, z = \infty) = 0$ ]. Portanto, a equação (12.10) se reduz a

$$E_{zx}(x, y, z) = (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x)(A_3 \cos k_y y + A_4 \sin k_y y)e^{-\gamma z} \quad (12.11)$$

onde  $A_1 = c_1 c_6$ ,  $A_2 = c_2 c_6$  e assim por diante. Realizando desenvolvimento semelhante, obtemos a solução para a componente  $z$  da equação (12.2) como

$$H_{zx}(x, y, z) = (B_1 \cos k_x x + B_2 \sin k_x x)(B_3 \cos k_y y + B_4 \sin k_y y)e^{-\gamma z} \quad (12.12)$$

Em vez de resolver, da mesma forma, as equações (12.1) e (12.2) para as demais componentes de campo  $E_{yx}$ ,  $E_{yy}$ ,  $H_{yx}$  e  $H_{yy}$ , vamos simplesmente usar as equações de Maxwell para determiná-las a partir de  $E_{zx}$  e  $H_{zx}$ . Partindo de,

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon\mathbf{E}_s$$

obtemos

$$\frac{\partial E_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial E_{zy}}{\partial z} = -j\omega\mu H_{xy} \quad (12.13a)$$

$$\frac{\partial H_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial H_{zy}}{\partial z} = j\omega\epsilon E_{xy} \quad (12.13b)$$

$$\frac{\partial E_{yy}}{\partial z} - \frac{\partial E_{zz}}{\partial x} = j\omega\mu H_{yx} \quad (12.13c)$$

$$\frac{\partial H_{yy}}{\partial z} - \frac{\partial H_{zz}}{\partial x} = j\omega\epsilon E_{yx} \quad (12.13d)$$

$$\frac{\partial E_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial E_{xz}}{\partial y} = -j\omega\mu H_{zy} \quad (12.13e)$$

$$\frac{\partial H_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial H_{xz}}{\partial y} = j\omega\epsilon E_{zy} \quad (12.13f)$$

Vamos agora expressar  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$ ,  $H_{xx}$  e  $H_{yy}$  em função de  $E_{zx}$  e  $H_{zx}$ . Por exemplo, para  $E_{xx}$ , combinamos as equações (12.13b) e (12.13c) e obtemos

$$j\omega\epsilon E_{xy} = \frac{\partial H_{zx}}{\partial y} + \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2 E_{zx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_{zx}}{\partial x \partial z} \right) \quad (12.14)$$

Das equações (12.11) e (12.12), fica claro que todas as componentes de campo variam com  $z$  de acordo com  $e^{-\gamma z}$ , isto é,

$$E_{zx} \sim e^{-\gamma z}, \quad E_{yy} \sim e^{-\gamma z}$$

Portanto,

$$\frac{\partial E_{zx}}{\partial z} = -\gamma E_{zx}, \quad \frac{\partial^2 E_{zx}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{zx}$$

e a equação (12.14) fica

$$j\omega\epsilon E_{xy} = \frac{\partial H_{zx}}{\partial y} + \frac{1}{j\omega\mu} \left( \gamma^2 E_{zx} + \gamma \frac{\partial E_{zx}}{\partial x} \right)$$

ou

$$-\frac{1}{j\omega\mu} (\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon) E_{xy} = \frac{\gamma}{j\omega\mu} \frac{\partial E_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{zx}}{\partial y}$$

Dessa forma, se fizermos  $h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon = \gamma^2 + k^2$ ,

$$E_{xy} = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_{zx}}{\partial x} - \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_{zx}}{\partial y}$$

Manipulações semelhantes nas equações (12.13) fornecem expressões para  $E_{yy}$ ,  $H_{xx}$  e  $H_{yy}$  em termos de  $E_{zx}$  e  $H_{zx}$ . Assim,

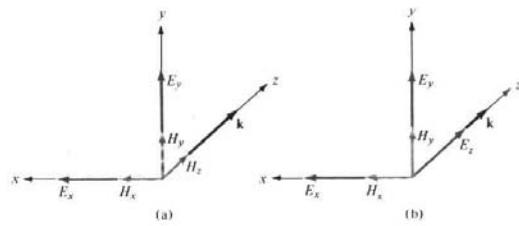


Figura 12.3 Componentes de campos EM em um guia de onda retangular. (a) modo TE,  $E_z = 0$ ; (b) modo TM,  $H_z = 0$ .

$$E_{xx} = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_{zx}}{\partial x} - \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_{zx}}{\partial y} \quad (12.15a)$$

$$E_{yy} = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_{zx}}{\partial y} - \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_{zx}}{\partial x} \quad (12.15b)$$

$$H_{xx} = \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \frac{\partial E_{zx}}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_{zx}}{\partial x} \quad (12.15c)$$

$$H_{yy} = -\frac{j\omega\epsilon}{h^2} \frac{\partial E_{zx}}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_{zx}}{\partial y} \quad (12.15d)$$

onde

$$h^2 = \gamma^2 + k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (12.16)$$

Portanto, podemos utilizar as equações (12.15) em conjunto com as equações (12.11) e (12.12) para obtermos  $E_{xz}$ ,  $E_{yz}$ ,  $H_{xz}$  e  $H_{yz}$ .

Das equações (12.11), (12.12) e (12.15), notamos que existem diferentes tipos de configurações de campo. Cada uma destas configurações é chamada de um *modo*. Existem quatro diferentes categorias de modos, ou seja:

1.  $E_{zx} = 0 = H_{zx}$  (modo TEM). Este é o modo *transversal eletromagnético* (TEM), no qual tanto o campo **E** como o campo **H** são transversais à direção de propagação da onda. Das equações (12.15), segue que todas as componentes de campo se anulam para  $E_{zx} = 0 = H_{zx}$ . Consequentemente, concluímos que um guia de onda retangular não suporta o modo TEM.
2.  $E_{zx} = 0, H_{zx} \neq 0$  (modos TE). Para estes modos, as componentes restantes do campo elétrico ( $E_x$  e  $E_y$ ) são transversais à direção de propagação  $\mathbf{a}_z$ . Sob estas condições, as configurações de campo são chamadas modos *transversais elétricos* (TE). Veja a Figura 12.3(a).
3.  $E_{zx} \neq 0, H_{zx} = 0$  (modos TM). Neste caso, o campo **H** é transversal à direção de propagação da onda. Portanto, temos um modo *transversal magnético* (TM). Veja a Figura 12.3(b).
4.  $E_{zx} \neq 0, H_{zx} \neq 0$  (modos HE). Este é o caso em que nem o campo **E** nem o campo **H** são transversais à direção de propagação. Estes modos são, às vezes, denominados modos *híbridos*.

Devemos ressaltar a relação entre  $k$  na equação (12.3) e  $\beta$  da equação (10.43a). A constante de fase  $\beta$  da equação (10.43a) foi obtida para o modo TEM. Para o modo TEM,  $h = 0$ . Desse modo, da equação (12.16),  $\gamma^2 = -k^2 \rightarrow \gamma = \alpha + j\beta = jk$ , isto é,  $\beta = k$ . Para outros modos,  $\beta \neq k$ . Nas seções subsequentes, vamos estudar os modos de propagação TM e TE separadamente.

### 12.3 MODOS TRANSVERSAIS MAGNÉTICOS (TM)

Para este caso, o campo magnético tem suas componentes transversais (ou normais) à direção de propagação da onda. Isto implica fazer  $H_z = 0$  e calcular  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_x$  e  $H_y$  usando as equações (12.11) e (12.15) e as condições de fronteira. Devemos obter  $E_z$  e depois determinar as outras componentes de campo a partir de  $E_z$ . Nas paredes do guia de onda, as componentes tangenciais do campo E devem ser contínuas, isto é,

$$E_{zs} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (12.17a)$$

$$E_{zx} = 0 \quad \text{em } y = b \quad (12.17b)$$

$$E_{zx} = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad (12.17c)$$

$$E_{zs} = 0 \quad \text{em } x = a \quad (12.17d)$$

As equações (12.17a) e (12.17c) requerem que  $A_1 = 0 = A_3$  na equação (12.11). Portanto, a equação (12.11) fica

$$E_{zs} = E_0 \sin k_x x \sin k_y y e^{-\gamma z} \quad (12.18)$$

onde  $E_o = A_2 A_4$ . Também as equações (12.17b) e (12.17d), quando aplicadas à equação (12.18), levam a

$$\sin k_x a = 0, \quad \sin k_y b = 0 \quad (12.19)$$

Isto implica que

$$k_x a = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (12.20a)$$

$$k_y b = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12.20b)$$

ou

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (12.21)$$

Pela razão dada no Exemplo 6.5, não são considerados valores negativos para os inteiros  $m$  e  $n$  na equação (12.20a). Substituindo a equação (12.21) na equação (12.18), obtemos

$$E_{zs} = E_0 \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \quad (12.22)$$

Obtemos as outras componentes dos campos a partir das equações (12.22) e (12.15), tendo em vista que  $H_{zr} = 0$ . Portanto,

$$E_{xx} = -\frac{\gamma}{h^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \quad (12.23a)$$

$$E_{yy} = -\frac{\gamma}{h^2} \left( \frac{n\pi}{b} \right) E_0 \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \quad (12.23b)$$

$$H_{xz} = \frac{j\omega \epsilon}{h^2} \left( \frac{n\pi}{b} \right) E_0 \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \quad (12.23c)$$

$$H_{yz} = -\frac{j\omega \epsilon}{h^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \quad (12.23d)$$

onde

$$h^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left[ \frac{m\pi}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n\pi}{b} \right]^2 \quad (12.24)$$

que é obtida das equações (12.16) e (12.21). Das equações (12.22) e (12.23), note que cada par de números inteiros  $m$  e  $n$  corresponde a um modo ou configuração de campo diferente, o que é referido no guia de onda como modo  $TM_{mn}$ . O inteiro  $m$  é igual ao número de meios ciclos de senos ou cossenos na direção  $x$ , e o inteiro  $n$  é igual ao número de meios ciclos de senos ou cossenos na direção  $y$ . Das equações (12.22) e (12.23) notamos também que, se  $(m, n)$  for  $(0, 0)$ ,  $(0, n)$  ou  $(m, 0)$ , todas as componentes dos campos se anulam. Portanto, nem  $m$  nem  $n$  podem ser zero. Consequentemente, o modo de menor ordem de todos os modos  $TM_{mn}$  é o  $TM_{11}$ .

Substituindo a equação (12.21) na equação (12.16), obtemos a constante de propagação

$$\gamma = \sqrt{\left[ \frac{m\pi}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n\pi}{b} \right]^2 - k^2} \quad (12.25)$$

onde  $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ , como na equação (12.3). Lembramos que, em geral,  $\gamma = \alpha + j\beta$ . No caso da equação (12.25), temos três possibilidades, dependendo de  $k$  (ou  $\omega$ ),  $m$  e  $n$ :

#### CASO A (corte):

Se

$$\begin{aligned} k^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon = \left[ \frac{m\pi}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n\pi}{b} \right]^2 \\ \gamma &= 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 0 = \beta \end{aligned}$$

O valor de  $\omega$  para o qual isto ocorre é chamado *frequência angular de corte*  $\omega_c$ , isto é,

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left[ \frac{m\pi}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n\pi}{b} \right]^2} \quad (12.26)$$

#### CASO B (evanescente):

Se

$$\begin{aligned} k^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon < \left[ \frac{m\pi}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n\pi}{b} \right]^2 \\ \gamma &= \alpha, \quad \beta = 0 \end{aligned}$$

Neste caso, não temos propagação de onda. Estes modos que não se propagam, ou que são atenuados, são chamados *evanescentes*.

#### CASO C (propagação):

Se

$$\begin{aligned} k^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon > \left[ \frac{m\pi}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n\pi}{b} \right]^2 \\ \gamma &= j\beta, \quad \alpha = 0 \end{aligned}$$

isto é, da equação (12.25), a constante de fase  $\beta$  torna-se

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left[ \frac{m\pi}{a} \right]^2 - \left[ \frac{n\pi}{b} \right]^2} \quad (12.27)$$

Este é o único caso para o qual ocorre a propagação, pois todas as componentes de campo terão o fator  $e^{-\gamma z} = e^{-j\beta z}$ .

Portanto, para cada modo, caracterizado por um conjunto de inteiros  $m$  e  $n$ , haverá uma *frequência de corte* correspondente  $f_c$ :

**A frequência de corte** é a frequência de operação abaixo da qual ocorre atenuação e acima da qual ocorre propagação.

Assim, o guia de onda opera como um filtro passa-alta. A frequência de corte é obtida da equação (12.26) como

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2}$$

ou

$$f_c = \frac{u'}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (12.28)$$

onde  $u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  = velocidade de fase de uma onda plana uniforme no meio dielétrico sem perdas ( $\sigma = 0, \mu, \epsilon$ ) que preenche o guia de onda. O *comprimento de onda de corte*  $\lambda_c$  é dado por

$$\lambda_c = \frac{u'}{f_c}$$

ou

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (12.29)$$

Das equações (12.28) e (12.29), note que o modo  $TM_{11}$  tem a menor frequência de corte (ou o maior comprimento de onda de corte) de todos os modos TM. A constante de fase  $\beta$ , na equação (12.27), pode ser escrita em função da frequência de corte  $f_c$  como

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}$$

ou

$$\beta = \beta' \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2} \quad (12.30)$$

onde  $\beta' = \omega/u' = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  = constante de fase de uma onda plana uniforme no meio dielétrico. Deveremos notar que  $\gamma$  para os modos evanescentes pode também ser expressa em termos de  $f_c$ , ou seja,

$$\gamma = \alpha = \beta' \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} \quad (12.30a)$$

A velocidade de fase  $u_p$  e o comprimento de onda no guia são dados, respectivamente, por

$$\boxed{u_p = \frac{\omega}{\beta}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u_p}{f}} \quad (12.31)$$

A impedância intrínseca da onda para cada modo é obtida da equação (12.23), considerando ( $\gamma = j\beta$ ), como a seguir

$$\begin{aligned} \eta_{TM} &= \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \\ &= \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2} \end{aligned}$$

ou

$$\boxed{\eta_{TM} = \eta' \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \quad (12.32)$$

onde  $\eta' = \sqrt{\mu/\epsilon}$  = impedância intrínseca de uma onda plana uniforme no meio dielétrico. Note as diferenças entre  $u'$ ,  $\beta'$  e  $\eta'$  e  $u$ ,  $\beta$  e  $\eta$ . As grandezas-linha são as características da onda se propagando no meio dielétrico não limitado pelo guia de onda, conforme discutido no Capítulo 10 (isto é, para o modo TEM). Por exemplo,  $u'$  seria a velocidade da onda se o guia de onda fosse removido e todo o espaço fosse preenchido com o dielétrico. As demais grandezas são as características da onda no meio limitado pelo guia de onda.

Conforme mencionado anteriormente, os inteiros  $m$  e  $n$  indicam o número de meios ciclos de senos ou cossenos existentes na seção reta  $x-y$  do guia. Assim, por exemplo, para um determinado instante de tempo, a configuração de campo da Figura 12.4 representa o modo  $TM_{21}$ .

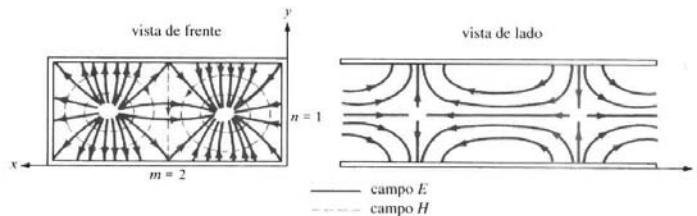


Figura 12.4. Configuração de campo para o modo  $TM_{21}$ .

## 12.4 MODOS TRANSVERSAIS ELÉTRICOS (TE)

Nos modos TE, o campo elétrico é transverso (ou normal) à direção de propagação da onda. Colocamos  $E_z = 0$  e determinamos as demais componentes de campo,  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$ , das equações (12.12) e (12.15) e das condições de fronteira, da mesma forma que foi feito para os modos TM. As condições de fronteira são obtidas a partir do fato de que as componentes tangenciais do campo elétrico devem ser contínuas nas paredes do guia de onda, isto é,

$$E_{xs} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad (12.33a)$$

$$E_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad y = b \quad (12.33b)$$

$$E_{ys} = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad (12.33c)$$

$$E_{ys} = 0 \quad \text{em} \quad x = a \quad (12.33d)$$

A partir das equações (12.15) e (12.33), as condições de fronteira podem ser escritas como

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad (12.34a)$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = b \quad (12.34b)$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad (12.34c)$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = 0 \quad \text{em} \quad x = a \quad (12.34d)$$

Impondo estas condições de fronteira na equação (12.12), obtemos

$$H_{zs} = H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (12.35)$$

onde  $H_o = B_1 B_3$ . As outras componentes de campo são obtidas facilmente das equações (12.35) e (12.15) como

$$E_{xs} = \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (12.36a)$$

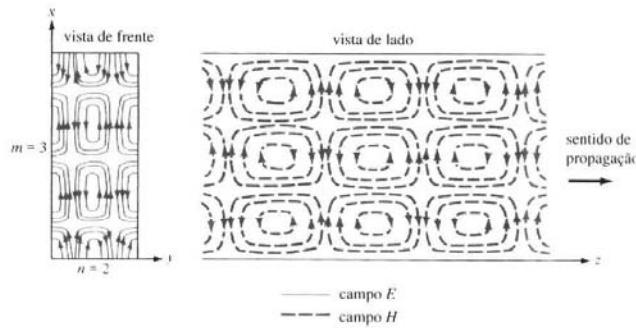
$$E_{ys} = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (12.36b)$$

$$H_{xx} = \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_o \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (12.36c)$$

$$H_{ys} = \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \quad (12.36d)$$

onde  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; e  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Os parâmetros  $h$  e  $\gamma$  permanecem como foram definidos para os modos TM. Novamente, os inteiros  $m$  e  $n$  indicam o número de meios ciclos de senos ou cossenos existentes na seção reta  $x-y$  do guia. Por exemplo, a configuração de campo para o modo TE<sub>11</sub> está apresentada na Figura 12.5. A freqüência de corte  $f_c$ , o comprimento de onda de corte  $\lambda_c$ , a constante de fase  $\beta$ , a velocidade de fase  $u_p$  e o comprimento de onda  $\lambda$  para os modos TE são iguais aos dos modos TM [veja as equações (12.28) a (12.31)].

Para os modos TE,  $(m, n)$  podem ser  $(0, 1)$  ou  $(1, 0)$  mas não podem ser  $(0, 0)$ . Os índices  $m$  e  $n$  não podem ser zero ao mesmo tempo, pois isto acarreta que as componentes de campo dadas pela equação (12.36) sejam zero. Isto implica que os modos de menor freqüência de corte sejam o TE<sub>10</sub> ou o TE<sub>01</sub>, dependendo dos valores de  $a$  e de  $b$ , os quais dão as dimensões do guia. É usual considerar  $a > b$ , de tal maneira que  $1/a^2 < 1/b^2$  na equação (12.28). Nestas condições, o modo TE<sub>10</sub> é o de freqüência de corte mais baixa porque  $f_{c_{TE_{10}}} = \frac{u'}{2a} < f_{c_{TE_{01}}} = \frac{u'}{2b}$ .

Figura 12.5 Configuração de campo para o modo  $\text{TE}_{32}$ .

Este modo é chamado *modo dominante* do guia de onda e é o de maior interesse prático. A freqüência de corte do modo  $\text{TE}_{10}$  é obtida da equação (12.28), considerando ( $m = 1, n = 0$ ), como

$$f_{c_{10}} = \frac{u'}{2a} \quad (12.37)$$

e o comprimento de onda de corte do modo  $\text{TE}_{10}$  é obtido da equação (12.29) como

$$\lambda_{c_{10}} = 2a \quad (12.38)$$

Da equação (12.28), note que a freqüência de corte do modo  $\text{TM}_{11}$  é

$$\frac{u'[a^2 + b^2]^{1/2}}{2ab}$$

que é maior que a freqüência de corte do modo  $\text{TE}_{10}$ . Dessa forma, o modo  $\text{TM}_{11}$  não pode ser considerado o modo dominante.

**O modo dominante** é o modo com menor freqüência de corte (ou com maior comprimento de onda de corte).

É importante notar que qualquer onda EM com freqüência  $f < f_{c_{10}}$  (ou  $\lambda > \lambda_{c_{10}}$ ) não se propagará no guia de onda.

A impedância intrínseca para os modos TE é diferente da impedância intrínseca para os modos TM. Da equação (12.36), fica evidente que ( $\gamma = j\beta$ )

$$\begin{aligned} \eta_{\text{TE}} &= \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \end{aligned}$$

ou

$$\eta_{\text{TE}} = \frac{\eta'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \quad (12.39)$$

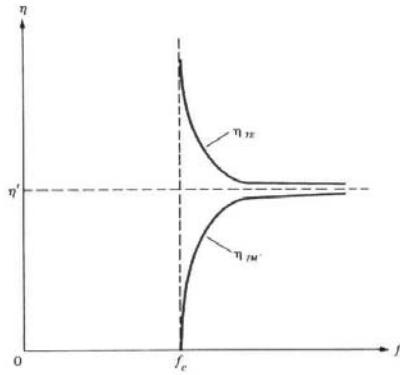


Figura 12.6 Variação da impedância da onda com a freqüência para os modos TM e TE.

Das equações (12.32) e (12.39), note que  $\eta_{TE}$  e  $\eta_{TM}$  são puramente resistivas e que variam com a freqüência, conforme mostrado na Figura 12.6. Note, também, que

$$\eta_{TE} \cdot \eta_{TM} = \eta'^2 \quad (12.40)$$

As equações mais importantes para os modos TM e TE estão listadas na Tabela 12.1.

TABELA 12.1 As equações mais importantes para os modos TM e TE

Modos TM	Modos TE
$E_{xx} = -\frac{j\beta}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$E_{xx} = \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$E_{yy} = -\frac{j\beta}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$E_{yy} = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$E_{zz} = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$E_{zz} = 0$
$H_{xx} = \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$H_{xx} = \frac{j\beta}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$H_{yy} = -\frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$	$H_{yy} = \frac{j\beta}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$H_{zz} = 0$	$H_{zz} = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$
$\eta = \eta' \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$	$\eta = \frac{\eta'}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$
$f_c = \frac{u'}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$	
$\lambda_c = \frac{u'}{f_c}$	
$\beta = \beta' \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$	
$u_p = \frac{\omega}{\beta} = f\lambda$	
onde $h^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ , $u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ , $\beta' = \frac{\omega}{u'} \cdot \eta' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	

Das equações (12.22), (12.23), (12.35) e (12.36), obtemos as configurações de campo para os modos TM e TE. Para o modo dominante  $\text{TE}_{10}$ ,  $m = 1$  e  $n = 0$ . Dessa forma, a equação (12.35) fica

$$H_{zx} = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \quad (12.41)$$

No domínio do tempo,

$$H_z = \operatorname{Re}(H_{zx} e^{j\omega t})$$

ou

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z) \quad (12.42)$$

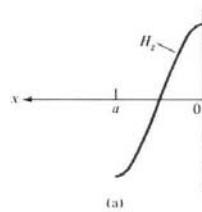
De forma similar, da equação (12.36), temos

$$E_y = \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta z) \quad (12.43a)$$

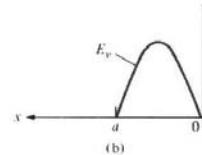
$$H_x = -\frac{\beta a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta z) \quad (12.43b)$$

$$E_z = E_x = H_y = 0 \quad (12.43c)$$

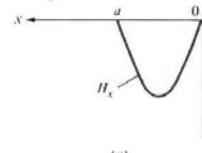
A variação dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  com  $x$  no plano  $x-y$ , ou seja, o plano  $\cos(\omega t - \beta z) = 1$  para  $H_z$  e o plano  $\sin(\omega t - \beta z) = 1$  para  $E_y$  e  $H_x$ , é apresentada na Figura 12.7 para o modo  $\text{TE}_{10}$ . As linhas de campo correspondentes estão apresentadas na Figura 12.8.



(a)

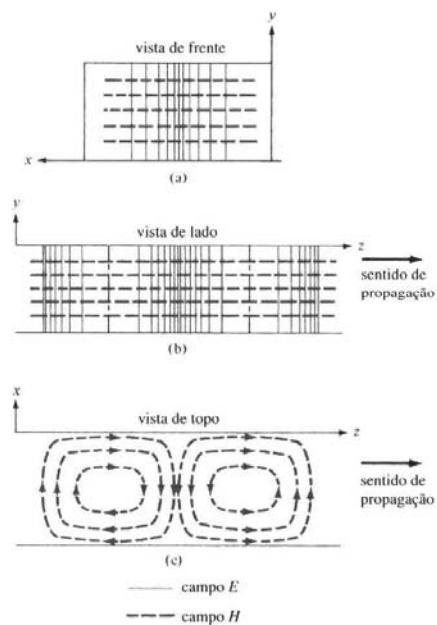


(b)



(c)

Figura 12.7 Dependência com  $x$  das componentes de campo para o modo  $\text{TE}_{10}$ .

Figura 12.8 Linhas de campo para o modo  $TE_{10}$ .**EXEMPLO 12.1**

Um guia de onda retangular com dimensões  $a = 2,5\text{ cm}$  e  $b = 1\text{ cm}$  deve operar abaixo de 15,1 GHz. Quantos modos TE e TM podem ser transmitidos pelo guia se o mesmo é preenchido com um meio caracterizado por  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ,  $\mu_r = 1$ ? Calcule as freqüências de corte dos modos.

**Solução:**

A freqüência de corte é dada por

$$f_{c_{mn}} = \frac{u'}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

onde  $a = 2,5b$  ou  $a/b = 2,5$  e

$$u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_{c_{mn}} &= \frac{c}{4a} \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2} \\ &= \frac{3 \times 10^8}{4(2,5 \times 10^{-2})} \sqrt{m^2 + 6,25n^2} \end{aligned}$$

ou

$$f_{c_{mn}} = 3\sqrt{m^2 + 6,25n^2} \text{ GHz} \quad (12.1.1)$$

Procuramos por valores de  $f_{c_{mn}} < 15,1$  GHz. Uma maneira sistemática de fazer isto é fixarmos um dos índices,  $m$  ou  $n$ , e incrementarmos o outro até obtermos  $f_{c_{mn}}$  maior do que 15,1 GHz. Da equação (12.1.1), fica evidente que, fixando  $m$  e incrementando  $n$ , rapidamente obteremos uma  $f_{c_{mn}}$  que é maior do que 15,1 GHz.

Para o modo  $\text{TE}_{01}$  ( $m = 0, n = 1$ ),  $f_{c_{01}} = 3(2,5) = 7,5$  GHz

Para o modo  $\text{TE}_{02}$  ( $m = 0, n = 2$ ),  $f_{c_{02}} = 3(5) = 15$  GHz

Para o modo  $\text{TE}_{03}$ ,  $f_{c_{03}} = 3(7,5) = 22,5$  GHz

Desse modo, para  $f_{c_{mn}} < 15,1$  GHz, o valor máximo de  $n$  é  $n = 2$ . Agora fixamos  $n$  enquanto incrementamos  $m$  até obtermos  $f_{c_{mn}}$  maior do que 15,1 GHz.

Para o modo  $\text{TE}_{10}$  ( $m = 1, n = 0$ ),  $f_{c_{10}} = 3$  GHz

Para o modo  $\text{TE}_{20}$ ,  $f_{c_{20}} = 6$  GHz

Para o modo  $\text{TE}_{30}$ ,  $f_{c_{30}} = 9$  GHz

Para o modo  $\text{TE}_{40}$ ,  $f_{c_{40}} = 12$  GHz

Para o modo  $\text{TE}_{50}$ ,  $f_{c_{50}} = 15$  GHz (igual ao  $\text{TE}_{02}$ )

Para o modo  $\text{TE}_{60}$ ,  $f_{c_{60}} = 18$  GHz.

Isto é, para  $f_{c_{mn}} < 15,1$  GHz, o valor máximo é  $m = 5$ . Agora que conhecemos os valores máximos de  $m$  e de  $n$ , podemos tentar outras combinações possíveis entre estes valores máximos.

Para os modos  $\text{TE}_{11}$  e  $\text{TM}_{11}$  (modos degenerados),  $f_{c_{11}} = 3\sqrt{7,25} = 8,078$  GHz.

$\text{TE}_{21}, \text{TM}_{21}, f_{c_{21}} = 3\sqrt{10,25} = 9,6$  GHz

$\text{TE}_{31}, \text{TM}_{31}, f_{c_{31}} = 3\sqrt{15,25} = 11,72$  GHz

$\text{TE}_{41}, \text{TM}_{41}, f_{c_{41}} = 3\sqrt{22,25} = 14,14$  GHz

$\text{TE}_{12}, \text{TM}_{12}, f_{c_{12}} = 3\sqrt{26} = 15,3$  GHz

Os modos cujas freqüências de corte são menores ou iguais a 15,1 GHz serão transmitidos, isto é, 11 modos TE e 4 modos TM (todos os modos referidos acima, exceto os modos  $\text{TE}_{12}$ ,  $\text{TM}_{12}$ ,  $\text{TE}_{60}$  e  $\text{TE}_{03}$ ). As freqüências de corte para estes 15 modos estão ilustradas no diagrama de linhas da Figura 12.9.

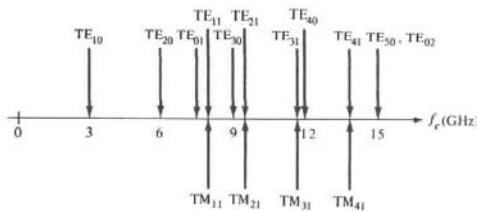


Figura 12.9 Freqüências de corte para um guia retangular com  $a = 2,5b$ ; referente ao Exemplo 12.1.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 12.1**

Considere o guia de onda do Exemplo 12.1. Calcule a constante de fase, a velocidade de fase e a impedância da onda para os modos  $TE_{10}$  e  $TM_{11}$  na frequência de operação de 15 GHz.

**Resposta:** Para o modo  $TE_{10}$ ,  $\beta = 615,6 \text{ rad/m}$ ,  $u = 1,531 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\eta_{TE} = 192,4 \Omega$ . Para o modo  $TM_{11}$ ,  $\beta = 529,4 \text{ rad/m}$ ,  $u = 1,78 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\eta_{TM} = 158,8 \Omega$ .

**EXEMPLO 12.2**

Escreva as expressões gerais dos campos instantâneos para os modos TM e TE. Deduza as expressões válidas para os modos  $TE_{01}$  e  $TM_{12}$ .

**Solução:**

As expressões instantâneas para os campos são obtidas das formas fasoriais usando

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} (\mathbf{E}_s e^{j\omega t}) \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \operatorname{Re} (\mathbf{H}_s e^{j\omega t})$$

Aplicando estas igualdades às equações (12.22) e (12.23), enquanto trocamos  $\gamma$  e  $j\beta$ , obtemos as seguintes componentes de campo para os modos TM:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\beta}{h^2} \left[ \frac{m\pi}{a} \right] E_o \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ E_y &= \frac{\beta}{h^2} \left[ \frac{n\pi}{b} \right] E_o \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ E_z &= E_o \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t - z) \\ H_x &= -\frac{\omega\epsilon}{h^2} \left[ \frac{n\pi}{b} \right] E_o \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{\omega\epsilon}{h^2} \left[ \frac{m\pi}{a} \right] E_o \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

De forma semelhante, para os modos TE, as equações (12.35) e (12.36) tornam-se

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\omega\mu}{h^2} \left[ \frac{n\pi}{b} \right] H_o \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ E_y &= \frac{\omega\mu}{h^2} \left[ \frac{m\pi}{a} \right] H_o \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ E_z &= 0 \\ H_x &= -\frac{\beta}{h^2} \left[ \frac{m\pi}{a} \right] H_o \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_y &= -\frac{\beta}{h^2} \left[ \frac{n\pi}{b} \right] H_o \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_z &= H_o \cos \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

Para o modo  $\text{TE}_{01}$ , colocamos  $m = 0$  e  $n = 1$  para obter

$$h^2 = \left[ \frac{\pi}{b} \right]^2$$

$$E_x = -\frac{\omega\mu b}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = 0 = E_z = H_x$$

$$H_y = -\frac{\beta b}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

Para o modo  $\text{TM}_{12}$ , colocamos  $m = 1$  e  $n = 2$  para obter

$$E_x = \frac{\beta}{h^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$E_y = \frac{\beta}{h^2} \left( \frac{2\pi}{b} \right) E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_x = -\frac{\omega\epsilon}{h^2} \left( \frac{2\pi}{b} \right) E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{\omega\epsilon}{h^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = 0$$

onde

$$h^2 = \left[ \frac{\pi}{a} \right]^2 + \left[ \frac{2\pi}{b} \right]^2$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 12.2

Um guia de onda, de 5 cm por 2 cm, preenchido com ar, tem

$$E_o = 20 \sin 40\pi x \sin 50\pi y e^{-j\beta z} \text{ V/m}$$

a 15 GHz.

- (a) Qual é o modo que está se propagando?
- (b) Encontre  $\beta$ .
- (c) Determine  $E_y/E_x$

**Resposta:** (a)  $\text{TM}_{21}$ ; (b) 241,3 rad/m; (c) 1,25 tg  $40\pi x \cotg 50\pi y$ .

### EXEMPLO 12.3

Em um guia de onda retangular, para o qual  $a = 1,5$  cm,  $b = 0,8$  cm,  $\sigma = 0$ ,  $\mu = \mu_0$  e  $\epsilon = 4\epsilon_0$ ,

$$H_x = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \sin(\pi \times 10^{11} t - \beta z) \text{ A/m}$$

Determine:

- o modo de operação;
- a freqüência de corte;
- a constante de fase  $\beta$ ;
- a constante de propagação  $\gamma$ ;
- a impedância intrínseca da onda  $\eta$ .

**Solução:**

(a) Pela expressão dada para  $H_s$  e pelas expressões de campo do último exemplo, é evidente que  $m = 1$  e  $n = 3$ , isto é, o guia está operando no modo  $TM_{13}$  ou  $TE_{13}$ . Vamos supor que seja o modo  $TM_{13}$  (a possibilidade de ser o modo  $TE_{13}$  é deixada como exercício; veja o Exercício Prático 12.3).

$$(b) f_{c_{\text{ns}}} = \frac{u'}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{2}$$

Assim,

$$f_{c_{\text{ns}}} = \frac{c}{4} \sqrt{\frac{1}{[1,5 \times 10^{-2}]^2} + \frac{9}{[0,8 \times 10^{-2}]^2}}$$

$$= \frac{3 \times 10^8}{4} (\sqrt{0,444 + 14,06}) \times 10^2 = 28,57 \text{ GHz}$$

$$(c) \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left[ \frac{f_c}{f} \right]^2} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{c} \sqrt{1 - \left[ \frac{f_c}{f} \right]^2}$$

$$\omega = 2\pi f = \pi \times 10^{11} \quad \text{ou} \quad f = \frac{100}{2} = 50 \text{ GHz}$$

$$\beta = \frac{\pi \times 10^{11}(2)}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - \left[ \frac{28,57}{50} \right]^2} = 1.718,81 \text{ rad/m}$$

(d)  $\gamma = j\beta = j1.718,81/\text{m}$

$$(e) \eta_{TM_{13}} = \eta' \sqrt{1 - \left[ \frac{f_c}{f} \right]^2} = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{1 - \left[ \frac{28,57}{50} \right]^2}$$

$$= 154,7 \Omega$$

### EXERCÍCIO PRÁTICO 12.3

Repita o Exemplo 12.3, supondo que o modo  $TE_{13}$  se propaga no guia. Determine as outras componentes de campo para este modo.

**Resposta:**  $f_c = 28,57 \text{ GHz}$ ,  $\beta = 1.718,81 \text{ rad/m}$ ,  $\mu = j\beta$ ,  $\eta_{TE_{13}} = 229,69 \Omega$

$$E_x = 2.584,1 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z) \text{ V/m}$$

$$E_y = -459,4 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z) \text{ V/m}, \quad E_z = 0$$

$$H_y = 11,25 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \beta z) \text{ A/m}$$

$$H_z = -7,96 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \beta z) \text{ A/m}$$

## 12.5 PROPAGAÇÃO DA ONDA NO GUIA

O exame das equações (12.23) ou (12.36) mostra que todas as componentes de campo envolvem termos de senos ou cossenos de  $(m\pi/a)x$  ou  $(n\pi/b)y$  que multiplicam  $e^{-\gamma z}$ . Como

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \quad (12.44a)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (12.44b)$$

uma onda dentro do guia de onda pode ser decomposta em uma combinação de ondas planas refletidas nas paredes do guia. Por exemplo, para o modo  $\text{TE}_{10}$ ,

$$\begin{aligned} E_{yz} &= -\frac{j\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \\ &= -\frac{\omega\mu a}{2\pi} (e^{j\pi x/a} - e^{-j\pi x/a}) e^{-j\beta z} \\ &= \frac{\omega\mu a}{2\pi} [e^{-j\beta(z+\pi x/\beta a)} - e^{-j\beta(z-\pi x/\beta a)}] \end{aligned} \quad (12.45)$$

O primeiro termo da equação (12.45) representa uma onda se propagando no sentido positivo de  $z$  com um ângulo

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{\beta a}\right) \quad (12.46)$$

com relação ao eixo  $z$ . O segundo termo da equação (12.45) representa uma onda se propagando no sentido positivo de  $z$  com um ângulo  $-\theta$ . O campo pode ser representado pela soma de duas ondas planas TEM que se propagam ao longo de trajetórias em zigzag entre as paredes do guia, situadas em  $x = 0$  e  $x = a$ , conforme ilustrado pela Figura 12.10(a). A decomposição do modo  $\text{TE}_{10}$  em duas ondas planas pode ser estendida a qualquer modo TE e TM. Desta decomposição, resultam quatro ondas planas quando  $n$  e  $m$  são diferentes de zero.

A componente da onda na direção  $z$  tem um comprimento de onda diferente do comprimento das ondas planas. Este comprimento de onda ao longo da direção do eixo do guia é chamado de *comprimento de onda no guia* e é dado por (veja Problema 12.13)

$$\lambda' = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \quad (12.47)$$

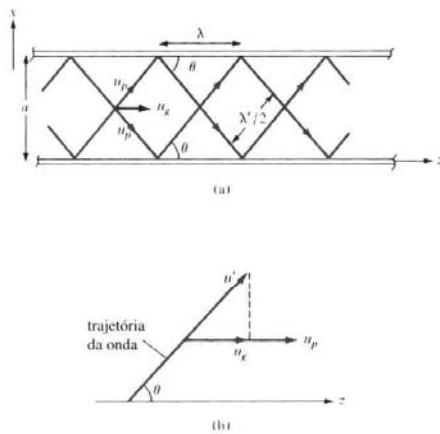
onde  $\lambda' = u'/f$ .

Como consequência das trajetórias em zigzag, temos três tipos de velocidades: a *velocidade no meio*  $u'$ , a *velocidade de fase*  $u_p$  e a *velocidade de grupo*  $u_g$ . A Figura 12.10(b) mostra a relação entre as três velocidades. A velocidade no meio  $u' = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$  já foi explicada nas seções anteriores. A velocidade de fase  $u_p$  é a velocidade na qual os pontos de mesma fase se propagam ao longo do guia e é dada pela equação (12.31), isto é,

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (12.48a)$$

ou

$$u_p = \frac{u'}{\cos \theta} = \frac{u'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \quad (12.48b)$$

Figura 12.10 (a) Decomposição do modo  $TE_{10}$  em duas ondas planas; (b) relação entre  $u'$ ,  $u_p$  e  $u_g$ .

Isto mostra que  $u_p \geq u'$ , pois  $\cos \theta \leq 1$ . Se  $u' = c$ , então  $u_p$  é maior do que a velocidade da luz no vácuo. Isto viola a teoria da relatividade de Einstein, na qual sinais não podem ser enviados com velocidade maior que a da luz? Na verdade não, pois a informação (ou energia) em um guia de onda não se propaga com a velocidade de fase, mas sim com a velocidade de grupo  $u_g$ , a qual precisa, necessariamente, ser menor do que a velocidade da luz. A velocidade de grupo  $u_g$  é a velocidade com que a resultante das ondas planas, sucessivamente refletidas, se propaga ao longo do guia e é dada por

$$u_g = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega} \quad (12.49a)$$

ou

$$u_g = u' \cos \theta = u' \sqrt{1 - \left[ \frac{f_c}{f} \right]^2} \quad (12.49b)$$

Embora o conceito de velocidade de grupo seja relativamente complexo e esteja fora do escopo desse capítulo, podemos dizer que a velocidade de grupo é essencialmente a velocidade de propagação da envoltória de um pacote de ondas de um grupo de freqüências. A velocidade de grupo é a velocidade de propagação da energia no guia e é sempre menor ou igual a  $u'$ . Das equações (12.48) e (12.49), fica evidente que

$$u_p u_g = u'^2 \quad (12.50)$$

Esta relação é semelhante à equação (12.40). Portanto, a variação de  $u_p$  e  $u_g$  com a freqüência é semelhante à apresentada na Figura 12.6 para  $\eta_{TE}$  e  $\eta_{TM}$ .

#### EXEMPLO 12.4

Um guia de onda retangular padrão, contendo ar e de dimensões  $a = 8,636$  cm e  $b = 4,318$  cm, é alimentado por um cabo coaxial com uma portadora de 4 GHz. Determine se o modo  $TE_{10}$  irá se propagar. Se este for o caso, calcule a velocidade de fase e a velocidade de grupo.

#### Solução:

Para o modo  $TE_{10}$ ,  $f_c = u'/2a$ . Como o guia de onda é preenchido com ar,  $u' = c = 3 \times 10^8$  m/s.

Portanto,

$$f_c = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 8,636 \times 10^{-2}} = 1,737 \text{ GHz}$$

Como  $f = 4 \text{ GHz} > f_c$ , o modo  $\text{TE}_{10}$  irá se propagar.

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{u'}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1 - (1,737/4)^2}} \\ &= 3,33 \times 10^8 \text{ m/s} \\ u_s &= \frac{u'^2}{u_p} = \frac{9 \times 10^{16}}{3,33 \times 10^8} = 2,702 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 12.4

Repita o Exemplo 12.4 para o modo  $\text{TM}_{11}$ .

**Resposta:**  $12,5 \times 10^8 \text{ m/s}$ ;  $7,203 \times 10^7 \text{ m/s}$ .

## 12.6 TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA E ATENUAÇÃO

Para determinarmos o fluxo de potência no guia, vamos primeiro calcular o vetor de Poynting médio [da equação (10.68)].

$$\mathcal{P}_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) \quad (12.51)$$

Neste caso, o vetor de Poynting é na direção  $z$ , tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{méd}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_{xz} H_{yz}^* - E_{yz} H_{xz}^*) \mathbf{a}_z \\ &= \frac{|E_{xz}|^2 + |E_{yz}|^2}{2\eta} \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (12.52)$$

onde  $\eta = \eta_{\text{TE}}$  para modos TE ou  $\eta = \eta_{\text{TM}}$  para modos TM. A potência média total que atravessa a seção reta do guia é:

$$\begin{aligned} P_{\text{méd}} &= \int \mathcal{P}_{\text{méd}} \cdot dS \\ &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \frac{|E_{xz}|^2 + |E_{yz}|^2}{2\eta} dy dx \end{aligned} \quad (12.53)$$

A atenuação em um guia de onda com perdas é de importância prática. Até o momento em nossa análise, consideramos os guias de onda sem perdas ( $\sigma = 0$ ,  $\sigma_c \approx \infty$ ). Nesse caso,  $\alpha = 0$  e  $\gamma = j\beta$ . Quando o meio dielétrico tem perdas ( $\sigma \neq 0$ ) e as paredes condutoras não são condutores perfeitos ( $\sigma \neq \infty$ ), existe uma perda contínua de potência conforme a onda se propaga pelo guia. De acordo com as equações (10.69) e (10.70), o fluxo de potência no guia é dado por

$$P_{\text{med}} = P_o e^{-2\alpha z} \quad (12.54)$$

Para que haja conservação de energia, a taxa de decrescimento de  $P_{\text{méd}}$  deve ser igual à média temporal da potência dissipada por unidade de comprimento  $P_L$ , isto é,

$$P_L = - \frac{dP_{\text{méd}}}{dz} = 2\alpha P_{\text{méd}}$$

ou

$$\alpha = \frac{P_L}{2P_{\text{méd}}} \quad (12.55)$$

Em geral,

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d \quad (12.56)$$

onde  $\alpha_c$  e  $\alpha_d$  são as constantes de atenuação devido às perdas ôhmicas, ou por condução ( $\sigma_c \neq 0$ ) e devido às perdas no dielétrico ( $\sigma \neq 0$ ), respectivamente.

Para determinar  $\alpha_d$ , lembre que iniciamos com a equação (12.1), supondo um meio dielétrico sem perdas ( $\sigma = 0$ ). Para um dielétrico com perdas, precisamos incorporar em nossa análise o fato de que  $\sigma \neq 0$ . Todas as nossas equações se mantêm, exceto  $\gamma = j\beta$ , que precisa ser modificada. Isto é obtido substituindo  $\epsilon$  da equação (12.25) pela permissividade complexa da equação (10.40). Dessa forma, obtemos

$$\gamma = \alpha_d + j\beta_d = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \quad (12.57)$$

onde

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \quad (12.58)$$

Substituindo a equação (12.58) na equação (12.57) e elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtemos

$$\gamma^2 = \alpha_d^2 - \beta_d^2 + 2j\alpha_d\beta_d = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma$$

Igualando as partes real e imaginária,

$$\alpha_d^2 - \beta_d^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon \quad (12.59a)$$

$$2\alpha_d\beta_d = \omega\mu\sigma \quad \text{ou} \quad \alpha_d = \frac{\omega\mu\sigma}{2\beta_d} \quad (12.59b)$$

Assumindo que  $\alpha_d^2 \ll \beta_d^2$ ,  $\alpha_d^2 - \beta_d^2 \approx -\beta_d^2$ , tal que, da equação (12.59a), obtemos

$$\begin{aligned} \beta_d &= \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \\ &= \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \end{aligned} \quad (12.60)$$

que é o mesmo  $\beta$  da equação (12.30). Substituindo a equação (12.60) na equação (12.59b), obtemos

$$\alpha_d = \frac{\sigma\eta'}{2\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (12.61)$$

onde  $\eta' = \sqrt{\mu/\epsilon}$ .

A determinação de  $\alpha_c$  para modos  $\text{TM}_{mn}$  e  $\text{TE}_{mn}$  é demorada e enfadonha. Vamos, aqui, ilustrar o procedimento calculando  $\alpha_c$  para o modo  $\text{TE}_{10}$ . Para este modo, existem somente os campos  $E_y$ ,  $H_z$  e  $H_x$ . Substituindo a equação (12.43a) na equação (12.53), obtemos

$$\begin{aligned} P_{\text{med}} &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \frac{|E_{yx}|^2}{2\eta} dx dy = \frac{\omega^2 \mu^2 a^2 H_o^2}{2\pi^2 \eta} \int_0^b dy \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx \\ P_{\text{med}} &= \frac{\omega^2 \mu^2 a^3 H_o^2 b}{4\pi^2 \eta} \end{aligned} \quad (12.62)$$

A perda total de potência nas paredes por unidade de comprimento é

$$\begin{aligned} P_L &= P_L|_{y=0} + P_L|_{y=b} + P_L|_{x=0} + P_L|_{x=a} \\ &= 2(P_L|_{y=0} + P_L|_{x=0}) \end{aligned} \quad (12.63)$$

pois a mesma potência é dissipada nas paredes  $y = 0$  e  $y = b$ , ou  $x = 0$  e  $x = a$ . Para a parede  $y = 0$ ,

$$\begin{aligned} P_L|_{y=0} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \eta_c \int (|H_{xz}|^2 + |H_{yz}|^2) dx \right] \Big|_{y=0} \\ &= \frac{1}{2} R_s \left[ \int_0^a \frac{\beta^2 a^2}{\pi^2} H_o^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx + \int_0^a H_o^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx \right] \\ &= \frac{R_s a H_o^2}{4} \left( 1 + \frac{\beta^2 a^2}{\pi^2} \right) \end{aligned} \quad (12.64)$$

onde  $R_s$  é a parte real da impedância intrínseca  $\eta_c$  das paredes condutoras. Da equação (10.56),

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta} \quad (12.65)$$

onde  $\delta$  é a profundidade de penetração pelicular.  $R_s$  é a resistência superficial da parede que pode ser vista como a resistência de um condutor com uma seção reta de 1 m de largura por  $\delta$  de profundidade e por 1 m de comprimento do material condutor. Para a parede  $x = 0$ ,

$$\begin{aligned} P_L|_{x=0} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \eta_c \int (|H_{zx}|^2) dy \right] \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} R_s \int_0^b H_o^2 dy \\ &= \frac{R_s b H_o^2}{2} \end{aligned} \quad (12.66)$$

Substituindo as equações (12.64) e (12.66) na (12.63), obtemos

$$P_L = R_s H_o^2 \left[ b + \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{\beta^2 a^2}{\pi^2} \right) \right] \quad (12.67)$$

Finalmente, substituindo as equações (12.62) e (12.67) na equação (12.55),

$$\alpha_c = \frac{R_s H_o^2 \left[ b + \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{\beta^2 a^2}{\pi^2} \right) \right] 2\pi^2 \eta}{\omega^2 \mu^2 a^3 H_o^2 b} \quad (12.68a)$$

É conveniente expressar  $\alpha_c$  em termos de  $f$  e  $f_c$ . Depois de alguma manipulação, obtemos, para o modo  $\text{TE}_{10}$ ,

$$\alpha_c = \frac{2R_s}{b\eta' \sqrt{1 - \left[ \frac{f_c}{f} \right]^2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{b}{a} \left[ \frac{f_c}{f} \right]^2 \right) \quad (12.68b)$$

Seguindo o mesmo procedimento, a constante de atenuação, para os modos  $TE_{mn}$  ( $n \neq 0$ ), pode ser obtida como

$$\alpha_c |_{TE} = \frac{2R_s}{b\eta' \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \left[ \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left[\frac{f_c}{f}\right]^2 + \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} m^2 + n^2\right)}{\frac{b^2}{a^2} m^2 + n^2} \left(1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2\right) \right] \quad (12.69)$$

e, para modos  $TM_{mn}$ ,

$$\alpha_c |_{TM} = \frac{2R_s}{b\eta' \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \frac{(b/a)^3 m^2 + n^2}{(b/a)^2 m^2 + n^2} \quad (12.70)$$

A constante de atenuação total  $\alpha$  é obtida pela substituição das equações (12.61) e (12.69) ou (12.70) na equação (12.56).

## <sup>†</sup>12.7 CORRENTE E EXCITAÇÃO DE MODOS NO GUIA DE ONDA

Tanto para os modos TM como para os modos TE, a densidade de corrente superficial  $\mathbf{K}$  nas paredes do guia pode ser encontrada utilizando

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H} \quad (12.71)$$

onde  $\mathbf{a}_n$  é um vetor unitário perpendicular e para fora da parede e  $\mathbf{H}$  é a intensidade de campo sobre a parede. Para a propagação do modo  $TE_{10}$ , o fluxo de corrente nas paredes do guia pode ser encontrado utilizando a equação (12.71) com as equações (12.42) e (12.43). O resultado está esboçado na Figura 12.11.

A densidade superficial de carga  $\rho_s$  nas paredes é dada por

$$\rho_s = \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{D} = \mathbf{a}_n \cdot \epsilon \mathbf{E} \quad (12.72)$$

onde  $\mathbf{E}$  é a intensidade de campo elétrico nas paredes do guia.

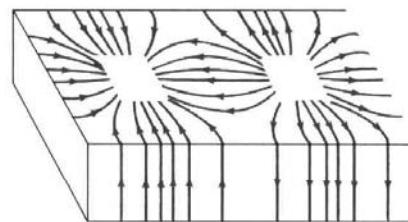


Figura 12.11 Corrente superficial nas paredes do guia para o modo  $TE_{10}$ .

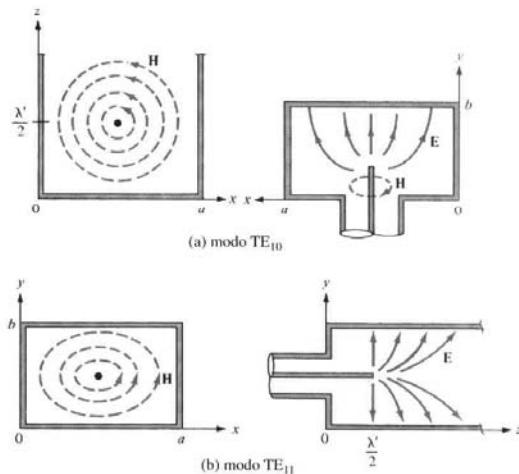


Figura 12.12 Excitação dos modos no guia de onda retangular.

Um guia de onda é normalmente alimentado ou excitado por um cabo coaxial ou por um outro guia de onda. Em geral, uma ponta de prova (condutor central de uma linha coaxial) é utilizada para estabelecer as intensidades de campo do modo desejado e obter a máxima transferência de potência. A ponta de prova é localizada de maneira a produzir campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , que são aproximadamente paralelos às linhas dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  do modo desejado. Por exemplo, para excitarmos o modo  $\text{TE}_{10}$ , sabemos, da equação (12.43a), que  $E_y$  tem um valor máximo em  $x = a/2$ . Portanto, a ponta de prova é localizada em  $x = a/2$ , para que seja excitado o modo  $\text{TE}_{10}$ , como mostrado na Figura 12.12(a), onde as linhas de campo são semelhantes às da Figura 12.8. De forma similar, o modo  $\text{TM}_{11}$  é excitado pela colocação da ponta de prova ao longo da direção  $z$ , conforme mostrado na Figura 12.12(b).

### EXEMPLO 12.5

Um guia de onda retangular de dimensões  $a = 4\text{ cm}$  e  $b = 2\text{ cm}$ , preenchido com ar, transporta energia no modo dominante a uma taxa de  $2\text{ mW}$ . Se a freqüência de operação é  $10\text{ GHz}$ , determine o valor de pico do campo elétrico no guia.

#### Solução:

O modo dominante para  $a > b$  é o  $\text{TE}_{10}$ . As expressões dos campos para este modo ( $m = 1, n = 0$ ) estão na equação (12.36) ou (12.43), ou seja,

$$E_{xx} = 0, \quad E_{yy} = -jE_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}, \quad \text{onde} \quad E_0 = \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0$$

$$f_c = \frac{u'}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{2(4 \times 10^{-2})} = 3,75\text{ GHz}$$

$$\eta = \eta_{\text{TE}} = \frac{\eta'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} = \frac{377}{\sqrt{1 - \left[\frac{3,75}{10}\right]^2}} = 406,7\Omega$$

Da equação (12.53), a potência média transmitida é

$$\begin{aligned} P_{\text{méd}} &= \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a \frac{|E_{yx}|^2}{2\eta} dx dy = \frac{E_o^2}{2\eta} \int_0^b dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dz \\ &= \frac{E_o^2 ab}{4\eta} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E_o^2 &= \frac{4\eta P_{\text{méd}}}{ab} = \frac{4(406,7) \times 2 \times 10^{-3}}{8 \times 10^{-4}} = 4.067 \\ E_o &= 63,77 \text{ V/m} \end{aligned}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 12.5

No Exemplo 12.5, calcule o valor de pico  $H_o$  do campo magnético no guia se  $a = 2 \text{ cm}$  e  $b = 4 \text{ cm}$ , enquanto os demais dados se mantêm inalterados.

**Resposta:** 63,34 mA/m.

#### EXEMPLO 12.6

Um guia de onda de cobre ( $\sigma_c = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ) operando em 4,8 GHz deve fornecer uma potência mínima de 1,2 kW a uma antena. Se o guia é preenchido com poliestireno ( $\sigma = 10^{-17} \text{ S/m}$ ,  $\epsilon = 2,55\epsilon_0$ ) e suas dimensões são  $a = 4,2 \text{ cm}$  e  $b = 2,6 \text{ cm}$ , calcule a potência dissipada em 60 cm do guia, no modo TE<sub>10</sub>.

**Solução:**

Seja

$P_d$  = potência perdida ou dissipada,  
 $P_a$  = potência fornecida à antena,  
 $P_o$  = potência de entrada no guia,

tal que  $P_o = P_d + P_a$ .  
Da equação (12.54),

$$P_a = (P_d + P_o) e^{-2\alpha z}$$

Assim,

$$P_o = (P_d + P_a) e^{-2\alpha z}$$

ou

$$P_d = P_o(e^{2\alpha z} - 1)$$

Precisamos, agora, determinar  $\alpha$  a partir de

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c$$

Da equação (12.61),

$$\alpha_d = \frac{\sigma\eta'}{2\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}$$

Como a tangente de perdas é

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-17}}{2\pi \times 4,8 \times 10^9 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 2,55} \\ = 1,47 \times 10^{-17} \ll 1 \quad (\text{meio elétrico sem perdas})$$

então,

$$\eta' \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{377}{\sqrt{\epsilon_r}} = 236,1$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = 1,879 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$f_c = \frac{u'}{2a} = \frac{1,879 \times 10^8}{2 \times 4,2 \times 10^{-2}} = 2,234 \text{ GHz}$$

$$\alpha_d = \frac{10^{-17} \times 236,1}{2\sqrt{1 - \left[\frac{2,234}{4,8}\right]^2}}$$

$$\alpha_d = 1,334 \times 10^{-15} \text{ Np/m}$$

Para o modo TE<sub>10</sub>, a equação (12.68b) fornece

$$\alpha_c = \frac{2R_s}{b\eta' \sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \left( 0,5 + \frac{b}{a} \left[ \frac{f_c}{f} \right]^2 \right)$$

onde

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{\pi \times 4,8 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5,8 \times 10^7}} \\ = 1,808 \times 10^{-2} \Omega$$

Portanto,

$$\alpha_c = \frac{2 \times 1,808 \times 10^{-2} \left( 0,5 + \frac{2,6}{4,2} \left[ \frac{2,234}{4,8} \right]^2 \right)}{2,6 \times 10^{-2} \times 236,1 \sqrt{1 - \left[ \frac{2,234}{4,8} \right]^2}} \\ = 4,218 \times 10^{-3} \text{ Np/m}$$

Note que  $\alpha_d \ll \alpha_c$ , o que mostra que a perda devida à condutividade finita das paredes do guia é mais importante do que a perda devida ao meio dielétrico. Dessa forma,

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c \approx \alpha_c = 4,218 \times 10^{-3} \text{ Np/m}$$

e a potência dissipada é

$$P_d = P_a (e^{2\alpha z} - 1) = 1,2 \times 10^3 (e^{2 \times 4,218 \times 10^{-3} \times 0,6} - 1) \\ = 6,089 \text{ W}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 12.6**

Um guia de onda de bronze ( $\sigma_c = 1,1 \times 10^7$  mhos/m), de dimensões  $a = 4,2$  cm e  $b = 1,5$  cm, é preenchido com Teflon ( $\epsilon_r = 2,6$  e  $\sigma = 10^{-15}$  mhos/m). A freqüência de operação é 9 GHz. Para o modo TE<sub>10</sub>:

- (a) calcule  $\alpha_d$  e  $\alpha_s$ ;
- (b) qual é a perda no guia, em decibéis, se o mesmo tem 40 cm de comprimento?

**Resposta:** (a)  $1,206 \times 10^{-13}$  Np/m;  $1,744 \times 10^{-2}$  Np/m; (b) 0,0606 dB.

**EXEMPLO 12.7**

Faça um esboço das linhas de campo para o modo TM<sub>11</sub>. Obtenha as expressões instantâneas da densidade de corrente superficial para este modo.

**Solução:**

Do Exemplo 12.2, obtemos os campos para o modo TM<sub>11</sub> ( $m = 1, n = 1$ ) como

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\beta}{h^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) E_o \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ E_y &= \frac{\beta}{h^2} \left( \frac{\pi}{b} \right) E_o \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ E_z &= E_o \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right) \cos(\omega t - \beta z) \\ H_x &= -\frac{\omega \epsilon}{h^2} \left( \frac{\pi}{b} \right) E_o \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_y &= \frac{\omega \epsilon}{h^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) E_o \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

Para as linhas de campo elétrico,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi y}{b} \right)$$

Para as linhas de campo magnético,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi y}{b} \right)$$

Note que  $(E_y/E_x)(H_y/H_x) = -1$ , o que mostra que os campos elétrico e magnético são mutuamente ortogonais. Isto pode ser observado na Figura 12.13, onde as linhas de campo estão esboçadas.

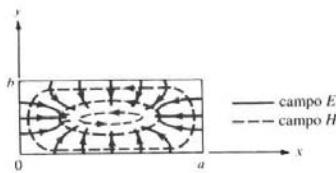
A densidade de corrente superficial nas paredes do guia é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H} = \mathbf{a}_n \times (H_x, H_y, 0)$$

Em  $x = 0$ ,  $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{K} = H_y(0, y, z, t) \mathbf{a}_z$ , isto é,

$$\mathbf{K} = \frac{\omega \epsilon}{h^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) E_o \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z$$

Em  $x = a$ ,  $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{K} = -H_y(a, y, z, t) \mathbf{a}_z$

Figura 12.13 Linhas de campo para o modo  $\text{TM}_{11}$ ; referente ao Exemplo 12.7.

ou

$$\mathbf{K} = \frac{\omega\epsilon}{h^2} \left( \frac{\pi}{a} \right) E_0 \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z$$

Em  $y = 0$ ,  $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_y$ ,  $\mathbf{K} = -H_x(x, 0, z, t) \mathbf{a}_z$   
ou

$$\mathbf{K} = \frac{\omega\epsilon}{h^2} \left( \frac{\pi}{b} \right) E_0 \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z$$

Em  $y = b$ ,  $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_y$ ,  $\mathbf{K} = H_x(x, b, z, t) \mathbf{a}_z$   
ou

$$\mathbf{K} = \frac{\omega\epsilon}{h^2} \left( \frac{\pi}{b} \right) E_0 \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 12.7**Faça um esboço das linhas de campo para o modo  $\text{TE}_{11}$ .

**Resposta:** veja a Figura 12.14. A intensidade do campo em cada ponto é indicada pela densidade de linhas de força. O campo é mais forte (ou mais fraco) onde as linhas estão mais próximas (ou mais afastadas).

**12.8 RESSONADORES DE GUIA DE ONDA**

Ressonadores são usados, fundamentalmente, para armazenamento de energia. Em altas freqüências (100 MHz e acima), os circuitos *RLC* ficam ineficientes quando usados como resonadores porque as dimensões do circuito são comparáveis ao comprimento de onda de operação e, consequentemente, ocorre irradiação de energia, o que é indesejado. Portanto, em altas freqüências, os circuitos *RLC* ressonantes são substituídos por cavidades ressonantes. Estas cavidades ressonantes são usadas em válvulas klystron, filtros passa-faixa e em ressonímetros (usado na medida de freqüência em microondas). O forno de microondas consiste basicamente de uma fonte de alimentação de energia, um alimentador de guia de onda e uma cavidade-forno.

Consideremos a cavidade retangular (ou caixa condutora fechada) mostrada na Figura 12.15. Nottamos que a cavidade é simplesmente um guia de onda retangular com as extremidades fechadas. Logo, esperamos obter ondas estacionárias e também modos de propagação de onda  $\text{TE}$  e  $\text{TM}$ . Dependendo de como a cavidade é excitada, a onda pode se propagar nas direções  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Vamos escolher  $+z$  como sendo a “orientação de propagação da onda”. Na realidade, não há onda se propagando. Em seu lugar, temos ondas estacionárias. Lembramos, da Seção 10.8, que uma onda estacionária é a combinação de duas ondas se propagando em sentidos opostos.

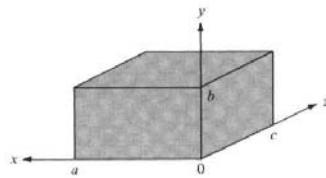


Figura 12.15 Cavidade retangular.

### A. Modo TM em $z$

Para este caso,  $H_z = 0$  e assumimos que

$$E_{zx}(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (12.73)$$

seja a solução-produto da equação (12.1). Seguimos o mesmo procedimento realizado na Seção 12.2 e obtemos

$$X(x) = c_1 \cos k_x x + c_2 \sin k_x x \quad (12.74a)$$

$$Y(y) = c_3 \cos k_y y + c_4 \sin k_y y \quad (12.74b)$$

$$Z(z) = c_5 \cos k_z z + c_6 \sin k_z z \quad (12.74c)$$

onde

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (12.75)$$

As condições de fronteira são:

$$E_z = 0 \quad \text{em} \quad x = 0, a \quad (12.76a)$$

$$E_z = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, b \quad (12.76b)$$

$$E_y = 0, E_x = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, c \quad (12.76c)$$

Conforme mostrado na Seção 12.3, as condições nas equações (12.7a,b) ficam satisfeitas quando  $c_1 = 0 = c_3$  e

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (12.77)$$

onde  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Para impor as condições da equação (12.76c), notamos que a equação (12.14) (com  $H_z = 0$ ) fornece

$$j\omega\epsilon E_{zx} = \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2 E_{zx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_{yz}}{\partial z \partial x} \right) \quad (12.78)$$

De forma semelhante, combinando as equações (12.13a) e (12.13d) (com  $H_{zy} = 0$ ) resulta em

$$j\omega\epsilon E_{yz} = \frac{1}{-j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2 E_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_{zx}}{\partial z^2} \right) \quad (12.79)$$

Das equações (12.78) e (12.79), fica evidente que a equação (12.76c) é satisfeita se

$$\frac{\partial E_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, c \quad (12.80)$$

Isto implica que  $c_6 = 0$  e  $\sin k_z c = 0 = \sin \rho \pi$ . Portanto,

$$k_z = \frac{p\pi}{c} \quad (12.81)$$

onde  $\rho = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Substituindo as equações (12.77) e (12.81) na equação (12.74), obtemos

$$E_{zs} = E_o \left[ \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \cos \left( \frac{p\pi z}{c} \right) \right] \quad (12.82)$$

onde  $E_o = c_2 c_4 c_5$ . As outras componentes dos campos são obtidas das equações (12.82) e (12.13). A constante de fase  $\beta$  é obtida das equações (12.75), (12.77) e (12.81) como

$$\beta^2 = k^2 = \left[ \frac{m\pi}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n\pi}{b} \right]^2 + \left[ \frac{p\pi}{c} \right]^2 \quad (12.83)$$

Como  $\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ , obtemos, da equação (12.83), a *frequência de ressonância*  $f_r$ ,

$$2\pi f_r = \omega_r = \frac{\beta}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \beta u'$$

ou

$$f_r = \frac{u'}{2} \sqrt{\left[ \frac{m}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n}{b} \right]^2 + \left[ \frac{p}{c} \right]^2} \quad (12.84)$$

O comprimento de onda de ressonância correspondente é

$$\lambda_r = \frac{u'}{f_r} = \frac{2}{\sqrt{\left[ \frac{m}{a} \right]^2 + \left[ \frac{n}{b} \right]^2 + \left[ \frac{p}{c} \right]^2}} \quad (12.85)$$

Da equação (12.84), notamos que o modo TM de menor ordem é o TM<sub>110</sub>.

### B. Modo TE em z

Neste caso,  $E_z = 0$  e

$$H_{zs} = (b_1 \cos k_x x + b_2 \sin k_x x)(b_3 \cos k_y y + b_4 \sin k_y y) \\ (b_5 \cos k_z z + \sin k_z z) \quad (12.86)$$

As condições de fronteira na equação (12.76c), combinadas com a equação (12.13), fornecem

$$H_{zs} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, c \quad (12.87a)$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = 0 \quad \text{em} \quad x = 0, a \quad (12.87b)$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, b \quad (12.87c)$$

Impondo as condições da equação (12.87) na equação (12.86), da mesma maneira que fizemos para o modo TM em  $z$ , obtém-se

$$\boxed{H_{ex} = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right)} \quad (12.88)$$

onde  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, 3, \dots$  e  $p = 1, 2, 3, \dots$ . As outras componentes dos campos podem ser obtidas das equações (12.13) e (12.88). A freqüência de ressonância é a mesma da equação (12.84), com a exceção de que  $m$  ou  $n$  (não ambos ao mesmo tempo) não pode ser zero para os modos TE. A razão pela qual  $m$  e  $n$  não podem ser zero ao mesmo tempo é que as componentes de campo serão zero se esses índices forem zero. O modo que tem a menor freqüência de ressonância para um determinado tamanho da cavidade ( $a, b, c$ ) é o modo dominante. Se  $a > b < c$ , então  $1/a < 1/b > 1/c$  e, portanto, o modo dominante é o TE<sub>101</sub>. Note que, para  $a > b < c$ , a freqüência de ressonância do modo TM<sub>110</sub> é maior do que a freqüência do modo TE<sub>101</sub>. Assim, o modo TE<sub>101</sub> é o modo dominante. Quando modos diferentes têm a mesma freqüência de ressonância, dizemos que os modos são *degenerados*. Um dos modos irá predominar sobre os outros, dependendo de como a cavidade é excitada.

Uma cavidade ressonante prática tem paredes de condutividade finita  $\sigma_c$  e é, portanto, dissipadora de energia. O fator de qualidade  $Q$  é uma maneira de se determinar esta perda.

**O fator de qualidade** é também uma medida da largura de banda da cavidade ressonante.

O fator de qualidade pode ser definido como

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \cdot \frac{\text{média temporal da energia armazenada}}{\text{perda de energia por ciclo de oscilação}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{W}{P_L T} = \omega \frac{W}{P_L} \end{aligned} \quad (12.89)$$

onde  $T = 1/f$  = período de oscilação,  $P_L$  é a média temporal da perda de potência na cavidade e  $W$  é a média temporal da energia total armazenada nos campos elétrico e magnético da cavidade. O fator  $Q$ , para uma cavidade ressonante é, em geral, muito alto se comparado com o de um circuito ressonante RLC. Seguindo um procedimento semelhante ao usado na obtenção de  $\alpha_c$  na Seção 12.6, pode se mostrar que o fator de qualidade para o modo dominante TE<sub>101</sub> é dado por

$$\boxed{Q_{TE_{101}} = \frac{(a^2 + c^2)abc}{\delta[2b(a^3 + c^3) + ac(a^2 + c^2)]}} \quad (12.90)$$

onde  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f_{101} \mu_0 \sigma_c}}$  é a profundidade de penetração pelicular nas paredes da cavidade.

#### EXEMPLO 12.8

Uma cavidade ressonante preenchida com ar, com dimensões  $a = 5$  cm,  $b = 4$  cm e  $c = 10$  cm, é feita de cobre ( $\sigma_c = 5,8 \times 10^7$  mhos/m). Encontre:

- os cinco modos de ordem mais baixa;
- o fator de qualidade para o modo TE<sub>101</sub>.

**Solução:**

- A freqüência de ressonância é dada por

$$f_r = \frac{u'}{2} \sqrt{\left[\frac{m}{a}\right]^2 + \left[\frac{n}{b}\right]^2 + \left[\frac{p}{c}\right]^2}$$

<sup>1</sup> Para a prova, veja S. V. Marshall e G. G. Skitek, Electromagnetic Concepts and Applications, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990, p. 440-442.

onde

$$u' = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left[\frac{m}{5 \times 10^{-2}}\right]^2 + \left[\frac{n}{4 \times 10^{-2}}\right]^2 + \left[\frac{p}{10 \times 10^{-2}}\right]^2} \\ &= 15 \sqrt{0,04m^2 + 0,0625n^2 + 0,01p^2} \text{ GHz} \end{aligned}$$

Como  $c > a > b$  ou  $1/c < 1/a < 1/b$ , o modo de menor ordem é o  $\text{TE}_{101}$ . Note que os modos  $\text{TM}_{101}$  e  $\text{TE}_{100}$  não existem, pois  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$  para os modos TM e  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $p = 1, 2, 3, \dots$  para os modos TE. A frequência de ressonância para o modo  $\text{TE}_{101}$  é

$$f_{r_{101}} = 15 \sqrt{0,04 + 0 + 0,01} = 3,335 \text{ GHz}$$

O modo seguinte é o  $\text{TE}_{011}$  (o modo  $\text{TM}_{011}$  não existe), com

$$f_{r_{011}} = 15 \sqrt{0 + 0,0625 + 0,01} = 4,04 \text{ GHz}$$

O modo seguinte é o  $\text{TE}_{102}$  (o modo  $\text{TM}_{102}$  não existe), com

$$f_{r_{102}} = 15 \sqrt{0,04 + 0 + 0,04} = 4,243 \text{ GHz}$$

O modo seguinte é o  $\text{TM}_{110}$  (o modo  $\text{TE}_{110}$  não existe), com

$$f_{r_{110}} = 15 \sqrt{0,04 + 0,0625 + 0} = 4,8 \text{ GHz}$$

Os dois modos seguintes são o  $\text{TE}_{111}$  e o  $\text{TM}_{111}$  (modos degenerados), com

$$f_{r_{111}} = 15 \sqrt{0,04 + 0,0625 + 0,01} = 5,031 \text{ GHz}$$

O modo seguinte é o  $\text{TM}_{103}$ , com

$$f_{r_{103}} = 15 \sqrt{0,04 + 0 + 0,09} = 5,408 \text{ GHz}$$

Portanto, os cinco modos de menor ordem, em ordem crescente, são:

$\text{TE}_{101}$	(3,35 GHz)
$\text{TE}_{011}$	(4,04 GHz)
$\text{TE}_{102}$	(4,243 GHz)
$\text{TM}_{110}$	(4,8 GHz)
$\text{TE}_{111}$ ou $\text{TM}_{111}$	(5,031 GHz)

(b) O fator de qualidade para o modo  $\text{TE}_{101}$  é dado por

$$\begin{aligned} Q_{\text{TE}_{101}} &= \frac{(a^2 + c^2) abc}{\delta[2b(a^3 + c^3) + ac(a^2 + c^2)]} \\ &= \frac{(25 + 100) 200 \times 10^{-2}}{\delta[8(125 + 1.000) + 50(25 + 100)]} \\ &= \frac{1}{61\delta} = \frac{\sqrt{\pi f_{101} \mu_0 \sigma_c}}{61} \\ &= \frac{\sqrt{\pi(3,35 \times 10^9) 4\pi \times 10^{-7} (5,8 \times 10^7)}}{61} \\ &= 14,358 \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 12.8**

Se a cavidade ressonante do Exemplo 12.8 é preenchida com um material sem perdas ( $\mu_r = 1$ ,  $\mu_r = 3$ ), encontre a freqüência de ressonância  $f_r$  e o fator de qualidade para o modo  $TE_{101}$ .

**Resposta:** 1,936 GHz;  $1,093 \times 10^4$ .

**RESUMO**

- Guias de onda são estruturas utilizadas para guiar ondas EM em altas freqüências. Supondo um guia retangular sem perdas ( $\sigma_c \approx \infty$ ,  $\sigma \approx 0$ ), aplicamos as equações de Maxwell na análise da propagação de uma onda EM no interior do guia. A equação diferencial parcial resultante é resolvida usando o método de separação de variáveis. Aplicando-se as condições de fronteira nas paredes do guia, obtém-se as equações básicas para os diferentes modos de propagação no mesmo.
- Os modos  $TM_{mn}$  e  $TE_{mn}$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros positivos, são diferentes configurações de campo que podem se propagar no guia. Para modos TM,  $m = 1, 2, 3, \dots$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; e para modos TE,  $m = 0, 1, 2, \dots$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$ , com  $n = m \neq 0$ .
- Cada modo de propagação tem uma constante de propagação e uma freqüência de corte associados. A constante de propagação  $\gamma = \alpha + j\beta$  não depende só dos parâmetros constitutivos do meio ( $\epsilon, \mu, \sigma$ ), como no caso das ondas planas no espaço ilimitado, mas depende também das dimensões da seção reta do guia ( $a, b$ ). A freqüência de corte é a freqüência na qual  $\gamma$  deixa de ser um número puramente real (atenuação) e passa a ser um número puramente imaginário (propagação). O modo de operação dominante é o de menor freqüência de corte possível. Se  $a > b$ , o modo dominante é o  $TE_{101}$ .
- As equações básicas para os cálculos da freqüência de corte  $f_r$ , da constante de fase  $\beta$  e da velocidade de fase  $u$  estão apresentadas na Tabela 12.1. Também são fornecidas fórmulas para o cálculo da constante de atenuação devido ao meio dielétrico com perdas e devido às paredes condutoras imperfeitas.
- A velocidade de grupo (ou velocidade de fluxo de energia)  $u_g$  está relacionada com a velocidade de fase de propagação da onda  $u_p$  por

$$u_p u_g = u'^2$$

onde  $u' = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  é a velocidade de propagação da onda no meio limitado pelas paredes do guia. Embora  $u_p$  seja maior do que  $u'$ ,  $u_p$  não excede  $u'$ .

- O modo de operação para uma determinado guia é definido pelo método de excitação.
- Uma cavidade ressonante de guia de onda é usada para armazenamento de energia em altas freqüências. Ela não é nada mais do que um guia de onda fechado em suas duas extremidades. Portanto, a sua análise é semelhante à do guia de onda. As freqüências de ressonância para os modos TE e TM em  $z$  são dadas por

$$f_r = \frac{u'}{2} \sqrt{\left[\frac{m}{a}\right]^2 + \left[\frac{n}{b}\right]^2 + \left[\frac{p}{c}\right]^2}$$

Para modos TM,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; e para modos TE,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  e  $p = 1, 2, 3, \dots$ , com  $m = n \neq 0$ . Se  $a > b$ , e  $b < c$ , o modo dominante (o de menor freqüência de ressonância) é o  $TE_{101}$ .

- O fator de qualidade, que é uma medida da perda de energia na cavidade, é dado por

$$Q = \omega \frac{W}{P_L}$$

## QUESTÕES DE REVISÃO

**12.1** Em freqüências de microondas, preferimos os guias de ondas às linhas de transmissão para transportar energia EM por todas as razões que seguem, com a *exceção* de:

- (a) as perdas nas linhas de transmissão são proibitivamente elevadas;
- (b) os guias de onda têm largura de banda maior e atenuação de sinal menor;
- (c) as linhas de transmissão tem maiores dimensões que os guias de onda;
- (d) as linhas de transmissão suportam somente o modo TEM.

**12.2** Uma onda evanescente ocorre quando:

- (a) uma onda é atenuada, ao invés de se propagar;
- (b) a constante de propagação é puramente imaginária;
- (c)  $m = 0 = n$ , de tal maneira que todas as componentes de campo se anulam;
- (d) a freqüência da onda é igual à freqüência de corte.

**12.3** Para guias retangulares, o modo dominante é:

- (a)  $\text{TE}_{11}$
- (b)  $\text{TM}_{11}$
- (c)  $\text{TE}_{101}$
- (d)  $\text{TE}_{10}$

**12.4** O modo  $\text{TM}_{10}$  pode existir em um guia retangular.

- (a) Verdadeiro
- (b) Falso

**12.5** No modo  $\text{TE}_{30}$ , quais das seguintes componentes de campo existem?

- (a)  $E_x$
- (b)  $E_y$
- (c)  $E_z$
- (d)  $H_x$
- (e)  $H_y$

**12.6** Em um guia de onda retangular, para o qual  $a = 2b$ , a freqüência de corte do modo  $\text{TE}_{02}$  é 12 GHz. A freqüência de corte do modo  $\text{TM}_{11}$  é:

- (a) 3 GHz
- (b)  $3\sqrt{5}$  GHz
- (c) 12 GHz
- (d)  $6\sqrt{5}$  GHz
- (e) Nenhuma delas

**12.7** Se um túnel tem seção reta de 4 m por 7 m, um carro no túnel não receberá sinais de rádio AM (por exemplo,  $f = 10$  MHz).

- (a) Verdadeiro
- (b) Falso

**12.8** Quando o campo elétrico é máximo em uma cavidade ressonante, a energia magnética estará:

- (a) em seu valor máximo;
- (b) a  $\sqrt{2}$  do seu valor máximo;
- (c) a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  do seu valor máximo;
- (d) a 1/2 do seu valor máximo;
- (e) zero.

**12.9** Qual dos seguintes modos não existe em uma cavidade ressonante retangular?

- (a)  $TE_{110}$
- (b)  $TE_{011}$
- (c)  $TM_{110}$
- (d)  $TM_{111}$

**12.10** Quantos modos dominantes degenerados existem em uma cavidade ressonante retangular, para a qual  $a = b = c$ ?

- (a) 0
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 5
- (e)  $\infty$

*Respostas:* 12.1c; 12.2 a; 12.3d; 12.4b; 12.5 b,d; 12.6 b; 12.7 a; 12.8 e; 12.9 a; 12.10 c.

### PROBLEMAS

**12.1** (a) Mostre que um guia de onda retangular não suporta os modos  $TM_{10}$  e  $TM_{01}$ .  
 (b) Descreva as diferenças entre os modos  $TE_{mn}$  e  $TM_{mn}$ .

**12.2** Um guia de onda de 2 cm por 3 cm é preenchido com um material dielétrico, com  $\epsilon_r = 4$ . Se o guia opera a 20 GHz no modo  $TM_{11}$ , determine: (a) a freqüência de corte; (b) a constante de fase; (c) a velocidade de fase.

**12.3** Um guia de onda de 1 cm  $\times$  2 cm é preenchido com água desionizada, com  $\epsilon_r = 81$ . Se a freqüência de operação é de 4,5 GHz, determine: (a) todos os modos que podem se propagar e suas freqüências de corte; (b) a impedância intrínseca do modo de freqüência de corte mais alta; (c) a velocidade de grupo do modo de freqüência de corte mais baixa.

**12.4** Projete um guia de onda retangular com uma razão de 3 para 1 em suas dimensões, para ser usado na banda k (18 – 26,5 GHz). Suponha que o guia é preenchido com ar.

**12.5** Um túnel é modelado como um guia de onda retangular metálico, preenchido com ar, com dimensões de  $a = 8$  m e  $b = 16$  m. Determine se o túnel transmite: (a) um sinal de radiodifusão em AM de 1,5 MHz; (b) um sinal de radiodifusão em FM de 120 MHz.

**12.6** Em um guia retangular preenchido com ar, a freqüência de corte do modo  $TE_{10}$  é 5 GHz, enquanto que a do modo  $TE_{01}$  é 12 GHz. Calcule:

- (a) as dimensões do guia;
- (b) as freqüências de corte dos três modos seguintes;
- (c) a freqüência de corte para o modo  $TE_{11}$  no caso de o guia ser preenchido com um material sem perdas, que tem  $\epsilon_r = 2,25$  e  $\mu_r = 1$ .

- 12.7** Um guia de onda retangular oco preenchido com ar tem 150 metros de comprimento e é fechado em sua extremidade por uma chapa metálica. Se um pulso curto de 7,2 GHz é introduzido em sua entrada, calcule o tempo necessário para que o pulso retorne à entrada do guia. Suponha que a freqüência de corte do guia seja 6,5 GHz.

- 12.8** Calcule as dimensões de uma guia de onda preenchido com ar, para o qual as freqüências de corte dos modos  $TM_{11}$  e  $TE_{01}$  são, ambas, iguais a 12 GHz. Determine se o modo dominante irá se propagar ou evanescer na freqüência de 8 GHz.

- 12.9** Um guia retangular preenchido com ar tem seção reta com dimensões  $a = 6$  cm e  $b = 3$  cm. Dado que

$$E_z = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi y}{b}\right) \cos(10^{12}t - \beta z) \text{ V/m}$$

calcule a impedância intrínseca e o fluxo médio de potência para este modo no guia.

- 12.10** Em um guia de onda preenchido com ar, um modo TE operando a 6 GHz tem

$$E_y = 5 \operatorname{sen}(2\pi x/a) \cos(\pi y/b) \operatorname{sen}(\omega t - 12z) \text{ V/m}$$

Determine: (a) o modo de operação; (b) a freqüência de corte; (c) a impedância intrínseca; (d)  $H_x$ .

- 12.11** Em um guia de onda retangular preenchido com ar, com  $a = 2,286$  cm e  $b = 1,016$  cm, a componente  $y$  do modo TE é dada por:

$$E_y = \operatorname{sen}(2\pi x/a) \cos(3\pi y/b) \operatorname{sen}(10\pi \times 10^{10}t - \beta z) \text{ V/m}$$

Encontre: (a) o modo de operação; (b) a constante de propagação  $\gamma$ ; (c) a impedância intrínseca  $\eta$ .

- 12.12** Obtenha a equação para a potência média transmitida pelo guia para o modo  $TM_{11}$ .

- 12.13** (a) Mostre que, para um guia retangular,

$$u_p = \frac{u'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}} \quad \lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - \left[\frac{f_c}{f}\right]^2}}$$

- (b) Calcule  $u_p$  e  $\lambda$  para os modos  $TE_{11}$  e  $TE_{21}$  em um guia de onda preenchido com ar, com  $a = 2b = 2,5$  cm, operando em 20 GHz.

- 12.14** Um guia de onda retangular preenchido com ar, de  $1$  cm  $\times$   $3$  cm, opera no modo  $TE_{12}$  em uma freqüência que está 20% acima da freqüência de corte desse modo. Determine: (a) a freqüência de operação; (b) as velocidades de fase e de grupo.

- 12.15** Um transmissor de microondas está conectado a uma antena por um guia de onda preenchido com ar, de seção reta de  $2,5$  cm  $\times$   $1$  cm. Para transmissão a 11 GHz, encontre a razão entre (a) a velocidade de fase e a velocidade de propagação no meio e (b) a velocidade de grupo e a velocidade de propagação no meio.

- 12.16** Um guia retangular é preenchido com polietileno ( $\epsilon = 2,25\epsilon_0$ ) e opera em 24 GHz. Se a freqüência de corte de um certo modo TE é 16 GHz, encontre a velocidade de grupo e a impedância intrínseca do modo.

- 12.17** Um guia de onda retangular com a seção reta mostrada na Figura 12.16 tem uma descontinuidade dielétrica. Calcule a razão de onda estacionária, sabendo que o guia opera a 8 GHz no modo dominante.

\*12.18 A análise do guia de onda cilíndrico requer a solução da equação escalar de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, isto é,

$$\nabla^2 E_{zs} + k^2 E_{zs} = 0$$

ou

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E_{zs}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial z^2} + k^2 E_{zs} = 0$$

Supondo que a solução é produto,

$$E_{zs}(\rho, \phi, z) = R(\rho) \Phi(\phi) Z(z)$$

demonstre que a equação é separada nas três equações seguintes:

$$\begin{aligned} Z'' - k_z^2 Z &= 0 \\ \Phi'' + k_\phi^2 \Phi &= 0 \\ \rho^2 R'' + \rho R' + (k_\rho^2 \rho^2 - k_\phi^2) R &= 0 \end{aligned}$$

onde

$$k_\rho^2 = k^2 + k_z^2$$

12.19 Para o modo TE<sub>01</sub>,

$$E_{zs} = \frac{j\omega\mu\pi}{bh^2} H_0 \sin(\pi y/b) e^{-\gamma z}, \quad E_{ys} = 0$$

Encontre  $\mathcal{P}_{\text{med}}$  e  $P_{\text{med}}$ .

12.20 Um guia de onda, de 1 cm × 2 cm, é feito de cobre ( $\sigma_c = 5,8 \times 10^7$  S/m) e é preenchido com um material dielétrico, para o qual  $\epsilon = 2,6\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  e  $\sigma_d = 10^{-7}$  S/m. Se o guia opera a 9 GHz, calcule  $\alpha_c$  e  $\alpha_d$  para os modos (a) TE<sub>10</sub> e (b) TM<sub>11</sub>.

12.21 Um guia de onda quadrado, de 4 cm de lado, é preenchido com um dielétrico, cuja permissividade complexa é  $\epsilon_r = 16\epsilon_0(1 - j10^{-4})$  e é excitado no modo TM<sub>21</sub>. Se o guia opera a 10% acima da frequência de corte, calcule a atenuação  $\alpha_d$ . Que distância a onda pode se propagar pelo guia antes que sua amplitude seja reduzida de 20%?

12.22 Se as paredes do guia do problema anterior forem feitas de bronze ( $\sigma_c = 1,5 \times 10^7$  S/m), encontre  $\alpha_c$  e a distância para a qual a onda é atenuada de 30%.

12.23 Um guia retangular, com  $a = 2b = 4,8$  cm, é preenchido com teflon, com  $\epsilon_r = 2,11$  e uma tangente de perdas de  $3 \times 10^{-4}$ . Suponha que as paredes do guia sejam recobertas de ouro ( $\sigma_c = 4,1 \times 10^7$  S/m) e que uma onda de 4 GHz se propague no modo TE<sub>10</sub>. Encontre: (a)  $\alpha_d$ , (b)  $\alpha_c$ .

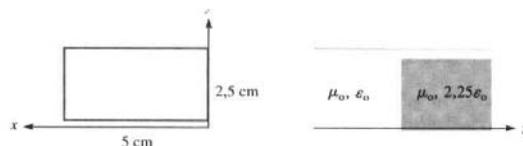


Figura 12.16 Referente ao Problema 12.17.

- \*12.24 Um guia retangular de bronze ( $\sigma_c = 1,37 \times 10^7$  S/m), com dimensões de  $a = 2,25$  cm e  $b = 1,5$  cm, opera no modo dominante na freqüência de 5 GHz. Se o guia é preenchido com teflon ( $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 2,11$ ,  $\sigma = 0$ ), determine: (a) a freqüência de corte para o modo dominante; (b) a constante de atenuação devido às perdas nas paredes do guia.

- \*12.25 Mostre que a constante de atenuação  $\alpha_{c_s}$  para o modo  $TE_{10}$  em um guia de onda quadrado, é mínima quando  $f = 2,962 f_c$ .

- 12.26 A constante de atenuação para modos TM é dada por

$$\alpha = \frac{2}{\eta_0} \sqrt{\frac{\pi f \mu / \sigma}{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Em que freqüência  $\alpha$  será máxima?

- \*12.27 Mostre que, para o modo TE em  $z$ , para uma cavidade retangular

$$E_{yz} = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right)$$

Encontre  $H_{xz}$ .

- \*12.28 Para uma cavidade retangular, mostre que

$$H_{xz} = \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{c}\right)$$

para o modo TM em  $z$ . Determine  $E_{yz}$ .

- 12.29 Qual é o modo dominante em uma cavidade ressonante retangular quando:

- (a)  $a < b < c$ ,
- (b)  $a > b > c$ ,
- (c)  $a = c > b$ ,

- 12.30 Para uma cavidade retangular preenchida com ar, com dimensões  $a = 3$  cm,  $b = 2$  cm e  $c = 4$  cm, determine as freqüências de ressonância para os seguintes modos:  $TE_{011}$ ,  $TE_{101}$ ,  $TM_{110}$  e  $TM_{111}$ . Liste as freqüências de ressonância em ordem crescente.

- 12.31 Uma cavidade ressonante retangular tem dimensões  $a = 3$  cm,  $b = 6$  cm e  $c = 9$  cm. Se ela é preenchida com polietileno ( $\epsilon = 2,5 \epsilon_0$ ), encontre as freqüências de ressonância dos cinco modos de menor ordem.

- 12.32 Uma cavidade cúbica preenchida com ar opera na freqüência de ressonância de 2 GHz quando excitada no modo  $TE_{101}$ . Determine as dimensões da cavidade.

- 12.33 Uma cavidade cúbica preenchida com ar tem lado de 3,2 cm e é feita de bronze ( $\sigma_c = 1,37 \times 10^7$  S/m). Calcule: (a) a freqüência de ressonância para o modo  $TE_{101}$ , (b) o fator de qualidade para este modo.

- 12.34 Projete uma cavidade ressonante cúbica preenchida com ar para que a freqüência de ressonância do modo dominante seja 3 GHz.

- 12.35 Uma cavidade cúbica preenchida com ar, de 10 cm de lado, tem

$$\mathbf{E} = 200 \sin 30\pi x \sin 30\pi y \cos 6 \times 10^9 t \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Encontre  $\mathbf{H}$ .

# Capítulo 13

## ANTENAS

Os dez mandamentos do sucesso são:

1. Trabalhar duro: trabalhar duro é o melhor investimento que um homem pode fazer.
2. Estudar com afinco: o conhecimento permite a um homem trabalhar de forma mais inteligente e eficaz.
3. Ter iniciativa: a rotina geralmente termina no túmulo.
4. Amar o seu trabalho: assim, você encontrará prazer em realizá-lo.
5. Ser exato: métodos inexatos levam a resultados inexatos.
6. Ter o espírito da conquista: assim, você pode lutar com sucesso e vencer as dificuldades.
7. Cultivar a personalidade: a personalidade é para o homem o que o perfume é para as flores.
8. Ajudar a e dividir com os demais: o teste real da grandeza de um negócio está em criar oportunidade para outras pessoas.
9. Ser democrático: a menos que você seja correto com seus companheiros, você nunca poderá ser um líder de sucesso.
10. Dar o melhor de si em todos os momentos: a pessoa que deu o melhor de si fez tudo. A pessoa que não deu todo o seu melhor, não fez nada.

— CHARLES M. SCHWAB

### 13.1 INTRODUÇÃO

Até o momento, não nos perguntamos como as ondas EM são produzidas. Lembre que as cargas elétricas são as fontes dos campos EM. Se as fontes variam com o tempo, ondas EM se propagam para longe das fontes e diz-se que ocorreu irradiação. A irradiação pode ser pensada como um processo de transmissão de energia elétrica. A irradiação, ou a emissão de ondas eletromagnéticas no espaço, é obtida, de forma eficiente, com a ajuda de estrutura condutoras ou dielétricas chamadas de *antenas*. Teoricamente, qualquer estrutura pode irradiar ondas EM, mas nem todas o farão de forma eficiente.

Uma antena pode também ser vista como um transdutor usado para casar a linha de transmissão ou guia de onda (usados no guiamento da onda a ser emitida) ao meio circundante, ou vice-versa. A Figura 13.1 mostra como uma antena é utilizada para obter o casamento entre a linha ou guia e o meio. A antena é necessária por duas razões principais: melhorar a eficiência de irradiação e o casamento de impedâncias, visando minimizar reflexões. A antena usa, ou a corrente e a tensão de uma linha de transmissão, ou campos EM de um guia de onda para emitir uma onda EM no meio. Uma antena pode ser usada tanto para transmitir como para receber energia EM.

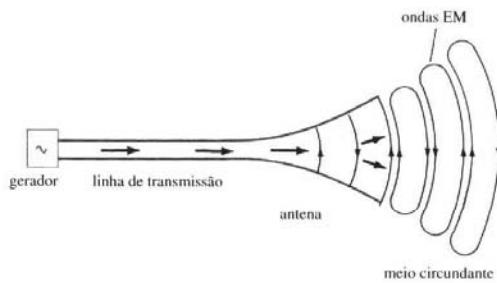


Figura 13.1 A antena como um dispositivo de casamento entre a estrutura de guiamento e o meio circundante.

Algumas antenas típicas são apresentadas na Figura 13.2. A antena dipolo, da Figura 13.2(a), consiste de dois fios retos alinhados ao longo do mesmo eixo. A antena em anel, da Figura 13.2(b), consiste de uma ou mais espiras de fio. A antena helicoidal, da Figura 13.2(c), consiste de um fio na forma de um helicóide com um plano terra em sua parte traseira. As antenas da Figura 13.2(a-c) são chamadas *antenas de fio* e são utilizadas em automóveis, prédios, aeronaves, navios, etc. A corneta piramidal, da Figura 13.2(d), exemplo de uma *antena de abertura*, é uma seção de um guia de onda que se alarga, formando uma transição entre o guia de onda e o meio circundante. Como seu plano de saída pode ser adaptado, convenientemente, a superfícies planas, ela é útil em muitas situações práticas, como, por exemplo, em aeronaves. O refletor parabólico, da Figura 13.2(e), utiliza o fato de que as ondas EM são refletidas por uma chapa condutora. Quando o refletor parabólico é usado como antena transmissora, uma antena alimentadora, tal como um dipolo ou uma corneta, é colocada no foco da parábola. A irradiação desta fonte é refletida pelo refletor (atuando como um espelho), o que resulta em um feixe paralelo. Antenas de refletor parabólico são usadas em comunicações, radares e astronomia.

O fenômeno da irradiação é bastante complicado, razão pela qual atrasamos intencionalmente a sua discussão para este capítulo. Não pretendemos abordar na sua totalidade a teoria das antenas. A nossa discussão será limitada aos tipos básicos de antenas, como o dipolo de Hertz, o dipolo de meia onda, o monopolo de quarto de onda e a antena em anel pequena. Para cada um destes tipos de antenas, vamos determinar os campos de irradiação através do seguinte procedimento:

1. Selecionar um sistema de coordenadas apropriado e determinar o potencial magnético vetorial  $\mathbf{A}$ .
2. Calcular  $\mathbf{H}$  usando  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$
3. Determinar  $\mathbf{E}$  a partir de  $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  ou  $\mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \mathbf{a}_k$ , supondo um meio sem perdas ( $\sigma = 0$ ).
4. Encontrar o campo distante e determinar a potência média no tempo irradiada usando

$$P_{ir} = \int \mathcal{P}_{med} \cdot dS, \quad \text{onde} \quad \mathcal{P}_{med} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*)$$

Note que, ao longo deste capítulo,  $P_{ir}$  é o mesmo  $P_{med}$  da equação (10.70).

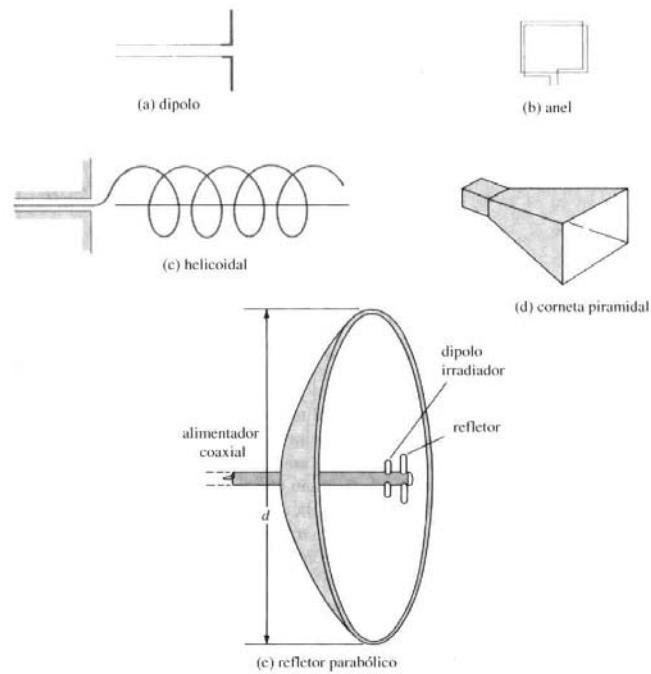


Figura 13.2 Antenas típicas.

### 13.2 DIPOLO HERTZIANO

Entende-se como um dipolo hertziano um elemento de corrente infinitesimal  $I \, dl$ . Embora tal elemento de corrente não exista na realidade, ele serve como elemento básico, a partir do qual o campo de antenas usadas na prática pode ser calculado por integração.

Considere o dipolo hertziano mostrado na Figura 13.3. Assumimos que o mesmo está localizado na origem de um sistema de coordenadas e que a corrente é uniforme (independente da posição considerada ao longo do dipolo),  $I = I_0 \cos \omega t$ . Da equação (9.54), o potencial magnético vetorial com retardo no ponto  $P$ , devido ao dipolo, é dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu [I] \, dl}{4\pi r} \mathbf{a}_z \quad (13.1)$$

onde  $[I]$  é a corrente com retardo, dada por

$$\begin{aligned} [I] &= I_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) = I_0 \cos (\omega t - \beta r) \\ &= \operatorname{Re} [I_0 e^{i(\omega t - \beta r)}] \end{aligned} \quad (13.2)$$

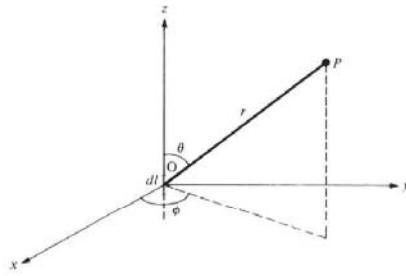


Figura 13.3 Um dipolo hertziano percorrido por uma corrente  $I = I_0 \cos \omega t$ .

onde  $\beta = \omega/u = 2\pi/\lambda$  e  $u = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ . A corrente é dita *com retardo* no ponto  $P$  porque existe um atraso devido ao tempo de propagação  $r/u$ , ou atraso de fase  $\beta r$ , do ponto  $O$  ao ponto  $P$ . Substituindo a equação (13.2) na equação (13.1), podemos escrever  $\mathbf{A}$  na forma fasorial como

$$\mathbf{A}_{zs} = \frac{\mu I_0 dl}{4\pi r} e^{-j\beta r} \quad (13.3)$$

Transformando este vetor de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas, obtemos

$$\mathbf{A}_s = (A_{rs}, A_{\theta s}, A_{\phi s})$$

onde

$$A_{rs} = A_{zs} \cos \theta, \quad A_{\theta s} = -A_{zs} \sin \theta, \quad A_{\phi s} = 0 \quad (13.4)$$

Contudo,  $\mathbf{B}_s = \mu \mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s$ . Portanto, obtemos o campo  $\mathbf{H}$  como

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 dl}{4\pi} \sin \theta \left[ \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.5a)$$

$$H_{rs} = 0 = H_{\theta s} \quad (13.5b)$$

Encontramos o campo  $\mathbf{E}$  usando  $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$  ou  $\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega \varepsilon \mathbf{E}_s$

$$E_{rs} = \frac{\eta I_0 dl}{2\pi} \cos \theta \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.6a)$$

$$E_{\theta s} = \frac{\eta I_0 dl}{4\pi} \sin \theta \left[ \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.6b)$$

$$E_{\phi s} = 0 \quad (13.6c)$$

onde

$$\eta = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Uma observação cuidadosa das expressões para os campos nas equações (13.5) e (13.6) revela que existem termos variando de acordo com  $1/r^3$ ,  $1/r^2$  e  $1/r$ . O termo  $1/r^3$  é chamado *campo eletrostático*, pois o mesmo corresponde ao campo de um dipolo elétrico [veja a equação (4.82)]. Este termo predomina sobre os outros termos na região muito próxima do dipolo hertziano. O termo  $1/r^2$  é chamado *campo induutivo* e é previsto pela lei de Biot-Savart [veja a equação (7.3)]. Este termo é importante somente na região de campo próximo, isto é, em distâncias próximas ao elemento de corrente. O termo  $1/r$  é chamado *campo distante* ou *campo de irradiação*, pois é o único que ainda permanece na zona distante, isto é, em pontos muito distantes do elemento de corrente. Vamos, aqui, nos concentrar no campo distante, ou na região de irradiação ( $\beta r \gg 1$  ou  $2\pi r \gg \lambda$ ), onde os termos em  $1/r^3$  e  $1/r^2$  podem ser desprezados frente ao termo  $1/r$ . Portanto, no campo distante,

$$H_{\phi s} = \frac{jI_o \beta dl}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\beta r}, \quad E_{\theta s} = \eta H_{\phi s} \quad (13.7a)$$

$$H_{rs} = H_{\theta s} = E_{rs} = E_{\phi s} = 0 \quad (13.7b)$$

Note que, da equação (13.7a), os termos de irradiação de  $H_{\phi s}$  e  $E_{\theta s}$  estão temporalmente em fase e são ortogonais, exatamente como os campos de uma onda plana uniforme. Note, também, que os campos da zona próxima e da zona distante são determinados, respectivamente, pelas inequações  $\beta r \ll 1$  e  $\beta r \gg 1$ . Mais especificamente, vamos definir o limite entre as zonas próxima e distante pelo valor de  $r$  dado por

$$r = \frac{2d^2}{\lambda} \quad (13.8)$$

onde  $d$  é a maior dimensão da antena.

A média temporal da densidade de potência é obtida como

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_{\text{med}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_{\theta s} H_{\phi s}^* \mathbf{a}_r) \\ &= \frac{1}{2} \eta |H_{\phi s}|^2 \mathbf{a}_r \end{aligned} \quad (13.9)$$

Substituindo a equação (13.7) na equação (13.9), obtemos a média temporal da potência irradiada como

$$\begin{aligned} P_{it} &= \int \bar{\mathcal{P}}_{\text{med}} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{I_o^2 \eta \beta^2 dl^2}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{I_o^2 \eta \beta^2 dl^2}{32\pi^2} 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \end{aligned} \quad (13.10)$$

Contudo,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d(-\cos \theta) \\ &= \left. \frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right|_0^{\pi} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

e  $\beta^2 = 4\pi^2/\lambda^2$ . Portanto, a equação (13.10) torna-se

$$P_{it} = \frac{I_o^2 \pi \eta}{3} \left[ \frac{dl}{\lambda} \right]^2 \quad (13.11a)$$

Se o meio de propagação é o espaço livre,  $\eta = 120\pi$  e

$$P_{ir} = 40\pi^2 \left[ \frac{dl}{\lambda} \right]^2 I_o^2 \quad (13.11b)$$

Esta potência é equivalente à dissipada pela corrente  $I = I_o \cos \omega t$  em uma resistência fictícia  $R_{ir}$ , isto é,

$$P_{ir} = I_{rms}^2 R_{ir}$$

ou

$$P_{ir} = \frac{1}{2} I_o^2 R_{ir} \quad (13.12)$$

onde  $I_{rms}$  é a raiz do valor quadrático médio\* de  $I$ . Das equações (13.11) e (13.12), obtemos

$$R_{ir} = \frac{2P_{ir}}{I_o^2} \quad (13.13a)$$

ou

$$R_{ir} = 80\pi^2 \left[ \frac{dl}{\lambda} \right]^2 \quad (13.13b)$$

A resistência  $R_{ir}$  é uma propriedade característica do dipolo hertziano e é chamada *resistência de irradiação*. Das equações (13.12) e (13.13), observamos que necessitamos antenas com resistência de irradiação grande para irradiar grandes quantidades de potência para o espaço. Por exemplo, se  $dl = \lambda/20$ ,  $R_{ir} \approx 2 \Omega$ , o que é um valor pequeno, isto é, esta antena irradia valores relativamente baixos de potência. Deve-se notar que a  $R_{ir}$  para o dipolo hertziano, apresentada na equação (13.13b) é válida para o espaço livre. Se o dipolo está em um outro meio sem perdas,  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  deve ser substituído na equação (13.11a) e  $R_{ir}$  será determinada usando a equação (13.13a).

Note que o dipolo de Hertz é considerado infinitesimalmente pequeno ( $\beta dl \ll 1$  ou  $dl \leq \lambda/10$ ). Consequentemente, a sua resistência de irradiação é muito pequena e, na prática, isto dificulta o seu casamento com uma linha de transmissão real. Assumimos também que o dipolo tem um distribuição de corrente uniforme. Isto requer que a corrente não seja nula nas extremidades da antena. Isto é impossível do ponto de vista prático, pois o meio circundante não é condutor. Entretanto, nossa análise servirá como uma aproximação útil e válida para antenas com  $dl \leq \lambda/10$ . Vamos analisar, na próxima seção, o caso de antena mais comum na prática (e talvez o mais importante) que é a antena dipolo de meia onda.

### 13.3 ANTENA DIPOLO DE MEIA ONDA

O termo dipolo de meia onda deriva do fato de que o comprimento dessa antena é a metade de um comprimento de onda ( $\ell = \lambda/2$ ). Conforme mostrado na Figura 13.4(a), ele consiste de um fio fino alimentado ou excitado, no seu ponto central, por uma fonte de tensão conectada à antena através de uma linha de transmissão (uma linha bifilar, por exemplo). O campo devido ao dipolo pode ser obtido, com facilidade, se considerarmos que o dipolo é uma sucessão de dipolos de Hertz. O potencial magnético vetorial em  $P$ , devido a um comprimento diferencial  $dl$  ( $= dz$ ) do dipolo, que conduz uma corrente fasorial  $I_s = I_o \cos \beta z$ , é

$$dA_{zs} = \frac{\mu I_o \cos \beta z dz}{4\pi r'} e^{-j\beta r'} \quad (13.14)$$

\* N. de T. Do inglês, *root mean square*. Também denominado de valor eficaz, em português.

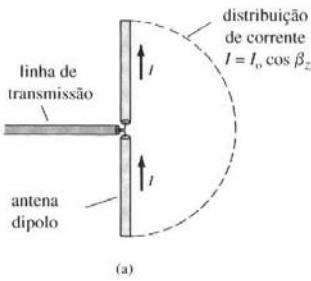
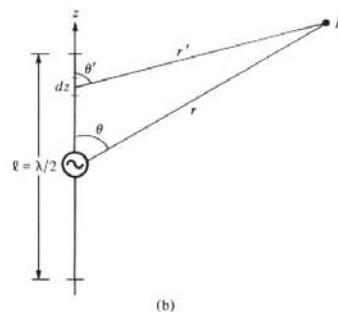


Figura 13.4 Um dipolo de meia onda.



Note que, para obtermos a equação (13.14), assumimos uma distribuição de corrente senoidal, pois a corrente deve ser nula nas extremidades do dipolo. Também é possível utilizar uma distribuição de corrente triangular (veja o Problema 13.4). Entretanto, esta distribuição fornece resultados menos precisos. A distribuição real da corrente na antena não é conhecida com precisão. Ela pode ser determinada pela resolução das equações de Maxwell, aplicando as condições de fronteira na superfície da antena, mas este procedimento é matematicamente complexo. Entretanto, a suposta corrente senoidal se assemelha bastante à distribuição obtida pela solução do problema de valor de fronteira e é a distribuição normalmente utilizada no estudo da Teoria de Antenas.

Se  $r \gg \ell$ , conforme exposto na Seção 4.9 sobre dipolos elétricos (ver Figura 4.21), então,

$$r - r' = z \cos \theta \quad \text{ou} \quad r' = r - z \cos \theta$$

Portanto, podemos substituir  $r' = r$  no denominador da equação (13.14), em que é necessário considerar o valor da distância entre o elemento de corrente e o ponto em que desejamos calcular o campo. Para o termo fasorial no numerador da equação (13.14), a diferença entre  $\beta r$  e  $\beta r'$  é significativa. Sen-  
do assim, substituímos  $r'$  por  $r - z \cos \theta$ , em lugar de substitui-lo por  $r$ . Em outras palavras, mantemos o termo em cosseno na função exponencial e desprezamos este termo no denominador, pois a expo-  
nencial envolve a constante de fase, enquanto o denominador não depende deste fator. Portanto,

$$\begin{aligned} A_{zs} &= \frac{\mu I_0}{4\pi r} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{-j\beta(r-z \cos \theta)} \cos \beta z \, dz \\ &= \frac{\mu I_0}{4\pi r} e^{-j\beta r} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{j\beta z \cos \theta} \cos \beta z \, dz \end{aligned} \quad (13.15)$$

Da tabela de integrais do Apêndice A.8, obtemos

$$\int e^{az} \cos bz \, dz = \frac{e^{az} (a \cos bz + b \sin bz)}{a^2 + b^2}$$

Aplicando este resultado à equação (13.15), resulta em

$$A_{zs} = \frac{\mu I_o e^{-j\beta r} e^{j\beta z \cos \theta}}{4\pi r} \left. \frac{(j\beta \cos \theta \cos \beta z + \beta \sin \beta z)}{-\beta^2 \cos^2 \theta + \beta^2} \right|_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \quad (13.16)$$

Como  $\beta = 2\pi/\lambda$  ou  $\beta \lambda/4 = \pi/2$  e  $-\cos^2 \theta + 1 = \sin^2 \theta$ , a equação (13.16) torna-se

$$A_{zs} = \frac{\mu I_o e^{-j\beta r}}{4\pi r \beta^2 \sin^2 \theta} [e^{j(\pi/2) \cos \theta} (0 + \beta) - e^{-j(\pi/2) \cos \theta} (0 - \beta)] \quad (13.17)$$

Usando a identidade  $e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x$ , obtemos

$$A_{zs} = \frac{\mu I_o e^{-j\beta r} \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{2\pi r \beta \sin^2 \theta} \quad (13.18)$$

Usamos a equação (13.4) em conjunto com as relações  $\mathbf{B}_s = \mu \mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s$  e  $\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega \epsilon \mathbf{E}_s$ , para obtermos os campos magnético e elétrico na zona distante (descartando os termos  $1/r^3$  e  $1/r^2$ ) como

$$H_{\phi s} = \frac{jI_o e^{-j\beta r} \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{2\pi r \sin \theta}, \quad E_{\theta s} = \eta H_{\phi s} \quad (13.19)$$

Note, novamente, que os termos de irradiação dos campos  $H_{\phi s}$  e  $E_{\theta s}$  estão em fase no tempo e são ortogonais entre si.

Utilizando as equações (13.9) e (13.19), podemos obter a densidade de potência média no tempo como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{méd}} &= \frac{1}{2} \eta |H_{\phi s}|^2 \mathbf{a}_r \\ &= \frac{\eta I_o^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{8\pi^2 r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{a}_r \end{aligned} \quad (13.20)$$

A potência irradiada média no tempo pode ser determinada como

$$\begin{aligned} P_{ir} &= \int \mathcal{P}_{\text{méd}} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\eta I_o^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{8\pi^2 r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{\eta I_o^2}{8\pi^2} 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \, d\theta \\ &= 30 I_o^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \, d\theta \end{aligned} \quad (13.21)$$

onde  $\eta = 120\pi$  foi usado, supondo que o meio de propagação é o espaço livre. Devido à natureza do integrando na equação (13.21),

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \, d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \, d\theta$$

Este resultado pode ser ilustrado, com facilidade, fazendo-se um esboço grosso da dependência do integrando com relação a  $\theta$ . Portanto,

$$P_{ir} = 60I_o^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) d\theta}{\sin \theta} \quad (13.22)$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \cos \theta$  e usando frações parciais, podemos reduzir a equação (13.22) a

$$\begin{aligned} P_{ir} &= 60I_o^2 \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\pi u}{1-u^2} du \\ &= 30I_o^2 \left[ \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\pi u}{1+u} du + \int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\pi u}{1-u} du \right] \end{aligned} \quad (13.23)$$

Substituindo  $1+u$  por  $v$  no primeiro integrando e  $1-u$  por  $v$  no segundo integrando, resulta em

$$\begin{aligned} P_{ir} &= 30I_o^2 \left[ \int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\pi v}{v} dv + \int_1^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\pi v}{v} dv \right] \\ &= 30I_o^2 \int_0^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\pi v}{v} dv \end{aligned} \quad (13.24)$$

Realizando a mudança de variável  $\omega = \pi v$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_{ir} &= 30I_o^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\omega}{\omega} d\omega \\ &= 15I_o^2 \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos \omega)}{\omega} d\omega \\ &= 15I_o^2 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\omega}{2!} - \frac{\omega^3}{4!} + \frac{\omega^5}{6!} - \frac{\omega^7}{8!} + \dots \right] d\omega \end{aligned} \quad (13.25)$$

pois  $\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \frac{\omega^6}{6!} + \frac{\omega^8}{8!} - \dots$ . Integrando, termo a termo, a equação (13.25) e substituindo os limites de integração, chegamos a

$$\begin{aligned} P_{ir} &= 15I_o^2 \left[ \frac{(2\pi)^2}{2(2!)} - \frac{(2\pi)^4}{4(4!)} + \frac{(2\pi)^6}{6(6!)} - \frac{(2\pi)^8}{8(8!)} + \dots \right] \\ &\approx 36,56 I_o^2 \end{aligned} \quad (13.26)$$

A resistência de irradiação  $R_{ir}$  para o dipolo de meia onda é obtida das equações (13.12) e (13.26) como

$$R_{ir} = \frac{2P_{ir}}{I_o^2} = 73 \Omega \quad (13.27)$$

Note o acréscimo significativo da resistência de irradiação do dipolo de meia onda com relação ao dipolo hertziano. Assim, o dipolo de meia onda é capaz de transmitir maior potência para o espaço do que o dipolo hertziano.

A impedância de entrada total da antena  $Z_{\text{ent}}$  é a impedância observada nos terminais da antena e é dada por

$$Z_{\text{ent}} = R_{\text{ent}} + jX_{\text{ent}} \quad (13.28)$$

onde  $R_{\text{ent}} = R_{\text{ir}}$  para antenas sem perdas. A obtenção do valor da reatância  $X_{\text{ent}}$  envolve um procedimento complicado, que está fora do escopo deste texto. Para um dipolo de comprimento  $\ell = \lambda/2$ , obtém-se  $X_{\text{ent}} = 42,5 \Omega$ ; portanto,  $Z_{\text{ent}} = 73 + j42,5 \Omega$ . A reatância induutiva cai rapidamente para zero à medida que o comprimento do dipolo se reduz levemente. Para  $\ell = 0,485 \lambda$ , o dipolo é ressonante, com  $X_{\text{ent}} = 0$ . Portanto, na prática, um dipolo de  $\lambda/2$  é projetado de tal maneira que  $X_{\text{ent}}$  se aproxime de zero e  $Z_{\text{ent}} = 73 \Omega$ . Este valor da resistência de irradiação da antena dipolo de  $\lambda/2$  é a razão da existência do cabo coaxial padrão de  $75 \Omega$ . Isto facilita o casamento de impedância entre a antena e a linha de transmissão. Estes fatores, acrescidos à propriedade ressonante desta antena, são as razões de sua popularidade e uso extensivo.

### 13.4 ANTENA MONOPOLÓ DE QUARTO DE ONDA

Basicamente, a antena monopolo de quarto de onda consiste de metade de um dipolo de meia onda colocado sobre um plano terra condutor, conforme mostrado na Figura 13.5. A antena monopolo é colocada perpendicularmente ao plano condutor, que é usualmente suposto infinito e perfeitamente condutor. A antena é alimentada por um cabo coaxial conectado a sua base.

Usando a teoria das imagens da Seção 6.6, substituímos o plano terra infinito perfeitamente condutor pela imagem da antena monopolo. O campo produzido pelo monopolo de  $\lambda/4$  e sua imagem na região que fica acima do plano terra é o mesmo campo de um dipolo de  $\lambda/2$ . Portanto, a equação (13.19) é válida para o monopolo de  $\lambda/4$ . Entretanto, a integral da equação (13.21) deve ser calculada apenas na superfície hemisférica acima do plano terra (isto é,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ), pois o monopolo só irradia na parte superior do plano condutor. Consequentemente, para a mesma corrente, o monopolo irradia apenas a metade da potência de um dipolo de meia onda. Portanto, para um dipolo de  $\lambda/4$ ,

$$P_{\text{ir}} = 18,28 I_o^2 \quad (13.29)$$

e

$$R_{\text{ir}} = \frac{2P_{\text{ir}}}{I_o^2}$$

ou

$$R_{\text{ir}} = 36,5 \Omega \quad (13.30)$$

Pela mesma razão, a impedância de entrada total de um monopolo de  $\lambda/4$  é  $Z_{\text{ent}} = 36,5 + j21,25 \Omega$ .

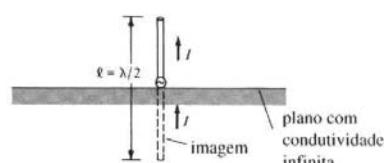


Figura 13.5 A antena monopolo.

### 13.5 ANTENA PEQUENA EM ANEL

A antena em anel (espira ou elo) é de importância prática. Ela é utilizada para, através da radiogoniometria, determinar a posição de radioemissores, e como antenas de TV para freqüências ultra-altas (UHF). O termo “pequena” implica que as dimensões do anel (como  $\rho_o$ ) sejam muito menores do que o comprimento de onda  $\lambda$ .

Considere um pequeno anel circular filamentar de raio  $\rho_o$  conduzindo uma corrente uniforme  $I_o \cos \omega t$ , conforme mostrado na Figura 13.6. O anel pode ser considerado como um dipolo magnético elementar. O potencial magnético vetorial devido ao anel, no ponto  $P$ , é dado por

$$\mathbf{A} = \oint_L \frac{\mu [I] d\mathbf{l}}{4\pi r'} \quad (13.31)$$

onde  $[I] = I_o \cos(\omega t - \beta r') = \operatorname{Re}[I_o e^{j(\omega t - \beta r')}]$ . Substituindo  $[I]$  na equação (13.31), obtemos  $\mathbf{A}$  na forma fasorial como

$$\mathbf{A}_s = \frac{\mu I_o}{4\pi} \oint_L \frac{e^{-j\beta r'}}{r'} d\mathbf{l} \quad (13.32)$$

O cálculo desta integral envolve um procedimento bastante longo. Pode-se mostrar que, para um anel pequeno ( $\rho_o \ll \lambda$ ), a variável  $r'$ , no denominador da equação (13.32), pode ser substituída por  $r$ , e que  $\mathbf{A}_s$  só tem componente na direção  $\phi$ , que é dada por

$$A_{\phi s} = \frac{\mu I_o S}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) e^{-j\beta r} \sin \theta \quad (13.33)$$

onde  $S = \pi \rho_o^2$  é a área da antena. Para uma antena com  $N$  espiras,  $S = N\pi \rho_o^2$ . Utilizando o fato de que  $\mathbf{B}_s = \mu \mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s$ , e  $\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega \epsilon \mathbf{E}_s$ , obtemos os campos elétrico e magnético a partir da equação (13.33) como

$$E_{\phi s} = \frac{-j\omega \mu I_o S}{4\pi} \sin \theta \left[ \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.34a)$$

$$H_{rs} = \frac{j\omega \mu I_o S}{2\pi \eta} \cos \theta \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.34b)$$

$$H_{\theta s} = \frac{j\omega \mu I_o S}{4\pi \eta} \sin \theta \left[ \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{\beta r^3} \right] e^{-j\beta r} \quad (13.34c)$$

$$E_{rs} = E_{\theta s} = H_{\phi s} = 0 \quad (13.34d)$$

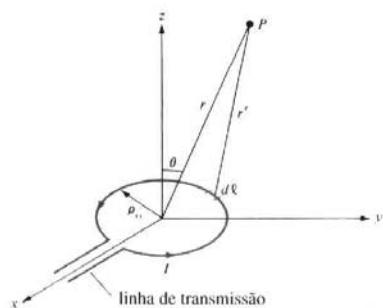


Figura 13.6 A antena pequena em anel.

Comparando as equações (13.5) e (13.6) com as equações (13.34), observamos a natureza dual dos campos devido ao dipolo elétrico, da Figura (13.3), e devido ao dipolo magnético, da Figura (13.6), (veja também a Tabela 8.2). Na região de campo distante, somente o termo  $1/r$  (termo de irradiação) permanece nas equações (13.34). Portanto, na região de campo distante,

$$\begin{aligned} E_{\phi s} &= \frac{\omega \mu I_o S}{4\pi r} \beta \sin \theta e^{-j\beta r} \\ &= \frac{\eta \pi I_o S}{r \lambda^2} \sin \theta e^{-j\beta r} \end{aligned}$$

ou

$$E_{\phi s} = \frac{120\pi^2 I_o S}{r \lambda^2} \sin \theta e^{-j\beta r}, \quad H_{\theta s} = -\frac{E_{\phi s}}{\eta} \quad (13.35a)$$

$$E_{rs} = E_{\theta s} = H_{rs} = H_{\phi s} = 0 \quad (13.35b)$$

onde  $\eta = 120\pi$ , pois se supõe propagação no espaço livre. Embora as expressões para o campo distante, nas equações (13.35), tenham sido obtidas para um anel circular pequeno, elas podem ser utilizadas para um anel quadrado pequeno de uma espira ( $S = a^2$ ), de  $N$  espiras ( $S = Na^2$ ) ou para qualquer anel pequeno, desde que as dimensões do mesmo sejam pequenas ( $d \leq \lambda/10$ , onde  $d$  é a maior dimensão do anel). Deixa-se como exercício demonstrar que, utilizando as equações (13.13a) e (13.35), obtemos a resistência de irradiação de uma antena pequena em anel como sendo:

$$R_{ir} = \frac{320 \pi^4 S^2}{\lambda^4} \quad (13.36)$$

### EXEMPLO 13.1

Necessita-se de uma amplitude de campo magnético de  $5 \mu\text{A/m}$  em um ponto  $\theta = \pi/2$  e a  $2 \text{ km}$  de uma antena no ar. Desprezando as perdas ôhmicas, calcule a potência que deve ser emitida pela antena se ela for:

- (a) um dipolo hertziano de  $\lambda/25$ ?
- (b) um dipolo de meia onda?
- (c) um monópolo de um quarto de onda?
- (d) uma antena em anel com 10 espiras de raio  $\rho_o = \lambda/20$ ?

**Solução:**

- (a) Para um dipolo hertziano,

$$|H_{\phi s}| = \frac{I_o \beta dl \sin \theta}{4\pi r}$$

onde  $dl = \lambda/25$  ou  $\beta dl = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{25} = \frac{2\pi}{25}$ . Portanto,

$$5 \times 10^{-6} = \frac{I_o \cdot \frac{2\pi}{25}(1)}{4\pi (2 \times 10^3)} = \frac{I_o}{10^5}$$

ou

$$I_o = 0,5 \text{ A}$$

$$P_{ir} = 40\pi^2 \left[ \frac{dl}{\lambda} \right]^2 I_o^2 = \frac{40\pi^2(0,5)^2}{(25)^2} \\ = 158 \text{ mW}$$

(b) Para um dipolo de  $\lambda/2$ ,

$$|H_{\phi s}| = \frac{I_o \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{2\pi r \sin \theta}$$

$$5 \times 10^{-6} = \frac{I_o \cdot 1}{2\pi (2 \times 10^3) \cdot (1)}$$

ou

$$I_o = 20\pi \text{ mA}$$

$$P_{ir} = 1/2 I_o^2 R_{ir} = 1/2(20\pi)^2 \times 10^{-6}(73) \\ = 144 \text{ mW}$$

(c) Para um monópolo de  $\lambda/4$ ,

$$I_o = 20\pi \text{ mA}$$

como na parte (b).

$$P_{ir} = 1/2 I_o^2 R_{ir} = 1/2(20\pi)^2 \times 10^{-6}(36,56) \\ = 72 \text{ mW}$$

(d) Para uma antena em anel,

$$|H_{\theta s}| = \frac{\pi I_o}{r} \frac{S}{\lambda^2} \sin \theta$$

Para o caso de uma espira única,  $S = \pi \rho_o^2$ . Para  $N$  espiras,  $S = N\pi \rho_o^2$ . Portanto,

$$5 \times 10^{-6} = \frac{\pi I_o 10\pi}{2 \times 10^3} \left[ \frac{\rho_o}{\lambda} \right]^2$$

ou

$$I_o = \frac{10}{10\pi^2} \left[ \frac{\lambda}{\rho_o} \right]^2 \times 10^{-3} = \frac{20^2}{\pi^2} \times 10^{-3} \\ = 40,53 \text{ mA}$$

$$R_{ir} = \frac{320 \pi^4 S^2}{\lambda^4} = 320 \pi^6 N^2 \left[ \frac{\rho_o}{\lambda} \right]^4 \\ = 320 \pi^6 \times 100 \left[ \frac{1}{20} \right]^4 = 192,3 \Omega$$

$$P_{ir} = \frac{1}{2} I_o^2 R_{ir} = \frac{1}{2} (40,53)^2 \times 10^{-6} (192,3) \\ = 158 \text{ mW}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 13.1**

Um dipolo hertziano, cujo comprimento é  $\lambda/100$ , está localizado na origem e é alimentado por uma corrente de  $0,25 \sin 10^8 t$  A. Determine o campo magnético em:

- (a)  $r = \lambda/5, \theta = 30^\circ$
- (b)  $r = 200\lambda, \theta = 60^\circ$

**Resposta:** (a)  $0,2119 \sin(10^8 t - 20,5^\circ) \mathbf{a}_\phi \text{mA/m}$ ; (b)  $0,2871 \sin(10^8 t + 90^\circ) \mathbf{a}_\phi \mu\text{A/m}$ .

**EXEMPLO 13.2**

Um campo elétrico de amplitude  $10 \mu\text{V/m}$  deve ser medido em um ponto de observação localizado em  $\theta = \pi/2$  e a  $500 \text{ km}$  de uma antena dipolo de meia onda (ressonante), operando, no ar, em  $50 \text{ MHz}$ .

- (a) Qual é o comprimento do dipolo?
- (b) Calcule a corrente que deve alimentar a antena.
- (c) Encontre a potência média irradiada pela antena.
- (d) Se uma linha de transmissão com  $Z_o = 75 \Omega$  é conectada à antena, determine a relação de onda estacionária.

**Solução:**

$$(a) \text{ O comprimento de onda é } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{50 \times 10^6} = 6 \text{ m.}$$

Portanto, o comprimento do dipolo de meia onda é  $\ell = \frac{\lambda}{2} = 3 \text{ m.}$

- (b) Da equação (13.19),

$$|E_{\phi s}| = \frac{\eta_0 I_o \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{2\pi r \sin \theta}$$

ou

$$\begin{aligned} I_o &= \frac{|E_{\phi s}| 2\pi r \sin \theta}{\eta_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)} \\ &= \frac{10 \times 10^{-6} 2\pi (500 \times 10^3) \cdot (1)}{120\pi (1)} \\ &= 83,33 \text{ mA} \end{aligned}$$

$$(c) R_{ir} = 73 \Omega$$

$$\begin{aligned} P_{ir} &= \frac{1}{2} I_o^2 R_{ir} = \frac{1}{2} (83,33)^2 \times 10^{-6} \times 73 \\ &= 253,5 \text{ mW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \Gamma &= \frac{Z_C - Z_o}{Z_C + Z_o} \quad (Z_C = Z_{ent} \text{ neste caso}) \\ &= \frac{73 + j42,5 - 75}{73 + j42,5 + 75} = \frac{-2 + j42,5}{148 + j42,5} \\ &= \frac{42,55/92,69^\circ}{153,98/16,02^\circ} = 0,2763 \angle 76,67^\circ \end{aligned}$$

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0,2763}{1 - 0,2763} = 1,763$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 13.2**

Repita o Exemplo 13.2 para o caso em que a antena dipolo é substituída por um monopolo de  $\lambda/4$ .

**Resposta:** (a) 1,5m, (b) 83,33 mA, (c) 126,8 mW, (d) 2,265.

## 13.6 CARACTERÍSTICAS DAS ANTENAS

Tendo já considerado os tipos básicos de antenas, vamos, agora, discutir algumas das características importantes de antenas como irradiadores de energia eletromagnética. Estas características incluem: (a) diagrama de irradiação; (b) intensidade de irradiação; (c) ganho diretivo e (d) ganho de potência.

### A. Diagrama de irradiação

Um **diagrama de irradiação** de uma antena é um gráfico tridimensional de sua irradiação na zona distante.

Quando é feito um gráfico de uma componente específica do campo  $\mathbf{E}$ , este gráfico é chamado de *diagrama de campo* ou *diagrama de tensão*. Quando é feito um gráfico da amplitude do campo elétrico  $E$ , elevada ao quadrado, o mesmo é chamado de *diagrama de potência*. Pode-se substituir a representação tridimensional do diagrama de uma antena por gráficos independentes de valores normalizados de  $|E_r|$  em função de  $\theta$ , para  $\phi$  constante (o que é chamado de *diagrama no plano E* ou *diagrama vertical*), e de valores normalizados de  $|E_\phi|$  em função de  $\phi$ , para  $\theta = \pi/2$  (o que é chamado *diagrama no plano H* ou *diagrama horizontal*). O valor normalizado de  $|E_r|$  é calculado com relação ao valor máximo de  $|E_r|$ , de tal maneira que o valor máximo de  $|E_r|$  normalizado é um.

Por exemplo, para o dipolo hertziano, o  $|E_r|$  normalizado é obtido da equação (13.7) como sendo

$$f(\theta) = |\sin \theta| \quad (13.37)$$

que é independente de  $\phi$ . Da equação (13.37), obtemos o diagrama no plano  $E$  como o gráfico polar de  $f(\theta)$ , com  $\theta$  variando entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . O resultado é apresentado na Figura 13.7(a). Note que o gráfico é simétrico em torno do eixo  $z$  ( $\theta = 0$ ). Para o diagrama no plano  $H$ , colocamos  $\theta = \pi/2$ , tal que  $f(\theta) = 1$ , o que nos fornece o círculo de raio unitário mostrado na Figura 13.7(b). Quando os dois gráficos das Figuras 13.7(a) e (b) são combinados, obtemos o diagrama tridimensional da Figura 13.7(c), que tem a forma que se aproxima a um toróide.

Um gráfico da potência média no tempo,  $|\mathcal{P}_{\text{med}}| = \mathcal{P}_{\text{med}}$ , para uma distância fixa  $r$ , é o diagrama de potência da antena. Ele é obtido fazendo gráficos separados de  $\mathcal{P}_{\text{med}}$  em função de  $\theta$ , com  $\phi$  constante, e de  $\mathcal{P}_{\text{med}}$  em função de  $\phi$ , com  $\theta$  constante.

Para o dipolo hertziano, o diagrama de potência normalizado é obtido, facilmente, das equações (13.37) ou (13.9) como

$$f^2(\theta) = \sin^2 \theta \quad (13.38)$$

que é apresentado na Figura 13.8. Note que as Figuras 13.7(b) e 13.8(b) mostram círculos, pois  $f(\theta)$  é independente de  $\phi$ , e que o valor de  $OP$  na Figura 13.8(a) é a potência média relativa para  $\theta$  especificado na figura. Assim, no ponto  $Q$  ( $\theta = 45^\circ$ ), a potência média é metade do valor máximo da potência média (o valor máximo da potência média está em  $\theta = \pi/2$ ).

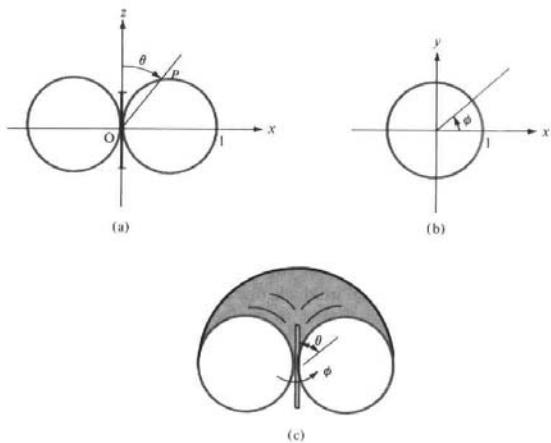


Figura 13.7 Diagramas de campo para um dipolo hertziano: (a) no plano  $E$  normalizado ou diagrama vertical ( $\phi = \text{constante} = 0$ ); (b) no plano  $H$  normalizado, ou plano horizontal ( $\theta = \pi/2$ ); (c) diagrama tridimensional.

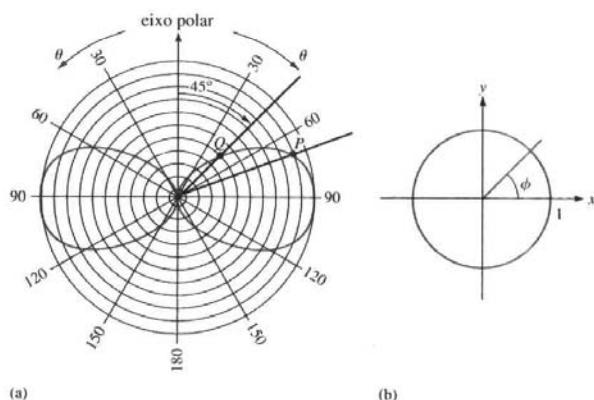


Figura 13.8 Diagrama de potência para um dipolo hertziano: (a)  $\phi = \text{constante} = 0$ ; (b)  $\theta = \text{constante} = \pi/2$ .

## B. Intensidade de irradiação

O diagrama da intensidade de irradiação de uma antena é definido como

$$U(\theta, \phi) = r^2 \mathcal{P}_{\text{med}} \quad (13.39)$$

Da equação (13.39), a potência total média (no tempo) irradiada pode ser expressa como

$$\begin{aligned} P_{\text{ir}} &= \oint_S \mathcal{P}_{\text{méd}} dS = \oint_S \mathcal{P}_{\text{méd}} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_S U(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} U(\theta, \phi) d\Omega \end{aligned} \quad (13.40)$$

onde  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  é o ângulo sólido diferencial, em esferoradianos (sr). Portanto, a intensidade de irradiação  $U(\theta, \phi)$  é medida em watts por esferoradianos (W/sr). O valor médio de  $U(\theta, \phi)$  é a potência total irradiada dividida por  $4\pi$  sr, isto é,

$$U_{\text{méd}} = \frac{P_{\text{ir}}}{4\pi} \quad (13.41)$$

### C. Ganho diretivo

Para especificar as características de irradiação das antenas, além dos diagramas da antena descritos acima, também nos interessam grandezas mensuráveis, tais como ganho e diretividade.

**O ganho diretivo  $G_d(\theta, \phi)$  de uma antena é uma medida da concentração da potência irradiada em uma determinada direção  $(\theta, \phi)$ .**

Este ganho pode ser entendido como uma medida da capacidade de a antena dirigir a potência irradiada segundo uma determinada orientação. Ele é usualmente obtido como a razão entre a intensidade de irradiação em uma determinada direção  $(\theta, \phi)$  e a intensidade de irradiação média, isto é,

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_{\text{méd}}} = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{\text{ir}}} \quad (13.42)$$

Substituindo a equação (13.39) na equação (13.42),  $\mathcal{P}_{\text{méd}}$  pode ser expresso, em termos do ganho diretivo, como:

$$\mathcal{P}_{\text{méd}} = \frac{G_d}{4\pi r^2} P_{\text{ir}} \quad (13.43)$$

O ganho diretivo  $G_d(\theta, \phi)$  depende do diagrama de irradiação da antena. Para o dipolo hertziano (assim como para o dipolo  $\lambda/2$  e para o monópolo  $\lambda/4$ ), notamos, a partir da Figura 13.8, que  $\mathcal{P}_{\text{méd}}$  é máximo para  $\theta = \pi/2$  e mínimo (zero) para  $\theta = 0$  ou  $\pi$ . Portanto, o dipolo hertziano irradia potência preferencialmente na direção perpendicular ao seu comprimento. Para uma antena *isotrópica* (antena que irradia igualmente em todas as direções),  $G_d = 1$ . Entretanto, este tipo de antena não é realizável fisicamente, isto é, trata-se de uma antena ideal.

**A diretividade  $D$  de uma antena é a razão entre a intensidade de irradiação máxima e a intensidade de irradiação média.**

Obviamente, a diretividade  $D$  é o valor máximo do ganho diretivo  $G_d$ , máx. Portanto,

$$D = \frac{U_{\text{máx}}}{U_{\text{méd}}} = G_d, \text{ máx} \quad (13.44a)$$

ou

$$D = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{ir}}} \quad (13.44\text{b})$$

A diretividade de uma antena isotrópica é  $D = 1$ . Este é o valor mínimo que  $D$  pode assumir. Para o dipolo hertziano,

$$G_d(\theta, \phi) = 1,5 \operatorname{sen}^2 \theta, \quad D = 1,5. \quad (13.45)$$

Para o dipolo de  $\lambda/2$ ,

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{\eta}{\pi R_{\text{ir}}} f^2(\theta), \quad D = 1,64 \quad (13.46)$$

onde  $\eta = 120 \pi$ ,  $R_{\text{rad}} = 73 \Omega$  e

$$f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\operatorname{sen} \theta} \quad (13.47)$$

#### D. Ganho de potência

A nossa definição de ganho diretivo, na equação (13.42), não leva em conta as perdas ôhmicas  $P_\ell$  na antena. A existência de  $P_\ell$  se deve ao fato de que a antena é feita com um condutor de condutividade finita. Conforme ilustrado na Figura (13.9), se  $P_{\text{ent}}$  é a potência total de entrada da antena,

$$\begin{aligned} P_{\text{ent}} &= P_\ell + P_{\text{ir}} \\ &= \frac{1}{2} |I_{\text{ent}}|^2 (R_\ell + R_{\text{ir}}) \end{aligned} \quad (13.48)$$

onde  $I_{\text{ent}}$  é a corrente nos terminais de entrada e  $R_\ell$  é a resistência de perda ou a resistência ôhmica da antena. Em outras palavras,  $P_{\text{ent}}$  é a potência recebida pela antena em seus terminais durante o processo de irradiação, e  $P_{\text{ir}}$  é a potência irradiada pela antena. A diferença entre estas duas potências é  $P_\ell$ , a potência dissipada na antena.

Definimos o ganho de potência  $G_p(\theta, \phi)$  de uma antena como

$$G_p(\theta, \phi) = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{\text{ent}}} \quad (13.49)$$

A razão entre o ganho de potência em uma determinada direção e o ganho diretivo nesta mesma direção é definida como sendo a eficiência de irradiação  $\eta_r$  das antenas, isto é,

$$\eta_r = \frac{G_p}{G_d} = \frac{P_{\text{ir}}}{P_{\text{ent}}}$$

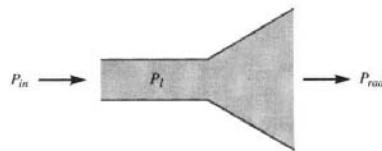
Utilizando-se a equação (13.48), obtemos

$$\eta_r = \frac{P_{\text{ir}}}{P_{\text{ent}}} = \frac{R_{\text{ir}}}{R_{\text{ir}} + R_\ell} \quad (13.50)$$

Para muitas antenas,  $\eta_r$  é próximo de 100%, tal que  $G_p \approx G_d$ . É comum expressar a diretividade e o ganho em decibéis (dB). Portanto,

$$D (\text{dB}) = 10 \log_{10} D \quad (13.51\text{a})$$

$$G (\text{dB}) = 10 \log_{10} G \quad (13.51\text{b})$$

Figura 13.9 Relação entre  $P_{in}$ ,  $P_l$  e  $P_{rad}$ .

Deve-se mencionar, neste ponto, que os diagramas de irradiação das antenas são usualmente medidos na região de campo distante. Em geral, considera-se que a região de campo distante de uma antena existe para distâncias  $r \geq r_{\min}$ , onde

$$r_{\min} = \frac{2d^2}{\lambda} \quad (13.52)$$

e  $d$  é a maior dimensão da antena. Por exemplo,  $d = \ell$  para o dipolo elétrico e  $d = 2\rho_o$  para a antena pequena em anel.

### EXEMPLO 13.3

Mostre que o ganho diretivo para o dipolo hertziano é

$$G_d(\theta, \phi) = 1,5 \operatorname{sen}^2 \theta$$

e para o dipolo de meia onda é

$$G_d(\theta, \phi) = 1,64 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

#### Solução:

Da equação (13.42), temos

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{4\pi f^2(\theta)}{\int f^2(\theta) d\Omega}$$

(a) Para o dipolo hertziano,

$$\begin{aligned} G_d(\theta, \phi) &= \frac{4\pi \operatorname{sen}^2 \theta}{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta d\phi} = \frac{4\pi \operatorname{sen}^2 \theta}{2\pi (4/3)} \\ &= 1,5 \operatorname{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

conforme solicitado.

(b) Para o dipolo de meia onda,

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{\frac{4\pi \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\operatorname{sen}^2 \theta}}{\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\operatorname{sen} \theta} d\theta d\phi}$$

Da equação (13.26), a integral no denominador resulta em  $2\pi(1,2188)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} G_d(\theta, \phi) &= \frac{4\pi \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{2\pi(1,2188)} \\ &= 1,64 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

conforme solicitado.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 13.3

Calcule a diretividade de:

- (a) um monópolo hertziano;
- (b) um monópole de um quarto de onda.

**Resposta:** (a) 3; (b) 3,28.

#### EXEMPLO 13.4

Determine a intensidade do campo elétrico a uma distância de 10 km de uma antena, que tem um ganho diretivo de 5 dB, e que irradia uma potência total de 20 kW.

**Solução:**

$$S = G_d(\text{dB}) = 10 \log_{10} G_d$$

ou

$$0,5 = \log_{10} G_d \rightarrow G_d = 10^{0,5} = 3,162$$

Da equação (13.43),

$$\mathcal{P}_{\text{med}} = \frac{G_d P_{\text{irr}}}{4\pi r^2}$$

Contudo,

$$\mathcal{P}_{\text{med}} = \frac{|E_s|^2}{2\eta}$$

Portanto,

$$|E_s|^2 = \frac{\eta G_d P_{\text{irr}}}{2\pi r^2} = \frac{120\pi(3,162)(20 \times 10^3)}{2\pi [10 \times 10^3]^2}$$

$$|E_s| = 0,1948 \text{ V/m}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 13.4

Uma determinada antena tem uma eficiência de 95% e uma intensidade de irradiação máxima de 0,5 W/sr. Calcule a diretividade quando:

- (a) a potência de entrada é 0,4 W;
- (b) a potência irradiada é de 0,3 W.

**Resposta:** (a) 16,53; (b) 20,94.

**EXEMPLO 13.5**

A intensidade de irradiação de uma determinada antena é

$$U(\theta, \phi) = \begin{cases} 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^3 \phi, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0, & \text{para os demais valores} \end{cases}$$

Determine a diretividade da antena.

**Solução:**

A diretividade é definida como

$$D = \frac{U_{\max}}{U_{\text{med}}}$$

Da expressão fornecida para  $U$ , teremos

$$U_{\max} = 2$$

$$\begin{aligned} U_{\text{med}} &= \frac{1}{4\pi} \int U d\Omega (= P_{\text{irr}}/4\pi) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \phi d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \phi) d(-\cos \phi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \right]_0^{\pi} \left( \frac{\cos^3 \phi}{3} - \cos \phi \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Portanto,

$$D = \frac{2}{(1/3)} = 6$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 13.5**

Calcule a diretividade de uma antena para a qual a intensidade de irradiação normalizada é dada por:

$$U(\theta, \phi) = \begin{cases} \operatorname{sen} \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0, & \text{para os demais valores} \end{cases}$$

**Resposta:** 2,546.

**13.7 CONJUNTOS DE ANTENAS**

Em muitas situações práticas (por exemplo, em estações de radiodifusão de AM), é necessário que se projetem antenas que irradiem mais energia em uma determinada direção e menos energia em outras direções. Isto é equivalente a condicionar que o diagrama de irradiação seja concentrado na direção de interesse. Isto é dificilmente obtido com apenas uma antena. Um conjunto de antenas pode ser utilizado para obter uma diretividade maior do que a que pode ser obtida com apenas uma antena.

**Um conjunto (rede ou arranjo) de antenas** é um agrupamento de elementos irradiantes (antenas) arranjado de tal maneira a produzir algumas características de irradiação desejadas.

É prático e conveniente que o conjunto seja formado de elementos idênticos, embora esta não seja uma limitação fundamental. Vamos analisar aqui o caso mais simples de um conjunto de dois elementos para depois estender os resultados para o caso mais geral e complicado de um conjunto com  $N$  elementos.

Consideremos uma antena formada por dois dipolos hertzianos colocados no espaço livre, ao longo do eixo  $z$ , mas orientados paralelamente ao eixo  $x$ , conforme representado na Figura 13.10. Vamos assumir que o dipolo localizado em  $(0, 0, d/2)$  é percorrido por uma corrente  $I_{1s} = I_0/\alpha$ , enquanto que o dipolo localizado em  $(0, 0, -d/2)$  é percorrido por uma corrente  $I_{2s} = I_0/0$ , onde  $\alpha$  é a diferença de fase entre as duas correntes. Variando-se o espaçamento  $d$  e a diferença de fase  $\alpha$ , os campos das duas antenas podem se interferir construtivamente (adicionar) em certas direções de interesse e se interferir destrutivamente (cancelar) em outras direções. O campo elétrico total em um ponto  $P$  é a soma vetorial dos campos devidos a cada elemento do arranjo. Se o ponto  $P$  está na região de campo distante, obtemos o campo elétrico total em  $P$ , a partir da equação (13.7a), como

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}_{2s} = \frac{j\eta\beta I_0 dl}{4\pi} \left[ \cos \theta_1 \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} e^{j\alpha} \mathbf{a}_{\theta_1} + \cos \theta_2 \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} \mathbf{a}_{\theta_2} \right] \quad (13.53)$$

Note que o  $\sin \theta$ , da equação (13.7a), foi substituído por  $\cos \theta$ , pois o elemento da Figura 13.3 está na direção  $z$ , enquanto os da Figura 13.10 estão na direção  $x$ . Como  $P$  está longe do arranjo,  $\theta_1 \approx \theta$   $\approx \theta_2$  e  $\mathbf{a}_{\theta_1} \approx \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_{\theta_2}$ . Na amplitude, podemos colocar  $r_1 \approx r = r_2$ , mas, na fase, utilizamos

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta \quad (13.54a)$$

$$r_2 \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta \quad (13.54b)$$

Portanto, a equação (13.53) fica

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= \frac{j\eta\beta I_0 dl}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r} e^{j\alpha d/2} [e^{j(\beta d \cos \theta)/2} e^{j\alpha d/2} + e^{-j(\beta d \cos \theta)/2} e^{-j\alpha d/2}] \mathbf{a}_\theta \\ &= \frac{j\eta\beta I_0 dl}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\beta r} e^{j\alpha d/2} 2 \cos \left[ \frac{1}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right] \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \quad (13.55)$$

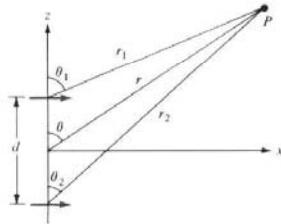


Figura 13.10 Um conjunto de dois elementos.

A comparação desta equação com a equação (13.7a) mostra que o campo total de um arranjo é igual ao campo criado por um dos elementos do conjunto, localizado na origem, multiplicado por um *fator de rede*, que é dado por

$$FR = 2 \cos \left[ \frac{1}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right] e^{j\alpha d/2} \quad (13.56)$$

Dessa forma, em geral, o campo distante devido a um conjunto de dois elementos é dado por

$$\mathbf{E}(\text{total}) = (\mathbf{E} \text{ devido a um elemento localizado na origem}) \times (\text{fator de rede}) \quad (13.57)$$

Também, da equação (13.55), note que  $|\cos \theta|$  é o diagrama de irradiação devido a apenas um elemento, enquanto o fator de rede normalizado,  $|\cos[1/2(\beta d \cos \theta + \alpha)]|$ , é o diagrama de irradiação do conjunto, considerando que os irradiadores são isotrópicos. Estes diagramas podem ser considerados como o "diagrama unitário" e o "diagrama de grupo", respectivamente. Portanto, o "diagrama resultante" é o produto entre o diagrama unitário e o diagrama de grupo, isto é,

$$\boxed{\text{Diagrama resultante} = \text{diagrama unitário} \times \text{diagrama do grupo}} \quad (13.58)$$

Este processo de obtenção do diagrama de irradiação de um conjunto de antenas é conhecido como *multiplicação de diagramas*. É possível traçar, quase por inspeção, o diagrama de irradiação de um conjunto pela multiplicação de diagramas. É, portanto, uma boa ferramenta a ser utilizada no projeto de conjuntos. Devemos realçar que, enquanto o diagrama unitário depende do tipo de elemento iradiante que é usado no conjunto, o diagrama de grupo independe do tipo do elemento, desde que o espaçamento  $d$ , a diferença de fase  $\alpha$  e a orientação dos elementos se mantenham inalterados.

Vamos, agora, estender os resultados obtidos para conjuntos de dois elementos para o caso mais geral de conjuntos com  $N$  elementos, ilustrado na Figura 13.11. Supomos que o conjunto é *linear*, isto é, que os elementos do arranjo estão igualmente espaçados ao longo de uma linha que coincide com o eixo  $z$ . Assumimos, também, que o conjunto é *uniforme*, tal que cada elemento é percorrido por correntes de mesma amplitude, mas com um deslocamento de fase progressivo  $\alpha$ , isto é,  $I_{1s} = I_0/0$ ,  $I_{2s} = I_0/\alpha$ ,  $I_{3s} = I_0/2\alpha$ , e assim por diante. Nossa interesse principal é calcular o fator de rede. O campo na região distante pode ser calculado facilmente a partir da equação (13.57), desde que o fator de rede seja conhecido.

Para o arranjo linear uniforme, o fator de rede é a soma das contribuições de todos os elementos. Assim,

$$FR = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + \dots + e^{j(N-1)\psi} \quad (13.59)$$

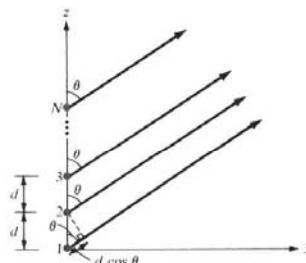


Figura 13.11 Arranjo linear uniforme de  $N$  elementos.

onde

$$\psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (13.60)$$

Na equação (13.60),  $\beta = 2\pi/\lambda$ , sendo que  $d$  e  $\alpha$  são, respectivamente, o espaçamento e o deslocamento de fase entre cada elemento. Note que o lado direito da equação (13.59) é uma série geométrica com a forma

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x} \quad (13.61)$$

Assim, a equação (13.59) torna-se

$$FR = \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}} \quad (13.62)$$

que pode também ser escrita como

$$\begin{aligned} FR &= \frac{e^{jN\psi} - 1}{e^{j\psi} - 1} = \frac{e^{jN\psi/2} e^{jN\psi/2} - e^{-jN\psi/2}}{e^{j\psi/2} e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2}} \\ &= e^{j(N-1)\psi/2} \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \end{aligned} \quad (13.63)$$

O fator de fase  $e^{j(N-1)\psi/2}$  se anularia se o arranjo estivesse centrado na origem. Desprezando este termo, podemos escrever

$$FR = \frac{\frac{\sin \frac{N\psi}{2}}{\psi}}{\frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\psi}}, \quad \psi = \beta d \cos \theta + \alpha \quad (13.64)$$

Note que esta equação se reduz à equação (13.56) quando  $N = 2$ , conforme esperado. Note, também, o seguinte:

1.  $FR$  tem valor máximo igual a  $N$ . Portanto,  $FR$  normalizado é obtido dividindo  $FR$  por  $N$ . O máximo principal ocorre quando  $\psi = 0$ , isto é,

$$0 = \beta d \cos \theta + \alpha \quad \text{ou} \quad \cos \theta = -\frac{\alpha}{\beta d} \quad (13.65)$$

2.  $FR$  tem nulos (ou zeros) para  $FR = 0$ , isto é,

$$\frac{N\psi}{2} = \pm k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.66)$$

onde  $k$  não pode ser múltiplo de  $N$ .

3. Um arranjo *transversal* tem sua direção de máxima irradiação perpendicular ao eixo do arranjo, isto é,  $\psi = 0$ ,  $\theta = 90^\circ$ , tal que  $\alpha = 0$ .
4. Um arranjo *longitudinal* tem sua direção de máxima irradiação ao longo do eixo do arranjo, isto é,  $\psi = 0$ ,  $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix}$  tal que  $\alpha = \begin{bmatrix} -\beta d \\ \beta d \end{bmatrix}$

Os pontos acima referidos são úteis para se realizar a representação gráfica de  $FR$ . Os gráficos de  $FR$  para  $N = 2, 3$  e  $4$  estão apresentados na Figura 13.12.

**EXEMPLO 13.6**

Represente, graficamente, o diagrama de campo normalizado para o conjunto de dois elementos da Figura 13.10, quando as correntes estão:

- em fase ( $\alpha = 0$ ) e  $d = \lambda/2$ .
- $90^\circ$  fora de fase ( $\alpha = \pi/2$ ) e  $d = \lambda/4$ .

**Solução:**

O campo normalizado para este arranjo é obtido das equações (13.55) a (13.57) como

$$f(\theta) = \left| \cos \theta \cos \left[ \frac{1}{2} (\beta d \cos \theta + \alpha) \right] \right|$$

- (a) Se  $\alpha = 0$  e  $d = \lambda/2$ , então  $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi$ . Portanto,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= |\cos \theta| \quad \left| \cos \frac{\pi}{2} (\cos \theta) \right| \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{diagrama resultante} &= \text{diagrama unitário} \times \text{diagrama de grupo} \end{aligned}$$

A representação gráfica do diagrama unitário é fácil. É simplesmente uma versão girada da Figura 13.7(a), obtida para o dipolo hertziano, e está apresentada na Figura 13.13(a).

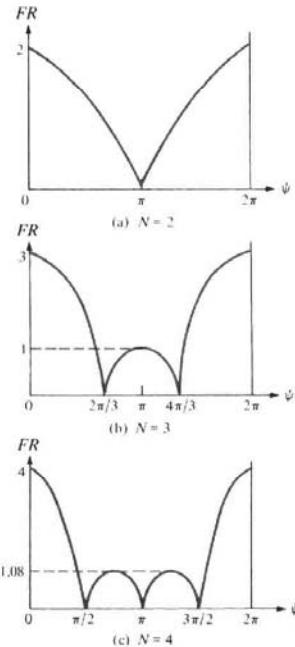


Figura 13.12. Fator de rede para um conjunto linear uniforme.

Para desenharmos o diagrama de grupo é necessário que primeiro determinemos seus nulos e máximos. Para os nulos (ou zeros), teremos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}\cos\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$$

ou

$$\theta = 0^\circ, 180^\circ$$

Para os máximos,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = 1 \rightarrow \cos\theta = 0$$

ou

$$\theta = 90^\circ$$

O diagrama de grupo está mostrado na Figura 13.12(b). É um gráfico polar obtido fazendo o gráfico de  $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right|$  para  $\theta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 360^\circ$  e incorporando os nulos e máximos em

$\theta = 0^\circ, 180^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ , respectivamente. Multiplicando a Figura 13.13(a) pela Figura 13.13(b), obtemos o diagrama resultante da Figura 13.13(c). Devemos ressaltar que os diagramas de campo da Figura 13.13 estão no plano que contém o eixo do conjunto. Note que: (1) No plano  $yz$ , que é perpendicular ao eixo do conjunto, o diagrama unitário ( $= 1$ ) é uma circunferência [veja a Figura 13.7(b)], enquanto o diagrama de grupo permanece como na Figura 13.13(b). Portanto, o diagrama resultante é igual ao diagrama de grupo, para este caso. (2) No plano  $xy$ ,  $\theta = \pi/2$ , tal que o diagrama unitário se anula enquanto o diagrama de grupo é uma circunferência ( $= 1$ ).

(b) Se  $\alpha = \pi/2$ ,  $d = \lambda/4$  e  $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$ , então,

$$\begin{array}{ccc} f(\theta) & = & |\cos\theta| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{diagrama} & = & \text{diagrama} \\ \text{resultante} & & \times \\ & & \text{diagrama} \\ & & \text{unitário} & \times & \text{diagrama} \\ & & & & \text{de grupo} \end{array}$$

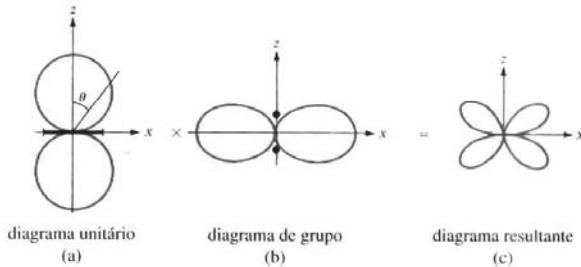


Figura 13.13 Referente ao Exemplo 13.6(a). Diagrama de campo no plano que contém o eixo do conjunto.

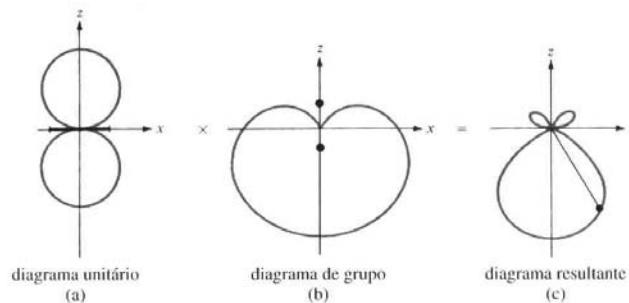


Figura 13.14 Referente ao Exemplo 13.6(b). Diagramas de campo para o plano que contém o eixo do conjunto.

O diagrama unitário permanece como na Figura 13.13(a). Para o diagrama de grupo, os nulos ocorrem quando

$$\cos \frac{\pi}{4} (1 + \cos \theta) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} (1 + \cos \theta) = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

ou

$$\cos \theta = 1 \rightarrow \theta = 0$$

Os máximos e mínimos ocorrem quando

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[ \cos \frac{\pi}{4} (1 + \cos \theta) \right] &= 0 \rightarrow \sin \theta \sin \frac{\pi}{4} (1 + \cos \theta) = 0 \\ \sin \theta &= 0 \rightarrow \theta = 0^\circ, 180^\circ \end{aligned}$$

e

$$\sin \frac{\pi}{4} (1 + \cos \theta) = 0 \rightarrow \cos \theta = -1 \quad \text{ou} \quad \theta = 180^\circ$$

Cada diagrama de campo é obtido fazendo  $\theta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 180^\circ$ . Note que  $\theta = 180^\circ$  corresponde ao valor máximo de  $FR$ , enquanto  $\theta = 0^\circ$  corresponde ao nulo. Portanto, os diagramas unitário, de grupo e resultante, no plano que contém o eixo do conjunto, estão mostrados na Figura 13.14. Observe que, dos diagramas de grupo, o arranjo lateral ( $\alpha = 0$ ), da Figura 13.13, é bidirecional, enquanto o arranjo longitudinal ( $\alpha = \beta d$ ), da Figura 13.14, é unidirecional.

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 13.6

Repita o Exemplo 13.6 para os casos em que:

- (a)  $\alpha = \pi$ ,  $d = \lambda/2$ ; (b)  $\alpha = -\pi/2$ ,  $d = \lambda/4$ .

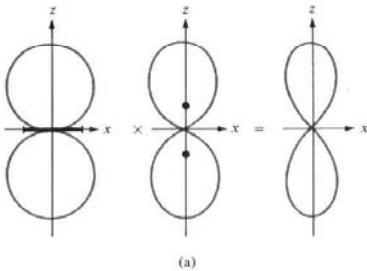
**Resposta:** veja a Figura 13.15.

#### EXEMPLO 13.7

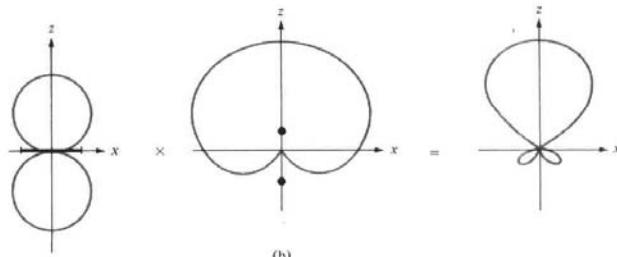
Considere uma conjunto de três elementos alimentados com correntes que guardam entre si uma razão de 1:2:1, conforme mostrado na Figura 13.16(a). Trace o diagrama de grupo no plano que contém o eixo dos elementos.

**Solução:**

Para fins de análise, vamos separar o elemento central da Figura 13.16(a), percorrido por uma corrente  $2I/0^\circ$ , em dois elementos, cada um com uma corrente  $I/0^\circ$ . Portanto, teremos quatro elementos em vez de três, conforme ilustrado na Figura 13.16(b). Se considerarmos os elementos 1 e 2 como um conjunto e os elementos 3 e 4 como um outro conjunto, obteremos o conjunto de dois elementos mostrado na Figura 13.16(c).

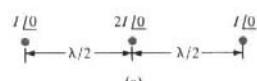


(a)

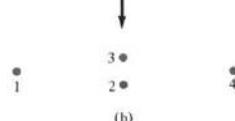


(b)

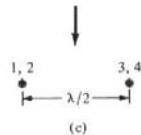
Figura 13.15 Referente ao Exercício Prático 13.6.



(a)



(b)



(c)

Figura 13.16 Referente ao Exemplo 13.7: (a) arranjo de três elementos com razões entre as correntes de 1:2:1; (b) e (c) conjuntos equivalentes de dois elementos.

Cada grupo é um conjunto de dois elementos com  $d = \lambda/2$ ,  $\alpha = 0$ , cujo diagrama de grupo (ou diagrama unitário para o arranjo de três elementos) está mostrado na Figura 13.13(b). Os dois grupos formam um arranjo de dois elementos semelhante ao do Exemplo 13.6(a), com  $d = \lambda/2$  e  $\alpha = 0$ . Logo, o diagrama de grupo é idêntico ao da Figura 13.13(b). Portanto, neste caso, tanto o diagrama unitário quanto o diagrama de grupo tem a mesma forma do diagrama da Figura 13.13(b). O diagrama de grupo resultante está mostrado na Figura 13.17(c). Devemos notar que o diagrama da Figura 13.17(c) não é o diagrama resultante final, mas sim o diagrama de grupo do arranjo de três elementos. O diagrama resultante é o diagrama de grupo da Figura 13.17(c) multiplicado pelo diagrama de campo do elemento utilizado para formar o arranjo.

Um método alternativo para se obter o diagrama resultante para o conjunto de três elementos da Figura 13.16 é usar um procedimento semelhante ao utilizado para obter a equação (13.59). Escrevemos o fator de conjunto normalizado (ou diagrama de grupo) como

$$\begin{aligned}(FR)_n &= \frac{1}{4} |1 + 2e^{j\psi} + e^{j2\psi}| \\ &= \frac{1}{4} |e^{j\psi}| |2 + e^{-j\psi} + e^{j\psi}| \\ &= \frac{1}{2} |1 + \cos \psi| = \left| \cos \frac{\psi}{2} \right|^2\end{aligned}$$

onde  $\psi = \beta d \cos \theta + \alpha$ , se os elementos estão colocados ao longo do eixo  $z$ , mas orientados paralelamente ao eixo  $x$ . Como  $\alpha = 0$ ,  $d = \lambda/2$ ,  $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$ ,

$$\begin{array}{lll}(FR)_n &= \left| \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \right|^2 \\ (FR)_n &= \left| \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \right| \times \left| \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \right| \\ \downarrow &\downarrow &\downarrow \\ \text{diagrama de} &\text{diagrama} &\times \quad \text{diagrama} \\ \text{grupo resultante} &\text{unitário} &\text{de grupo}\end{array}$$

A representação gráfica destes diagramas é exatamente a que está na Figura 13.17.

Se, na Figura 13.16(a), dois arranjos de três elementos forem deslocados de  $\lambda/2$ , obtemos um arranjo de quatro elementos com razões entre as correntes de 1:3:3:1, conforme a Figura 13.18. Dois destes arranjos de quatro elementos, separados por  $\lambda/2$ , resultam em um arranjo de cinco elementos com razões entre as correntes de 1:4:6:4:1. Continuando este processo, obtemos um arranjo de  $N$  elementos, separados por  $\lambda/2$  e  $(N - 1)\lambda/2$ , cujas razões entre as correntes são os coeficientes binomiais. A este tipo de antena dá-se o nome de *conjunto binomial*.

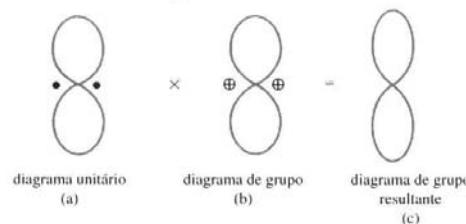


Figura 13.17 Referente ao Exemplo 13.7. Obtenção do diagrama de grupo resultante para o conjunto de três elementos da Figura 13.16(a).

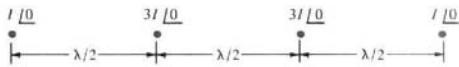


Figura 13.18 Um conjunto de quatro elementos, com razões entre as correntes de 1:3:3:1; referente ao Exercício Prático 13.7.



Figura 13.19 Referente ao Exercício Prático 13.7(a).

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 13.7

- Trace o diagrama de grupo resultante para o conjunto de quatro elementos com razões entre as correntes de 1:3:3:1, mostrado na Figura 13.18.
- Obtenha uma expressão para o diagrama de grupo de um arranjo binomial linear de  $N$  elementos. Suponha que os elementos estão colocados ao longo do eixo  $z$  e orientados paralelamente ao eixo  $x$ , com espaçamento  $d$  entre os elementos e deslocamento de fase entre cada elemento  $\alpha$ .

**Resposta:** (a) veja a Figura 13.19; (b)  $\left| \cos \frac{\psi}{2} \right|^{N-1}$ , onde  $\psi = \beta d \cos \theta + \alpha$ .

### 13.8 ÁREA EFETIVA E EQUAÇÃO DE FRIIS

Na situação em que a onda EM incidente é perpendicular a toda a superfície de uma antena receptora, a potência recebida é

$$P_r = \int \mathcal{P}_{\text{méd}} \cdot d\mathbf{S} = \mathcal{P}_{\text{méd}} S \quad (13.67)$$

Entretanto, na maioria dos casos, a onda EM incidente não é perpendicular a toda a superfície da antena. Isto leva à introdução do conceito de área efetiva da antena receptora.

O conceito de área efetiva ou abertura efetiva (seção reta de recepção de uma antena) é usualmente empregado na análise de antenas receptoras.

A área efetiva  $A_e$  de uma antena receptora é a razão entre a potência recebida média no tempo  $P_r$  (ou fornecida para a carga, para ser exato) e a densidade de potência média no tempo  $\mathcal{P}_{\text{méd}}$  da onda incidente na antena.

Isto é,

$$A_e = \frac{P_r}{\mathcal{P}_{\text{méd}}} \quad (13.68)$$

Da equação (13.68), notamos que a área efetiva é uma medida da capacidade de a antena extrair energia da onda EM que está passando.

Vamos obter a fórmula para o cálculo da área efetiva de um dipolo hertziano operando como antena receptora. O circuito equivalente Thevenin para a antena receptora está mostrado na Figura 13.20, onde  $V_{ca}$  é a tensão a circuito aberto induzida pela onda nos terminais de entrada da antena,  $Z_{ent} = R_{ir} + jX_{ent}$  é a impedância da antena e  $Z_c = R_c + jX_c$  é a impedância da carga externa, que pode ser a impedância de entrada da linha de transmissão que conecta a antena ao receptor. Para máxima transferência de potência,  $Z_c = Z_{ent}^*$  e  $X_c = -X_{ent}$ . A potência média no tempo, fornecida à carga casada, é, portanto,

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{2} \left[ \frac{|V_{ca}|^2}{2R_{ir}} \right]^2 R_{ir} \\ &= \frac{|V_{ca}|^2}{8R_{ir}} \end{aligned} \quad (13.69)$$

Para o dipolo hertziano,  $R_{ir} = 80\pi^2(d/\lambda)^2$  e  $V_{ca} = E dl$ , onde  $E$  é a amplitude de campo efetiva, paralela ao eixo do dipolo. Portanto, a equação (13.69) torna-se:

$$P_r = \frac{E^2 \lambda^2}{640\pi^2} \quad (13.70)$$

A potência média no tempo na antena é

$$\mathcal{P}_{med} = \frac{E^2}{2\eta_0} = \frac{E^2}{240\pi} \quad (13.71)$$

Inserindo as equações (13.70) e (13.71) na equação (13.68), obtemos

$$A_e = \frac{3\lambda^2}{8\pi} = 1,5 \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

ou

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D \quad (13.72)$$

onde  $D = 1,5$  é a diretividade do dipolo hertziano. Embora a equação (13.72) tenha sido obtida para o dipolo de Hertz, ela é válida para qualquer antena, se  $D$  for substituído por  $G_d(\theta, \phi)$ . Dessa forma, em geral,

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_d(\theta, \phi) \quad (13.73)$$

Suponha, agora, que temos duas antenas separadas por uma distância  $r$ , no espaço livre, conforme mostrado na Figura 13.21. A antena transmissora tem uma área efetiva  $A_{er}$  e ganho diretivo  $G_{dr}$  e transmite uma potência total  $P_t (= P_g)$ . A antena receptora tem uma área efetiva  $A_{er}$  e uma ganho diretivo  $G_{dr}$  e recebe uma potência total  $P_r$ . No transmissor,

$$G_{dt} = \frac{4\pi U}{P_t} = \frac{4\pi r^2 \mathcal{P}_{med}}{P_t}$$

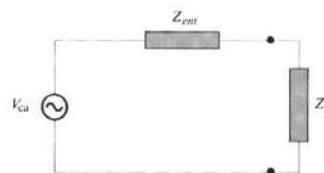


Figura 13.20 Equivalente Thevenin de uma antena receptora.



Figura 13.21 Antenas transmissora e receptora no espaço livre.

ou

$$\mathcal{P}_{\text{méd}} = \frac{P_t}{4\pi r^2} G_{dt} \quad (13.74)$$

Aplicando as equações (13.68) e (13.73), obtemos a potência média no tempo recebida:

$$P_r = \mathcal{P}_{\text{méd}} A_{cr} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{dr} \mathcal{P}_{\text{méd}} \quad (13.75)$$

Substituindo a equação (13.74) na equação (13.75), resulta em

$$P_r = G_{dr} G_{dt} \left[ \frac{\lambda}{4\pi r} \right]^2 P_t \quad (13.76)$$

Esta equação é conhecida como a *fórmula de transmissão de Friis*. Ela relaciona a potência recebida por uma antena com a potência transmitida pela outra, desde que as duas antenas estejam separadas por uma distância  $r > 2d^2/\lambda$ , onde  $d$  é a maior dimensão de ambas as antenas [veja a equação (13.52)]. Portanto, para aplicarmos a equação de Friis, precisamos nos assegurar que as duas antenas estão, cada uma, no campo distante da outra.

**EXEMPLO 13.8**

Encontre a área efetiva máxima para um dipolo filamentar de  $\lambda/2$ , que opera a 30 MHz. Qual é a potência recebida para uma onda plana incidente cuja amplitude é de 2 mV/m?

**Solução:**

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_d(\theta, \phi)$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{30 \times 10^6} = 10 \text{ m}$$

$$G_d(\theta, \phi) = \frac{\eta}{\pi R_{\text{rad}}} f^2(\theta) = \frac{120\pi}{73\pi} f^2(\theta) = 1,64 f^2(\theta)$$

$$G_d(\theta, \phi)_{\text{máx}} = 1,64$$

$$A_{e,\text{máx}} = \frac{10^2}{4\pi} (1,64) = 13,05 \text{ m}^2$$

$$P_r = \mathcal{P}_{\text{méd}} A_r = \frac{E_o^2}{2\eta} A_e$$

$$= \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{240\pi} 13,05 = 71,62 \text{ nW}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 13.8**

Determine a área efetiva máxima de um dipolo hertziano de 10 cm de comprimento, operando a 10 MHz. Se a antena recebe uma potência de  $3 \mu\text{W}$ , qual é a densidade de potência da onda incidente?

**Resposta:**  $1,074 \text{ m}^2$ ;  $2,793 \mu\text{W/m}^2$ .

**EXEMPLO 13.9**

As antenas transmissora e receptora estão separadas por  $200 \lambda$  e têm ganhos diretivos de 25 e 18 dB, respectivamente. Se a potência a ser recebida deve ser de 5 mW, determine a potência mínima transmitida.

**Solução:**

Dado que  $G_{dt}(\text{dB}) = 25 \text{ dB} = 10 \log_{10} G_{dt}$ ,

$$G_{dt} = 10^{2.5} = 316.23$$

De forma semelhante,

$$G_{dr}(\text{dB}) = 18 \text{ dB} \quad \text{ou} \quad G_{dr} = 10^{1.8} = 63.1$$

Usando a equação de Friis, obtemos

$$P_r = G_{dr}G_{dt} \left[ \frac{\lambda}{4\pi r} \right]^2 P_t$$

ou

$$\begin{aligned} P_t &= P_r \left[ \frac{4\pi r}{\lambda} \right]^2 \frac{1}{G_{dr}G_{dt}} \\ &= 5 \times 10^{-3} \left[ \frac{4\pi \times 200\lambda}{\lambda} \right]^2 \frac{1}{(63.1)(316.23)} \\ &= 1.583 \text{ W} \end{aligned}$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 13.9**

Uma antena, no ar, irradia uma potência total de 100 kW, de tal maneira que um campo elétrico de irradiação máxima de  $12 \text{ mV/m}$  é medido a 20 km da antena. Encontre: (a) diretividade em dB; (b) ganho de potência máximo, se  $\eta_r = 98\%$ .

**Resposta:** (a) 3,34 dB; (b) 2,117.

**†13.9 A EQUAÇÃO DO RADAR**

Radares são dispositivos eletromagnéticos usados para detectar e localizar objetos. O termo *radar* é derivado da expressão inglesa “radio detection and ranging”. Em um sistema de radar típico, mostrado na Figura 13.22(a), pulsos de energia EM são transmitidos a um objeto distante. A mesma antena é utilizada na transmissão e na recepção, de tal maneira que o intervalo de tempo entre os pulsos transmitidos e recebidos é utilizado para determinar a distância do alvo. Se  $r$  é a distância entre o radar e o alvo e  $c$  é a velocidade da luz, então o intervalo de tempo entre os pulsos transmitido e recebido é  $2r/c$ . Medindo-se este intervalo de tempo, é possível determinar  $r$ .

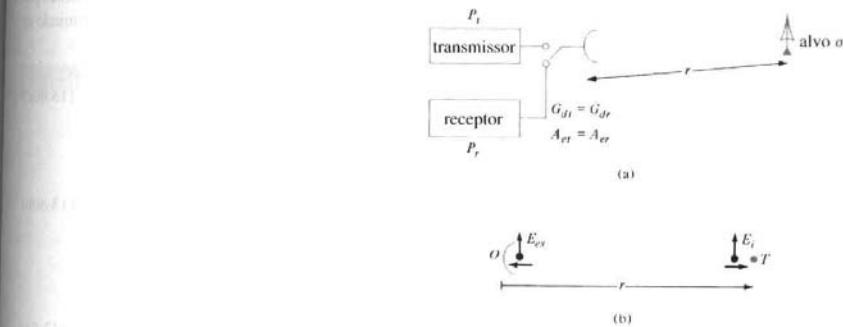


Figura 13.22 (a) Sistema de radar típico; (b) simplificação do sistema apresentado em (a) para o cálculo da seção reta do alvo,  $\sigma$ .

A capacidade de um alvo espalhar (ou refletir) a energia é caracterizada pela sua *seção reta de espalhamento*  $\sigma$  (também chamada *seção reta de radar*). A seção reta de espalhamento é dada em unidades de área e pode ser medida experimentalmente.

**A seção reta de espalhamento** é a área equivalente que intercepta uma quantidade de potência, a qual, quando espalhada de forma isotrópica, produz no radar uma densidade de potência que é igual a densidade de potência espalhada (ou refletida) pelo objeto real.

Isto é,

$$\mathcal{P}_{es} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sigma \mathcal{P}_i}{4\pi r^2} \right]$$

ou

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{\mathcal{P}_i}{\mathcal{P}_{er}} \quad (13.77)$$

onde  $\mathcal{P}_i$  é a densidade de potência incidente no alvo  $T$ , enquanto  $\mathcal{P}_{er}$  é a densidade de potência espalhada recebida pelo transceptor  $O$ , conforme a Figura 13.22(b).

Da equação (13.43), a densidade de potência  $\mathcal{P}_i$  incidente no alvo  $T$  é

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{med} = \frac{G_d}{4\pi r^2} P_{tr} \quad (13.78)$$

A potência recebida no transceptor  $O$  é

$$P_r = A_{er} \mathcal{P}_i$$

ou

$$\mathcal{P}_{er} = \frac{P_r}{A_{er}} \quad (13.79)$$

Note que  $\bar{\mathcal{P}}_i$  e  $\bar{\mathcal{P}}_r$  são as densidades de potência médias no tempo, em watts/m<sup>2</sup>, e  $P_{it}$  e  $P_r$  são as potências totais médias no tempo, em watts. Como  $G_{dr} = G_{dt} = G_d$  e  $A_{cr} = A_{ct} = A_e$ , substituindo as equações (13.78) e (13.79) na equação (13.77), resulta em

$$\sigma = (4\pi r^2)^2 \frac{P_r}{P_{it}} \frac{1}{A_e G_d} \quad (13.80a)$$

ou

$$P_r = \frac{A_e \sigma G_d P_{it}}{(4\pi r^2)^2} \quad (13.80b)$$

Da equação (13.73),  $A_e = \lambda^2 G_d / 4\pi$ . Portanto,

$$P_r = \frac{(\lambda G_d)^2 \sigma P_{it}}{(4\pi)^3 r^4} \quad (13.81)$$

Esta é a *equação de transmissão de radar* para o espaço livre. Ela é a base para a medida de seção reta de espalhamento de um alvo. Resolvendo em função  $r$ , a equação (13.81) resulta em

$$r = \left[ \frac{\lambda^2 G_d^2 \sigma}{(4\pi)^3} \frac{P_{it}}{P_r} \right]^{1/4} \quad (13.82)$$

A equação (13.82) é chamada de *equação do alcance do radar*. Dada a potência mínima detectável pelo receptor, esta equação determina o alcance máximo de um radar. Ela é também útil para se obter informações técnicas relativas a vários parâmetros que determinam a performance de um sistema de radar.

O radar considerado até aqui é do tipo *monoestático*, pois este tipo de radar predomina em aplicações práticas. O radar do tipo *biestático* é aquele em que o transmissor e o receptor estão separados. Se as antenas transmissora e receptora estão a distâncias  $r_1$  e  $r_2$  do alvo e  $G_{dr} \neq G_{dt}$ , a equação (13.81), para o radar biestático, torna-se

$$P_r = \frac{G_{dt} G_{dr}}{4\pi} \left[ \frac{\lambda}{4\pi r_1 r_2} \right]^2 \sigma P_{it} \quad (13.83)$$

TABELA 13.1 Designação das freqüências usadas em sistemas de radar

Designação	Freqüência
UHF	300–1.000 MHz
L	1.000–2.000 MHz
S	2.000–4.000 MHz
C	4.000–8.000 MHz
X	8.000–12.500 MHz
Ku	12,5–18 GHz
K	18–26,5 GHz
Milimétrica	>35 GHz

As freqüências utilizadas nos serviços de radar se estendem de 25 a 70.000 MHz. A Tabela 13.1 mostra as freqüências usadas e as designações normalmente utilizadas na engenharia de radar.

### EXEMPLO 13.10

Um radar da banda S emite 200 kW a 3 GHz. Determine a densidade de potência do sinal para distâncias de 100 e 400 milhas náuticas, sabendo que a área efetiva da antena do radar é de 9 m<sup>2</sup>. Para um alvo de 20 m<sup>2</sup>, localizado a 300 milhas náuticas, determine a potência do sinal refletido no radar.

#### Solução:

A milha náutica é uma unidade de distância de uso comum em sistemas de radar.

$$1 \text{ milha náutica (mn)} = 1.852 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} = 0,1 \text{ m}$$

$$G_{dt} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{et} = \frac{4\pi}{(0,1)^2} 9 = 3.600\pi$$

Para  $r = 100 \text{ mn} = 1.852 \times 10^5 \text{ m}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{G_{dt} P_{it}}{4\pi r^2} = \frac{3.600\pi \times 200 \times 10^3}{4\pi (1.852)^2 \times 10^{10}} \\ &= 5.248 \text{ mW/m}^2 \end{aligned}$$

Para  $r = 400 \text{ mn} = 4(1.852 \times 10^5) \text{ m}$ ,

$$\mathcal{P} = \frac{5.248}{(4)^2} = 0,328 \text{ mW/m}^2$$

Utilizando a equação (13.80b),

$$P_r = \frac{A_r \sigma G_d P_{it}}{[4\pi r^2]^2}$$

onde  $r = 300 \text{ mn} = 5.556 \times 10^5 \text{ m}$ ,

$$P_r = \frac{9 \times 20 \times 3.600\pi \times 200 \times 10^3}{[4\pi \times 5.556^2]^2 \times 10^{20}} = 2.706 \times 10^{-14} \text{ W}$$

O mesmo resultado pode ser obtido usando a equação (13.81).

### EXERCÍCIO PRÁTICO 13.10

Um radar da banda C, com uma antena de 1,8 m de raio, emite 60 kW na freqüência de 6.000 MHz. Se a potência mínima detectável é 0,26 mW, determine, para um alvo de 5 m<sup>2</sup> de seção reta, o alcance máximo, em milhas náuticas, e a densidade de potência do sinal para a metade desta distância. Suponha que a eficiência é unitária e que a área efetiva da antena é 70% da área real.

**Resposta:** 0,6309 mn; 500,90 W/m<sup>2</sup>.

**RESUMO**

1. Discutimos aqui as idéias e definições fundamentais da teoria das antenas. Os tipos básicos de antenas considerados incluem o dipolo hertziano (ou antena curta), o dipolo de meia onda, o monopolo de quarto de onda e a antena em anel pequena.
2. Teoricamente, se conhecermos a distribuição de corrente em uma antena, podemos calcular o potencial magnético vetorial com retardo  $A$  e, a partir dele, podemos calcular os campos eletromagnéticos com retardo  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{E}$ , utilizando

$$\mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{A}}{\mu}, \quad \mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \mathbf{a}_k$$

Os campos na zona distante são obtidos retendo somente os termos em  $1/r$ .

3. A análise do dipolo hertziano serve como base para o estudo de outras antenas. A resistência de irradiação do dipolo de Hertz é muito pequena. Isto limita a utilidade prática desta antena.
4. O dipolo de meia onda tem um comprimento de  $\lambda/2$ . É mais popular e de maior uso prático do que o dipolo hertziano. A sua impedância de entrada é  $73 + j42.5 \Omega$ .
5. O monopolo de quarto de onda é, essencialmente, a metade de um dipolo de meia onda colocado verticalmente sobre um plano condutor.
6. Os diagramas de irradiação normalmente utilizados são os de intensidade de campo, de densidade de potência e o de intensidade de irradiação. Usualmente, o diagrama de campo é um gráfico de  $|E|$  ou de sua forma normalizada  $f(\theta)$ . O diagrama de potência é um gráfico de  $P_{\text{med}}$  ou de sua forma normalizada  $f^2(\theta)$ .
7. O ganho diretivo é a razão entre  $U(\theta, \phi)$  e seu valor médio. A diretividade é o valor máximo do ganho diretivo.
8. Um conjunto de antenas é um grupo de elementos irradiantes, arranjados de tal maneira a produzir determinadas características de irradiação. Seu diagrama de irradiação é obtido multiplicando-se o diagrama de irradiação unitário (devido a um só elemento do grupo) pelo diagrama de grupo, que é o gráfico do fator de rede normalizado. Para um conjunto linear uniforme de  $N$  elementos,

$$FR = \left| \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \right|$$

onde  $\psi = \beta d \cos \theta + \alpha$ ,  $\beta = 2\pi/\lambda$ ,  $d$  = espaçamento entre os elementos e  $\alpha$  = deslocamento de fase entre elementos vizinhos.

9. A equação de transmissão de Friis caracteriza o acoplamento entre duas antenas em termos de seus ganhos diretivos, distância que as separam e freqüência de operação.
10. Para um radar biestático (no qual as antenas transmissora e receptora estão separadas), a potência recebida é dada por

$$P_r = \frac{G_{dt}G_{dr}}{4\pi} \left[ \frac{\lambda}{4\pi r_1 r_2} \right]^2 \sigma P_{tr}$$

Para um radar monoestático,  $r_1 = r_2$  e  $G_{dt} = G_{dr}$ .

**QUESTÕES DE REVISÃO**

- 13.1** Uma antena, localizada em uma determinada cidade, é uma fonte de ondas de rádio. Qual é o tempo transcorrido para a onda alcançar uma outra cidade localizada a 12.000 km desta cidade?
- (a) 36 s
  - (b) 20  $\mu$ s
  - (c) 20 ms
  - (d) 40 ms
  - (e) Nenhuma das opções acima

**13.2** Qual é o termo de irradiação na equação (13.34)?

- (a) o termo  $1/r$
- (b) o termo  $1/r^2$
- (c) o termo  $1/r^3$
- (d) todos os termos listados acima

**13.3** Uma antena de fio muito fino, com um comprimento de  $\lambda/100$ , tem uma resistência de irradiação de:

- (a)  $= 0 \Omega$
- (b)  $0,08 \Omega$
- (c)  $7,9 \Omega$
- (d)  $790 \Omega$

**13.4** Uma antena monópolo de quarto de onda, operando no ar a uma frequência de 1 MHz, deve ter um comprimento total de:

- (a)  $\ell \gg \lambda$
- (b) 300 m
- (c) 150 m
- (d) 75 m
- (e)  $\ell \ll \lambda$

**13.5** Se uma antena em anel pequeno de uma única espira tem uma resistência de irradiação de  $0,04 \Omega$ , quantas espiras são necessárias para produzir uma resistência de irradiação de  $1 \Omega$ ?

- (a) 150
- (b) 125
- (c) 50
- (d) 25
- (e) 5

**13.6** A 8 km de uma antena curta, a amplitude de campo é de  $12 \mu\text{V/m}$ . O campo a 20 km da antena será:

- (a)  $75 \mu\text{V/m}$
- (b)  $30 \mu\text{V/m}$
- (c)  $4,8 \mu\text{V/m}$
- (d)  $1,92 \mu\text{V/m}$

**13.7** Uma antena tem  $U_{\max} = 10 \text{ W/sr}$ ,  $U_{\text{med}} = 4,5 \text{ W/sr}$  e  $\eta_r = 95\%$ . A potência de entrada da antena é:

- (a) 2,222 W
- (b) 12,11 W
- (c) 55,55 W
- (d) 59,52 W

**13.8** Em um aeroporto, uma antena receptora tem uma dimensão máxima de 3 m e opera a 100 MHz. Um avião que se aproxima do aeroporto está a  $1/2$  km da antena. O avião está na região de campo distante desta antena.

- (a) Verdadeiro
- (b) Falso

- 13.9** Uma antena receptora está localizada a 100 metros da antena transmissora. Se a área efetiva da antena receptora é de  $500 \text{ cm}^2$  e a densidade de potência recebida é de  $2 \text{ mW/m}^2$ , então a potência total recebida é:

- (a)  $10 \text{ nW}$
- (b)  $100 \text{ nW}$
- (c)  $1 \mu\text{W}$
- (d)  $10 \mu\text{W}$
- (e)  $100 \mu\text{W}$

- 13.10** Seja  $R$  o alcance máximo de um radar monoestático. Qual deve ser a seção reta de um alvo localizado a  $3R/2$  para que um sinal de mesma amplitude que o de um alvo de  $5 \text{ m}^2$  de seção reta, localizado em  $R/2$ , chegue no radar?

- (a)  $0,0617 \text{ m}^2$
- (b)  $0,555 \text{ m}^2$
- (c)  $15 \text{ m}^2$
- (d)  $45 \text{ m}^2$
- (e)  $405 \text{ m}^2$

Respostas: 13.1d; 13.2a; 13.3b; 13.4d; 13.5e; 13.6c; 13.7d; 13.8a; 13.9e; 13.10e.

### PROBLEMAS

- 13.1** O potencial magnético vetorial em um ponto  $P(r, \theta, \phi)$ , devido a uma antena pequena localizada na origem, é dado por

$$\mathbf{A}_s = \frac{50 e^{-j\beta r}}{r} \mathbf{a}_z$$

onde  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Encontre  $\mathbf{E}(r, \theta, \phi, t)$  e  $\mathbf{H}(r, \theta, \phi, t)$  na zona de campo distante.

- 13.2** Um dipolo hertziano, localizado na origem, no espaço livre, tem  $d\ell = 20 \text{ cm}$  e  $I = 10 \cos 2\pi 10^7 t$  A. Encontre  $|E_{\theta_i}|$  no ponto distante  $(100, 0, 0)$ .

- 13.3** Uma fonte de corrente de 2 A, operando a 300 MHz, alimenta um dipolo hertziano de 5 mm, situado na origem. Encontre  $\mathbf{E}_s$  e  $\mathbf{H}_s$  em  $(10, 30^\circ, 90^\circ)$ .

- 13.4** (a) Em lugar da distribuição de corrente constante assumida para o dipolo curto da Seção 13.2, suponha uma distribuição de corrente triangular  $I_z = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{\ell}\right)$ , conforme mostrado na Figura 13.23. Mostre que

$$R_{ir} = 20 \pi^2 \left[ \frac{\ell}{\lambda} \right]^2$$

que é um quarto do valor obtido na equação (13.13). Portanto, a resistência de irradiação ( $R_s$ ) depende da distribuição de corrente.

(b) Calcule o comprimento de um dipolo que tenha uma resistência de irradiação de  $0,5 \Omega$ .

- 13.5** Uma antena pode ser modelada como um dipolo elétrico de 5 m a 3 MHz. Encontre a resistência de irradiação da antena, supondo uma distribuição de corrente uniforme ao longo de seu comprimento.

- 13.6** Uma antena dipolo de meia onda é alimentada por uma linha de transmissão de  $50 \Omega$ . Calcule o coeficiente de reflexão e a razão de onda estacionária.

- 13.7** Uma antena de automóvel de 1 m de comprimento opera na faixa de AM em 1,5 MHz. Qual é a corrente necessária para irradiar 4 W de potência?

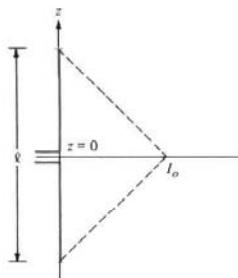


Figura 13.23 Antena curta com distribuição triangular de corrente; referente ao Problema 13.4.

- \*13.8 (a) Mostre que os campos gerados por um dipolo fino de comprimento  $\ell$ , percorrido por uma corrente senoidal  $I_0 \cos \beta z$ , na região de campo distante, são dados por

$$H_{\phi s} = \frac{jI_0 e^{-\beta r}}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\beta\ell}{2} \cos \theta\right) - \cos\frac{\beta\ell}{2}}{\sin \theta}, \quad E_{\theta s} = \eta H_{\phi s}$$

[Sugestão: use a Figura 13.4 e inicie com a equação (13.14).]

- (b) Trace  $f(\theta)$  da parte (a), em um sistema de coordenadas polares, para  $\ell = \lambda, 3\lambda/2$  e  $2\lambda$ .

\*13.9 Para o Problema 13.4:

- (a) determine  $\mathbf{E}_s$  e  $\mathbf{H}_s$  na região de campo distante;  
 (b) calcule a diretividade do dipolo.

- \*13.10 Uma antena que está localizada sobre um plano terra irradia uma potência média de 200 kW. Supondo que toda a potência é irradiada uniformemente na superfície de um hemisfério com a antena no centro, calcule: (a) o vetor de Poynting médio no tempo a 50 km; (b) o campo elétrico máximo neste local.

- 13.11 Uma antena em anel de 20 cm de raio, com 100 espiras, opera a 10 MHz, no ar, e deve fornecer uma amplitude de campo de 50 mV/m a 3 m de distância. Determine:

- (a) a corrente com que a antena deve ser alimentada;  
 (b) a potência média irradiada pela antena.

- 13.12 Esboce os diagramas de campo normalizado para os campos  $E$  e  $H$  para:

- (a) um dipolo de meia onda;  
 (b) um monopolo de quarto de onda.

- 13.13 Baseando-se no resultado do Problema 13.8, trace os diagramas de campo verticais para antenas monopolo de comprimentos  $\ell = 3\lambda/2, \lambda$  e  $5\lambda/8$ . Vale lembrar que um monopolo de  $5\lambda/8$  é bastante utilizado na prática.

- 13.14 Uma antena no espaço livre tem um campo na zona distante dado por

$$\mathbf{E}_s = \frac{5 \sin 2\theta}{r} e^{-j\beta r} \mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$$

onde  $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Determine a potência irradiada.

**13.15** O campo elétrico produzido por uma antena na região distante é

$$\mathbf{E}_s = \frac{10}{r} e^{-j\beta r} \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_z$$

Trace o diagrama da antena no plano vertical. Seu gráfico deve incluir o máximo de pontos possível.

**13.16** Mostre que, para um dipolo hertziano, a densidade de potência média no tempo está relacionada com a potência de irradiação, de acordo com

$$P_{\text{med}} = \frac{1,5 \operatorname{sen}^2 \theta}{4\pi r^2} P_{\text{ir}}$$

**13.17** Uma antena produz, na região de campo distante, um campo dado por

$$P_{\text{med}} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \phi}{r^2} \mathbf{a}_r \text{ W/m}^2, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi/2$$

Calcule o ganho diretivo e a direitividade da antena.

**13.18** Partindo do Problema 13.8, mostre que o diagrama de campo normalizado para uma antena de onda inteira ( $\ell = \lambda$ ) é dado por

$$f(\theta) = \frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\operatorname{sen} \theta}$$

Trace o diagrama de campo.

**13.19** Para um dipolo fino, com um comprimento de  $\lambda/16$ , encontre: (a) o ganho diretivo; (b) a direitividade; (c) a área efetiva e (d) a resistência de irradiação.

**13.20** Repita o Problema 13.19 para uma antena em anel circular fina de  $\lambda/12$  de diâmetro.

**13.21** Uma dipolo de meia onda é feito de cobre e tem um diâmetro de 2,6 mm. Determine a eficiência do dipolo se ele opera a 15 MHz.

Sugestão: obtenha  $R_\ell$  a partir de  $R_\ell/R_{cc} = a/2\delta$ . Veja a Seção 10.6.

**13.22** Encontre  $U_{\text{med}}$ ,  $U_{\text{max}}$  e  $D$  para:

- (a)  $U(\theta, \phi) = \operatorname{sen}^2 2\theta, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$
- (b)  $U(\theta, \phi) = 4 \operatorname{cossec}^2 2\theta, \quad \pi/3 < \theta < \pi/2, 0 < \phi < \pi$
- (c)  $U(\theta, \phi) = 2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi$

**13.23** Encontre o ganho diretivo e a direitividade para as seguintes intensidades de irradiação:

- (a)  $U(\theta, \phi) = \operatorname{sen}^2 \theta, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$
- (b)  $U(\theta, \phi) = 4 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{cos}^2 \phi, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi$
- (c)  $U(\theta, \phi) = 10 \operatorname{cos}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi/2, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi/2$

**13.24** Uma antena irradia, no espaço livre, um campo dado por

$$E_{\phi s} = \frac{0,2 \operatorname{cos}^2 \theta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \text{ kV/m}$$

na região de campo distante. Determine: (a) a potência total irradiada e (b) o ganho diretivo para  $\theta = 60^\circ$ .

**13.25** Obtenha  $\mathbf{E}_s$ , na região de campo distante, para o conjunto de dois elementos mostrado na Figura 13.24. Suponha que os elementos são dipolos hertzianos alimentados em fase com correntes uniformes  $I_0 \operatorname{cos} \omega t$ .

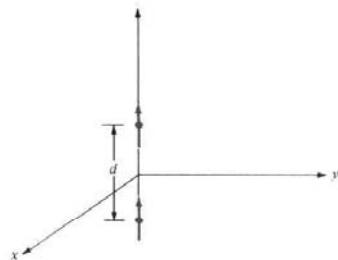


Figura 13.24 Conjunto de dois elementos referente ao Problema 13.25.

**13.26** Um arranjo é composto por dois dipolos separados por um comprimento de onda. Se os dipolos são alimentados por correntes de mesma amplitude e fase:

- encontre o fator de rede;
- calcule os ângulos do diagrama onde ocorrem os nulos;
- determine os ângulos para os quais temos máximos no diagrama;
- esboce o diagrama de grupo no plano que contém os elementos.

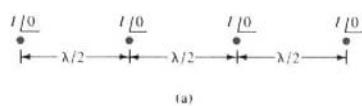
**13.27** Considere um conjunto de dois elementos alimentados por correntes que estão  $180^\circ$  fora de fase entre si. Trace o diagrama de grupo se os elementos estão separados por: (a)  $d = \lambda/4$  e (b)  $d = \lambda/2$ .

**13.28** Trace o diagrama de grupo no plano  $xz$  para o arranjo de dois elementos da Figura 13.10, com:

- $d = \lambda, \alpha = \pi/2$
- $d = \lambda/4, \alpha = 3\pi/4$
- $d = 3\lambda/4, \alpha = 0$

**13.29** Um conjunto é formado de  $N$  dipolos hertzianos idênticos, dispostos de forma uniforme ao longo do eixo  $z$  e polarizados na direção do eixo  $z$ . Se o espaçamento entre os dipolos é de  $\lambda/4$ , trace o diagrama de grupo quando: (a)  $N = 2$ , (b)  $N = 4$ .

**13.30** Trace os diagramas de grupo resultantes para os arranjos de quatro elementos mostrados na Figura 13.25.



(a)

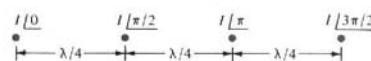


Figura 13.25 Referente ao Problema 13.30.

**13.31** Calcule a área efetiva de uma antena de 10 espiras com 15 cm de raio, operando a 100 MHz, para  $\theta = 30^\circ$  e  $\phi = 90^\circ$ .

**13.32** Uma antena recebe uma potência de  $2 \mu\text{W}$  de uma estação de rádio. Calcule a sua área efetiva, sabendo que a antena está localizada na região distante da estação, onde  $E = 50 \text{ mV/m}$ .

**13.33** (a) Mostre que a equação de transmissão de Friis pode ser escrita como

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{A_{er} A_{el}}{\lambda^2 r^2}$$

(b) Duas antenas dipolo de meia onda operam a 100 MHz e estão separadas por uma distância de 1 km. Se a potência transmitida por uma delas é de 80 W, qual a potência recebida pela outra?

**13.34** A amplitude de campo elétrico aplicado a uma antena dipolo de meia onda é de  $3 \text{ mV/m}$  a 60 MHz. Calcule a potência máxima recebida pela antena. Considere a diretividade do dipolo de meia onda como sendo 1,64.

**13.35** A potência transmitida por um satélite de órbita síncrona é de 320 W. Se a antena tem 40 dB de ganho a 15 GHz, calcule a potência recebida por uma outra antena de 32 dB de ganho a uma distância de 24.567 km.

**13.36** O ganho diretivo de uma antena é de 34 dB. Se a antena irradia uma potência de 7,5 kW a uma distância de 40 km, calcule a densidade de potência média no tempo para esta distância.

**13.37** Duas antenas idênticas, em uma câmara anecôica, estão separadas por 12 m e estão orientadas para máximo ganho diretivo. Na frequência de 5 GHz, a potência recebida por uma delas é 30 dB abaixo da emitida pela outra. Calcule o ganho das antenas em dB.

**13.38** Qual é a potência máxima que pode ser recebida, a uma distância de 1,5 km no espaço livre, em um sistema de comunicações que opera a 1,5 GHz e que consiste de uma antena transmissora, com ganho de 25 dB, e de uma antena receptora, com ganho de 30 dB? A potência transmitida é de 200 W.

**13.39** Um radar pulsado que opera na banda L, com uma antena comum para transmissão e recepção e com ganho diretivo de 3.500, opera a 1.500 MHz e transmite 200 kW. Se o alvo está a 120 km do radar e sua seção reta de espalhamento é de  $8 \text{ m}^2$ , encontre:

- (a) a amplitude do campo elétrico incidente no alvo;
- (b) a amplitude do campo elétrico espalhado no radar;
- (c) potência capturada pelo alvo;
- (d) a potência da onda espalhada absorvida pela antena.

**13.40** Uma antena transmissora com uma portadora de 600 MHz produz 80 W de potência. Encontre a potência recebida por outra antena colocada no espaço livre a 1 km de distância. Suponha que as duas antenas têm ganho de potência unitário.

**13.41** Um radar monoestático, operando a 6 GHz, detecta um alvo de  $0,8 \text{ m}^2$  a uma distância de 250 m. Se o ganho é de 40 dB, determine a potência mínima transmitida que retornará uma potência de  $2 \mu\text{W}$ .

- 13.42 No sistema de radar biestático da Figura 13.26, as antenas baseadas em terra estão separadas por 4 km e o alvo de  $2,4 \text{ m}^2$  está a uma altura de 3 km. O sistema opera a 5 GHz. Determine a potência mínima irradiada necessária para obter uma potência de retorno de  $8 \times 10^{-12} \text{ W}$ , para  $G_{dt}$  igual a 36 dB e  $G_{dr}$  igual a 20 dB.

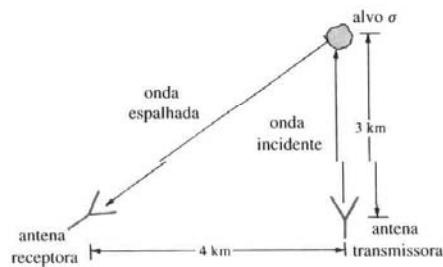


Figura 13.26 Referente ao Problema 13.42.

# Capítulo 14

## TÓPICOS MODERNOS

O futuro tem diversos nomes. Para o fraco, é o impossível. Para o crente, é o desconhecido. Para o pensador e o forte, é o ideal.

— VICTOR HUGO

### 14.1 INTRODUÇÃO

Além da propagação de ondas, das linhas de transmissão, dos guias de onda e das antenas, existem diversas outras áreas de aplicação do EM. Estas incluem microondas, interferência e compatibilidade eletromagnética, fibras ópticas, comunicações por satélites, bioeletromagnetismo, máquinas elétricas, meteorologia por radar e sensoriamento remoto. Devido às limitações de espaço, vamos cobrir, neste capítulo, as três primeiras áreas: microondas, interferência e compatibilidade eletromagnética e fibras ópticas. Como são tópicos avançados, será apresentado somente um tratamento introdutório de cada um deles. A nossa discussão envolverá a aplicação de conceitos de circuitos, aprendidos em cursos anteriores, e de conceitos de EM, aprendidos em capítulos anteriores.

### 14.2 MICROONDAS

Atualmente, existem três maneiras de transmitir milhares de canais de comunicação a longas distâncias: (a) enlaces de microondas; (b) cabos coaxiais; e (c) fibras ópticas, que é uma tecnologia relativamente nova e será analisada mais adiante.

**Microondas** são ondas EM cujas freqüências estão, aproximadamente, entre 300 MHz e 1.000 GHz

Para comparação, o sinal de uma estação de rádio AM fica em torno de 1 MHz, enquanto que o de uma estação FM fica em torno de 100 MHz. A região superior das freqüências de microondas faz limite com o espectro ótico. Isto explica porque as microondas têm um comportamento mais parecido com o de um raio luminoso do que as ondas eletromagnéticas de mais baixa freqüência. Você deve estar familiarizado com algumas aplicações das microondas, como o forno de microondas, que opera a 2,4 GHz; as comunicações por satélite, que operam a cerca de 4 GHz, e o radar da polícia, que opera a cerca de 22 GHz.

As características que tornam as microondas atrativas para comunicações incluem a larga banda disponível (grande capacidade de transmissão de informação) e as propriedades diretivas dos comprimentos de onda curtos. Como a quantidade de informação que pode ser transmitida é limitada pela largura de banda disponível, o espectro de microondas fornece mais canais de comunicação do que as bandas de rádio e de TV. Com a demanda cada vez maior de alocação de canais, as comunicações com microondas tornaram-se mais comuns.

Normalmente, um sistema de microondas<sup>1</sup> consiste de um transmissor (que inclui um oscilador de microondas, guias de onda e uma antena transmissora) e de um subsistema de recepção (que inclui uma antena receptora, uma linha de transmissão ou guia de onda, amplificadores de microondas e um receptor). Uma rede de microondas é uma interconexão de vários componentes e dispositivos de microondas. Há uma série de componentes de microondas e de variações desses componentes. Componentes comumente usados em microondas incluem:

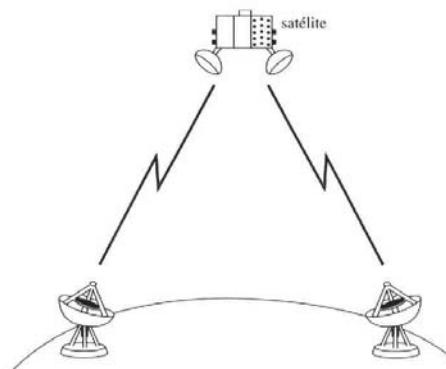
- Cabos coaxiais, que são linhas de transmissão para interconectar componentes de microondas.
- Ressonadores, que são usualmente cavidades onde a energia EM é armazenada.
- Seções de guias de onda, que podem ser retas, encurvadas ou torcidas.
- Antenas, que transmitem ou recebem ondas EM com eficiência.
- Terminações, que são projetadas para absorver a potência de entrada e, portanto, atuam como dispositivos de uma porta.
- Atenuadores, que são projetados para absorver parte da energia EM que por eles passa, diminuindo, portanto, o nível de potência do sinal de microondas.
- Acopladores direcionais, que consistem de dois guias de onda e de um mecanismo de acoplamento dos sinais entre eles.
- Isoladores, que permitem fluxo de energia somente em uma direção.
- Circuladores, que são projetados para estabelecer vários pontos de entrada/saída, por onde a energia pode ser fornecida ou extraída.
- Filtros, que suprimem sinais indesejados e/ou separam sinais de freqüências diferentes.

O uso das microondas tem sido alvo de grande expansão. Os exemplos incluem telecomunicações, rádio astronomia, exame do solo, radar, meteorologia, televisão em UHF, enlaces terrestres de microondas, dispositivos de estado sólido, aquecimento, Medicina e sistemas de identificação. Vamos considerar apenas quatro das aplicações listadas acima.

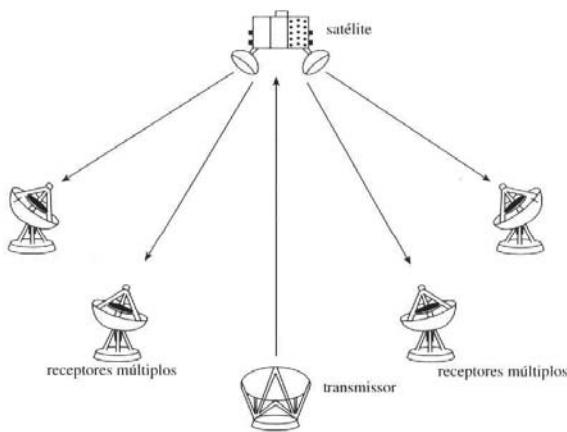
**1. Telecomunicações:** (transmissão de informação analógica ou digital de um ponto a outro) é a aplicação mais difundida das freqüências de microondas. As microondas se propagam em linha reta, como os raios luminosos, e não são refletidas pela ionosfera, como ocorre com os sinais de freqüências mais baixas. Isso torna possível a comunicação por satélite. Essencialmente, um satélite de comunicações é uma estação repetidora de microondas usada para conectar dois ou mais transmissores e receptores instalados em terra. O satélite recebe, em uma freqüência, o sinal, que é repetido ou amplificado e transmitido em outra freqüência. A Figura 14.1 mostra dois modos comuns de operação de comunicação por satélite. Na Figura 14.1(a) o satélite estabelece um enlace ponto a ponto, enquanto que, na Figura 14.1(b), ele é usado para estabelecer enlaces entre um transmissor e vários receptores localizados em terra.

**2. Sistemas de radar:** os sistemas de radar foram um grande incentivo para o desenvolvimento da tecnologia de microondas, pois, em freqüências mais altas, se obtém melhor resolução em equipamentos de radar. Somente a região de microondas do espectro é capaz de fornecer as resoluções desejadas com antenas de tamanho razoável. A capacidade de focalizar uma onda irradiada em feixes muito estreitos é o que faz as microondas serem tão úteis em aplicações de radar. O radar é utilizado para detectar aeronaves, guiar mísseis supersônicos, observar e seguir formações meteorológicas e controlar o tráfego de aeronaves nos aeroportos. Ele é também usado em alarmes contra roubo, controladores de portões e nos detectores de velocidade da polícia.

<sup>1</sup> Para um tratamento completo sobre microondas, veja D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, New York, John Wiley, 2nd., 1998.



(a) Enlace ponto a ponto de microondas via satélite



(b) Enlace de difusão de microondas via satélite

Figura 14.1 Configurações de sistemas de comunicação por satélites. Fonte: W. Stallings, *Data and Computer Communications*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1977, p. 90.

**3. Aquecimento:** a energia das microondas pode ser dirigida, controlada e concentrada com mais facilidade do que as ondas EM de baixas freqüências. Além disso, várias ressonâncias atômicas e moleculares ocorrem nas freqüências de microondas, criando diversas áreas de aplicação em ciências básicas, sensoriamento remoto e métodos de aquecimento. As propriedades de aquecimento da energia de microondas são úteis em uma grande variedade de aplicações comerciais e industriais. O forno de microondas, mostrado na Figura 14.2, é um exemplo típico. Quando o magnetron entra em oscilação, a energia de microondas é extraída de suas cavidades ressonantes através de um guia de ondas. Reflexões nas paredes do forno e nas pás do misturador fazem com que a energia de microondas fique uniformemente distribuída pelo interior do forno. Portanto, as microondas permitem que o processo de cozimento seja rápido e uniforme. Além do cozimento de alimentos, as propriedades de aquecimento das microondas são utilizadas em diatermia física e na secagem de batatas, papel, tecido, etc.

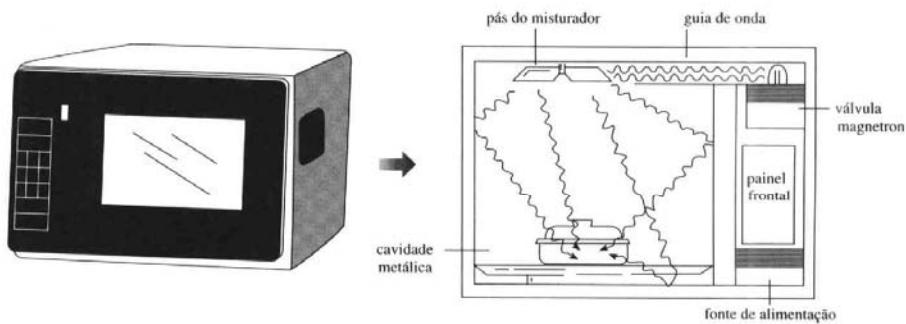


Figura 14.2 Forno de microondas. Fonte: N. Schlager (ed.), *How Products are Made*. Detroit, MI: Gale Research Inc., 1994, p. 289.

Um circuito de microondas consiste de componentes de microondas como fontes, linhas de transmissão, guias de onda, atenuadores, ressonadores, circuladores e filtros. Uma maneira de se analisar tais circuitos é relacionar as variáveis de entrada e de saída de cada componente. Vários conjuntos de parâmetros podem ser usados para relacionar as variáveis de entrada e de saída, mas, em frequências altas, como as de microondas, em que a corrente e a tensão não são perfeitamente definidas, os parâmetros  $S$  são, em geral, utilizados. Os parâmetros de espalhamento ou parâmetros  $S$  são definidos em termos de variáveis ondulatórias, as quais são medidas nas bandas de microondas com mais facilidade do que a tensão e a corrente.

Consideremos a estrutura de microondas de duas portas da Figura 14.3. As ondas incidente e refletida estão relacionadas aos parâmetros de espalhamento de acordo com

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned} \quad (14.1)$$

ou no formato matricial

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (14.2)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  representam, respectivamente, as ondas incidentes nas portas 1 e 2, enquanto  $b_1$  e  $b_2$  representam as ondas refletidas, conforme mostrado na Figura 14.3. Na matriz  $S$ , os elementos fora da diagonal representam os coeficientes de transmissão de ondas de tensão, enquanto que os elementos da diagonal representam os coeficientes de reflexão. Se a estrutura é *recíproca*, ela tem as mesmas características de transmissão em ambas as orientações, isto é,

$$S_{12} = S_{21} \quad (14.3)$$

Se a estrutura é *simétrica*, então

$$S_{11} = S_{22} \quad (14.4)$$

Para uma estrutura casada nas duas portas, os coeficientes de reflexão são nulos e

$$S_{11} = S_{22} = 0 \quad (14.5)$$

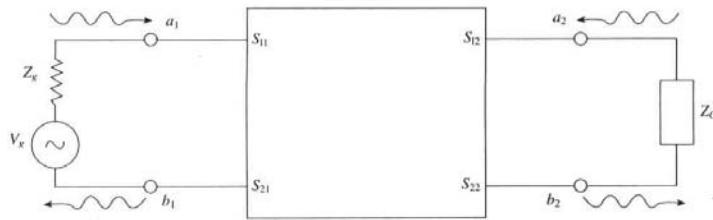


Figura 14.3 Uma estrutura de microondas de duas portas.

O coeficiente de reflexão na entrada pode ser expresso em termos dos parâmetros S e da carga  $Z_c$  como

$$\Gamma_i = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_C}{1 - S_{22}\Gamma_C} \quad (14.6)$$

onde

$$\Gamma_C = \frac{Z_c - Z_o}{Z_c + Z_o} \quad (14.7)$$

De forma semelhante, o coeficiente de reflexão na saída (com  $V_g = 0$ ) pode ser expresso em termos da impedância do gerador  $Z_g$  e dos parâmetros S como

$$\Gamma_o = \frac{b_2}{a_2} \Big|_{V_g=0} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_g}{1 - S_{11}\Gamma_g} \quad (14.8)$$

onde

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_o}{Z_g + Z_o} \quad (14.9)$$

#### EXEMPLO 14.1

Os parâmetros S que seguem foram obtidos para um transistor de microondas operando a 2,5 GHz:  $S_{11} = 0,85/-30^\circ$ ,  $S_{12} = 0,07/56^\circ$ ,  $S_{21} = 1,68/120^\circ$ ,  $S_{22} = 0,85/-40^\circ$ . Determine o coeficiente de reflexão na entrada para  $Z_c = Z_o = 75 \Omega$ .

#### Solução:

Da equação (14.7),

$$\Gamma_C = \frac{Z_c - Z_o}{Z_c + Z_o} = 0$$

Portanto, usando a equação (14.6), obtemos

$$\Gamma_i = S_{11} = 0,85/-30^\circ$$

**EXERCÍCIO PRÁTICO 14.1**

As Taxas de Onda Estacionária para as portas de entrada e de saída de um acoplador híbrido são dadas, respectivamente, por:

$$s_e = \frac{1 + |S_{11}|}{1 - |S_{11}|}$$

$$s_s = \frac{1 + |S_{11}|}{1 - |S_{11}|}$$

Calcule  $s_e$  e  $s_s$  para a seguinte matriz de espalhamento:

$$S = \begin{bmatrix} 0,4 & j0,6 \\ j0,6 & 0,2 \end{bmatrix}$$

**Resposta:** 2,333; 1,5.

### 14.3 INTERFERÊNCIA E COMPATIBILIDADE ELETROMAGNÉTICA

Todo o dispositivo eletrônico é uma fonte de campos eletromagnéticos irradiados, os quais são chamados de *emissões irradiadas*. Em geral, estas irradiações são um subproduto acidental de projeto.

**Interferência eletromagnética (IEM)** é a degradação na performance de um dispositivo devido à geração de campos no ambiente eletromagnético.

O ambiente eletromagnético consiste de vários equipamentos como estações de difusão de rádio e de TV, radar e auxílios à navegação, que irradiam energia EM quando estão em operação. Qualquer dispositivo eletrônico é suscetível à IEM. A sua influência pode ser percebida com facilidade. Os resultados incluem “fantasmas” nas imagens de recepção de TV, interferência nos serviços de radiotáxi com os sistemas de rádio da polícia, interferência de transientes de linhas de transmissão de energia em computadores pessoais e auto-oscilações em circuitos receptores ou transmissores.

**Compatibilidade eletromagnética (CEM)** é alcançada quando um dispositivo opera satisfatoriamente sem introduzir distúrbios intoleráveis no ambiente eletromagnético ou em outros dispositivos na sua vizinhança.

A CEM<sup>2</sup> é alcançada quando equipamentos eletrônicos coexistem em harmonia, de tal maneira que cada equipamento opera realizando as funções para as quais foi projetado, na presença, e apesar da presença, dos outros equipamentos. A IEM é o problema que ocorre quando tensões ou correntes indesejadas estão presentes, influenciando a performance de um dispositivo, enquanto a CEM é a solução para o problema. A meta da CEM é assegurar a compatibilidade entre sistemas ou entre subsistemas. Isto é obtido pela aplicação de conhecidas técnicas de projeto, as quais asseguram a operação de sistemas relativamente livre de problemas de IEM.

A CEM é uma área em franco crescimento devido à densidade sempre crescente de circuitos eletrônicos nos modernos sistemas de computação, comunicações, controle, etc. Ela não é de interesse somente para os engenheiros eletricistas e de computação, mas também para engenheiros automotivos. A crescente aplicação de sistemas eletrônicos automotivos, usados para melhorar a economia de

<sup>2</sup> Para um tratamento aprofundado de CEM, veja C. R. Paul, *Introduction to Electromagnetic Compatibility*, New York: John Wiley, 1992.

combustível, reduzir as emissões do escapamento, assegurar a segurança veicular e prover assistência ao condutor, resultou em uma crescente necessidade de que se assegure compatibilidade eletromagnética entre estes subsistemas durante a sua operação. Inicialmente, vamos considerar as fontes e as características da IEM. Posteriormente, vamos examinar suas técnicas de controle.

#### A. Fontes e características da IEM

Em primeiro lugar, vamos classificar a IEM em termos de suas causas e fontes. Esta classificação irá facilitar o reconhecimento das fontes e auxiliar na determinação dos métodos de controle. Conforme mencionado anteriormente, qualquer dispositivo eletrônico pode ser uma fonte de IEM, embora esta não seja a intenção do projetista. As causas de um problema de IEM podem estar tanto dentro do sistema, caso em que é chamado de *problema intra-sistêmico*, como fora, caso em que é chamado de *problema intersistêmico*.

A Figura 14.4 mostra problemas de IEM intersistêmicos. O termo “emissor” é usado normalmente para fazer referência à fonte de IEM, enquanto que o termo “suscetível” é utilizado para fazer referência ao dispositivo que sofre a interferência. As Tabelas 14.1 e 14.2 apresentam causas típicas de interferência intra-sistêmica e intersistêmica. Tanto a IEM inter quanto a intra podem, em geral, ser controladas pelo engenheiro projetista de sistemas através da adoção de alguns procedimentos e técnicas básicas de projeto.

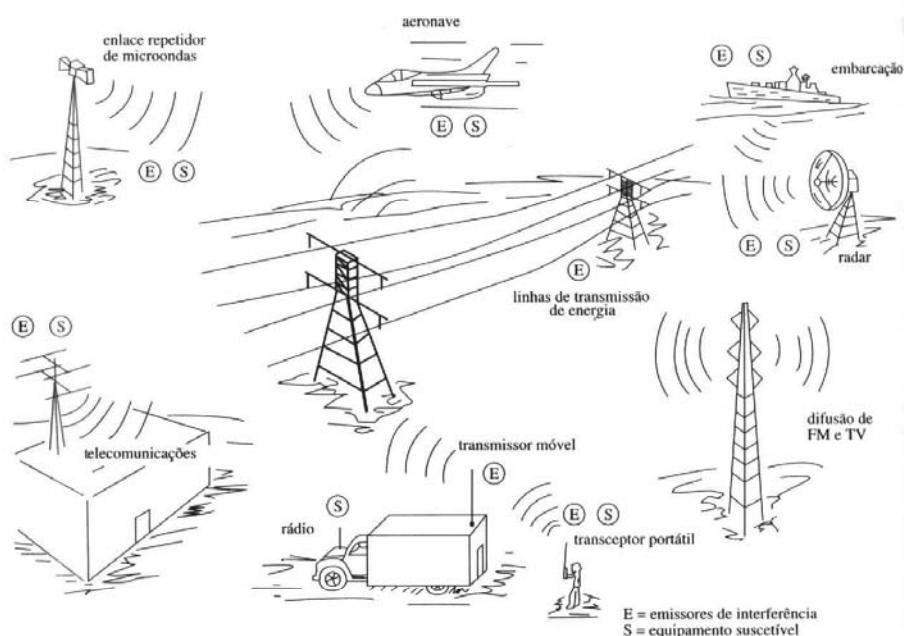


Figura 14.4 Exemplos típicos de problemas de IEM intersistêmicos. *Fonte:* J. I. N. Violette et al., *Electromagnetic Compatibility Handbook*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1987, p. 4.

TABELA 14.1 Causas de IEM intra-sistêmica

Emissores	Dispositivos suscetíveis
Fontes de alimentação	Repetidores
Transmissores de radar	Receptores de radar
Transmissores móveis de rádio	Receptores móveis de rádio
Lâmpadas fluorescentes	Reator eletrônico
Sistemas de ignição de automóveis	Receptores de rádio de automóveis

TABELA 14.2 Causas de IEM intersistêmica

Emissores	Dispositivos suscetíveis
Descargas elétricas	Receptores de rádio
Computadores	Receptores de TV
Linhas de transmissão de energia	Marca-passos
Transmissores de radar	Sistemas de navegação aérea
Transmissores de rádio da polícia	Receptores de radiotáxi
Lâmpadas fluorescentes	Controles industriais
Transmissores em aeronaves	Receptores em embarcações

Por exemplo, para problemas de EMI intra-sistêmicos, o engenheiro projetista pode aplicar técnicas adequadas de aterramento, de fiação, de blindagem dos circuitos e dos dispositivos e de filtragem.

As fontes de IEM podem ser classificadas como naturais ou artificiais (causadas pelo homem). As origens de IEM são basicamente emissões conduzidas (tensões e/ou correntes) ou emissões irradiadas (campos elétricos e/ou magnéticos). Emissões conduzidas são as correntes que são conduzidas por condutores metálicos (o cabo de alimentação da unidade) e injetadas na rede de alimentação comum, onde as mesmas podem causar interferência em outros dispositivos conectados à mesma rede de alimentação. Emissões irradiadas se referem a campos eletromagnéticos irradiados pelo dispositivo, os quais podem ser captados por outros dispositivos eletrônicos, causando interferência nos mesmos. A Figura 14.5 ilustra a diferença conceitual entre os dois tipos de emissão.

Não existe um órgão de controle único com jurisdição sobre todos os sistemas capaz de determinar as ações necessárias para se obter CEM. Portanto, usualmente, a CEM é obtida por associações industriais, regulamentação voluntária, regulamentação forçada pelos governos e acordos negociados entre as partes envolvidas. A frequência tem um papel importante na CEM. A alocação e distribuição de frequências são vinculadas a acordos estabelecidos por tratados internacionais. Os regulamentos resultantes de tais acordos internacionais são publicados pela International Telecommunication Union (ITU). Nos Estados Unidos, o Federal Communications Commission (FCC) tem autoridade sobre as comunicações por rádio e por cabo.\* O FCC tem estabelecido limites para as emissões irradiadas ou conduzidas por dispositivos eletrônicos, incluindo máquinas de escrever elétricas, calculadoras, receptores de televisão, impressoras, *modems* e computadores pessoais. Nos Estados Unidos, é ilegal a venda de qualquer dispositivo eletrônico cujas emissões irradiada e conduzida não tenham sido medidas e cujos valores ultrapassem os limites regulamentados pelo FCC. Assim, qualquer dispositivo eletrônico projetado sem incorporar os princípios de projeto de CEM provavelmente não obedecerá os limites estabelecidos pelo FCC.

\*N. de T. No Brasil, esta função é exercida pela ANATEL – Agência Nacional de Telecomunicações.

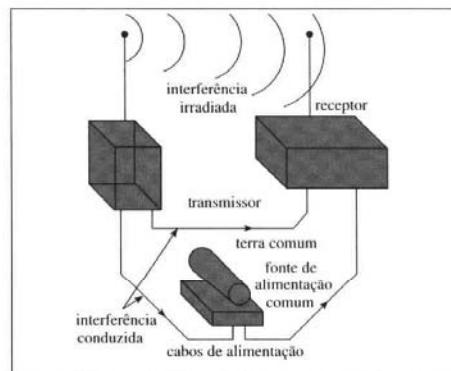


Figura 14.5 Diferenças entre emissões conduzidas e irradiadas.

### B. Técnicas de controle de IEM

As três técnicas básicas de projeto utilizadas para controlar ou suprimir a IEM são: aterramento, blindagem e filtragem. Embora cada uma das técnicas tenha um papel diferente no projeto de sistema, um aterramento adequado pode, às vezes, minimizar a necessidade de blindagem e de filtragem. Também, uma blindagem adequada pode minimizar a necessidade de filtragem. Por essa razão, vamos discutir as três técnicas, aterramento, blindagem e filtragem, nesta ordem.

#### Aterramento:

O aterramento consiste em estabelecer um caminho condutor de eletricidade entre dois pontos com o objetivo de conectar componentes elétricos e eletrônicos de um sistema entre si ou de conectá-los a um ponto de referência, que pode ser chamado de *terra*. Um plano terra ideal é um corpo com um potencial zero e com impedância nula, que pode ser usado como uma referência para todos os sinais do circuito associado e no qual se possa descarregar toda a corrente indesejada e, assim, eliminar seus efeitos.

A finalidade de um terra flutuante é a de isolar, eletricamente, circuitos ou equipamentos elétricos de um plano terra comum. Este tipo de técnica de aterramento pode ser perigoso. O aterramento em um único ponto é utilizado para minimizar os efeitos das correntes de terra de um equipamento. O aterramento de múltiplos pontos minimiza o comprimento dos condutores de aterramento. O plano terra pode ser um fio terra que passa por todo o sistema ou um corpo condutor de grandes dimensões.

Uma conexão elétrica é o estabelecimento de um caminho de baixa impedância entre duas superfícies metálicas. O aterramento é um conceito de circuitos, enquanto que a conexão elétrica é a implementação física deste conceito. A finalidade de uma conexão é estabelecer, em relação ao fluxo de correntes elétricas, uma estrutura homogênea, evitando, dessa forma, o aparecimento de diferenças de potencial entre partes metálicas, pois tais potenciais podem resultar em IEM. As conexões fornecem proteção contra choque elétrico, caminhos de retorno de correntes em circuitos de potência e ligações de plano terra em antenas e também minimizam diferenças de potenciais entre dispositivos. Estas conexões têm a capacidade de conduzir altas correntes em casos de falha.

Há dois tipos de conexões: conexões diretas e indiretas. Uma conexão direta é um contato metal-metal entre os elementos conectados (por exemplo, através de uma soldagem), enquanto uma conexão indireta é um contato através de conectores metálicos.

A resistência em corrente contínua  $R_{cc}$  de uma conexão é muitas vezes utilizada como uma indicação da qualidade da conexão. É dada por

$$R_{cc} = \frac{\ell}{\sigma S} \quad (14.10)$$

onde  $\ell$  é o comprimento da conexão,  $\sigma$  é a condutividade e  $S$  é a área da seção reta. À medida que a freqüência aumenta, a resistência da conexão aumenta devido ao efeito pelicular. Dessa forma, a resistência  $R_{ca}$  é dada por

$$R_{ca} = \frac{\ell}{\sigma \delta w} \quad (14.11)$$

onde  $w$  é a largura da conexão e  $\delta$  é a profundidade pelicular.

A eficiência de conexão pode ser expressa como a diferença (em dB) entre as tensões induzidas no gabinete do equipamento com e sem o rabicho de conexão.

#### **Blindagem:**

A finalidade da blindagem é a de confinar a energia irradiada em uma região específica do espaço ou a de evitar que a energia irradiada penetre em uma determinada região. As blindagens podem ser na forma de compartimentos e de caixas, bem como na forma de cabos e de conectores.

Os tipos de blindagem incluem materiais sólidos, vazados (grades) e malhas como as usadas em cabos coaxiais. Em todos os casos, a blindagem pode ser caracterizada pela eficiência da blindagem. A eficiência de uma blindagem ( $EB$ ) é definida como

$$EB = 10 \log_{10} \frac{\text{densidade de potência incida}}{\text{densidade de potência transmitida}} \quad (14.12)$$

onde a densidade de potência incidente é a densidade de potência no ponto de medida antes de a blindagem ser instalada, e a potência transmitida é a densidade de potência neste mesmo ponto após a colocação da blindagem. A eficiência da blindagem pode também ser definida como a razão entre a amplitude de campo transmitido para o interior da blindagem  $E_i$  e a amplitude de campo incidente  $E_r$ . Assim, a  $EB$  pode ser dada por

$$EB = 20 \log_{10} \frac{E_i}{E_r} \quad (14.13)$$

Para campos magnéticos, teremos

$$EB = 20 \log_{10} \frac{H_i}{H_r} \quad (14.14)$$

Por exemplo, o alumínio tem  $\sigma = 3,5 \times 10^7$  S/m,  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ . Uma chapa de alumínio a 100 MHz tem uma  $EB$  de 100 dB para uma espessura de 0,01 mm. Como a chapa de alumínio usada na fabricação de gabinetes de computadores é muito mais espessa que 0,01 mm, esta é considerada uma blindagem altamente eficiente. Uma caixa que blinda com eficiência os circuitos em seu interior com relação aos campos externos também é eficiente na prevenção de irradiação destes circuitos para o mundo exterior. Devido à eficiência da blindagem da caixa metálica, as emissões irradiadas por computadores são causadas pelas aberturas existentes no gabinete, tais como frestas, aberturas para acionadores de discos, etc., e por fios que entram no gabinete, tais como cabos de alimentação e cabos para dispositivos externos.

#### **Filtragem:**

Um filtro elétrico é um circuito composto por elementos como resistores, capacitores e indutores, localizados ou distribuídos, que oferecem uma oposição relativamente pequena a certas freqüências, enquanto bloqueia a passagem de outras. Através do uso de filtros, pode-se reduzir substancialmente os níveis de interferência conduzida.

A característica mais importante de um filtro é a *perda de inserção* que ele causa em função da freqüência. A perda de inserção ( $PI$ ) é definida como

$$PI = 20 \log_{10} \frac{V_1}{V_2} \quad (14.15)$$

onde  $V_1$  é a tensão de saída de uma fonte de sinal com o filtro no circuito e  $V_2$  é a tensão de saída da fonte de sinal sem o uso do filtro. Filtros passa-baixa são normalmente utilizados na implementação de CEM. A perda de inserção para um filtro passa-baixa é dada por

$$PI = 10 \log_{10} (1 + F^2) \text{ dB} \quad (14.16)$$

onde

$$F = \begin{cases} \pi f RC, & \text{para filtro capacitivo} \\ \pi f L/R, & \text{para filtro indutivo} \end{cases} \quad (14.17)$$

sendo  $f$  a freqüência.

## 14.4 FIBRA ÓTICA

Na metade da década de 1970, foi reconhecido que a tecnologia baseada em condutores de cobre seria inadequada para o desenvolvimento de sistemas de comunicações futuros. Em vista disto, a indústria de telecomunicações investiu pesadamente na pesquisa de fibras óticas. As fibras óticas são uma alternativa atraente às linhas de transmissão com fios, como o par trançado e o cabo coaxial. As fibras óticas<sup>3</sup> têm as seguintes vantagens sobre o cobre:

- *Largura de banda*: as fibras têm uma capacidade muito alta de transmissão de informação. A largura de banda é suficiente para que se possa usar transmissão serial *bit a bit*, reduzindo, portanto, consideravelmente, o tamanho, custo e complexidade do *hardware*.
- *Atenuação*: as fibras apresentam baixa atenuação, sendo capazes, portanto, de fazer transmissões a longas distâncias sem a necessidade do uso de repetidores.
- *Imunidade a ruído*: as fibras não irradiam nem são afetadas pela interferência eletromagnética. A imunidade à IEM se deve ao fato de que não existem partes metálicas, dessa forma não pode haver condução de correntes.
- *Segurança*: as fibras são mais seguras do ponto de vista de interceptação clandestina do sinal porque é difícil fazer uma derivação na fibra sem interromper a comunicação.
- *Custo*: o custo das fibras óticas caiu consideravelmente nos últimos anos e continuará a cair. O mesmo tem ocorrido com o custo de outros componentes como transmissores e receptores ópticos.

Estas significativas vantagens das fibras óticas em relação aos meios elétricos tornaram-nas um meio popular de transmissão na atualidade. Embora a fibra ótica seja mais cara e usada principalmente em comunicações ponto a ponto, está havendo uma mudança rápida do uso de cabos coaxiais e pares trançados para o uso de fibras óticas em sistemas de comunicações, instrumentação, redes de TV a cabo, automação industrial e sistemas de transmissão de dados.

**Uma fibra ótica é um guia de onda dielétrico que opera em freqüências óticas.**

As freqüências óticas estão na ordem de 100 THz. Conforme mostrado na Figura 14.6, uma fibra ótica consiste de três seções cilíndricas concêntricas: o núcleo, a casca e a jaqueta. O núcleo consiste de um ou mais filamentos de vidro ou de plástico. A casca é a camada de vidro ou de plástico que envolve o núcleo, que pode ter o índice de refração com variação degrau ou gradual. No núcleo com variação degrau, o índice de refração é uniforme, mas sofre uma variação abrupta na interface núcleo-casca, enquanto que o núcleo com variação gradual tem um índice de refração que varia com a dis-

<sup>3</sup> Existem vários livros excelentes que podem fornecer uma exposição mais aprofundada sobre fibras óticas. Veja, por exemplo, S. L. W. Meardon, *The Elements of Fiber Optics*, Englewood Cliffs, NJ: Regents/Prentice Hall, 1993.

tância radial a partir do centro da fibra. A jaqueta envolve uma fibra ou um feixe de fibras. Ela é feita de plástico ou de outro material usado para proteger as fibras contra umidade, esmagamento, etc.

Um raio luminoso que penetra no núcleo sofrerá reflexão interna quando incidir em um meio mais denso e quando o ângulo de incidência for superior ao ângulo crítico. Desta maneira, o raio luminoso é refletido de volta ao meio de origem e o processo é repetido fazendo a luz percorrer o núcleo. Esta forma de propagação é dita multimodo e corresponde a uma variedade de ângulos de reflexão, conforme mostrado na Figura 14.7.

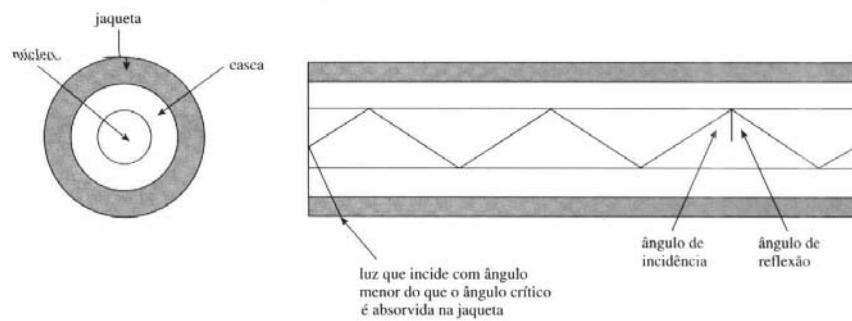


Figura 14.6 Fibra ótica.

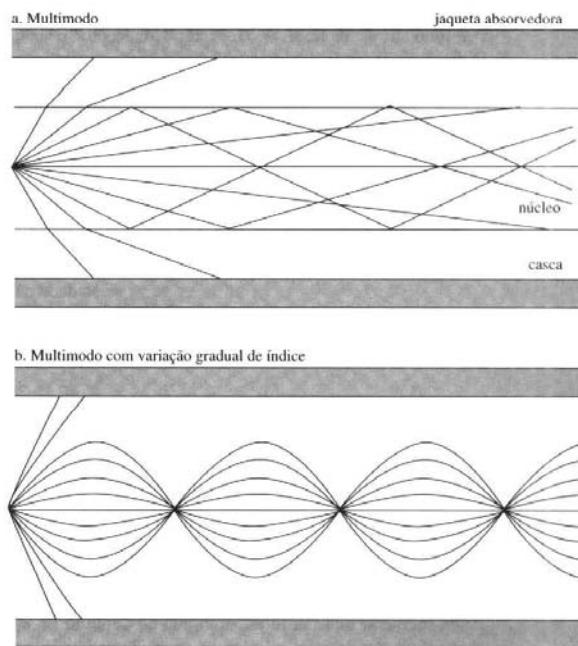


Figura 14.7 Modos de transmissão na fibra ótica. Fonte: W. Stallings, *Local and Metropolitan Area Networks*, 4th ed., New York: Macmillan, 1993, p. 85.

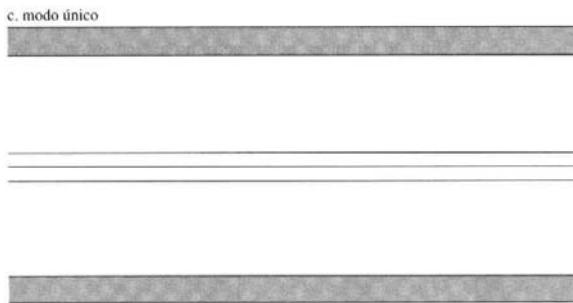


Figura 14.7 (Continuação).

Isto causa um alargamento do sinal no tempo e limita a taxa na qual os dados transmitidos podem ser recebidos corretamente. Com a redução do raio do núcleo, a fibra passa a operar em modo único, o que elimina este tipo de distorção.

Um sistema de comunicações por fibra ótica é semelhante a um sistema de comunicações convencional. Conforme mostrado na Figura 14.8, um sistema a fibra consiste de um transmissor, um meio de transmissão e um receptor. O transmissor recebe um sinal elétrico e o transforma em um sinal ótico, analógico ou digital. O transmissor envia o sinal ótico modulando a saída de uma fonte luminosa (normalmente um LED ou um *laser*) pela variação da sua intensidade. O sinal ótico é transmitido através da fibra até o receptor. No receptor, o sinal ótico é convertido novamente em um sinal elétrico por um fotodiodo.

A performance de um enlace de comunicações por fibra ótica depende da abertura numérica (AN), da atenuação e das características de dispersão da fibra. Conforme o sinal se propaga pela fibra, ele é distorcido devido à atenuação e à dispersão.

#### **Abertura Numérica:**

Este é o parâmetro mais importante de uma fibra ótica. O valor da AN é determinado pelos índices de refração do núcleo e da casca. Por definição, o índice de refração  $n$  de um material é definido como:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{\text{velocidade da luz no meio}} \\ &= \frac{c}{u_m} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{\mu_m \epsilon_m}} \end{aligned} \quad (14.18)$$

Como  $\mu_m = \mu_0$ , na maior parte dos casos práticos,

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r} \quad (14.19)$$

o que indica que o índice de refração é, essencialmente, a raiz quadrada da constante dielétrica. Tenha em mente que, conforme discutido no Capítulo 10,  $\epsilon_r$  pode ser complexo. Para alguns meios comuns, o valor de  $n$  é  $n = 1$  para o ar,  $n = 1,33$  para a água e  $n = 1,5$  para o vidro.

Quando a luz passa de um meio 1 para um meio 2, a lei de Snell deve ser satisfeita, isto é,

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (14.20)$$

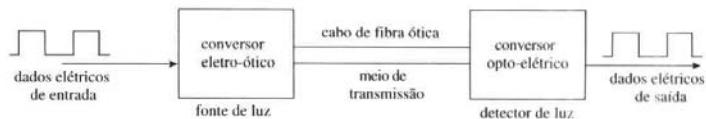


Figura 14.8 Um sistema a fibra ótica típico.

onde  $\theta_1$  é o ângulo de incidência no meio 1 e  $\theta_2$  é o ângulo de transmissão para o meio 2. O fenômeno da reflexão total ocorre quando  $\theta_2 = 90^\circ$ , o que resulta em

$$\theta_1 = \theta_c = \operatorname{sen}^{-1} \frac{n_2}{n_1} \quad (14.21)$$

onde  $\theta_c$  é o ângulo crítico para a reflexão interna total. Note que a equação (14.21) é válida somente se  $n_1 > n_2$ , pois o valor de  $\operatorname{sen} \theta_c$  deve ser menor ou igual a 1.

Uma outra maneira de ver a capacidade de transmissão da luz por uma fibra é a medida do ângulo de aceitação  $\theta_a$ , que é o máximo ângulo de incidência da luz na fibra no qual os raios de luz serão guiados. Sabemos que este ângulo máximo ocorre quando  $\theta_c$  é o ângulo crítico, satisfazendo, portanto, a condição para haver a reflexão interna total. Assim, para uma fibra com variação do índice de refração degrau,

$$AN = \operatorname{sen} \theta_a = n_1 \operatorname{sen} \theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (14.22)$$

onde  $n_1$  é o índice de refração do núcleo e  $n_2$  é o índice de refração da casca, conforme mostrados na Figura 14.9. Como a maior parte das fibras são feitas de sílica,  $n_1 = 1,48$ . Os valores típicos de AN ocorrem entre 0,19 e 0,25. Quando maior a abertura numérica, maior é a capacidade da fibra de captar energia de uma fonte luminosa.

$$N = \frac{V^2}{2} \quad (14.24)$$

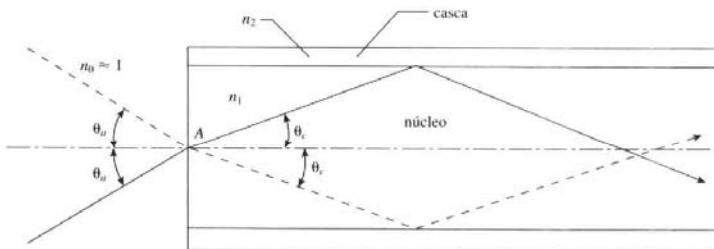


Figura 14.9 Abertura numérica e ângulo de aceitação.

Quando uma fibra propaga simultaneamente muitos modos ela é chamada de *fibra multimodo com índice degrau*. O volume modal  $V$  é dado por

$$V = \frac{\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (14.23)$$

onde  $d$  é o diâmetro do núcleo e  $\lambda$  é o comprimento de onda da fonte luminosa. A partir da equação (14.23), o número  $N$  de modos que se propagam em um fibra multimodo de índice degrau pode ser estimado como

#### Atenuação:

Conforme discutido no Capítulo 10, a atenuação é a redução na potência do sinal ótico. A atenuação na potência (ou perda na fibra) é governada por

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha P \quad (14.25)$$

onde  $\alpha$  é a atenuação e  $P$  é a potência ótica. Supõe-se, na equação (14.25), que a onda se propaga ao longo de  $z$ . Integrando-se a equação (14.25), obtém-se a relação entre a potência  $P(0)$  na entrada da fibra e a potência  $P(\ell)$  após uma propagação  $\ell$  na fibra como

$$P(\ell) = P(0)e^{-\alpha\ell} \quad (14.26)$$

É comum expressar a atenuação  $\alpha$  em dB/km e o comprimento  $\ell$  da fibra em km. Neste caso, a equação (14.26) torna-se

$$\alpha\ell = 10 \log_{10} \frac{P(0)}{P(\ell)} \quad (14.27)$$

Portanto, a potência da luz na fibra se reduz de  $\alpha$  decibéis por quilômetro conforme a luz se propaga. A equação (14.27) pode ser escrita como

$$P(\mathcal{P}) = P(0) = 10^{-\alpha\ell/10} \quad (14.28)$$

Para  $\ell = 100$  km,

$$\frac{P(0)}{P(\ell)} \sim \begin{cases} 10^{-100} & \text{para cabo coaxial} \\ 10^{-2} & \text{para fibra} \end{cases} \quad (14.29)$$

o que indica que, em um cabo coaxial, a perda de potência é muito maior do que em uma fibra ótica.

#### Dispersão:

A dispersão é o alargamento que ocorre nos pulsos óticos conforme eles se propagam pela fibra. Em sistemas digitais, este alargamento faz com que pulsos consecutivos que representam bits 1 se sobreponham. Se a dispersão ultrapassa um certo limite, o seu efeito pode confundir o receptor. Os efeitos de dispersão em fibras monomodo são bem menores do que em fibras multimodo.

#### EXEMPLO 14.2

Uma fibra com índice degrau tem um núcleo de  $80 \mu\text{m}$  de diâmetro e índice de refração 1,62 e uma abertura numérica de 0,21. Calcule: (a) o ângulo de aceitação; (b) o índice de refração da casca; (c) o número de modos que a fibra pode propagar em um comprimento de onda de  $0,8 \mu\text{m}$ .

#### Solução:

(a) Como  $\sin \theta_a = AN = 0,21$ , então,

$$\theta_a = \sin^{-1} 0,21 = 12,12^\circ$$

(b) De  $\Delta N = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ , obtemos

$$n_2 = \sqrt{n_1^2 - \Delta N^2} = \sqrt{1,62^2 - 0,21^2} = 1,606$$

(c)

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{\pi d \Delta N}{\lambda} \\ &= \frac{\pi (80 \times 10^{-6}) \times 0,21}{0,8 \times 10^{-6}} = 65,973 \end{aligned}$$

Portanto,

$$N = \frac{V^2}{2} = 2.176 \text{ modos}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 14.2

Uma fibra de silício tem núcleo com índice de refração de 1,48. O material da casca tem um índice de refração de 1,465. Encontre: (a) o ângulo crítico acima do qual ocorre a reflexão interna total; (b) a abertura numérica da fibra.

**Resposta:** (a)  $81,83^\circ$ ; (b) 0,21.

#### EXEMPLO 14.3

Pulsos de luz se propagam por uma fibra que tem uma atenuação de 0,25 dB/km. Determine a distância para a qual a potência dos pulsos é reduzida de 40%.

**Solução:**

Se a potência é reduzida de 40%, isto significa que

$$\frac{P(\ell)}{P(0)} = 1 - 0,4 = 0,6$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{10}{\alpha} \log_{10} \frac{P(0)}{P(\ell)} \\ &= \frac{10}{0,25} \log_{10} \frac{1}{0,6} \\ &= 8,874 \text{ km} \end{aligned}$$

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 11.2

Uma fibra de 10 km, com atenuação de 0,2 dB/km, é usada em um enlace ótico entre duas cidades. Qual é a percentagem de energia recebida?

**Resposta:** 63,1%.

#### RESUMO

- As microondas são ondas EM de comprimento de onda muito curto. Elas se propagam em linha reta, como a luz, e, portanto, podem, com o uso de antenas adequadas, serem facilmente focalizadas ao longo de uma direção. Elas são usadas em radar, em guiaamento, em navegação e em aquecimento.

2. A compatibilidade eletromagnética (CEM) é a capacidade de dispositivos elétricos e eletrônicos operarem no ambiente eletromagnético para o qual foram projetados, sem sofrerem ou causarem degradação inaceitável em suas performances devido à IEM.
3. A interferência eletromagnética (IEM) é a perda de CEM. Ela pode ser suprimida por aterramento, blindagem e filtragem.
4. Uma fibra ótica é uma estrutura de guia de onda dielétrico que opera em freqüências óticas e que é formada pela região do núcleo e pela região da casca.
5. As vantagens da fibra ótica em relação aos cabos de cobre incluem: (1) grande largura de banda; (2) baixa atenuação; (3) imunidade à IEM e (4) baixo custo.

## QUESTÕES DE REVISÃO

- 14.1** As microondas têm comprimentos de onda grandes.
- (a) Verdadeiro
  - (b) Falso
- 14.2** No espaço livre, o comprimento de onda de um sinal de microonda, cuja freqüência é 3 GHz, é:
- (a) 1 mm
  - (b) 10 mm
  - (c) 10 cm
  - (d) 1 m
- 14.3** Qual das seguintes não é uma fonte de IEM?
- (a) Fibra ótica
  - (b) Computador pessoal
  - (c) Radar da polícia
  - (d) Aeronave
  - (e) Lâmpada fluorescente
- 14.4** Uma fibra ótica é:
- (a) uma linha de transmissão
  - (b) um guia de onda
  - (c) ambos
- 14.5** Ao contrário dos cabos coaxiais e pares trançados, as fibras óticas são imunes a:
- (a) transmissão de alta freqüência;
  - (b) atenuação do sinal;
  - (c) perda de potência;
  - (d) interferência eletromagnética.
- 14.6** Como um consultor, você é solicitado a projetar uma rede para um auditório. A velocidade e o custo não são importantes. Entretanto, a interferência eletromagnética de uma estação de rádio na rede é importante. Qual dos seguintes meios seria adequado para a implementação da rede?
- (a) Microondas
  - (b) Cabo coaxial
  - (c) Fibra ótica
  - (d) Rádio

**14.7** As aplicações das fibras óticas incluem:

- (a) cabo submarino;
- (b) telecomunicações a longa distância;
- (c) transmissão de dados em alta velocidade;
- (d) instrumentação médica;
- (e) todas as opções listadas acima.

**14.8** Os raios luminosos são confinados no interior de uma fibra ótica devido à:

- (a) reflexão interna total no limite externo da casca;
- (b) reflexão interna total na interface entre núcleo e casca;
- (c) reflexão na jaqueta da fibra;
- (d) refração;
- (e) difração.

**14.9** Uma fibra ótica tem o núcleo com o índice de refração de 1,45 e a casca com índice de refração de 1,42. A abertura numérica da fibra é:

- (a) 0,12
- (b) 0,18
- (c) 0,29
- (d) 0,38

**14.10** Uma fibra ótica de 20 km de comprimento tem uma potência de saída de 0,02 mW. Se a perda na fibra é 0,48 dB/km, qual é a potência de entrada da fibra?

- (a) 52  $\mu$ W
- (b) 19  $\mu$ W
- (c) 7  $\mu$ W
- (d) 2  $\mu$ W

*Respostas:* 14.1b; 14.2c; 14.3a; 14.4b; 14.5d; 14.6c; 14.7e; 14.8b; 14.9c; 14.10a.

## PROBLEMAS

**14.1** Discuta, brevemente, outras aplicações das microondas que não foram discutidas no texto.

**14.2** Um conjunto de parâmetros úteis, conhecidos como parâmetros de transferência de espalhamento, está relacionado às ondas incidente e refletida por

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

- (a) Expresse os parâmetros  $T$  em termos dos parâmetros  $S$ .
- (b) Encontre  $T$  quando

$$S = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}$$

**14.3** Os parâmetros  $S$  de uma estrutura de microondas de duas portas são:

$$S_{11} = 0,33 - j0,16, S_{12} = S_{21} = 0,56, S_{22} = 0,44 - j0,62$$

Encontre os coeficientes de reflexão na entrada e na saída, quando  $Z_C = Z_o = 50 \Omega$  e  $Z_g = 2 Z_o$ .

- 14.4** Por que elementos de circuitos localizados, tais como resistores, indutores e capacitores, não podem ser utilizados nas freqüências de microondas?
- 14.5** Um sinal de microondas, se propagando no espaço livre, tem uma freqüência de 8,4 GHz. Calcule o comprimento de onda do sinal.
- 14.6** Uma descarga eletrostática (DE) pode ser modelada como uma capacitância de 125 pF carregada a 1.500 V que se descarrega através de um resistor de 2 kW. Obtenha a forma de onda da corrente.
- \*14.7** A perda de inserção de um circuito de filtro, quando terminado por  $Z_g$  e  $Z_C$ , pode ser calculada em termos de seus parâmetros A, B, C, e D, conforme mostrado na Figura 14.10. Mostre que

$$IL = 20 \log_{10} \left| \frac{AZ_L + B + CZ_g Z_C + DZ_g}{Z_g + Z_C} \right|$$

- 14.8** Uma barra de prata tem uma seção retangular de 0,8 cm de altura e 1,2 cm de largura. Encontre:
- a resistência em corrente contínua por km do condutor;
  - a resistência em corrente alternada por km do condutor em 6 MHz.
- 14.9** A velocidade da luz, medida em um determinado meio, é de  $2,1 \times 10^8$  m/s. Encontre o índice de refração.
- 14.10** Como pode ser útil uma fibra ótica para isolar IEM?

- 14.11** Uma fibra de vidro tem um núcleo com 50  $\mu\text{m}$  de diâmetro e com índice de refração de 1,62, enquanto que o índice de refração da casca é de 1,604. Se é usada uma luz com comprimento de onda de 1.300 nm, encontre:
- a abertura numérica;
  - o ângulo de aceitação;
  - o número de modos transmitidos.

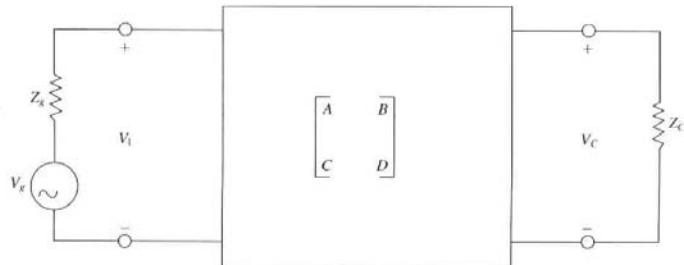


Figura 14.10 Referente ao Problema 14.5

**14.12** Uma fibra ótica, com um raio de  $2,5 \mu\text{m}$  e com índice de refração de 1,45, é envolvida por uma casca de ar. Se a fibra é iluminada com um raio luminoso de  $1,3 \mu\text{m}$ , determine:

- (a)  $V$ ;
- (b) AN;
- (c) quantos modos, aproximadamente, podem se propagar.

**14.13** Uma fibra ótica com atenuação de  $0,4 \text{ dB/km}$  tem 5 km de comprimento. A fibra tem  $n_1 = 1,53$ ,  $n_2 = 1,45$  e um diâmetro de  $50 \mu\text{m}$ . Encontre:

- (a) o ângulo máximo para o qual a luz será guiada pela fibra;
- (b) a porcentagem da potência de entrada recebida.

**14.14** Um diodo laser é capaz de acoplar  $10 \text{ mW}$  a uma fibra que tem uma atenuação de  $0,5 \text{ dB/km}$ . Se a fibra tem um comprimento de 850 m, calcule a potência recebida na entrada da fibra.

**14.15** A atenuação  $\alpha_{10}$ , do Capítulo 10, é dada em  $\text{Np/m}$ , enquanto que a atenuação  $\alpha_{14}$ , deste capítulo, é dada em  $\text{dB/km}$ . Qual é a relação entre as duas?

**14.16** Um sistema de comunicações óticas utiliza um enlace de fibra ótica de 30 km, com uma perda de  $0,4 \text{ dB/km}$ . Se o sistema necessita um mínimo de  $0,2 \text{ mW}$  no receptor, calcule a potência mínima que deve ser lançada na fibra.

**14.17** (a) Discuta as vantagens da utilização de fibras ópticas.  
(b) O que é a dispersão de um pulso?

# Capítulo 15

## MÉTODOS NUMÉRICOS

A receita para a ignorância é: satisfazer-se com suas opiniões e contentar-se com o seu conhecimento.

— ELBERT HUBBARD

### 15.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos precedentes, consideramos várias técnicas analíticas para resolver problemas de EM e obter soluções na forma fechada. Uma *solução na forma fechada* é uma solução na forma de uma equação algébrica explícita, na qual os valores dos parâmetros do problema podem ser substituídos. Algumas dessas soluções analíticas foram obtidas assumindo certas situações, dessa forma fazendo com que essas soluções fossem aplicáveis àquelas situações idealizadas. Por exemplo, ao deduzir a fórmula para calcular a capacidade de um capacitor de placas paralelas, assumimos que o efeito de vazamento nas bordas é desprezível e que a separação entre as placas é muito pequena se comparada com o comprimento e com a largura das mesmas. Também nossa aplicação da equação de Laplace no Capítulo 6 foi restrita a problemas com contornos coincidindo com as superfícies coordenadas. As soluções analíticas têm uma vantagem inerente de serem exatas. Elas também tornam mais fácil observar o comportamento da solução em função da variação dos parâmetros do problema. Entretanto, as soluções analíticas são somente possíveis para problemas com configurações simples.

Quando as complexidades das fórmulas teóricas tornam as soluções analíticas intratáveis, recorremos a métodos não analíticos, o que inclui: (1) métodos gráficos; (2) métodos experimentais; (3) métodos analógicos e (d) métodos numéricos. Os métodos gráfico, experimental e analógico são aplicáveis à solução de um número relativamente pequeno de problemas. Métodos numéricos têm tido destaque e têm se tornado mais atrativos com o advento de computadores digitais cada vez mais rápidos. As três técnicas numéricas simples mais usualmente utilizadas em EM são: (1) o método dos momentos; (2) o método das diferenças finitas e (3) o método dos elementos finitos. A maioria dos problemas de EM envolvem ou equações diferenciais parciais ou equações integrais. As equações diferenciais parciais são normalmente resolvidas com o método das diferenças finitas ou com o método dos elementos finitos. As equações integrais são resolvidas, adequadamente, utilizando-se o método dos momentos. Embora os métodos numéricos dêem soluções aproximadas, as soluções são suficientemente precisas para os propósitos da engenharia. Não devemos ficar com a impressão de que as soluções analíticas estão superadas por causa dos métodos numéricos. Ao invés disso, elas os complementam. Como veremos posteriormente, cada método numérico envolve uma simplificação analítica até o ponto em que se torna fácil aplicar o método.

Os comandos do Matlab, desenvolvidos para implementação computacional dos conceitos a serem abordados neste capítulo, estão simplificados e são auto-explicativos para fins didáticos. As notações empregadas neste capítulo estão o mais próximo possível daquelas usadas nos programas. Outras serão definidas sempre que necessário. Os programas apresentados não são únicos; existem várias maneiras de se escrever um programa de computador. Portanto, os usuários podem decidir modificar esses programas para adaptá-los aos seus objetivos.

## †15.2 PLOTAGEM DE CAMPO

Na Seção 4.9, utilizamos linhas de campo e superfícies equipotenciais para visualizar um campo eletrônico. Entretanto, as representações gráficas para campos eletrônicos, na Figura 4.21, e para campos magnetostáticos, nas Figuras 7.8(b) e 7.16, são muito simples, triviais e qualitativas. Figuras precisas de distribuições de carga mais complexas seriam mais úteis. Nesta seção, é apresentada uma técnica numérica que pode ser desenvolvida em um programa iterativo de computador. Para qualquer configuração arbitrária de fontes pontuais, essa técnica gera valores pontuais para linhas de campo elétrico e para linhas equipotenciais.

Linhos de campo elétrico e linhas equipotenciais podem ser plotadas para fontes pontuais coplanares com programas simples. Suponha que tenhamos  $N$  cargas pontuais localizadas de acordo com os vetores posição  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , e que a intensidade do campo elétrico  $\mathbf{E}$  e o potencial  $V$  no ponto determinado pelo vetor posição  $\mathbf{r}$  sejam dados, respectivamente, por

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \frac{Q_k (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (15.1)$$

e

$$V = \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \quad (15.2)$$

Se as cargas estão no mesmo plano ( $z = \text{constante}$ ), as equações (15.1) e (15.2) tornam-se:

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \frac{Q_k [(x - x_k)\mathbf{a}_x + (y - y_k)\mathbf{a}_y]}{4\pi\epsilon [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]^{3/2}} \quad (15.3)$$

$$V = \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{4\pi\epsilon [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]^{1/2}} \quad (15.4)$$

Para plotar as linhas de campo elétrico, siga os passos:

1. Escolha o ponto de partida de cada linha de campo.
2. Calcule  $E_x$  e  $E_y$  nesse ponto usando a equação (15.3).
3. Considere um pequeno deslocamento longo da linha de campo em direção a um novo ponto no plano. Como mostrado na Figura 15.1, um movimento  $\Delta\ell$  ao longo da linha de campo corresponde a movimentos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  ao longo das orientações  $x$  e  $y$ , respectivamente. A partir da figura, é evidente que

$$\frac{\Delta x}{\Delta\ell} = \frac{E_x}{E} = \frac{E_x}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}}$$

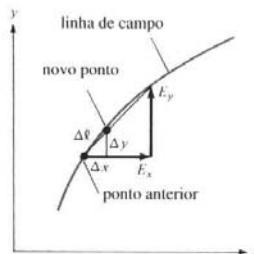


Figura 15.1 Um pequeno deslocamento sobre uma linha de campo.

ou

$$\Delta x = \frac{\Delta \ell \cdot E_x}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}} \quad (15.5)$$

De maneira similar,

$$\Delta y = \frac{\Delta \ell \cdot E_y}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}} \quad (15.6)$$

Mova-se, ao longo da linha de campo, de um ponto anterior  $(x, y)$  para um novo ponto  $x' = x + \Delta x; y' = y + \Delta y$ .

4. Retorne aos passos 2 e 3 e repita os cálculos. Continue a gerar novos pontos até que uma linha seja completada em um intervalo dado de coordenadas. Ao completar a linha, volte ao passo 1 e escolha um outro ponto de partida. Observe que, já que existe um número infinito de linhas de campo, qualquer ponto de partida pode ser considerado sobre uma linha de campo. Os pontos gerados podem ser marcados à mão ou de forma automática, como mostrado na Figura 15.2.

Para plotar as linhas equipotenciais, siga os passos:

1. Escolha um ponto de partida.
2. Calcule o campo elétrico  $(E_x, E_y)$  nesse ponto utilizando a equação (15.3).
3. Faça um pequeno deslocamento ao longo de uma linha perpendicular à linha de campo nesse ponto. Utilize o fato de, que se uma linha tem inclinação  $m$ , uma linha perpendicular deve ter uma inclinação  $-1/m$ . Já que a linha de campo  $E$  e a linha equipotencial que se encontram em um dado ponto são mutuamente ortogonais, então, nesse ponto:

$$\Delta x = \frac{-\Delta \ell \cdot E_y}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}} \quad (15.7)$$

$$\Delta y = \frac{\Delta \ell \cdot E_x}{[E_x^2 + E_y^2]^{1/2}} \quad (15.8)$$

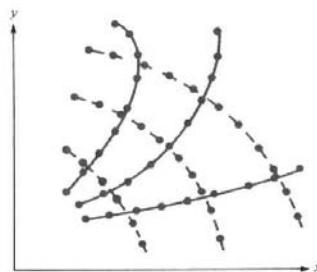


Figura 15.2 Pontos gerados sobre as linhas de campo  $E$  (linhas contínuas) e linhas equipotenciais (linhas traçadas).

Mova-se ao longo da linha equipotencial, a partir do ponto anterior  $(x, y)$ , até o novo ponto  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Como uma maneira de conferir o novo ponto, calcule o potencial do ponto novo e do anterior utilizando a equação (15.4). Os valores devem ser os mesmos, uma vez que os pontos estão sobre a mesma linha equipotencial.

4. Volte aos passos 2 e 3 e repita os cálculos. Continue a gerar novos pontos até completar uma linha em um intervalo de valores de  $x$  e de  $y$ . Após completar a linha, volte ao passo 1 e escolha outro ponto de partida. Ligue os pontos gerados, à mão ou automaticamente, como mostrado na Figura 15.2.

Segundo o mesmo procedimento, pode-se traçar a linha de campo magnético devido a várias distribuições de corrente utilizando a lei de Biot-Savart. Podem ser desenvolvidos programas para determinar a linha de campo magnético devido a uma linha de corrente, a uma espira de corrente, a um par de Helmholtz e a um solenóide. Programas para desenhar as linhas de campo elétrico e magnético no interior de guias de onda retangulares ou para desenhar o diagrama de radiação produzido por um arranjo linear de antenas tipo dipolo vertical de meia onda podem também ser escritos.

#### EXEMPLO 15.1

Escreva um programa para traçar as linhas de campo e as linhas equipotenciais de:

- duas cargas pontuais,  $Q$  e  $-4Q$ , localizadas em  $(x, y) = (-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , respectivamente;
- quatro cargas pontuais,  $Q$ ,  $-Q$ ,  $Q$  e  $-Q$ , localizadas em  $(x, y) = (-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ , respectivamente. Considere  $Q/4\pi\epsilon = 1$  e  $\Delta\ell = 0.1$ . Considere o intervalo  $-5 \leq x, y \leq 5$

#### Solução:

Tomando por base os passos descritos na Seção 15.2, desenvolvemos o programa mostrado na Figura 15.3. Um número bastante grande de comentários foi introduzido de modo a tornar o programa o mais auto-explicativo possível. Por exemplo, ao usar o programa para gerar o gráfico da Figura 15.4(a), carregue o programa **plotit** do Matlab. Uma vez carregado, digite

```
plotit ([1,-4], [-10, 10], 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 8, 2, 5)
```

os significados desses números são fornecidos pelo programa. Maiores explicações sobre o programa em si serão fornecidas nos parágrafos seguintes.

Uma vez que as linhas de campo  $E$  emanam das cargas positivas e terminam nas cargas negativas, parece ser razoável gerar pontos de partida  $(x_s, y_s)$  para as linhas de campo  $E$  sobre pequenos círculos centrados nos pontos de carga  $(x_Q, y_Q)$ , isto é,

$$x_s = x_Q + r \cos \theta \quad (15.1.1a)$$

$$y_s = y_Q + r \sin \theta \quad (15.1.1b)$$

```
function plotit(charges, location, ckEField, ckEq, DLE, DLV, NLE, NLV, PTS)
figure;
hold on;
% Programa para traçar as linhas de campo elétrico e as
% linhas equipotenciais devido a cargas coplanares pontuais
% o traçado é no intervalo dado por -5 < x, y < 5
%
% Essa é a forma correta de uso:
% function plotit(charges, location, ckEField, ckEq, DLE, DLV, NLE, NLV, PTS)
%
% onde,
%
%     charges = um vetor contendo as cargas
%     location = uma matriz na qual cada coluna representa a localização de uma carga
%     ckEq = apontador "setado" em 1 traça as linhas de campo E
%     ckEq = apontador "setado" em 1 traça as linhas equipotenciais
%     DLE ou DLV = incremento ao longo das linhas de E e de V
```

Figura 15.3 Programa de computador para o Exemplo 15.1.

```

%
% NLE = nº de linhas de campo E por carga
% NLV = nº de linhas equipotenciais por carga
% PTS -> Plota cada ponto PTS (isto é, se PTS = 5 então plota um ponto a cada 5°)
% observe que a constante Q/4*Pie*ErR está "setada" igual a 1.0

% Determine as linhas de campo E
% Por conveniência, os pontos de partida (XS,YS) são distribuídos radialmente em torno das localizações das cargas
Q=charges;
XQ = location(:,1);
YQ = location(:,2);
JJ=1;
NQ = length(charges);
if (ckEField)
for K=1:NQ
    for I =1:NLE
        THETA = 2*pi*(I-1)/(NLE);
        XS=XQ(K) + 0.1*cos(THETA);
        YS=YQ(K) + 0.1*sin(THETA);
        XE=XS;
        YE=YS;
        JJ=JJ+1;
        if (~mod(JJ,PTS))
            plot (XE,YE);
        end
    while(1)
        % Encontre o incremento i e o novo ponto (X,Y)
        EX=0;
        EY=0;
        for J=1:NQ
            R =sqrt((XE-XQ(J))^2 + (YE - YQ(J))^2);
            EX = EX +Q(J)*(XE-XQ(J))/(R^3);
            EY = EY +Q(J)*(YE-YQ(J))/(R^3);
        end
        E = sqrt(EX^2 + EY^2);

        % VERIFIQUE PARA UM PONTO SINGULAR
        if (E <=.00005)
            break;
        end
        DX = DLE*EX/E;
        DY = DLE*EY/E;
        % PARA CARGA NEGATIVA, TROCAR O SINAL DE DX E DE
        % DY TAL QUE O INCREMENTO SEJA PARA FORA DA CARGA
        if (Q(K) < 0)
            DX = -DX;
            DY = -DY;
        end
        XE = XE + DX;
        YE = YE + DY;
        % VERIFIQUE SE O NOVO PONTO ESTÁ DENTRO DO
        % INTERVALO DADO OU MUITO PRÓXIMO DE QUALQUER
        % PONTO DE CARGAS - PARA EVITAR UM PONTO SINGULAR
        if ((abs(XE) >= 5) | (abs(YE) >= 5))
            break;
        end
    end
end

```

Figura 15.3 (Continuação)

```

        if (sum(abs(XE-XQ) < .05 & abs(YE-YQ) < .05) >0)
            break;
        end
        JJ=JJ+1;
        if (~mod(JJ,PTS))
            plot (XE,YE);
        end
    end % fim do loop do while
end % I =1:NLE
end % K = 1:NQ
end % fim do if
% A SEGUIR, DETERMINE AS LINHAS EQUIPOTENCIAIS
% POR CONVENTIÊNCIA, OS PONTOS DE PARTIDA(XS,YS) SÃO
% ESCOLHIDOS DA MESMA FORMA QUE PARA AS LINHAS DE CAMPO
% E
if (ckEq)
JJ=1;
DELTA = .2;
ANGLE = 45*pi/180;
for K =1:NQ
    FACTOR = .5;
    for KK = 1:NLV
        XS = XQ(K) + FACTOR*cos(ANGLE);
        YS = YQ(K) + FACTOR*sin(ANGLE);
        if ( abs(XS) >= 5 | abs(YS) >=5)
            break;
        end
        DIR = 1;
        XV = XS;
        YV = YS;
        JJ=JJ+1;
        if (~mod(JJ,PTS))
            plot(XV,YV);
        end
    end
    % DETERMINE O INCREMENTO E O NOVO PONTO (XV,YV)
    N=1;
    while (1)
        EX = 0;
        EY = 0;
        for J = 1:NQ
            R = sqrt((XV-XQ(J))^2 + (YV-YQ(J))^2);
            EX = EX + Q(J)*(XV-XQ(J))/(R^3);
            EY = EY + Q(J)*(YV-YQ(J))/(R^3);
        end
        E=sqrt(EX^2 + EY^2);
        if (E <=.0005)
            FACTOR = 2*FACTOR;
            break;
        end
        DX = -DLV*EY/E;
        DY = DLV*EV/E;
        XV = XV + DIR*DX;
        YV = YV + DIR*DY;
        % VERIFIQUE SE A LINHA EQUIPOTENCIAL RETORNA A
        % (X,YS)
        R0 = sqrt((XV - XS)^2 + (YV - YS)^2);
        if (R0 < DELTA & N < 50)
            FACTOR = 2*FACTOR;
            break;
        end
    end
end

```

Figura 15.3 (Continuação)

```

    end
    % VERIFIQUE SE O NOVO PONTO ESTÁ DENTRO DO INTERVALO DADO
    % SE ESTIVER FORA DO INTERVALO, RETORNE AO PONTO DE PARTIDA
    % (S,YS) MAS AUMENTE EM SENTIDO OPOSTO
    if (abs(XV) > 5 | abs(YV) > 5)
        DIR = DIR -2;
        XV = XS;
        YV = YS;
        if (abs(DIR) > 1)
            FACTOR = 2*FACTOR;
            break;
        end
    else
        if (sum(abs(XV-XQ) < .005 & abs(YV-YQ) < .005) >0)
            break;
        end
    end
    JJ=JJ+1;
    if (~mod(JJ, PTS))
        N=N+1;
        plot (XV,YV);
    end
end % Fim do loop que inicia em WHILE
end % Fim do loop que inicia em KK
end % Fim do loop que inicia em K

end % Fim do loop que inicia em if

```

Figura 15.3 (Continuação)

onde  $r$  é o raio do pequeno círculo e  $\theta$  é o ângulo prescrito, escolhido para cada linha de campo  $E$ . Os pontos de partida para as linhas equipotenciais podem ser gerados de diferentes maneiras: ao longo do eixo  $x$  e do eixo  $y$ , ao longo da linha  $y = x$ , e assim por diante. Entretanto, para fazer um programa o mais geral possível, os pontos de partida para as linhas equipotenciais, da mesma forma que para as linhas de campo  $E$ , devem depender das localizações das cargas. Eles podem ser escolhidos usando a equação (15.1.1) e fixando  $\theta$  (por exemplo,  $45^\circ$ ) e a variável  $r$  (por exemplo,  $0,5; 1,0; 2,0; \dots$ ).

O valor do comprimento incremental  $\Delta\ell$  é crucial para a precisão dos traçados. Apesar de que quanto menor o valor de  $\Delta\ell$  maior a precisão dos traçados, devemos ter em mente que, quanto menor o valor de  $\Delta\ell$ , mais pontos são gerados e a memória necessária para o armazenamento dos dados pode ser um problema. Por exemplo, uma linha pode consistir de mais de 1.000 pontos gerados. Em vista do grande número de pontos a serem plotados, os pontos são usualmente armazenados em um arquivo de dados e uma rotina gráfica é utilizada para plotá-los.

Tanto para linhas de campo  $E$  quanto para linhas equipotenciais, diversas verificações foram inseridas no programa da Figura 15.3:

- Verificação de pontos singulares ( $E = 0?$ ).
- Verificação se o ponto gerado está muito próximo da localização da carga.
- Verificação se o ponto está dentro do intervalo dado  $-5 < x, y < 5$ .
- Verificação se a linha (equipotencial) retorna ao ponto de partida formando um laço.

A plotagem dos pontos gerados para os casos de duas cargas pontuais e de quatro cargas pontuais são mostrados na Figura 15.4(a) e (b), respectivamente.

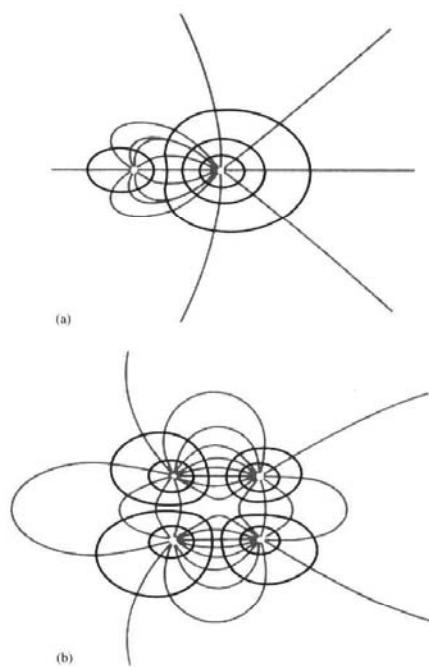


Figura 15.4 Referente ao Exemplo 15.1. Traçados de linhas de campo  $E$  e de linhas equipotenciais devido a: (a) duas cargas pontuais e (b) quatro cargas pontuais (um quadrupolo bidimensional).

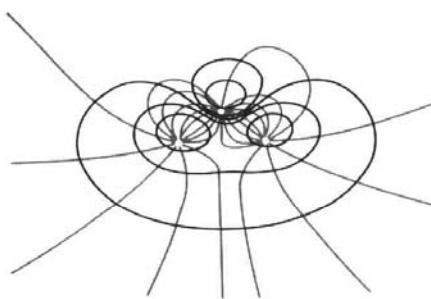


Figura 15.5 Referente ao Exercício Prático 15.1.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 15.1**

Escreva um programa completo para traçar as linhas de campo  $E$  e as linhas equipotenciais devido a cargas pontuais coplanares. Rode o programa para  $N = 3$ , isto é, há três cargas pontuais  $-Q$ ,  $+Q$  e  $-Q$  localizadas, respectivamente, em  $(x, y) = (-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ . Considere  $Q/4\pi\epsilon = 1$ ,  $\Delta\ell = 0,1$  ou  $0,01$  para maior precisão e limite seu traçado ao intervalo  $-5 \leq x, y \leq 5$ .

**Resposta:** veja a Figura 15.5.

### 15.3 O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas<sup>1</sup> (FDM)<sup>2</sup> é uma técnica numérica simples utilizada para resolver problemas como aqueles resolvidos analiticamente no Capítulo 6. Um problema é definido univocamente por três características:

1. por uma equação diferencial parcial, tal como as equações de Laplace ou de Poisson;
2. pela delimitação de um domínio;
3. por condições de contorno e/ou por condições iniciais.

Uma solução da equação de Poisson ou de Laplace por diferenças finitas, por exemplo, dá-se em três etapas: (1) divide-se o domínio em uma grade de nós; (2) aproxima-se a equação diferencial e as condições de contorno por um conjunto de equações lineares algébricas (denominadas *equações de diferenças*) nos pontos sobre a grade no domínio e (3) resolve-se esse conjunto de equações algébricas.

*Etapa 1:* suponha que pretendamos aplicar o método das diferenças finitas para determinar o potencial elétrico na região mostrado na Figura 15.6(a). O domínio é dividido através de uma malha regular com *pontos de grade* ou *nós* como mostrado na Figura 15.6(a). Um nó sobre a contorno da região onde o potencial é especificado é denominado um *nó fixo* (fixado pelo problema) e pontos internos na região são denominados de *pontos livres* (pontos nos quais o potencial é desconhecido).

*Etapa 2:* nosso objetivo é obter a aproximação por diferenças finitas para a equação de Poisson e usá-la para determinar o potencial em todos os pontos livres. Lembremos que a equação de Poisson é dada por

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (15.9a)$$

Para um domínio bidimensional, tal como o da Figura 15.6(a),  $\rho_v$  é substituído por  $\rho_s$ ,  $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ , tal que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad (15.9b)$$

Da definição de derivada de  $V(x, y)$  em um ponto  $(x_o, y_o)$ ,

$$\begin{aligned} V' &= \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_o} \simeq \frac{V(x_o + \Delta x, y_o) - V(x_o - \Delta x, y_o)}{2\Delta x} \\ &= \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (15.10)$$

<sup>1</sup> Para um tratamento extensivo do método de diferenças finitas, veja G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, 2nd ed. Oxford: Clarendon, 1978.

<sup>2</sup> N. de T. Do inglês, *Finite Difference Method* – FDM.

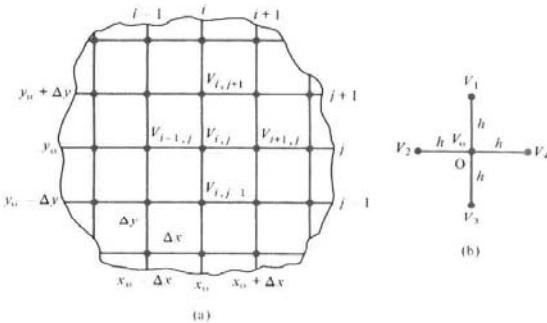


Figura 15.6 Diagrama de solução do método de diferenças finitas: (a) discretização do domínio; (b) nós empregados nas aproximações em diferenças finitas a cinco nós.

onde  $\Delta x$  é um incremento suficientemente pequeno ao longo de  $x$ . Para a derivada segunda, que é a derivada da derivada primeira  $V'$ ,

$$\begin{aligned} V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} &= \frac{\partial V'}{\partial x} \approx \frac{V'(x_0 + \Delta x/2, y_0) - V'(x_0 - \Delta x/2, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - 2V(x_0, y_0) + V(x_0 - \Delta x, y_0)}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (15.11)$$

As equações (15.10) e (15.11) são aproximações por diferenças finitas para as derivadas parciais, primeira e segunda, de  $V$  em relação a  $x$ , calculadas em  $x = x_0$ . A aproximação na equação (15.10) tem associada um erro de ordem de grandeza  $\Delta x$ , enquanto que a equação (15.11) tem um erro associado da ordem de  $(\Delta x)^2$ . De forma similar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{y=y_0} &= \frac{V(x_0, y_0 + \Delta y) - 2V(x_0, y_0) + V(x_0, y_0 - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \\ &= \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (15.12)$$

Substituindo as equações (15.11) e (15.12) na equação (15.9b) e fazendo  $\Delta x = \Delta y = h$ , resulta em

$$V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j} = -\frac{h^2 \rho_s}{\epsilon}$$

ou

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} \left( V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{h^2 \rho_s}{\epsilon} \right) \quad (15.13)$$

onde  $h$  é chamado de *passo ou incremento da malha*. A equação (15.13) é a aproximação por diferenças finitas da equação de Poisson. Se o domínio é livre de carga ( $\rho_s = 0$ ), a equação (15.9) torna-se a equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (15.14)$$

A aproximação por diferenças finitas para essa equação é obtida da equação (15.13) fazendo  $\rho_s = 0$ , isto é,

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) \quad (15.15)$$

Esta equação é essencialmente uma aproximação por diferenças finitas a cinco nós para o potencial no ponto central de uma malha quadrada. A Figura 15.6(b) ilustra o que é chamado de *nodo de diferenças finitas a cinco nós*. O nó na Figura 15.6(b) é destacado da Figura 15.6(a). Portanto, a equação (15.15), aplicada ao nó torna-se:

$$V_o = \frac{1}{4} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \quad (15.16)$$

Esta equação mostra claramente a propriedade de valor médio intrínseca à equação de Laplace. Em outras palavras, a equação de Laplace pode ser interpretada como uma forma diferencial de estabelecer o fato de que o potencial em um ponto específico é a média dos potenciais nos pontos vizinhos.

*Etapa 3:* para aplicar a equação (15.16) [ou a equação (15.13)] a um dado problema, um dos seguintes dois métodos é comumente utilizado:

#### A. Método iterativo

Começamos estabelecendo valores iniciais nulos ou razoáveis para os potenciais nos nós livres. Na sequência, mantemos constantes no tempo os potenciais nos pontos fixos, aplicamos a equação (15.16) para cada nó livre até que os potenciais em todos os nós livres sejam calculados. Os potenciais obtidos ao final dessa primeira iteração não são precisos, mas, sim, aproximados. Para aumentar a precisão dos valores dos potenciais, repetimos esse cálculo para cada nó livre, utilizando os valores anteriores para obter os valores novos. A alteração iterativa ou repetida do potencial para cada nó livre continua até que um grau de precisão preestabelecido seja alcançado ou até que os valores anteriores e novos em cada nó sejam suficientemente próximos entre si.

#### B. Método da matriz de banda

A equação (15.16), aplicada a todos os nós livres, resulta em um conjunto de equações simultâneas da forma

$$[A] [V] = [B] \quad (15.17)$$

onde  $[A]$  é uma matriz *esparsa* (isto é, uma matriz que contém vários termos nulos),  $[V]$  é constituída por valores dos potenciais desconhecidos nos pontos livres e  $[B]$  é uma outra matriz coluna formada pelos potenciais conhecidos nos nós fixos. Diz-se que a matriz  $[A]$  é uma matriz de *banda* pois seus termos não nulos aparecem agrupados nas proximidades da diagonal principal, uma vez que apenas os nós mais próximos afetam o potencial em cada nó. Uma matriz de banda, esparsa, é facilmente invertida para determinar  $[V]$ . Assim, obtemos os potenciais nos nós livres a partir da matriz  $[V]$  fazendo:

$$[V] = [A]^{-1} [B] \quad (15.18)$$

O método das diferenças finitas pode ser aplicado para resolver problemas variáveis no tempo. Por exemplo, considere a equação de onda unidimensional da equação (10.1), a saber

$$u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (15.19)$$

onde  $u$  é a velocidade da onda e  $\Phi$  é a componente do campo  $E$  ou do campo  $H$  da onda EM. As aproximações por diferenças das derivadas em  $(x_0, t_0)$  ou no  $(i, j)$ -ésimo nó, mostrado na Figura 15.7, são:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} \simeq \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (15.20)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} \simeq \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{(\Delta t)^2} \quad (15.21)$$

Inserindo as equações (15.20) e (15.21) na equação (15.19) e resolvendo para  $\Phi_{i,j+1}$ , resulta em

$$\boxed{\Phi_{i,j+1} \simeq \alpha(\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j}) + 2(1 - \alpha)\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}} \quad (15.22)$$

onde

$$\alpha = \left[ \frac{u \Delta t}{\Delta x} \right]^2 \quad (15.23)$$

Pode-se demonstrar que, para a solução na equação (15.22) ser estável,  $\alpha \leq 1$ . Para começar a executar o algoritmo das diferenças finitas na equação (15.22), usamos as condições iniciais. Assumimos que em  $t = 0$ ,  $\partial\Phi_{i,0}/\partial t = 0$  e usamos a aproximação por diferenças centrais (veja a Questão de Revisão 15.2) para obter

$$\frac{\partial \Phi_{i,0}}{\partial t} \simeq \frac{\Phi_{i,1} - \Phi_{i,-1}}{2\Delta t} = 0$$

ou

$$\Phi_{i,1} = \Phi_{i,-1} \quad (15.24)$$

Substituindo a equação (15.24) na equação (15.22) e tomando  $j = 0$  ( $t = 0$ ), obtemos

$$\Phi_{i,1} \simeq \alpha(\Phi_{i-1,0} + \Phi_{i+1,0}) + 2(1 - \alpha)\Phi_{i,0} - \Phi_{i,-1}$$

ou

$$\Phi_{i,1} \simeq \frac{1}{2} [\alpha(\Phi_{i-1,0} + \Phi_{i+1,0}) + 2(1 - \alpha)\Phi_{i,0}] \quad (15.25)$$

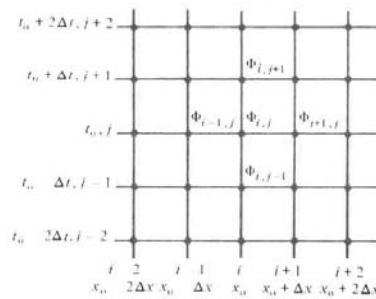


Figura 15.7 Diagrama da solução em diferenças finitas para a equação da onda.

Usando a equação (15.25) como a fórmula de “partida”, o valor de  $\Phi$  em um ponto qualquer da grade pode ser obtido diretamente da equação (15.22). Observe que os dois métodos discutidos para resolver a equação (15.16) não se aplicam à equação (15.22) porque essa equação pode ser usada diretamente com a equação (15.25) como fórmula de partida. Em outras palavras, não temos um conjunto de equações simultâneas. A equação (15.22) é uma fórmula explícita.

O conceito de FDM pode ser estendido à equação de Poisson, à equação de Laplace ou às equações de onda em outros sistemas de coordenadas. A precisão do método depende do refinamento da grade e do tempo dispensado para obter valores mais precisos dos potenciais. Podemos reduzir o tempo de processamento e aumentar a precisão e a taxa de convergência pelo método da sobrrelaxação sucessiva supondo valores iniciais razoáveis, tirando vantagem, se possível, da simetria do problema, considerando o passo da malha o menor possível e usando nodos de diferenças finitas mais complexos (veja Figura 15.41). Uma das limitações do método das diferenças finitas é a necessidade de algum tipo de interpolação para determinar a solução para alguns pontos fora da grade. Uma das alternativas óbvias de superar essa dificuldade é utilizar uma grade mais fina, mas isso requer um grande número de cálculos computacionais e uma maior capacidade de armazenamento.

### EXEMPLO 15.2

Resolva o problema de valor de contorno unidimensional  $-\Phi'' = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$  com valores de contorno dados por  $\Phi(0) = 0 = \Phi(1)$ . Utilize o método de diferenças finitas.

#### Solução:

Em primeiro lugar, obtemos a aproximação por diferenças finitas para a equação diferencial  $\Phi'' = -x^2$ , que é a equação de Poisson em uma dimensão. A seguir, dividimos todo o domínio  $0 \leq x \leq 1$  em  $N$  segmentos iguais, cada um de comprimento  $h (= 1/N)$ , como mostrado na Figura 15.8(a), tal que tenhamos  $(N + 1)$  nós.

$$-x_0^2 = \frac{d^2\Phi}{dx^2} \Big|_{x=x_0} = \frac{\Phi(x_0 + h) - 2\Phi(x_0) + \Phi(x_0 - h)}{h^2}$$

ou

$$-x_j^2 = \frac{\Phi_{j+1} - 2\Phi_j + \Phi_{j-1}}{h^2}$$

Portanto,

$$-2\Phi_j = -x_j^2 h^2 - \Phi_{j+1} - \Phi_{j-1}$$

ou

$$\Phi_j = \frac{1}{2}(\Phi_{j+1} + \Phi_{j-1} + x_j^2 h^2)$$



(a)

$$\frac{\Phi_{j-1} - \Phi_j + \Phi_{j+1}}{x_{j-1} - x_j + x_{j+1}}$$

(b)

Figura 15.8 Referente ao Exemplo 15.2.

Utilizando o esquema das diferenças finitas, obtemos uma solução aproximada para vários valores de  $N$ . O programa em Matlab é apresentado na Figura 15.9. O número de iterações  $NI$  depende do grau de precisão desejado. Para um problema unidimensional como esse,  $NI = 50$  pode ser suficiente. Para problemas bidimensionais ou tridimensionais, valores maiores de  $NI$  podem ser necessários (veja Tabela 15.1). Deve-se observar que os valores de  $\Phi$  nos pontos da periferia (nós fixos) são mantidos constantes. As soluções para  $N = 4$  e  $N = 10$  são mostradas na Figura 15.10.

Podemos comparar esse resultado com a solução exata obtida a seguir. Dado que  $d^2\Phi/dx^2 = -x^2$ , integrando duas vezes, resulta em

$$\Phi = -\frac{x^4}{12} + Ax + B$$

```
% PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DO EXEMPLO 15.2
% RESOLVIDO USANDO O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS
%
% h = PASSO DA MALHA
% ni = NÚMERO DESEJADO DE ITERAÇÕES

P = [ ];
n=20;
ni=1000;
l=1.0;
h = l/n;
phi=zeros(n+1,1);
x=h*[0:n]';
x1=x(2:n);
for k=1:ni
    phi([2:n])=[phi(3:n+1)+phi(1:n-1)+x1.^2*h.^2]/2;
end
% CALCULE TAMBÉM O VALOR EXATO
phiex=x.* (1.0-x.^3)/12.0;
diary a:test.out
[1:n+1]' phi phiex]
diary off
```

Figura 15.9 Programa de computador referente ao Exemplo 15.2.

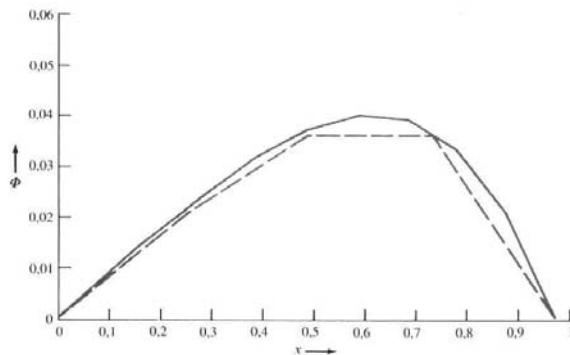


Figura 15.10 Referente ao Exemplo 15.2: traçado de  $\Phi(x)$ . A curva contínua é para  $N = 10$  e a curva tracejada é para  $N = 4$ .

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração. A partir das condições de contorno,

$$\Phi(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\Phi(1) = 0 \rightarrow 0 = -\frac{1}{12} + A \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{12}$$

Portanto, a solução exata é  $\Phi = x(1-x^3)/12$ , que é calculada na Figura 15.9 e é muito próxima à do caso  $N = 10$ .

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 15.2

Resolva a equação diferencial  $d^2y/dx^2 + y = 0$  com as condições de contorno  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$ , utilizando o método das diferenças finitas. Considere  $\Delta x = 1/4$ .

**Resposta:** compare seu resultado com a solução exata  $y(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(1)}$

#### EXEMPLO 15.3

Determine o potencial nos nós livres do sistema da Figura 15.11 utilizando o método das diferenças finitas.

##### Solução:

Esse problema será resolvido usando o método iterativo e o método da matriz de banda.

**Método 1 (Método Iterativo):** inicialmente, estabelecemos como igual a zero o conjunto de valores iniciais do potencial nos nós livres. Aplicamos a equação (15.16) para cada nó livre utilizando os novos valores de potencial a cada instante em que é calculado um novo valor de potencial em um ponto vizinho. Para a primeira iteração,

$$V_1 = 1/4(0 + 20 + 0 + 0) = 5$$

$$V_2 = 1/4(5 + 0 + 0 + 0) = 1,25$$

$$V_3 = 1/4(5 + 20 + 0 + 0) = 6,25$$

$$V_4 = 1/4(1,25 + 6,25 + 0 + 0) = 1,875$$

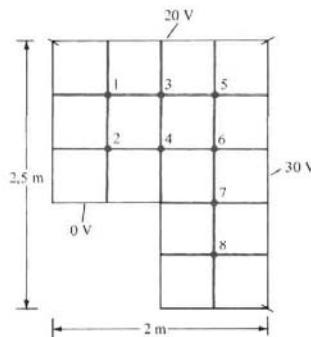


Figura 15.11 Referente ao Exemplo 15.3.

e assim por diante. Para evitar confusão, cada vez que um novo valor em um nó livre for calculado, descartamos o valor anterior, como mostrado na Figura 15.12. Após  $V_8$  ter sido calculado, começamos com a segunda iteração no nó 1:

$$V_1 = 1/4(0 + 20 + 1,25 + 6,25) = 6,875$$

$$V_2 = 1/4(6,875 + 0 + 0 + 1,875) = 2,187$$

e assim por diante. Se continuarmos esse processo, obtemos, após cinco iterações, os valores não “riscados”, como mostrado na Figura 15.12. Após 10 iterações (não mostrado na Figura 15.12), obtemos:

$$V_1 = 10,04, \quad V_2 = 4,956, \quad V_3 = 15,22, \quad V_4 = 9,786$$

$$V_5 = 21,05, \quad V_6 = 18,97, \quad V_7 = 15,06, \quad V_8 = 11,26$$

**Método 2 (Método da Matriz de Banda):** este método revela a estrutura esparsa do problema. Aplicamos a equação (15.16) para cada nó livre e mantemos cada termo conhecido (potenciais preestabelecidos nos nós fixos) no lado direito, enquanto os termos desconhecidos (potenciais nos nós livres) permanecem no lado esquerdo do sistema de equações simultâneas resultante, expresso na forma matricial como  $[A] [V] = [B]$ .

Para o nó 1,

$$-4V_1 + V_2 + V_3 = -20 - 0$$

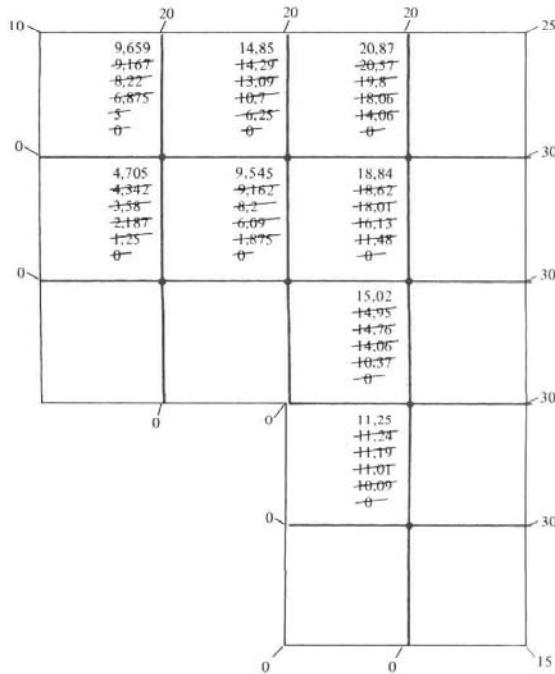


Figura 15.12 Referente ao Exemplo 15.3; os valores não “riscados” são as soluções após cinco iterações.

Para o nó 2,

$$V_1 + 4V_2 + V_4 = -0 - 0$$

Para o nó 3,

$$V_1 - 4V_3 + V_4 + V_5 = -20$$

Para o nó 4,

$$V_2 + V_3 - 4V_4 + V_6 = -0$$

Para o nó 5,

$$V_3 - 4V_5 + V_6 = -20 - 30$$

Para o nó 6,

$$V_4 + V_5 - 4V_6 + V_7 = -30$$

Para o nó 7,

$$V_6 - 4V_7 + V_8 = -30 - 0$$

Para o nó 8,

$$V_7 - 4V_8 = -0 - 0 - 30$$

Note que temos cinco termos em cada nó, uma vez que assumimos um nodo a cinco nós. As oito equações obtidas são colocadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -50 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \end{bmatrix}$$

ou

$$[A] [V] = [B]$$

onde  $[A]$  é a matriz de banda, esparsa,  $[V]$  é a matriz coluna, que consiste de potenciais desconhecidos nos nós livres, e  $[B]$  é a matriz coluna formada pelo potencial nos nós fixos. A natureza "banda" de  $[A]$  é mostrada pela porção tracejada.

Observe que a matriz  $[A]$  poderia ter sido obtida diretamente da Figura 15.11 sem escrever a equação (15.16) para cada nó livre. Para fazer isso, simplesmente estabelecemos os termos da diagonal (ou próprios)  $A_{ii} = -4$  e  $A_{ij} = 1$  se os nós  $i$  e  $j$  estão conectados ou  $A_{ij} = 0$  se os nós  $i$  e  $j$  não estão diretamente conectados. Por exemplo,  $A_{21} = A_{32} = 0$  porque os nós 2 e 3 não estão conectados, enquanto  $A_{46} = A_{64} = 1$  porque os nós 4 e 6 estão conectados. De maneira similar, a matriz  $[B]$  é obtida diretamente da Figura 15.11 ao estabelecer  $B_i$  igual à soma dos potenciais em nós fixos conectados ao nó  $i$ , com sinal contrário. Por exemplo,  $B_5 = -(20 + 30)$  porque o nó 5 está conectado a dois nós fixos com potenciais 20 V e 30 V. Se o nó  $i$  não está conectado a nenhum nó fixo,  $B_i = 0$ .

Ao inverter a matriz  $[A]$  utilizando Matlab, obtemos

$$[V] = [A]^{-1} [B]$$

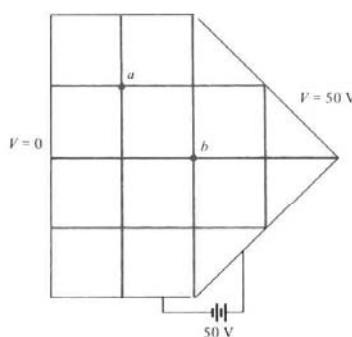


Figura 15.13 Referente ao Exercício Prático 15.3.

ou

$$\begin{array}{llll} V_1 = 10,04, & V_2 = 4,958, & V_3 = 15,22, & V_4 = 9,788 \\ V_5 = 21,05, & V_6 = 18,97, & V_7 = 15,06, & V_8 = 11,26 \end{array}$$

que apresenta resultados compatíveis com os resultados obtidos pelo método iterativo.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 15.3**

Use o método iterativo para encontrar a aproximação por diferenças finitas para os potenciais nos pontos  $a$  e  $b$  do sistema na Figura 15.13.

**Resposta:**  $V_a = 10,01 \text{ V}$ ;  $V_b = 28,3 \text{ V}$ .

**EXEMPLO 15.4**

Obtenha a solução da equação de Laplace para uma calha infinita com seção reta retangular mostrada na Figura 15.14. Considere  $V_1 = 10 \text{ V}$ ,  $V_2 = 100 \text{ V}$ ,  $V_3 = 40 \text{ V}$  e  $V_4 = 0 \text{ V}$ .

**Solução:**

Desejamos resolver esse problema usando o método iterativo. Nesse caso, o domínio tem um contorno regular. Facilmente, podemos escrever um programa para determinar os potenciais nos pontos da grade, dentro da calha. Dividimos a região em uma malha quadrada. Se decidirmos usar uma grade de  $15 \times 10$ , o número de pontos-grade ao longo de  $x$  é  $15 + 1 = 16$  e o número de pontos-grade ao longo de  $y$  é  $10 + 1 = 11$ . O passo da malha é  $h = 1,5/15 = 0,1 \text{ m}$ . A grade  $15 \times 10$  está representada na Figura 15.15.

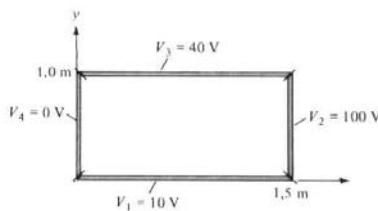
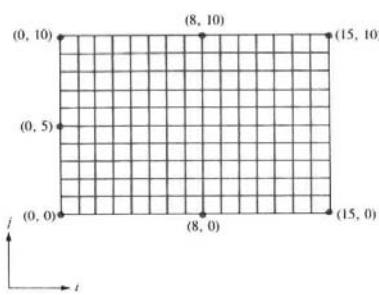


Figura 15.14 Referente ao Exemplo 15.4.

Figura 15.15 Referente ao Exemplo 15.4; uma grade de  $15 \times 10$ .

Os pontos-grade  $(i, j)$  são numerados a partir do canto esquerdo inferior da calha. Aplicando a equação (15.15) e usando o método iterativo, o programa de computador, mostrado na Figura 15.16, foi desenvolvido para determinar os potenciais nos nós livres. Nos pontos  $(x, y) = (0,5, 0,5), (0,8, 0,8), (1,0, 0,5)$  e  $(0,8, 0,2)$  que correspondem a  $(i, j) = (5, 5), (8, 8), (10, 5)$  e  $(8, 2)$ , respectivamente, os valores de potenciais após 50, 100 e 200 iterações são mostrados na Tabela 15.1. Os valores exatos [veja Problema 6.18(c)], obtidos utilizando o método de separação de variáveis e um programa similar àquele da Figura 6.11 também são mostrados. Deve-se notar que o grau de precisão depende do passo  $h$  da malha. É sempre desejável fazer  $h$  tão pequeno quanto possível. Note também que os potenciais nos nós fixos são mantidos constantes ao longo dos cálculos.

```
% USANDO O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS (ITERAÇÃO)
% ESTE PROGRAMA RESOLVE O PROBLEMA
% BIDIMENSIONAL DE VALOR DE CONTOURNO (EQUAÇÃO DE
% LAPLACE) MOSTRADO NA FIGURA 15.14.
% ni = N° DE ITERAÇÕES
% nx = N° DOS PONTOS-GRADE X
% ny = N° DOS PONTOS-GRADE Y
% v(i,j) = POTENCIAIS NOS PONTOS-GRADE (i,j) OU (x,y)
% COM NUMERAÇÃO DOS NÓS COMEÇANDO NO CANTO INFERIOR
% ESQUERDO DA CALHA

v1 = 10.0;
v2 = 100.0;
v3 = 40.0;
v4 = 0.0;
ni = 200;
nx = 16;
ny = 11;
% ESTABELEÇA OS VALORES INICIAIS IGUAIS A ZERO
v = zeros(nx,ny);
% POTENCIAIS FIXOS ESTÃO EM NÓS FIXOS
for i=2:nx-1
    v(i,1) = v1;
    v(i,ny) = v3;
end
for j=2:ny-1
    v(1,j) = v4;
    v(nx,j) = v2;
end
v(1,1) = 0.5*(v1 + v4);
v(nx,1) = 0.5*(v1 + v2);
```

```

v(1,ny) = 0.5*(v3 + v4);
v(nx,ny) = 0.5*(v2 + v3);
% ENCONTRE v(i,j) USANDO A EQUAÇÃO (15.15) APÓS ni ITERAÇÕES
for k=1:ni
    for i=2:nx-1
        for j=2:ny-1
            v(i,j) = 0.25*( v(i+1,j) + v(i-1,j) + v(i,j+1) + v(i,j-1) );
        end
    end
end
diary a:test1.out
[v(6,6), v(9,9), v(11,6), v(9,3)]
[ [1:nx, 1:ny] v(i,j) ]
diary off

```

Figura 15.16 Programa de computador referente ao Exemplo 15.4.

TABELA 15.1 Solução do Exemplo 15.4  
(Método Iterativo) em pontos selecionados

Coordenadas ( $x, y$ )	Número de Iterações			Valor Exato
	50	100	200	
(0,5, 0,5)	20,91	22,44	22,49	22,44
(0,8, 0,8)	37,7	38,56	38,59	38,55
(1,0, 0,5)	41,83	43,18	43,2	43,22
(0,8, 0,2)	19,87	20,94	20,97	20,89

**EXERCÍCIO PRÁTICO 15.4**

Considere a calha da Figura 15.17. Use um nodo de diferenças finitas a cinco nós para determinar o potencial no centro de uma calha usando: (a) uma grade  $4 \times 8$ ; (b) uma grade  $12 \times 24$ .

**Resposta:** (a) 23,8 V; (b) 23,89 V.

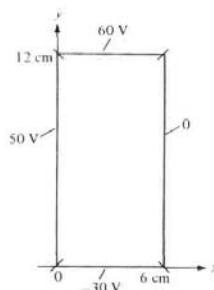


Figura 15.17 Referente ao Exercício Prático 15.4.

## 15.4 O MÉTODO DOS MOMENTOS

Da mesma forma que o método das diferenças finitas, o método dos momentos (MOM)<sup>2\*</sup> tem a vantagem de ser conceitualmente simples. Enquanto o método das diferenças finitas é usado na solução de equações diferenciais, o método dos momentos é usado, comumente, na resolução de equações integrais.

Por exemplo, suponhamos que se queira aplicar o método dos momentos para resolver a equação de Poisson na equação (15.9a). Pode-se demonstrar que uma solução integral para a equação de Poisson é dada por

$$V = \int \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon r} \quad (15.26)$$

Lembremos, do Capítulo 4, que a equação (15.26) pode ser deduzida da lei de Coulomb. Lembremos, também, que, dada uma distribuição de cargas  $\rho_v(x, y, z)$  podemos sempre encontrar o potencial  $V(x, y, z)$ , o campo elétrico  $\mathbf{E}(x, y, z)$  e a carga total  $Q$ . Se, por outro lado, o potencial  $V$  é conhecido e a distribuição de carga é desconhecida, como podemos determinar  $\rho_v$  a partir da equação (15.26)? Nesse caso, a equação (15.26) torna-se o que chamamos de uma *equação integral*.

**Uma equação integral** é aquela que envolve a função desconhecida sob o símbolo de integral.

Ela tem a forma geral de

$$V(x) = \int_a^b K(x, t) \rho(t) dt \quad (15.27)$$

onde as funções  $K(x, t)$  e  $V(t)$  e os limites  $a$  e  $b$  são conhecidos. A função desconhecida  $\rho(t)$  deve ser determinada. A função  $K(x, t)$  é denominada de **núcleo** da equação. O método dos momentos é uma técnica numérica bastante comum de resolver equações integrais, como a da equação (15.27). O método é, provavelmente, melhor explicado através de um exemplo.

Considere um fio condutor fino de raio  $a$  e comprimento  $L(L \gg a)$  localizado no espaço livre, como mostrado na Figura 15.18. Seja o fio mantido a um potencial  $V_o$ . Nosso objetivo é determinar a densidade de carga  $\rho_L$  ao longo do fio utilizando o método dos momentos. Uma vez determinado  $\rho_L$ , os valores dos campos associados podem ser determinados. Em um ponto qualquer do fio, a equação (15.26) se reduz à equação integral da forma:

$$V_o = \int_0^L \frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (15.28)$$

Uma vez que a equação (15.28) se aplica a quaisquer pontos sobre o fio, em um ponto fixo  $y_k$  conhecido como *ponto de amostragem*.

$$V_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\rho_L(y) dy}{|y_k - y|} \quad (15.29)$$

Lembremos, do Cálculo, que a integração é, essencialmente, determinar a área sob uma curva. Se  $\Delta y$  é pequeno, a integração de  $f(y)$  sobre  $0 < y < L$  é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^L f(y) dy &= f(y_1) \Delta y + f(y_2) \Delta y + \dots + f(y_N) \Delta y \\ &= \sum_{k=1}^N f(y_k) \Delta y \end{aligned} \quad (15.30)$$

<sup>2</sup> O termo “método dos momentos” foi usado pela primeira vez na literatura ocidental por Harrington. Para uma exposição mais detalhada do método, veja R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, Malabar, FL: Krieger, 1968.

\* N. de T. Do inglês, *Moment Method – MOM*.

onde o intervalo  $L$  foi dividido em  $N$  unidades, cada um de comprimento  $\Delta y$ . Com o fio dividido em  $N$  segmentos de igual comprimento  $\Delta$  como mostrado na Figura 15.19, a equação (15.29) torna-se

$$4\pi\epsilon_0 V_o \approx \frac{\rho_1 \Delta}{|y_k - y_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_k - y_2|} + \dots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_k - y_N|} \quad (15.31)$$

onde  $\Delta = L/N = \Delta y$ . Na equação (15.31), assume-se que a densidade de carga desconhecida  $\rho_k$  do  $k$ -ésimo segmento é constante. Portanto, na equação (15.31), temos constantes desconhecidas  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ . Já que a equação (15.31) deve ser válida para todos os pontos sobre o fio, obtemos  $N$  equações similares pela escolha de  $N$  pontos de amostragem em  $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_N$  sobre o fio. Dessa forma, obtemos

$$4\pi\epsilon_0 V_o = \frac{\rho_1 \Delta}{|y_1 - y_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_1 - y_2|} + \dots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_1 - y_N|} \quad (15.32a)$$

$$4\pi\epsilon_0 V_o = \frac{\rho_1 \Delta}{|y_2 - y_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_2 - y_2|} + \dots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_2 - y_N|} \quad (15.32b)$$

$$4\pi\epsilon_0 V_o = \frac{\rho_1 \Delta}{|y_N - y_1|} + \frac{\rho_2 \Delta}{|y_N - y_2|} + \dots + \frac{\rho_N \Delta}{|y_N - y_N|} \quad (15.32c)$$

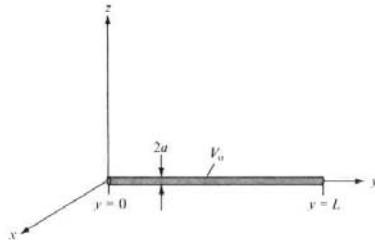


Figura 15.18 Fio condutor fino mantido a um potencial constante.

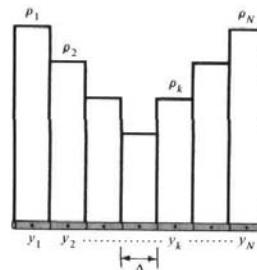


Figura 15.19 Divisão do fio em  $N$  segmentos.

A idéia de ajustar o lado esquerdo da equação (15.29) com o lado direito dessa equação nos pontos de amostragem é semelhante à idéia de considerar os momentos em Mecânica. Aqui reside a razão por que essa técnica é denominada método dos momentos. Observe, a partir da Figura 15.19, que os pontos de amostragem  $y_1, y_2, \dots, y_N$  são colocados no centro de cada segmento. A equação (15.32) pode ser colocada na forma matricial como

$$[B] = [A] [\rho] \quad (15.33)$$

onde

$$[B] = 4\pi\epsilon_0 V_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15.34)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \quad (15.35a)$$

$$A_{mn} = \frac{\Delta}{|y_m - y_n|}, \quad m \neq n \quad (15.35b)$$

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{bmatrix} \quad (15.36)$$

Na equação (15.33),  $[\rho]$  é a matriz cujos elementos são desconhecidos. Podemos determinar  $[\rho]$ , a partir da equação (15.33), usando a regra de Cramer, a inversão de matrizes ou a técnica de eliminação de Gauss.

Usando a inversão de matrizes,

$$[\rho] = [A]^{-1} [B] \quad (15.37)$$

onde  $[A]^{-1}$  é a matriz inversa da matriz  $[A]$ . Ao determinar os elementos da diagonal (ou termos próprios) da matriz  $[A]$  na equação (15.32) ou na equação (15.35), deve-se agir com cautela. Uma vez que o fio é condutor, é razoável que uma densidade de carga superficial  $\rho_s$  apareça sobre a superfície do fio. Portanto, no centro de cada segmento,

$$\begin{aligned} V(\text{centro}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\rho_s a d\phi dy}{[a^2 + y^2]^{1/2}} \\ &= \frac{2\pi a \rho_s}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{\Delta/2 + [(\Delta/2)^2 + a^2]^{1/2}}{-\Delta/2 + [(\Delta/2)^2 + a^2]^{1/2}} \right\} \end{aligned}$$

Assumindo  $\Delta \gg a$ ,

$$\begin{aligned} V(\text{centro}) &= \frac{2\pi a \rho_s}{4\pi \epsilon_0} 2 \ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \\ &= \frac{2\rho_L}{4\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \end{aligned} \quad (15.38)$$

onde  $\rho_L = 2\pi a \rho_s$ . Portanto, os termos próprios ( $m = n$ ) são

$$A_{nn} = 2 \ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \quad (15.39)$$

Agora, a equação (15.33) torna-se

$$\begin{bmatrix} 2 \ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) & \frac{\Delta}{|y_1 - y_2|} & \dots & \frac{\Delta}{|y_1 - y_N|} \\ \frac{\Delta}{|y_2 - y_1|} & 2 \ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) & \dots & \frac{\Delta}{|y_2 - y_N|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta}{|y_N - y_1|} & \frac{\Delta}{|y_N - y_2|} & \dots & 2 \ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_N \end{bmatrix} = 4\pi \epsilon_0 V_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15.40)$$

Usando a equação (15.37) com a equação (15.40) e fazendo  $V_o = 1$  V,  $L = 1$  m,  $a = 1$  mm e  $N = 10$  ( $\Delta = L/N$ ), um programa em Matlab, tal como mostrado na Figura 15.20, pode ser desenvolvido. O programa na Figura 15.20 é auto-explicativo. O programa inverte a matriz  $[A]$  e traça o gráfico de  $\rho_L$  contra  $y$ . O gráfico é mostrado na Figura 15.21. O programa também determina a carga total no fio usando

$$Q = \int \rho_L dl \quad (15.41)$$

que pode ser escrita, na forma discreta, como

$$Q = \sum_{k=1}^N \rho_k \Delta \quad (15.42)$$

Com os parâmetros escolhidos, o valor da carga total encontrado é  $Q = 8.536$  pC. Se desejado, o campo elétrico em um ponto qualquer pode ser calculado usando

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi \epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (15.43)$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \frac{\rho_k \Delta \mathbf{R}}{4\pi \epsilon_0 R^3} \quad (15.44)$$

onde  $R = |\mathbf{R}|$  e

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_k = (x - x_k)\mathbf{a}_x + (y - y_k)\mathbf{a}_y + (z - z_k)\mathbf{a}_z$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)$  é o vetor posição do ponto de observação e  $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$  é o do ponto fonte.

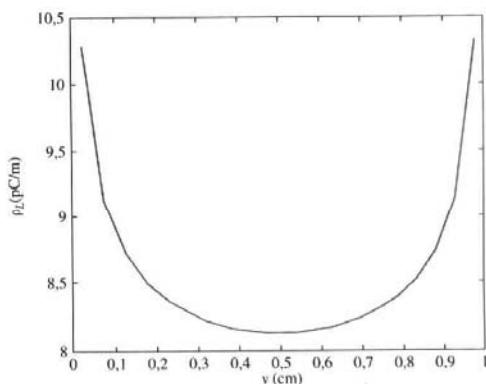
Note que, para obter a distribuição de carga na Figura 15.21, tomamos  $N = 10$ . É esperado que um menor valor de  $N$  leve a um resultado menos preciso e que um maior valor de  $N$  leve a um resultado mais preciso. Entretanto, se  $N$  é muito grande, podemos ter dificuldades no processamento para inverter a matriz quadrada  $[A]$ . A capacidade computacional à nossa disposição pode limitar a precisão da solução numérica.

```
% ESTE PROGRAMA DETERMINA A DISTRIBUIÇÃO DE CARGA
% SOBRE UM FIO CONDUTOR FINO, DE RAIO AA E DE
% COMPRIMENTO L, MANTIDO A VO VOLT
% O FIO ESTÁ LOCALIZADO EM 0 < Y < L
% TODAS AS DIMENSÕES ESTÃO EM UNIDADES DO S.I.

% O MÉTODO DOS MOMENTOS É UTILIZADO
% N É O N° DE SEGMENTOS NOS QUais O FIO É DIVIDIDO
% RHO É A DENSIDADE DE CARGA NA LINHA, RHO = INV(A)*B

% PRIMEIRO, ESPECIFIQUE OS PARÂMETROS DO PROBLEMA
ER = 1.0;
EO = 8.8541e-12;
VO = 1.0;
AA = 0.001;
L = 1.0;
N = 20;
DELTA = L/N;
% SEGUNDO, CALCULE OS ELEMENTOS DA MATRIZ DE
% COEFICIENTES A
I=1:N;
Y=DELTA*(I-0.5);
for i=1:N
    for j=1:N
        if(i ==j)
            A(i,j)=DELTA/abs(Y(i)-Y(j));
        else
            A(i,j)=2.0*log(DELTA/AA);
        end
    end
end
% AGORA, DETERMINE A MATRIZ DO VETOR B CONSTANTE
% E ENCONTRE Q
B = 4.0*pi*EO*ER*VO*ones(N,1);
C = inv(A);
RHO = C*B;
SUM = 0.0;
for I=1:N
    SUM = SUM + RHO(I);
end
Q=SUM*DELTA;
diary a:exam145a.out
[EO,Q]
[ [1:N]' Y' RHO ]
diary off
% FINALMENTE, TRACE O GRÁFICO RHO CONTRA Y
plot(Y,RHO)
xlabel('y (cm)'), ylabel('rho_L (pC/m)')
```

Figura 15.20 Programa em Matlab para calcular a distribuição de carga sobre o fio da Figura 15.18.

Figura 15.21 Gráfico de  $\rho_L$  contra  $y$ .**EXEMPLO 15.5**

Use o método dos momentos para encontrar a capacidade do capacitor de placas paralelas da Figura 15.22. Considere  $a = 1\text{ m}$ ,  $b = 1\text{ m}$ ,  $d = 1\text{ m}$  e  $\epsilon_r = 1.0$ .

**Solução:**

Seja a diferença de potencial entre as placas  $V_o = 2\text{ V}$  tal que a placa superior  $P_1$  é mantida a  $+1\text{ V}$ , enquanto que a placa inferior  $P_2$  está a  $-1\text{ V}$ . Desejamos calcular a densidade superficial de carga  $\rho_s$  sobre as placas, tal que a carga total em cada placa possa ser encontrada como

$$Q = \int \rho_s dS$$

Uma vez que  $Q$  é conhecido, podemos calcular a capacidade como

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{Q}{2}$$

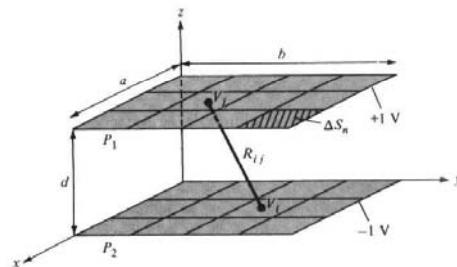


Figura 15.22 Capacitor de placas paralelas; referente ao Exemplo 15.5.

Para determinar  $\rho_S$  utilizando o método dos momentos, dividimos  $P_1$  em  $n$  subseções  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  e  $P_2$  em  $n$  subseções  $\Delta S_{n+1}, \Delta S_{n+2}, \dots, \Delta S_{2n}$ . O potencial  $V_i$ , no centro de uma subseção típica  $\Delta S_i$ , é

$$\begin{aligned} V_i &= \int_S \frac{\rho_S dS}{4\pi\epsilon_0 R} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Delta S_j} \frac{\rho_j dS}{R_{ij}} \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \rho_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Delta S_j} \frac{dS}{R_{ij}} \end{aligned}$$

Assumimos que existe uma densidade de carga uniforme em cada subseção. A última equação pode ser escrita como

$$V_i = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{ij}$$

onde

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Delta S_j} \frac{dS}{R_{ij}}$$

Portanto,

$$V_1 = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{1j} = 1$$

$$V_2 = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{2j} = 1$$

.

$$V_n = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{nj} = 1$$

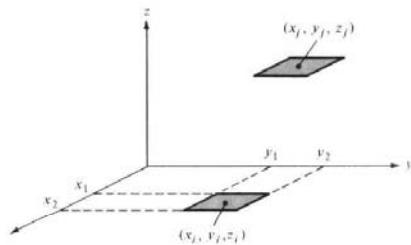
$$V_{n+1} = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{n+1,j} = -1$$

.

$$V_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \rho_j A_{2n,j} = -1$$

fornecendo um conjunto de  $2n$  equações simultâneas com  $2n$  densidades de carga desconhecidas  $\rho_j$ . Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,2n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{2n,1} & A_{2n,2} & \cdots & A_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Figura 15.23 Subseções  $i$  e  $j$ ; referente ao Exemplo 15.5.

ou

$$[\rho] = [A]^{-1} [B]$$

Portanto,

$$[\rho] = [A]^{-1} [B]$$

onde  $[B]$  é a matriz coluna dos potenciais e  $[A]$  é uma matriz quadrada contendo elementos  $A_{ij}$ . Para determinar  $A_{ij}$ , considere as duas subseções  $i$  e  $j$ , mostradas na Figura 15.23, onde as subseções podem estar sobre placas diferentes ou sobre a mesma placa.

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{x=x_1}^{x_2} \frac{dx dy}{R_{ij}}$$

onde

$$R_{ij} = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2}$$

Por conveniência, se assumirmos que as subseções são quadradas,

$$x_2 - x_1 = \Delta\ell = y_2 - y_1$$

pode-se mostrar que

$$A_{ij} = \frac{\Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = \frac{(\Delta\ell)^2}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} \quad i \neq j$$

e

$$A_{ii} = \frac{\Delta\ell}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) = \frac{\Delta\ell}{\pi\epsilon_0} (0,8814)$$

Com estas fórmulas, o programa em Matlab, na Figura 15.24, foi desenvolvido. Com  $n = 9$ ,  $C = 26,51$  pF, com  $n = 16$ ,  $C = 27,27$  pF e com  $n = 25$ ,  $C = 27,74$  pF.

```

% USANDO O MÉTODO DOS MOMENTOS,
% ESTE PROGRAMA DETERMINA A CAPACITÂNCIA DE UM
% CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS, QUE CONSISTE DE DUAS
% PLACAS CONDUTORAS, CADA UMA DE DIMENSÃO AA x BB,
% SEPARADAS POR UMA DISTÂNCIA D E MANTIDAS A 1 VOLT E A -1 VOLT

% UMA DAS PLACAS ESTÁ LOCALIZADA SOBRE O PLANO Z=0,
% ENQUANTO A OUTRA ESTÁ LOCALIZADA SOBRE O PLANO Z=D

% TODAS AS DIMENSÕES ESTÃO EM UNIDADES DO S.I.
% N É O NÚMERO DE SUBSEÇÕES EM QUE CADA PLACA É
% DIVIDIDA

% PRIMEIRO, ESPECIFIQUE OS PARÂMETROS
ER = 1.0;
EO = 8.8541e-12;
AA = 1.0;
BB = 1.0;
D = 1.0;
N = 9;
NT = 2*N;
M = sqrt(N);
DX = AA/M;
DY = BB/M;
DL = DX;

% SEGUNDO, CALCULE OS ELEMENTOS DA MATRIZ DE
% COEFICIENTES A
K = 0;
for K1=1:2
    for K2=1:M
        for K3=1:M
            K = K + 1;
            X(K) = DX*(K2 - 0.5);
            Y(K) = DY*(K3 - 0.5);
        end
    end
end
for K1=1:N
    Z(K1) = 0.0;
    Z(K1+N) = D;
end
for I=1:NT
    for J=1:NT
        if(I==J)
            A(I,J) = DL*0.8814/(pi*EO);
        else
            R = sqrt( (X(I)-X(J))^2 + Y(I)-Y(J) )^2 + (Z(I)-Z(J) )^2 ;
            A(I,J) = DL^2/(4.*pi*EO*R);
        end
    end
end
% AGORA, DETERMINE A MATRIZ DO VETOR CONSTANTE B
for K=1:N
    B(K) = 1.0;
    B(K+N) = -1.0;
end
% INVERTA A E CALCULE RHO FORMADO PELOS ELEMENTOS
% DESCONHECIDOS. CALCULE TAMBÉM A CARGA TOTAL Q E A CAPACITÂNCIA C

```

Figura 15.24 Programa em Matlab referente ao Exemplo 15.5.

```

F = inv(A);
RHO = F*B';
SUM = 0.0;
for I=1:N
    SUM = SUM + RHO(I);
end
Q = SUM*(DL^2);
VO = 2.0;
C = abs(Q)/VO;
diary a:exam145b.out
[C]
[ 1:NT] X Y' Z' RHO ]
diary off

```

Figura 15.24 (Continuação)

**EXERCÍCIO PRÁTICO 15.5**

Utilizando o método dos momentos, escreva um programa para determinar a capacidade de dois fios condutores idênticos paralelos, separados entre si de uma distância  $y_0$  e um deles deslocado do eixo  $y$  de  $x_0$ , como mostra a Figura 15.25. Se cada fio tem comprimento  $L$  e raio  $a$ , determine a capacidade para os seguintes casos:  $x_0 = 0; 0,2; 0,4; \dots; 1,0$  m. Considere  $y_0 = 0,5$  m,  $L = 1$  m,  $a = 1$  mm,  $\epsilon_r = 1$ .

**Resposta:** para  $N = 10 =$  número de segmentos por fio, ver Tabela 15.2.

TABELA 15.2 Capacitância referente ao Exercício Prático 15.5

$x_0$ (m)	C (pF)
0,0	4,91
0,2	4,891
0,4	4,853
0,6	4,789
0,8	4,71
1,0	4,643

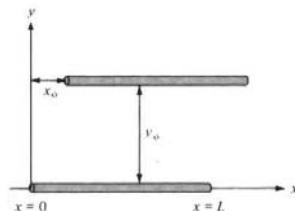


Figura 15.25 Fios condutores paralelos do Exercício Prático 15.5.

## 15.5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos (FEM)<sup>\*</sup> tem sua origem no campo da análise de estruturas. Esse método passou a ser aplicado a problemas de EM apenas a partir de 1968.<sup>3</sup> Da mesma forma que o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos é útil para resolver equações diferenciais. Conforme foi destacado na Seção 15.3, o método das diferenças finitas representa o domínio por um conjunto de pontos de grade. Sua aplicação torna-se difícil para problemas em regiões com contornos de formas irregulares. Esses problemas podem ser resolvidos com maior facilidade utilizando o método dos elementos finitos.

A análise por elementos finitos de um problema qualquer envolve, basicamente, quatro etapas: (a) discretização do domínio em um número finito de sub-regiões ou *elementos*; (b) obtenção das equações que regem um elemento típico; (c) conexão de todos os elementos no domínio e (d) resolução do sistema de equações obtido.

### A. Discretização no método de elementos finitos

Dividimos o domínio em um número de *elementos finitos*, como ilustrado na Figura 15.26, onde a região é subdividida em quatro elementos que não se sobrepõem (dois triangulares e dois quadrangulares) e sete nós. Procuramos uma aproximação para o potencial  $V_e$  dentro de um elemento  $e$  e, então, inter-relacionamos as distribuições de potencial em vários elementos, tal que o potencial seja contínuo através dos contornos entre os elementos inter-relacionados. A solução aproximada para toda a região é

$$V(x, y) \approx \sum_{e=1}^N V_e(x, y) \quad (15.45)$$

onde  $N$  é o número de elementos triangulares nos quais o domínio é dividido.

A forma mais comum de aproximação para  $V_e$  no interior de um elemento é a aproximação polinomial, a saber

$$V_e(x, y) = a + bx + cy \quad (15.46)$$

para um elemento triangular é

$$V_e(x, y) = a + bx + cy + dxy \quad (15.47)$$

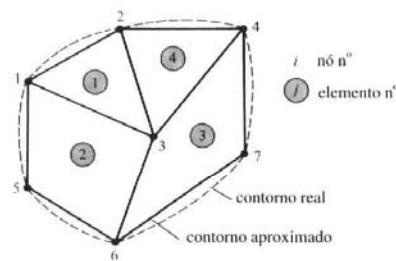


Figura 15.26 Uma subdivisão em elementos finitos típica para um domínio irregular.

\* N. de T. Do inglês, *Finite Element Method* – FEM.

<sup>3</sup> Veja P. P. Silvester e R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1983.

para um elemento quadrangular. Em geral, o potencial  $V_e$  é diferente de zero dentro do elemento  $e$ , mas zero fora de  $e$ . É difícil aproximar o contorno do domínio com elementos quadrangulares. Tais elementos são úteis para problemas nos quais os contornos são suficientemente regulares. Em vista disso, preferimos usar elementos triangulares em toda nossa análise nesta seção. Observe que assumir variação linear do potencial no interior de elementos\* triangulares, como na equação (15.46), equivale a assumir que o campo elétrico é uniforme dentro do elemento, isto é,

$$\mathbf{E}_e = -\nabla V_e = -(b\mathbf{a}_x + c\mathbf{a}_y) \quad (15.48)$$

### B. Equações que regem os elementos

Considere um elemento triangular típico, mostrado na Figura 15.27. Os potenciais  $V_{e1}$ ,  $V_{e2}$  e  $V_{e3}$  nos nós 1, 2 e 3, respectivamente, são obtidos utilizando a equação (15.46), isto é,

$$\begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (15.49)$$

Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são determinados a partir da equação (14.49) como

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (15.50)$$

Substituindo a equação (15.50) na equação (15.46), resulta em

$$V_e = [1 \quad x \quad y] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

ou

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_{ei} \quad (15.51)$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (15.52a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (15.52b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (15.52c)$$

e  $A$  é área do elemento  $e$ , isto é,

$$\begin{aligned} 2A &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) \end{aligned}$$

ou

$$A = 1/2 [x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (15.53)$$

O valor de  $A$  é positivo se os nós forem numerados no sentido anti-horário (começando por qualquer nó), como mostrado pela seta na Figura 15.27. Observe que a equação (15.51) nos dá o potencial em qualquer ponto  $(x, y)$  dentro do elemento, desde que os potenciais nos vértices sejam conhecidos. Esta é uma situação diferente da que envolve análise por diferenças finitas, em que o potencial é conhecido apenas nos pontos-grade. Observe, também, que  $\alpha_i$  são funções lineares de interpolação. Elas são denominadas *funções de forma dos elementos*\* e têm as seguintes propriedades:

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (15.54a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1 \quad (15.54b)$$

As funções de forma  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , por exemplo, estão ilustradas na Figura 15.28.

A energia por unidade de comprimento, associada ao elemento  $e$ , é dada pela equação (4.96), isto é,

$$W_e = \frac{1}{2} \int e |\mathbf{E}|^2 dS = \frac{1}{2} \int e |\nabla V_e|^2 dS \quad (15.55)$$

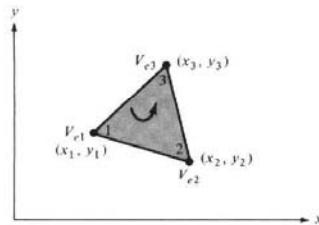


Figura 15.27 Elemento triangular típico. A numeração dos nós locais 1-2-3 deve ser feita no sentido anti-horário, como indica a seta.

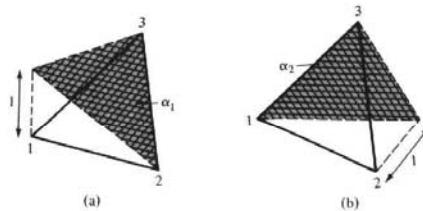


Figura 15.28 Funções de forma  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  para um elemento triangular.

\* N. de T. No original: *element shape functions*.

onde se assume um domínio bidimensional, livre de cargas ( $\rho_s = 0$ ). Contudo, a partir da equação (15.51),

$$\nabla V_e = \sum_{i=1}^3 V_{ei} \nabla \alpha_i \quad (15.56)$$

Substituindo a equação (15.56) na equação (15.55), resulta em

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e V_{ei} \left[ \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \right] V_{ej} \quad (15.57)$$

Se definirmos o termo entre colchetes como

$$C_{ij}^{(e)} = \int \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j dS \quad (15.58)$$

poderemos escrever a equação (15.57) na forma matricial como

$$W_e = \frac{1}{2} e [V_e]^T [C^{(e)}] [V_e] \quad (15.59)$$

onde o sobrescrito  $T$  denota a matriz transposta

$$[V_e] = \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} \quad (15.60a)$$

e

$$[C^{(e)}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(e)} & C_{12}^{(e)} & C_{13}^{(e)} \\ C_{21}^{(e)} & C_{22}^{(e)} & C_{23}^{(e)} \\ C_{31}^{(e)} & C_{32}^{(e)} & C_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (15.60b)$$

A matriz  $[C^{(e)}]$  é usualmente denominada de *matriz dos coeficientes dos elementos*. O elemento  $C_{ij}^{(e)}$  da matriz dos coeficientes pode ser considerado como o acoplamento entre os nós  $i$  e  $j$ . Seu valor é obtido a partir das equações (15.52) e (15.58). Por exemplo,

$$\begin{aligned} C_{12}^{(e)} &= \int \nabla \alpha_1 \cdot \nabla \alpha_2 dS \\ &= \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int dS \\ &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \end{aligned} \quad (15.61a)$$

De maneira similar,

$$C_{11}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2] \quad (15.61b)$$

$$C_{13}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)] \quad (15.61c)$$

$$C_{22}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2] \quad (15.61d)$$

$$C_{23}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)] \quad (15.61e)$$

$$C_{33}^{(e)} = \frac{1}{4A} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2] \quad (15.61f)$$

Também,

$$C_{21}^{(e)} = C_{12}^{(e)}, \quad C_{31}^{(e)} = C_{13}^{(e)}, \quad C_{32}^{(e)} = C_{23}^{(e)} \quad (15.61g)$$

Entretanto, nossos cálculos ficam mais fáceis se definirmos

$$\begin{aligned} P_1 &= (y_2 - y_3), & P_2 &= (y_3 - y_1), & P_3 &= (y_1 - y_2) \\ Q_1 &= (x_3 - x_2), & Q_2 &= (x_1 - x_3), & Q_3 &= (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (15.62a)$$

Com  $P_i$  e  $Q_j$  ( $i = 1, 2, 3$  são os números dos nós locais), cada termo na matriz dos coeficientes dos elementos é determinado como

$$C_y^{(e)} = \frac{1}{4A} [P_i P_j + Q_i Q_j] \quad (15.62b)$$

onde

$$A = \frac{1}{2} (P_2 Q_3 - P_3 Q_2) \quad (15.62c)$$

Observe que  $P_1 + P_2 + P_3 = 0 = Q_1 + Q_2 + Q_3$  e, assim,  $\sum_{i=1}^3 C_y^{(e)} = 0 = \sum_{j=1}^3 C_y^{(e)}$ . Este resultado pode ser usado para conferir nossos cálculos.

### C. Conexão de todos os elementos

Tendo considerado um elemento típico, o próximo passo é conectar todos esses elementos em um domínio. A energia associada à conexão de todos os elementos na malha é

$$W = \sum_{e=1}^N W_e = \frac{1}{2} e [V]^T [C] [V] \quad (15.63)$$

onde

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (15.64)$$

$n$  é o número de nós,  $N$  é o número de elementos e  $[C]$  é denominada de *matriz de rigidez global*, que representa a conexão das matrizes dos coeficientes dos elementos individuais. O maior problema agora é obter  $[C]$  a partir de  $[C^{(e)}$ .

O processo pelo qual as matrizes de coeficientes de cada elemento são conectadas para obter a matriz de rigidez global é melhor ilustrado com um exemplo. Considere a malha de elementos finitos consistindo de três elementos finitos, como mostrado na Figura 15.29. Observe a numeração dos nós. A numeração dos nós de acordo com 1, 2, 3, 4 e 5 é denominada de numeração *global*. A numeração  $i-j-k$  é denominada numeração *local* e corresponde a 1-2-3 dos elementos na Figura 15.27. Por exemplo, para o elemento 3 na Figura 15.29, a numeração global 3-5-4 corresponde à numeração local 1-2-3 do elemento na Figura 15.27. Observe que a numeração local deve seguir a sequência no sentido anti-horário, começando em qualquer nó do elemento. Para o elemento 3, por exemplo, poderíamos escolher 4-3-5 ou 5-4-3, ao invés de 3-5-4 para corresponder a 1-2-3 do elemento na Figura 15.27.

ra 15.27. Portanto, a numeração na Figura 15.29 não é única. Entretanto, obtemos o mesmo  $[C]$  independente da numeração usada. Assumindo a numeração adotada na Figura 15.29, é esperado que a matriz de rigidez global tenha a seguinte forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \quad (15.65)$$

que é uma matriz  $5 \times 5$ , já que cinco nós ( $n = 5$ ) estão envolvidos. Novamente,  $C_{ij}$  é o acoplamento entre o nó  $i$  e o nó  $j$ . Obtemos  $C_{ij}$  utilizando o fato de que a distribuição de potencial deve ser contínua através dos contornos entre os elementos. A contribuição à posição  $i, j$  em  $[C]$  vem de todos os elementos que contêm os nós  $i$  e  $j$ . Para encontrar  $C_{11}$ , por exemplo, observamos, da Figura 15.29, que o nó global 1 pertence aos elementos 1 e 2 e que é o nó local 1 a ambos. Assim,

$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} \quad (15.66a)$$

Para  $C_{22}$ , o nó global 2 pertence ao elemento 1 somente e é o mesmo que o nó local 3. Assim,

$$C_{22} = C_{33}^{(1)} \quad (15.66b)$$

Para  $C_{44}$ , o nó global 4 é o mesmo que os nós locais 2, 3, e 3 nos elementos 1, 2 e 3, respectivamente. Assim,

$$C_{44} = C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} \quad (15.66c)$$

Para  $C_{14}$ , a conexão global 14 é a mesma que as conexões locais 12 e 13 nos elementos 1 e 2, respectivamente. Assim,

$$C_{14} = C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} \quad (15.66d)$$

Já que não há acoplamento (ou conexão direta) entre os nós 2 e 3,

$$C_{23} = C_{32} = 0 \quad (15.66e)$$

Continuando desta maneira, obtemos todos os termos na matriz rigidez global por inspeção da Figura 15.29 como

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & C_{32}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(2)} & 0 & C_{22}^{(2)} + C_{11}^{(3)} & C_{23}^{(2)} + C_{13}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ C_{21}^{(1)} + C_{31}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{32}^{(2)} + C_{31}^{(3)} & C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} & C_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & C_{21}^{(3)} & C_{23}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (15.67)$$

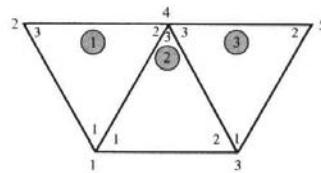


Figura 15.29 Conexão de três elementos:  $i-j-k$  correspondentes à numeração local 1-2-3 do elemento na Figura 15.27.

Observe que as matrizes dos coeficientes dos elementos se sobrepõem nos nós compartilhados pelos elementos e que há 27 termos (nove para cada um dos três elementos) na matriz de rigidez global  $[C]$ . Também observe as seguintes propriedades da matriz  $[C]$ :

1. A matriz é simétrica ( $C_{ij} = C_{ji}$ ) da mesma forma que a matriz dos coeficientes do elemento.
2. Já que não existe acoplamento entre o nó  $i$  e o nó  $j$ , fica evidente que, para um grande número de elementos,  $[C]$  torna-se esparsa e de banda.
3. A matriz é singular. Embora não seja tão óbvio, isto pode ser mostrado usando a matriz dos coeficientes do elemento da equação (15.60b).

#### D. Resolução das equações resultantes

A partir do Cálculo Variacional, é sabido que a equação de Laplace (ou de Poisson) é satisfeita quando a energia total no domínio é mínima. Portanto, é necessário que as derivadas parciais de  $W$ , em relação a cada valor nodal do potencial, seja zero. Isto é,

$$\frac{\partial W}{\partial V_1} = \frac{\partial W}{\partial V_2} = \dots = \frac{\partial W}{\partial V_n} = 0$$

ou

$$\frac{\partial W}{\partial V_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (15.68)$$

Por exemplo, para obter  $\partial W / \partial V_1 = 0$  para a malha de elementos finitos da Figura 15.29, substituímos a equação (15.65) na equação (15.63) e tomamos a derivada parcial de  $W$  em relação a  $V_1$ . Obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial W}{\partial V_1} &= 2V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} \\ &\quad + V_2C_{21} + V_3C_{31} + V_4C_{41} + V_5C_{51} \end{aligned}$$

ou

$$0 = V_1C_{11} + V_2C_{12} + V_3C_{13} + V_4C_{14} + V_5C_{15} \quad (15.69)$$

Em geral,  $\partial W / \partial V_k = 0$  nos leva a

$$0 = \sum_{i=1}^n V_i C_{ik} \quad (15.70)$$

onde  $n$  é o número de nós na malha. Ao escrever a equação (15.70) para todos os nós  $k = 1, 2, \dots, n$ , obtemos um conjunto de equações simultâneas, a partir do que a solução de  $[V]^T = [V_1, V_2, \dots, V_n]$  pode ser encontrada. Isso pode ser feito de duas maneiras, similares às empregadas para resolver as equações em diferenças finitas obtidas a partir da equação de Laplace (ou de Poisson).

#### Método iterativo:

Esta abordagem é similar àquela usada no método das diferenças finitas. Consideremos que o nó 1 na Figura 15.29, por exemplo, seja um nó livre. O potencial no nó 1 pode ser obtido da equação (15.69) como

$$V_1 = -\frac{1}{C_{11}} \sum_{i=2}^5 V_i C_{1i} \quad (15.71)$$

Em geral, o potencial em um nó livre  $k$  é obtido da equação (15.70) como

$$V_k = -\frac{1}{C_{kk}} \sum_{i=1, i \neq k}^n V_i C_{ik} \quad (15.72)$$

que se aplica iterativamente a todos os nós livres na malha com  $n$  nós. Já que  $C_{kk} = 0$ , se o nó  $k$  não está diretamente conectado ao nó  $i$ , somente nós que estão diretamente ligados ao nó  $k$  contribuem para  $V_k$  na equação (15.72).

Desta forma, se os potenciais nos nós conectados ao nó  $k$  são conhecidos, podemos determinar  $V_k$  usando a equação (15.72). O processo iterativo começa estabelecendo os potenciais nos nós livres iguais a zero ou iguais ao valor médio dos potenciais.

$$V_{\text{méd}} = 1/2 (V_{\min} + V_{\max}) \quad (15.73)$$

onde  $V_{\min}$  and  $V_{\max}$  são os valores mínimo e máximo dos potenciais preestabelecidos nos nós fixos. Com esses valores iniciais, os potenciais nos nós livres são calculados usando a equação (15.72). Ao final da primeira iteração, quando os novos valores tiverem sido calculados para todos os nós livres, esses valores tornam-se os valores de partida para a segunda iteração. O procedimento é repetido até que a diferença de valores entre duas iterações subsequentes torne-se desprezível.

#### *Método da matriz de banda:*

Se todos os nós livres forem numerados por primeiro e os nós fixos por último, a equação (15.63) pode ser escrita tal que

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon [V_f \ V_p] \begin{bmatrix} C_{ff} & C_{fp} \\ C_{pf} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_p \end{bmatrix} \quad (15.74)$$

onde os índices subscritos  $f$  e  $p$ , respectivamente, referem-se aos nós com potenciais livres e fixos (ou preestabelecidos). Já que  $V_p$  é constante (consiste de valores conhecidos e fixos), apenas diferenciamos em relação a  $V_f$ , tal que, ao aplicar a equação (15.68) na equação (15.74), resulta em

$$C_{ff}V_f + C_{fp}V_p = 0$$

ou

$$[C_{ff}] [V_f] = -[C_{fp}] [V_p] \quad (15.75)$$

Esta equação pode ser escrita como

$$[A] [V] = [B] \quad (15.76a)$$

ou

$$[V] = [A]^{-1} [B] \quad (15.76b)$$

onde  $[V] = [V_f]$ ,  $[A] = [C_{ff}]$  e  $[B] = -[C_{fp}] [V_p]$ . Já que  $[A]$  é, em geral, não singular, o potencial nos nós livres pode ser encontrado usando a equação (15.75). Podemos resolver para  $[V]$  na equação (15.76a) usando a técnica de eliminação gaussiana. Também podemos resolver para  $[V]$  na equação (15.76b) usando a inversão de matriz se o tamanho da matriz a ser invertida não for grande.

Observe que, da mesma forma que procedemos com as equações a partir da equação (15.55), nossa solução tem sido restrita a um problema bidimensional envolvendo a equação de Laplace  $\nabla^2 V = 0$ . Os conceitos básicos desenvolvidos nesta seção podem ser estendidos à análise por elementos finitos de problemas envolvendo a equação de Poisson ( $\nabla^2 V = -\rho_v / \varepsilon$  e  $\nabla^2 A = -\mu J$ ) ou a equação de onda ( $\nabla^2 \phi - \gamma^2 \phi = 0$ ). Dois dos maiores problemas associados com a análise por elementos finitos são a quantidade relativamente grande de memória computacional requerida para armazenar os elemen-

tos da matriz e o tempo de processamento computacional associado. Entretanto, muitos algoritmos têm sido desenvolvidos para diminuir esses problemas até certo ponto.

O método dos elementos finitos (FEM) apresenta várias vantagens em relação ao método das diferenças finitas (FDM) e em relação ao método dos momentos (MOM). Em primeiro lugar, o FEM pode lidar, mais facilmente, com um domínio mais complexo. Em segundo lugar, a generalidade do FEM torna possível construir uma proposta de programa computacional geral para resolver uma grande gama de problemas. Um único programa pode ser usado para resolver problemas diferentes (descritos pelas mesmas equações diferenciais parciais) com diferentes domínios e diferentes condições de contorno, necessitando somente mudar os dados de entrada do problema. Entretanto, o FEM tem seus próprios pressupostos. É mais difícil entendê-lo e programá-lo do que entender e programar o FDM e o MOM. Isso requer a preparação dos dados de entrada, um processo que pode ser tedioso.

### EXEMPLO 15.6

Considere a malha de dois elementos, como mostrada na Figura 15.30(a). Usando o método de elementos finitos, determine os potenciais dentro da malha.

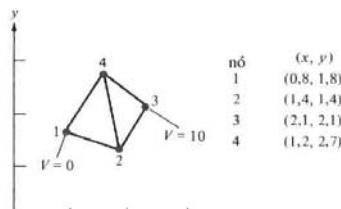
#### Solução:

As matrizes dos coeficientes dos elementos podem ser calculadas usando a equação (15.62). Para o elemento 1, consistindo dos nós 1-2-4 correspondentes à numeração local 1-2-3, como na figura 15.30(b),

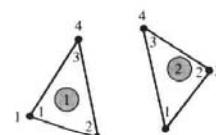
$$P_1 = -1,3, \quad P_2 = 0,9, \quad P_3 = 0,4$$

$$Q_1 = -0,2, \quad Q_2 = -0,4, \quad Q_3 = 0,6$$

$$A = 1/2 (0,54 + 0,16) = 0,35$$



(a)



(b)

Figura 15.30 Referente ao Exemplo 15.6: (a) malha de dois elementos; (b) numeração local e global dos elementos.

Substituindo todas estas relações na equação (15.62b), obtém-se

$$[C^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1,236 & -0,7786 & -0,4571 \\ -0,7786 & 0,6929 & 0,0857 \\ -0,4571 & 0,0857 & 0,3714 \end{bmatrix} \quad (15.6.1)$$

De maneira similar, para o elemento 2 consistindo dos nós 2-3-4 correspondentes à numeração local 1-2-3, como na figura 15.30(b),

$$P_1 = -0,6, \quad P_2 = 1,3, \quad P_3 = -0,7$$

$$Q_1 = -0,9, \quad Q_2 = 0,2, \quad Q_3 = 0,7$$

$$A = 1/2 (0,91 + 0,14) = 0,525$$

Portanto,

$$[C^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0,5571 & -0,4571 & -0,1 \\ -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,1 & -0,3667 & 0,4667 \end{bmatrix} \quad (15.6.2)$$

Usando a equação (15.75), resulta em

$$\begin{bmatrix} C_{22} & C_{24} \\ C_{42} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{21} & C_{23} \\ C_{41} & C_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (15.6.3)$$

Reescrevendo em uma forma mais conveniente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C_{42} & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_{21} & -C_{23} \\ 0 & 1 \\ -C_{41} & -C_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (15.6.4a)$$

ou

$$[C] [V] = [B] \quad (15.6.4b)$$

Os termos da matriz de rigidez global são obtidos como segue:

$$C_{22} = C_{22}^{(1)} + C_{22}^{(2)} = 0,6929 + 0,5571 = 1,25$$

$$C_{42} = C_{24} = C_{23}^{(1)} + C_{13}^{(2)} = 0,0857 - 0,1 = -0,0143$$

$$C_{44} = C_{33}^{(1)} + C_{33}^{(2)} = 0,3714 + 0,4667 = 0,8381$$

$$C_{21} = C_{21}^{(1)} = -0,7786$$

$$C_{23} = C_{12}^{(2)} = -0,4571$$

$$C_{41} = C_{31}^{(1)} = -0,4571$$

$$C_{43} = C_{32}^{(2)} = -0,3667$$

Note que seguimos a numeração local para a matriz dos coeficientes dos elementos e a numeração global para a matriz de rigidez global. Assim, a matriz quadrada  $[C]$  é obtida como

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 & -0,0143 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,0143 & 0 & 0,8381 \end{bmatrix} \quad (15.6.5)$$

e a matriz  $[B]$ , no lado direito da equação (15.6.4a), é obtida como

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,571 \\ 10,0 \\ 3,667 \end{bmatrix} \quad (15.6.6)$$

Invertendo a matriz  $[C]$  na equação (15.6.5), obtemos

$$[V] = [C]^{-1}[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,708 \\ 10,0 \\ 4,438 \end{bmatrix}$$

Portanto,  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 3,708$ ,  $V_3 = 10$  e  $V_4 = 4,438$ . Uma vez que os valores dos potenciais nos nós sejam conhecidos, o potencial em qualquer ponto dentro da malha pode ser determinado usando a equação (15.51).

#### EXERCÍCIO PRÁTICO 15.6

Calcule a matriz de rigidez global para a malha de dois elementos, mostrada na Figura 15.31, quando: (a) o nó 1 está ligado ao nó 3 e a numeração local ( $i - j - k$ ) é como indicado na Figura 15.31(a); (b) o nó 2 está ligado ao nó 4 com a numeração local, como mostrado na Figura 15.31(b).

**Resposta:**

(a)	$\begin{bmatrix} 0,9964 & 0,05 & -0,2464 & -0,8 \\ 0,05 & 0,7 & -0,75 & 0,0 \\ -0,2464 & -0,75 & 1,5964 & -0,6 \\ -0,8 & 0,0 & -0,6 & 1,4 \end{bmatrix}$
(b)	$\begin{bmatrix} 1,333 & -0,7777 & 0,0 & -1,056 \\ -0,0777 & 0,8192 & -0,98 & 0,2386 \\ 0,0 & -0,98 & 2,04 & -1,06 \\ -1,056 & 0,2386 & -1,06 & 1,877 \end{bmatrix}$

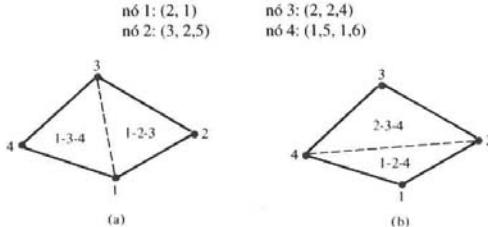


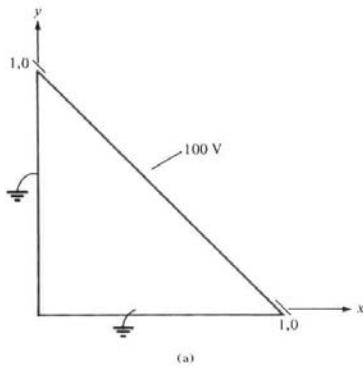
Figura 15.31 Referente ao Exercício Prático 15.6.

**EXEMPLO 15.7**

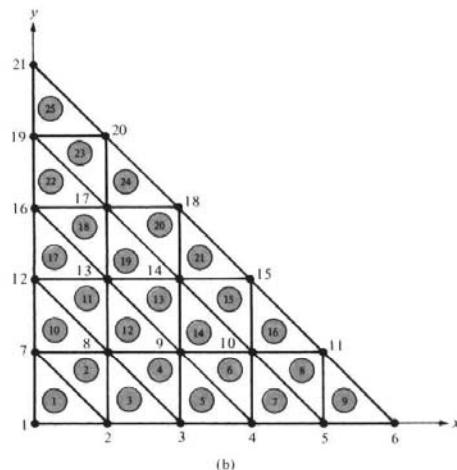
Escreva um programa para resolver a equação de Laplace utilizando o método de elementos finitos. Aplique o programa para o problema bidimensional mostrado na Figura 15.32(a).

**Solução:**

O domínio é dividido em 25 elementos triangulares a três nós, o que resulta em um número total de 21 nós, como mostrado na Figura 15.32(b). Esta é uma etapa necessária para obter os dados de entrada que definem a geometria do problema. Tomando por base nossas discussões na Seção 15.5, foi desenvolvido um programa geral em Matlab, utilizando elementos triangulares a três nós, para resolver problemas envolvendo a equação de Laplace, como mostra a Figura 15.33. O desenvolvimento do programa envolve, basicamente, quatro etapas, como indicado no programa e explicado a seguir.



(a)



(b)

Figura 15.32 Referente ao Exemplo 15.7: (a) problema eletrostático bidimensional; (b) domínio dividido em 25 elementos triangulares.

```

% SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE POR ELEMENTOS FINITOS
% PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS
% USANDO ELEMENTOS TRIANGULARES
% ND = N° DE NÓS
% NE = N° DE ELEMENTOS
% NP = N° DE NÓS FIXOS (ONDE O POTENCIAL É PREESTABELECIDO)
% NDP(I) = N° DO NÓ COM POTENCIAL PREESTABELECIDO, I=1,2,...,NP
% VAL(I) = VALOR DO POTENCIAL PREESTABELECIDO NO NÓ NDP(I)
% NL(I,J) = LISTA DOS NÓS PARA CADA ELEMENTO I, ONDE
%           J=1,2,3 REFERE-SE AO NÚMERO DO NÓ LOCAL
% CE(I,J) = MATRIZ DE COEFICIENTES DO ELEMENTO
% C(I,J) = MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
% B(I) = MATRIZ DO LADO DIREITO NO SISTEMA
% DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS; VEJA EQUAÇÃO (15.6.4)
% X(I), Y(I) = COORDENADAS GLOBAIS DO NÓ I
% XL(J), YL(J) = COORDENADAS LOCAIS DO NÓ J=1,2,3
% V(I) = POTENCIAL NO NÓ I
% MATRIZES P(I) E Q(I) ESTÃO DEFINIDAS NA EQUAÇÃO
% (15.62a)

% ****
% PRIMEIRA ETAPA - DADOS DE ENTRADA QUE DEFINEM A
% GEOMETRIA E AS CONDIÇÕES DE CONTORNO
% ****

clear
input('Name of input data file = ')
% ****
% SEGUNDA ETAPA - CÁLCULO DA MATRIZ DE COEFICIENTES
% PARA CADA ELEMENTO E CONEXÃO GLOBAL
% ****
B = zeros(ND,1);
C = zeros(ND,ND);
for I=1:NE
% DETERMINAÇÃO DAS COORDENADAS LOCAIS XL(J), YL(J) PARA O ELEMENTO I
    K = NL(I,[1:3]);
    XL = X(K);
    YL = Y(K);
P=zeros(3,1);
Q=zeros(3,1);
    P(1) = YL(2) - YL(3);
    P(2) = YL(3) - YL(1);
    P(3) = YL(1) - YL(2);
    Q(1) = XL(3) - XL(2);
    Q(2) = XL(1) - XL(3);
    Q(3) = XL(2) - XL(1);
    AREA = 0.5*abs( P(2)*Q(3) - Q(2)*P(3) );
% DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE COEFICIENTES PARA O ELEMENTO I
    CE=(P'*P'+Q'*Q')/(4.0*AREA);
% CONEXÃO GLOBAL - DETERMINAÇÃO DE C(I,J) E B(I)
    for J=1:3
        IR = NL(I,J);
        IFLAG1=0;
% VERIFICAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE A LINHA DA MATRIZ E UM NÓ FIXO
        for K = 1:NP
            if (IR == NDP(K))
                C(IR,IR) = 1.0;
                B(IR) = VAL(K);
                IFLAG1=1;
            end
        end % FIM PARA K = 1:NP
    end
end

```

Figura 15.33 Programa de computador referente ao Exemplo 15.7 (continua)

```

if(IFLAG1 == 0)
for L = 1:3
    IC = NL(I,L);
    IFLAG2=0;
% VERIFICAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE A COLUNA DA MATRIZ E UM NÓ FIXO
for K=1:NP
    if ( IC == NDP(K) ),
        B(IR) = B(IR) - CE(J,L)*VAL(K);
        IFLAG2=1;
    end
end % fim para K=1:NP
if(IFLAG2 == 0)
    C(IR,IC) = C(IR,IC) + CE(J,L);
end
end % fim para L=1:3
end % fim do if(iflag1 == 0)
end % fim para J=1:3
end % fim para I=1:NE
% ****
% TERCERA ETAPA - RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES
% ****
V = inv(C)*B;
V=V';
% ****
% QUARTA ETAPA - SAÍDA DOS RESULTADOS
% ****
diary exam147.out
[ND, NE, NP]
[ [1:ND]' X' Y' V' ]
diary off

```

Figura 15.33 Programa de computador referente ao Exemplo 15.7.

**Etapa 1:** envolve a entrada de dados necessária para a definição do problema. Essa é a única etapa que depende da geometria do problema em questão. Através de um arquivo de dados, introduzimos o número de elementos, o número de nós, o número de nós fixos, os valores preestabelecidos dos potenciais nos nós livres, as coordenadas  $x$  e  $y$  de todos os nós e uma lista identificando os nós pertencentes a cada elemento, conforme a ordem da numeração local 1-2-3. Para o problema na Figura 15.32, os três conjuntos de dados referentes às coordenadas, às relações elemento-nó e os potenciais preestabelecidos nos nós fixos são mostrados nas Tabelas 15.3, 15.4 e 15.5, respectivamente.

TABELA 15.3 Coordenadas nodais  
da malha de elementos finitos da  
Figura 15.32

Nó	<i>x</i>	<i>y</i>	Nó	<i>x</i>	<i>y</i>
1	0,0	0,0	12	0,0	0,4
2	0,2	0,0	13	0,2	0,4
3	0,4	0,0	14	0,4	0,4
4	0,6	0,0	15	0,6	0,4
5	0,8	0,0	16	0,0	0,6
6	1,0	0,0	17	0,2	0,6
7	0,0	0,2	18	0,4	0,6
8	0,2	0,2	19	0,0	0,8
9	0,4	0,2	20	0,2	0,8
10	0,6	0,2	21	0,0	1,0
11	0,8	0,2			

TABELA 15.4 Identificação do elemento-nó

Elemento nº	Nº Local nº			Elemento nº	Nº Local nº		
	1	2	3		1	2	3
1	1	2	7	14	9	10	14
2	2	8	7	15	10	15	14
3	2	3	8	16	10	11	15
4	3	9	8	17	12	13	16
5	3	4	9	18	13	17	16
6	4	10	9	19	13	14	17
7	4	5	10	20	14	18	17
8	5	11	10	21	14	15	18
9	5	6	11	22	16	17	19
10	7	8	12	23	17	20	19
11	8	13	12	24	17	18	20
12	8	9	13	25	19	20	21
13	9	14	13				

TABELA 15.5 Potenciais preestabelecidos nos nós fixos

Nº nº	Potencial	Nº nº	Potencial
	Preestabelecido		Preestabelecido
1	0,0	18	100,0
2	0,0	20	100,0
3	0,0	21	50,0
4	0,0	19	0,0
5	0,0	16	0,0
6	50,0	12	0,0
11	100,0	7	0,0
15	100,0		

TABELA 15.6 Dados de entrada para o programa em elementos finitos da Figura 15.33

```

NE = 25;
ND = 21;
NP = 15;
NL = [ 1 2 7
       2 8 7
       2 3 8
       3 9 8
       3 4 9
       4 10 9
       4 5 10
       5 11 10
       5 6 11
       7 8 12
       8 13 12
       8 9 13
       9 14 13
       9 10 14
       10 15 14
       10 11 15
       12 13 16
       13 17 16
       13 14 17
       14 18 17
       14 15 18
       16 17 19
       17 20 19
       17 18 20
       19 20 21];
X = [0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0.0 .. ..
      0.2 0.4 0.6 0.8 0.0 0.2 0.4 .. ..
      0.6 0.0 0.2 0.4 0.0 0.2 0.0];
Y = [0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.2 .. ..
      0.2 0.2 0.2 0.2 0.4 0.4 0.4 .. ..
      0.4 0.6 0.6 0.6 0.8 0.8 1.0];
NDP = [ 1 2 3 4 5 6 11 15 18 20 21 19 16 12 7 ];
VAL = [ 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 .. ..
        50.0 100.0 100.0 100.0 100.0
        50.0 0.0 0.0 0.0 0.0 ];

```

**Etapa 2:** esta etapa implica determinar a matriz de coeficientes dos elementos  $[C^e]$  para cada elemento e a matriz de rigidez global  $[C]$ . O procedimento exposto no exemplo anterior é aplicado. A equação (15.6.4) pode ser escrita, na forma geral, como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -C_{fp} \end{bmatrix} [V_p]$$

ou

$$[C] [V] = [B]$$

A matriz “global”  $[C]$  e a matriz  $[B]$  são calculadas nesta etapa.

**Etapa 3:** a matriz global obtida na etapa anterior está invertida. Os valores dos potenciais em todos os nós são obtidos por multiplicação matricial, como na equação (15.76b). Ao invés de inverter a matriz global, é também possível determinar os potenciais nos nós usando a técnica de eliminação gaussiana.

**Etapa 4:** esta etapa envolve a saída do resultado do processo computacional.

Os dados de entrada e de saída estão apresentados nas Tabelas 15.6 e 15.7, respectivamente.

TABELA 15.7 Dados de saída  
do programa na Figura 15.33

Nº	X	Y	Potencial
1	0,00	0,00	0,000
2	0,20	0,00	0,000
3	0,40	0,00	0,000
4	0,60	0,00	0,000
5	0,80	0,00	0,000
6	1,00	0,00	50,000
7	0,00	0,20	0,000
8	0,20	0,20	18,182
9	0,40	0,20	36,364
10	0,60	0,20	59,091
11	0,80	0,20	100,000
12	0,00	0,40	0,000
13	0,20	0,40	36,364
14	0,40	0,40	68,182
15	0,60	0,40	100,000
16	0,00	0,60	0,000
17	0,20	0,60	59,091
18	0,40	0,60	100,000
19	0,00	0,80	0,000
20	0,20	0,80	100,000
21	0,00	1,00	50,000

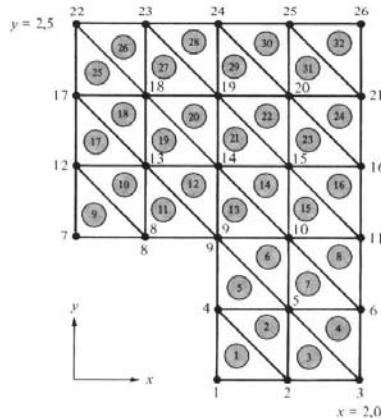


Figura 15.34 Referente ao Exercício Prático 15.7.

**EXERCÍCIO PRÁTICO 15.7**

Refaça o Exemplo 15.3 usando o método dos elementos finitos. Divida o domínio em elementos triangulares, como mostrado na Figura 15.34. Compare a solução com aquela obtida no Exemplo 15.3 usando o método das diferenças finitas.

**Resposta:** veja o Exemplo 15.3.

**RESUMO**

- As linhas de campo elétrico e as linhas equipotenciais, devido às fontes pontuais coplanares, podem ser traçadas usando a técnica numérica apresentada neste capítulo. O conceito básico pode ser estendido para traçar as linhas de campo magnético.
- Um problema de EM na forma de uma equação diferencial parcial pode ser resolvido usando o método de diferenças finitas. A equação de diferenças finitas que aproxima a equação diferencial é aplicada em pontos na grade, espaçados em uma maneira ordenada, sobre todo o domínio. A intensidade de campo nos pontos livres é determinada usando um método adequado.
- Um problema de EM na forma de uma equação integral é convenientemente resolvido usando o método dos momentos. A grandeza desconhecida sob o símbolo de integral é determinada ajustando ambos os lados da equação integral em um número finito de pontos no domínio da grandeza.
- Enquanto o método de diferenças finitas é restrito a problemas com regiões de solução de formato regular, o método de elementos finitos pode lidar com problemas com geometrias complexas. Esse método consiste em dividir o domínio em elementos finitos, derivar as equações para um elemento típico, conectar todos os elementos na região e resolver o sistema de equações resultante.

Neste capítulo, foram mostrados exemplos típicos de como aplicar cada método a alguns problemas práticos. Programas computacionais para resolver problemas foram fornecidos quando necessários.

**QUESTÕES DE REVISÃO**

- 15.1** No ponto (1, 2, 0) dentro de um campo elétrico devido a fontes pontuais coplanares,  $\mathbf{E} = 0,3 \mathbf{a}_x - 0,4 \mathbf{a}_y$  V/m. Um deslocamento diferencial de 0,05 m, a partir deste ponto, sobre uma linha equipotencial nos leva ao ponto:

- (a) (1,04, 2,03, 0)
- (b) (0,96, 1,97, 0)
- (c) (1,04, 1,97, 0)
- (d) (0,96, 2,03, 0)

- 15.2** Qual das seguintes alternativas *não* representa uma aproximação por diferenças finitas correta para  $dV/dx$  em  $x_o$ , se  $h = \Delta x$ ?

- (a)  $\frac{V(x_o + h) - V(x_o)}{h}$
- (b)  $\frac{V(x_o) - V(x_o - h)}{h}$
- (c)  $\frac{V(x_o + h) - V(x_o - h)}{h}$
- (d)  $\frac{V(x_o + h) - V(x_o - h)}{2h}$
- (e)  $\frac{V(x_o + h/2) - V(x_o - h/2)}{h}$

**15.3** O elemento triangular da Figura 15.35 está no espaço livre. O valor aproximado do potencial no centro do triângulo é:

- (a) 10 V
- (b) 7,5 V
- (c) 5 V
- (d) 0 V

**15.4** Para análise por diferenças finitas, uma placa retangular, medindo 10 cm por 20 cm, é dividida em oito sub-regiões por linhas espaçadas de 5 cm paralelas às bordas da placa. Quantos nós livres existem se as bordas forem conectadas à mesma fonte?

- (a) 15
- (b) 12
- (c) 9
- (d) 6
- (e) 3

**15.5** Usando a equação de diferenças  $V_n = V_{n-1} + V_{n+1}$  com  $V_0 = V_5 = 1$  e começando com os valores iniciais  $V_n = 0$  para  $1 \leq n \leq 4$ , o valor de  $V_2$ , após a terceira iteração, é:

- (a) 1
- (b) 3
- (c) 9
- (d) 15
- (e) 25

**15.6** A matriz de coeficientes  $[A]$ , obtida através do método dos momentos, *não* tem uma das seguintes propriedades:

- (a) É uma matriz densa (isto é, tem muitos termos não-nulos).
- (b) É uma matriz de banda.
- (c) É uma matriz quadrada e simétrica.
- (d) É uma matriz que depende da geometria de um dado problema.

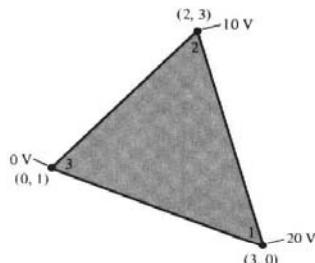


Figura 15.35 Referente às Questões de Revisão 15.3 e 15.10.

**15.7** A maior diferença entre o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos é que:

- (a) Usando um deles, uma matriz esparsa resulta como solução.
- (b) Em um deles, a solução é conhecida em todos os pontos no interior do domínio.
- (c) Um deles se aplica para resolver uma equação diferencial parcial.
- (d) Um deles tem seu uso limitado a problemas invariáveis no tempo.

**15.8** Se a placa da Questão de Revisão 14.4 tiver que ser discretizada para a análise por elementos finitos, tal que tenhamos o mesmo número de pontos de grade, quantos elementos triangulares serão gerados?

- (a) 32
- (b) 16
- (c) 12
- (d) 9

**15.9** Qual das afirmações sobre funções de modelagem *não* é verdadeira?

- (a) As funções de forma são interpolatórias por natureza.
- (b) As funções de forma devem ser contínuas no interior dos elementos.
- (c) As funções de forma somadas são identicamente iguais à unidade em cada ponto dentro do elemento.
- (d) A função de forma associada a um dado nó se anula em qualquer outro nó.
- (e) A função de forma associada a um determinado nó é nula naquele nó.

**15.10** A área do elemento na Figura 15.35 é

- (a) 14
- (b) 8
- (c) 7
- (d) 4

*Respostas:* 15.1a; 15.2c<sup>4</sup>; 15.3a; 15.4e; 15.5c; 15.6b; 15.7a; 15.8b; 15.9e; 15.10d.

## PROBLEMAS

**15.1** Usando o programa desenvolvido no Exemplo 15.1 ou um programa equivalente desenvolvido por você, trace as linhas de campo elétrico e as linhas equipotenciais para os seguintes casos:

- (a) Três cargas pontuais -1 C, 2 C e 1 C, localizadas em (-1, 0), (0, 2) e (1, 0), respectivamente.
- (b) Cinco cargas pontuais idênticas de 1 C, localizadas em (-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1) e (0, 0), respectivamente.

**15.2** Dada a equação diferencial unidimensional

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

tal que  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 10$ , use o método de diferenças finitas (iterativo) para determinar  $y(0,25)$ . Considere  $\Delta = 0,25$  e faça 5 iterações.

**15.3** (a) A partir da tabela abaixo, obtenha  $\frac{dV}{dx}$  e  $\frac{d^2V}{dx^2}$  em  $x = 0,15$

<sup>4</sup> A fórmula em (a) é conhecida como fórmula com diferenças para frente, enquanto que a fórmula em (b) é conhecida como fórmula com diferenças para trás e em (d) ou (e) como fórmula com diferenças centrais.

$x$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$V$	1,0017	1,5056	2,0134	2,5261	3,0452

- (b) Os dados da tabela acima são obtidos a partir de  $V = 10 \operatorname{senh} x$ . Compare seus resultados na parte (a) com os valores exatos.

**15.4** Mostre que a equação em diferenças finitas para a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas,  $V = V(\rho, z)$ , é

$$V(\rho_o, z_o) = \frac{1}{4} \left[ V(\rho_o, z_o + h) + V(\rho_o, z_o - h) + \left(1 + \frac{h}{2\rho_o}\right) V(\rho_o + h, z_o) + \left(1 - \frac{h}{2\rho_o}\right) V(\rho_o - h, z_o) \right]$$

onde  $h = \Delta z = \Delta \rho$ .

**15.5** Usando a representação em diferenças finitas em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi)$  em um ponto  $P$  da grade, mostrado na Figura 15.36, considere  $\rho = m \Delta \rho$  e  $\phi = n \Delta \phi$ , tal que  $V(\rho, \phi)|_{\rho} = V(m \Delta \rho, n \Delta \phi) = V_m^n$ . Demostre que:

$$\nabla^2 V|_{m,n} = \frac{1}{\Delta \rho^2} \left[ \left(1 - \frac{1}{2m}\right) V_{m-1}^n - 2V_m^n + \left(1 + \frac{1}{2m}\right) V_{m+1}^n + \frac{1}{(m \Delta \phi)^2} (V_{m-1}^{n-1} - 2V_m^n + V_{m+1}^{n+1}) \right]$$

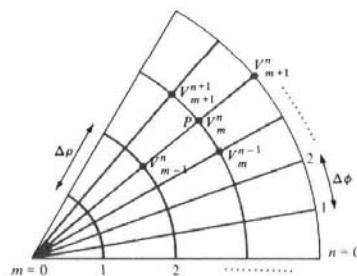


Figura 15.36 Grade para diferenças finitas em coordenadas cilíndricas; referente ao Problema 15.5.

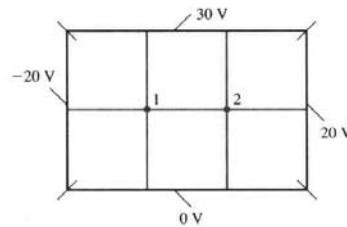


Figura 15.37 Referente ao Problema 15.7.

**15.6** Uma calha quadrada condutora tem seus quatro lados mantidos a potenciais  $-10\text{ V}$ ,  $0\text{ V}$ ,  $30\text{ V}$  e  $60\text{ V}$ . Determine o potencial no centro da calha.

**15.7** Use FDM para calcular os potenciais nos nós 1 e 2 no sistema representado na Figura 15.37.

**15.8** Refaça o Problema 15.7 se  $\rho_s = \frac{100}{\pi}\text{ nC/m}^2$ ,  $h = 0,1\text{ m}$  e  $\epsilon = \epsilon_0$ , onde  $h$  é o passo da malha.

**15.9** Considere o sistema mostrado na Figura 15.38. (a) Estabeleça iguais a zero os valores iniciais nos nós livres e calcule o potencial nos nós livres para cinco iterações. (b) Resolva o problema pelo método da matriz de banda e compare o resultado com o da parte (a).

**15.10** Aplique a técnica da matriz de banda para estabelecer um sistema de equações de diferenças simultâneas para cada um dos problemas na Figura 15.39. Obtenha as matrizes  $[A]$  e  $[B]$ .

**15.11** (a) Como você poderia modificar as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  do Exemplo 15.3 se o domínio tivesse uma densidade de carga  $\rho_s$ ?

(b) Escreva um programa para determinar os potenciais nos pontos da grade, mostrados na Figura 15.40, assumindo uma densidade de carga  $\rho_s = x(y - 1)\text{ nC/m}^2$ . Use o método iterativo de diferenças finitas e considere  $\epsilon_r = 1,0$ .

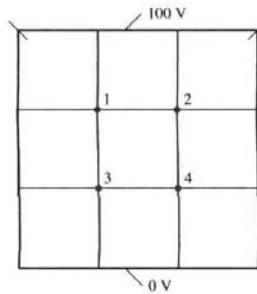


Figura 15.38 Referente ao Problema 15.9.

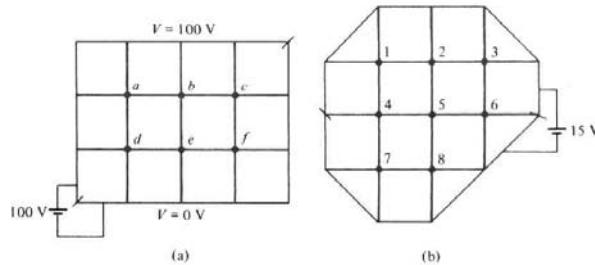


Figura 15.39 Referente ao Problema 15.10.

**15.12** A equação de onda em duas dimensões é dada por

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Considerando  $\Phi_{m,n}^j$  como a aproximação por diferenças finitas de  $\Phi(x_m, z_n, t_j)$ , demonstre que, aplicando o esquema de diferenças finitas para a equação de onda, resulta em

$$\begin{aligned}\Phi_{m,n}^{j+1} &= 2\Phi_{m,n}^j - \Phi_{m,n}^{j-1} + \alpha(\Phi_{m+1,n}^j + \Phi_{m-1,n}^j - 2\Phi_{m,n}^j) + \\ &\quad \alpha(\Phi_{m,n+1}^j + \Phi_{m,n-1}^j - 2\Phi_{m,n}^j)\end{aligned}$$

onde  $h = \Delta x = \Delta z$  e  $\alpha = (c \Delta t/h)^2$ .

**15.13** Escreva um programa que utilize o esquema de diferenças finitas para resolver a equação de onda em uma dimensão

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

dadas as condições de contorno  $V(0, t) = 0$ ,  $V(1, t) = 0$  e  $t > 0$  e as condições iniciais  $\partial V / \partial t(x, 0) = 0$ ,  $V(x, 0) = \sin \pi x$  e  $0 < x < 1$ . Considere  $\Delta x = \Delta t = 0,1$ . Compare sua solução com a solução exata  $V(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t$  para  $0 < t < 4$ .

**15.14** (a) Demonstre que a representação por diferenças finitas da equação de Laplace, usando o nodo de nove nós da Figura 15.41, é

$$V_o = 1/8(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8)$$

(b) Usando esse esquema, refaça o Exemplo 15.4.

**15.15** Uma linha de transmissão consiste de dois fios idênticos de raio  $a$ , separados por uma distância  $d$ , como mostrado na Figura 15.42. Mantenha um dos fios em 1 V e o outro em -1 V e use o MOM para encontrar a capacitância por unidade de comprimento. Compare seu resultado com o obtido a partir da fórmula exata para  $C$  na Tabela 11.1. Considere  $a = 5$  mm,  $d = 5$  cm,  $\ell = 5$  m e  $\epsilon = \epsilon_0$ .

**15.16** Determine o potencial e o campo elétrico no ponto (-1, 4, 5) devido ao condutor filamentar da Figura 15.19. Considere  $V_o = 1$  V,  $L = 1$  m e  $a = 1$  mm.

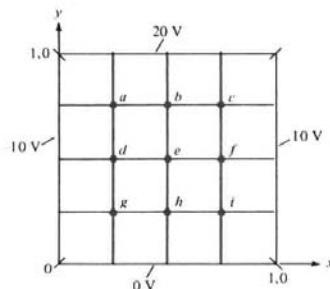


Figura 15.40 Referente ao Problema 15.11.

- 15.17** Dois fios condutores, de mesmo comprimento  $L$  e de mesmo raio  $a$ , estão separados por um pequeno espaçamento em uma das suas extremidades e mantêm-se inclinados um em relação ao outro por um ângulo  $\theta$ , como mostrado na Figura 15.43. Determine a capacidade entre os fios usando o método dos momentos para os casos  $\theta = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 180^\circ$ . Considere um espaçamento de 2 mm,  $a = 1$  mm,  $L = 2$  m e  $\epsilon_r = 1$ .

- 15.18** Para uma linha de transmissão de fita, infinitamente longa e fina, mostrada na Figura 15.44(a), desejamos determinar a impedância característica da linha usando o método dos momentos. Dividimos cada fita em  $N$  subáreas, como na Figura 15.44(b), tal que, sobre a subárea  $i$ ,

$$V_i = \sum_{j=1}^{2N} A_{ij} \rho_j$$

onde

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{-\Delta\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln R_{ij}, & i \neq j \\ \frac{-\Delta\ell}{2\pi\epsilon_0} [\ln \Delta\ell - 1.5], & i = j \end{cases}$$

$R_{ij}$  é a distância entre a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima subáreas e  $V_i = 1$  ou  $-1$  dependem se a  $i$ -ésima subárea está sobre a fita 1 ou sobre a fita 2, respectivamente. Escreva um programa para encontrar a impedância característica da linha usando o fato de que

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{C}$$

onde  $C$  é a capacidade por unidade de comprimento e

$$C = \frac{Q}{V_d} = \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i \Delta\ell}{V_d}$$

e  $V_d = 2$  V é a diferença de potencial entre as fitas. Considere  $H = 2$  m,  $W = 5$  m e  $N = 20$ .

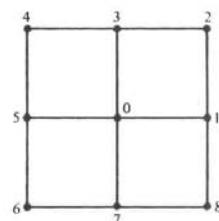


Figura 15.41 Nodo de nove nós, referente ao Problema 15.14.

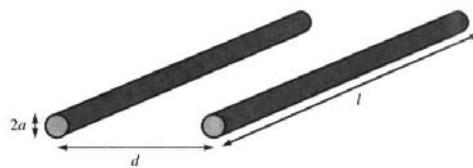


Figura 15.42 Referente ao Problema 15.15.

- 15.19** Considere a linha coaxial de seção reta arbitrária, como mostrado na Figura 15.45(a). Usar o método dos momentos para encontrar a capacidade  $C$  por unidade de comprimento requer dividir cada condutor em  $N$  tiras, tal que o potencial na  $j$ -ésima tira é dado por

$$V_j = \sum_{i=1}^{2N} \rho_i A_{ij}$$

onde

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{-\Delta\ell}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_{ij}}{r_o}, & i \neq j \\ \frac{-\Delta\ell}{2\pi\epsilon} \left[ \ln \frac{\Delta\ell_i}{r_o} - 1,5 \right], & i = j \end{cases}$$

e  $V_j = -1$  ou  $1$  dependendo se  $\Delta\ell_i$  está sobre o condutor interno ou sobre o condutor externo, respectivamente. Escreva um programa em Matlab para determinar a carga total por unidade de comprimento sobre um cabo coaxial de seção reta cilíndrica elíptica, mostrado na Figura 15.45(b), usando

$$Q = \sum_{i=1}^N \rho_i$$

e a capacidade por unidade de comprimento usando  $C = Q/2$

- (a) Como uma forma de conferir seu programa, considere  $A = B = 2$  cm e  $a = b = 1$  cm (linha coaxial com seção reta circular) e compare seu resultado com o valor exato dado por  $C = 2\pi\epsilon/\ln(A/a)$ .
- (b) Considere  $A = 2$  cm,  $B = 4$  cm,  $a = 1$  cm e  $b = 2$  cm.  
(Dica: para a elipse interna da Figura 15.45(b), por exemplo,

$$r = \frac{a}{\sqrt{\sin^2 \phi + v^2 \cos^2 \phi}}$$

onde  $v = a/b$ ,  $d\ell = r d\phi$ . Considere  $r_o = 1$  cm.)

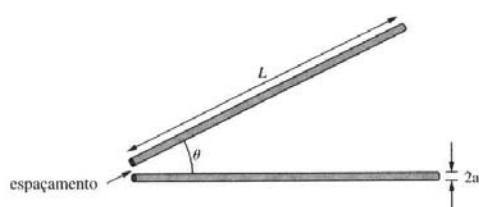


Figura 15.43 Referente ao Problema 15.17.

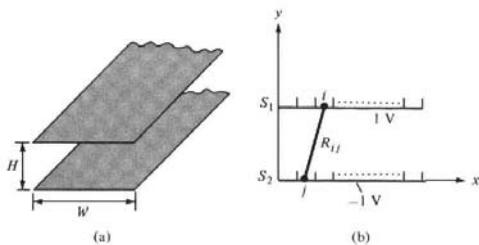


Figura 15.44 Análise de uma linha de transmissão de fita usando o método dos momentos; referente ao Problema 15.18.

- 15.20** Uma barra condutora de seção reta rectangular é mostrada na Figura 15.46. Dividindo a barra em  $N$  segmentos iguais, obtemos o potencial do  $j$ -ésimo segmento como

$$V_j = \sum_{i=1}^N q_i A_{ij}$$

onde

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}, & i \neq j \\ \frac{1}{2\epsilon_0 \sqrt{\pi h \Delta}}, & i = j \end{cases}$$

e  $\Delta$  é o comprimento do segmento. Se mantivermos a barra em 10 V, obtemos

$$[A][q] = 10[I]$$

onde  $[I] = [1 \ 1 \ 1 \dots 1]^T$  e  $q_i = \rho_v t h \Delta$ .

- (a) Escreva um programa para encontrar a distribuição de carga  $\rho_v$  sobre a barra e considere  $\ell = 2$  m,  $h = 2$  cm,  $t = 1$  cm e  $N = 20$ .  
 (b) Calcule a capacidade do condutor isolador usando

$$C = Q/V = (q_1 + q_2 + \dots + q_N)/10$$

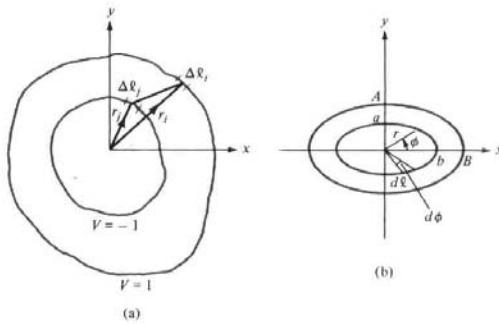


Figura 15.45 Referente ao Problema 15.19. Linha coaxial de (a) seção reta arbitrária e (b) seção reta cilíndrica elíptica.

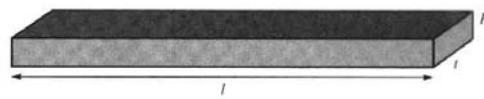


Figura 15.46 Referente ao Problema 15.20.

- 15.21** Uma outra maneira de definir as funções de forma em um ponto arbitrário  $(x, y)$  em um elemento finito é usar as áreas  $A_1$ ,  $A_2$ , e  $A_3$ , mostradas na Figura 15.47. Demonstre que

$$\alpha_k = \frac{A_k}{A}, \quad k = 1, 2, 3$$

onde  $A = A_1 + A_2 + A_3$  é a área total do elemento triangular.

- 15.22** Para cada um dos elementos triangulares da Figura 15.48:

- calcule as funções de forma;
- determine a matriz de coeficientes.

- 15.23** Os valores nodais dos potenciais para o elemento triangular da Figura 15.49 são  $V_1 = 100$  V,  $V_2 = 50$  V e  $V_3 = 30$  V. (a) Determine onde a linha equipotencial de 80 V intercepta os contornos do elemento. (b) Calcule o potencial de  $(2, 1)$ .

- 15.24** O elemento triangular, mostrado na Figura 15.50, é parte de uma malha de elementos finitos. Se  $V_1 = 8$  V,  $V_2 = 12$  V e  $V_3 = 10$  V, determine o potencial: (a) em  $(1, 2)$  e (b) no centro do elemento.

- 15.25** Determine a matriz de rigidez global para a região de dois elementos na Figura 15.51.

- 15.26** Determine a matriz de rigidez global para a malha de dois elementos da Figura 15.52.

- 15.27** Para a malha de dois elementos da Figura 15.52, considere  $V_1 = 10$  V e  $V_3 = 30$  V. Determine  $V_2$  e  $V_4$ .

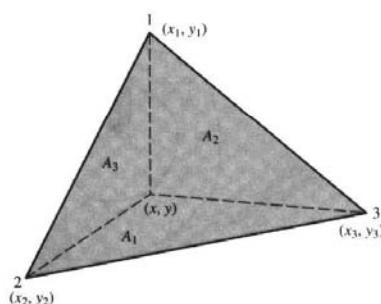


Figura 15.47 Referente ao Problema 15.21.

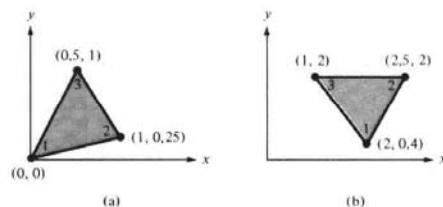


Figura 15.48 Elementos triangulares do Problema 15.22.

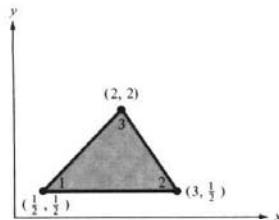


Figura 15.49 Referente ao Problema 15.23.

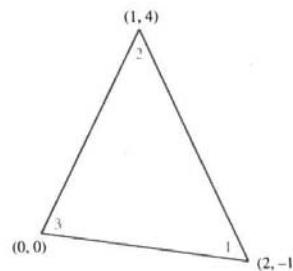


Figura 15.50 Referente ao Problema 15.24.

**15.28** A malha na Figura 15.53 é parte de uma grande malha. A região sombreada é condutora e não tem elementos. Determine  $C_{5,5}$  e  $C_{5,1}$ .

**15.29** Use o programa na Figura 15.33 para resolver a equação de Laplace no problema mostrado na Figura 15.54, onde  $V_o = 100$  V. Compare a solução por elementos finitos com a solução exata do Exemplo 6.5, isto é,

$$V(x, y) = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sinh n\pi y}{n \sinh n\pi}, \quad n = 2k + 1$$

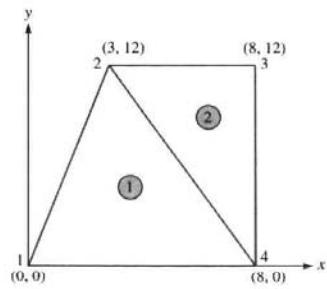


Figura 15.51 Referente ao Problema 15.25.

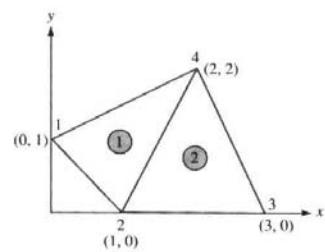


Figura 15.52 Referente aos Problemas 15.26 e 15.27.

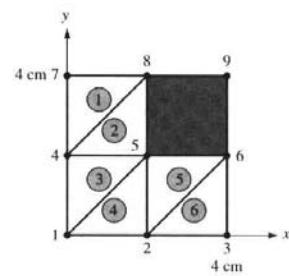


Figura 15.53 Referente ao Problema 15.28.

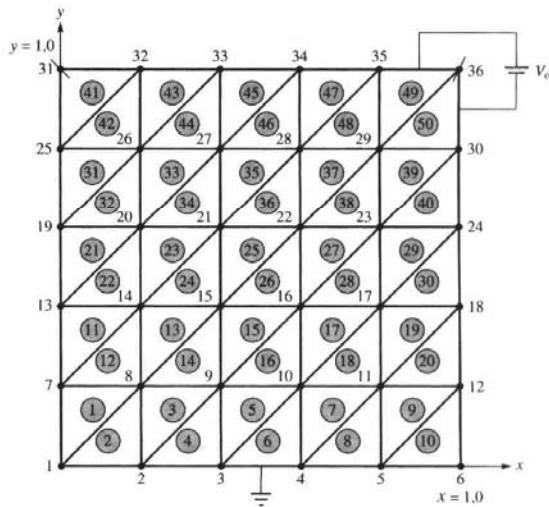


Figura 15.54 Referente ao Problema 15.29.

**15.30** Repita o problema anterior para  $V_o = 100 \sin \pi x$ . Compare a solução por elementos finitos com a solução teórica [similar ao Exemplo 6.6(a)], isto é,

$$V(x, y) = \frac{100 \sin \pi x \sinh \pi y}{\sinh \pi}$$

**15.31** Demonstre que, quando uma malha quadrada é usada em FDM, obtemos o mesmo resultado que no FEM quando os quadrados são cortados em triângulos.

# Apêndice A

## FÓRMULAS MATEMÁTICAS

### A.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \operatorname{cossec} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 A = \operatorname{cossec}^2 A$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos(A \pm 90^\circ) = \mp \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen}(A \pm 90^\circ) = \pm \cos A$$

$$\operatorname{tg}(A \pm 90^\circ) = -\operatorname{cotg} A$$

$$\cos(A \pm 180^\circ) = -\cos A$$

$$\operatorname{sen}(A \pm 180^\circ) = -\operatorname{sen} A$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(A \pm 180^\circ) &= \operatorname{tg} A \\
 \operatorname{sen} 2A &= 2 \operatorname{sen} A \cos A \\
 \cos 2A &= \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A \\
 \operatorname{tg}(A \pm B) &= \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} \\
 \operatorname{tg} 2A &= \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A} \\
 \operatorname{sen} A &= \frac{e^{jA} - e^{-jA}}{2j}, \quad \cos A = \frac{e^{jA} + e^{-jA}}{2} \\
 e^{jA} &= \cos A + j \operatorname{sen} A \quad (\text{identidade de Euler}) \\
 \pi &= 3,1416 \\
 1 \text{ rad} &= 57,296^\circ
 \end{aligned}$$

## A.2 VARIÁVEIS COMPLEXAS

Um número complexo pode ser representado como:

$$z = x + jy = r/\theta = re^{j\theta} = r(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

onde  $x = \operatorname{Re} z = r \cos \theta$ ,  $y = \operatorname{Im} z = r \operatorname{sen} \theta$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$$

$$j = \sqrt{-1}, \quad \frac{1}{j} = -j, \quad j^2 = -1$$

O complexo conjugado de  $z = z^* = x - jy = r/-\theta = re^{-j\theta}$

$$\begin{aligned}
 &= r(\cos \theta - j \operatorname{sen} \theta) \\
 (e^{j\theta})^n &= e^{jn\theta} = \cos n\theta + j \operatorname{sen} n\theta \quad (\text{teorema de De Moivre})
 \end{aligned}$$

Se  $z_1 = x_1 + jy_1$  e  $z_2 = x_2 + jy_2$ , então  $z_1 = z_2$  somente se  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ou

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 / \theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} \cdot \frac{(x_2 - jy_2)}{(x_2 - jy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cancel{\theta_1 - \theta_2} \\ \sqrt{z} &= \sqrt{x + jy} = \sqrt{r} e^{j\theta/2} = \sqrt{r} \cancel{\theta/2} \\ z^n &= (x + jy)^n = r^n e^{jn\theta} = r^n \cancel{n\theta} \quad (n = \text{inteiro})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^{1/n} &= (x + jy)^{1/n} = r^{1/n} e^{j\theta/n} = r^{1/n} \cancel{\theta/n + 2\pi k/n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \\ \ln(re^{j\theta}) &= \ln r + \ln e^{j\theta} = \ln r + j\theta + j2k\pi \quad (k = \text{inteiro})\end{aligned}$$

### A.3 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x}$$

$$\operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{sen} jx = j \operatorname{sen} x, \quad \cos jx = \cosh x$$

$$\operatorname{senh} jx = j \operatorname{sen} x, \quad \cosh jx = \cos x$$

$$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh}(x \pm jy) = \operatorname{senh} x \cos y \pm j \cosh x \operatorname{sen} y$$

$$\cosh(x \pm jy) = \cosh x \cos y \pm j \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{tgh}(x \pm jy) = \frac{\operatorname{senh} 2x}{\cosh 2x + \cos 2y} \pm j \frac{\operatorname{sen} 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tgh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen}(x \pm jy) = \operatorname{sen} x \cosh y \pm j \cos x \operatorname{senh} y$$

$$\cos(x \pm jy) = \cos x \cosh y \mp j \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

## A.4 IDENTIDADES LOGARÍTMICAS

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^n = n \log x$$

$\log_{10} x = \log x$  (logaritmo comum)

$\log_e x = \ln x$  (logaritmo natural)

Se  $|x| \ll 1$ ,  $\ln(1+x) \approx x$

## A.5 IDENTIDADES EXPONENCIAIS

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

onde  $e = 2.7182$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

$$[e^x]^n = e^{nx}$$

$$\ln e^x = x$$

## A.6 APROXIMAÇÕES PARA PEQUENOS VALORES

Se  $|x| \ll 1$ ,

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$\sin x \approx x \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\cos \approx 1$$

$$\operatorname{tg} x \approx x$$

## A.7 DERIVADAS

Se  $U = U(x)$ ,  $V = V(x)$  e  $a = \text{constante}$ ,

$$\frac{d}{dx}(aU) = a \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(UV) = U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{U}{V}\right] = \frac{V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}}{V^2}$$

$$\frac{d}{dx}(aU^n) = naU^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a U = \frac{\log_a e}{U} \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \ln U = \frac{1}{U} \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} a^U = d^U \ln a \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} e^U = e^U \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} U^V = VU^{V-1} \frac{dU}{dx} + U^V \ln U \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} U = \cos U \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cos U = -\operatorname{sen} U \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} U = \sec^2 U \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh} U = \cosh U \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh U = \operatorname{senh} U \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} U = \operatorname{sech}^2 U \frac{dU}{dx}$$

## A.8 INTEGRAIS INDEFINIDAS

Se  $U = U(x)$ ,  $V = V(x)$  e  $a = \text{constante}$ ,

$$\int a \, dx = ax + C$$

$$\int U \, dV = UV - \int V \, dU \quad (\text{integração por partes})$$

$$\int U^n \, dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dU}{U} = \ln U + C$$

$$\int a^U \, dU = \frac{a^U}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) + C$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int \operatorname{tg} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \sec ax + C = -\frac{1}{a} \ln \cos ax + C$$

$$\int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln (\sec ax + \operatorname{tg} ax) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

$$\int x \operatorname{sen} ax dx = \frac{1}{a^2} (\operatorname{sen} ax - ax \cos ax) + C$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} (\cos ax + ax \operatorname{sen} ax) + C$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C$$

$$\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \operatorname{sen} bx dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{senh} ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$$

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{senh} ax + C$$

$$\int \operatorname{tgh} ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 + a^2} = x - a \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, & x^2 > a^2 \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x} + C, & x^2 < a^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x/a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} \right) + C$$

## A.9 INTEGRAIS DEFINIDAS

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \int_0^\pi \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m + n = \text{par} \\ \frac{2m}{m^2 - n^2}, & m + n = \text{ímpar} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \int_{-\pi}^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & a > 0, \\ 0, & a = 0 \\ -\pi/2, & a < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^{2x}}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx &= |a| \frac{\pi}{2} \\
\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{n!}{a^{n+1}} \\
\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(b^2-4ac)/4a} \\
\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx &= \frac{a}{a^2 + b^2} \\
\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx &= \frac{b}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

## A.10 IDENTIDADES VETORIAIS

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são campos vetoriais, enquanto  $U$  e  $V$  são campos escalares, então

$$\begin{aligned}
\nabla(U + V) &= \nabla U + \nabla V \\
\nabla(UV) &= U \nabla V + V \nabla U \\
\nabla\left[\frac{U}{V}\right] &= \frac{V(\nabla U) - U(\nabla V)}{V^2} \\
\nabla V^n &= n V^{n-1} \nabla V \quad (n = \text{inteiro}) \\
\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\
\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \\
\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\
\nabla \cdot (V\mathbf{A}) &= V \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V \\
\nabla \cdot (\nabla V) &= \nabla^2 V \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \\
\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\
\nabla \times (V\mathbf{A}) &= \nabla V \times \mathbf{A} + V(\nabla \times \mathbf{A})
\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L V d\mathbf{l} = - \int_S \nabla V \times d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv$$

$$\oint_S V d\mathbf{S} = \int_v \nabla V dv$$

$$\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S} = - \int_v \nabla \times \mathbf{A} dv$$

## Apêndice B

### CONSTANTES MATERIAIS

TABELA B.1 Condutividade aproximada\* a 20°C de alguns materiais de uso corrente

Material	Condutividade (siemens/metro)
<i>Condutores</i>	
Prata	$6,1 \times 10^7$
Cobre (recozido padrão)	$5,8 \times 10^7$
Ouro	$4,1 \times 10^7$
Alumínio	$3,5 \times 10^7$
Tungstênio	$1,8 \times 10^7$
Zinco	$1,7 \times 10^7$
Latão	$1,1 \times 10^7$
Ferro (puro)	$10^7$
Chumbo	$5 \times 10^6$
Mercúrio	$10^6$
Carbono	$3 \times 10^4$
Água (mar)	4
<i>Semicondutores</i>	
Germânio (puro)	2,2
Silício (puro)	$4,4 \times 10^{-4}$
<i>Isolantes</i>	
Água (destilada)	$10^{-4}$
Solo (seco)	$10^{-3}$
Baquelite	$10^{-10}$
Papel	$10^{-11}$
Vidro	$10^{-12}$
Porcelana	$10^{-12}$
Mica	$10^{-13}$
Parafina	$10^{-15}$
Borracha (dura)	$10^{-15}$
Quartzo (fundido)	$10^{-17}$
Cera	$10^{-17}$

\*Os valores variam de uma publicação para outra pelo fato de que existem muitas variações (de composição) da maioria dos materiais e também pelo fato de que a condutividade é sensível à temperatura, ao conteúdo da mistura, a impurezas, etc.

TABELA B.2 Constante dielétrica aproximada ou permissividade relativa ( $\epsilon_r$ ) e rigidez de alguns materiais de uso corrente\*

Material	Constante Dielétrica $\epsilon_r$ (adimensional)	Rigidez Dielétrica $E(V/m)$
Titanato de bário	1.200	$7,5 \times 10^6$
Água (mar)	80	
Água (destilada)	81	
Nylon	8	
Papel	7	$12 \times 10^6$
Vidro	5-10	$35 \times 10^6$
Mica	6	$70 \times 10^6$
Porcelana	6	
Baquelite	5	$20 \times 10^6$
Quartzo (fundido)	5	$30 \times 10^6$
Borracha (dura)	3,1	$25 \times 10^6$
Madeira	2,5-8,0	
Poliestireno	2,55	
Polipropileno	2,25	
Parafina	2,2	$30 \times 10^6$
Petróleo	2,1	$12 \times 10^6$
Ar (1 atm.)	1	$3 \times 10^6$

\*Os valores dados aqui são somente típicos, variam de uma publicação para outra pelo fato de que existem muitas variações (de composição) da maioria dos materiais, também pela dependência de  $\epsilon_r$  com a temperatura, umidade, etc.

TABELA B.3 Permeabilidade relativa ( $\mu_r$ ) de alguns materiais\*

Material	$\mu_r$
<i>Diamagnético</i>	
Bismuto	0,999833
Mercúrio	0,999968
Prata	0,9999736
Chumbo	0,9999831
Cobre	0,9999906
Água	0,9999912
Hidrogênio (c.n.t.p.)	= 1,0
<i>Paramagnético</i>	
Oxigênio (c.n.t.p.)	0,999998
Ar	1,00000037
Alumínio	1,000021
Tungstênio	1,00008
Platina	1,0003
Manganês	1,001
<i>Ferromagnético</i>	
Cobalto	250
Níquel	600
Ferro doce	5.000
Ferro-silício	7.000

\*Os valores dados aqui são somente típicos, variam de uma publicação para outra pelo fato de que existem muitas variações (de composição) da maioria dos materiais.

## Apêndice C

---

### RESPOSTAS DOS PROBLEMAS DE NÚMERO ÍMPAR

#### CAPÍTULO 1

---

- 1.1  $-0,8703\mathbf{a}_x - 0,3483\mathbf{a}_y - 0,3482\mathbf{a}_z$   
1.3 (a)  $5\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$   
(b)  $-5\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 23\mathbf{a}_z$   
(c)  $0,439\mathbf{a}_x - 0,11\mathbf{a}_y - 0,3293\mathbf{a}_z$   
(d)  $1,1667\mathbf{a}_x - 0,7084\mathbf{a}_y - 0,7084\mathbf{a}_z$   
1.5  $\alpha = \frac{-12}{7}, \beta = \frac{-4}{7}$   
1.7 A demonstração  
1.9 (a)  $-2,8577$   
(b)  $-0,2857\mathbf{a}_x + 0,8571\mathbf{a}_y - 0,4286\mathbf{a}_z$   
(c)  $65,91^\circ$   
1.11  $72,36^\circ; 59,66^\circ; 143,91^\circ$   
1.13 (a)  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$   
(b)  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$   
1.15 25,72  
1.17 (a) 7,681  
(b)  $-2\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$   
(c)  $137,43^\circ$   
(d) 11,022  
(e) 17,309  
1.19 (a) A demonstração  
(b)  $\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2, \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$   
(c)  $\left| \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right|$   
1.21 (a) 10,3  
(b)  $-2,175\mathbf{a}_x + 1,631\mathbf{a}_y - 4,893\mathbf{a}_z$   
(c)  $-0,175\mathbf{a}_x + 0,631\mathbf{a}_y - 1,893\mathbf{a}_z$

## CAPÍTULO 2

- 2.1 (a)  $P(0,5; 0,866; 2)$   
 (b)  $Q(0, 1, -4)$   
 (c)  $R(-1,837; -1,061; 2,121)$   
 (d)  $T(3,464; 2; 0)$
- 2.3 (a)  $\rho z \cos \phi - \rho^2 \sin \phi \cos \phi + \rho z \sin \phi$   
 (b)  $r^2(1 + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos \theta)$
- 2.5 (a)  $\frac{1}{\rho^2 + z^2} (\rho \mathbf{a}_\rho + 4 \mathbf{a}_z), \left( \sin^2 \theta + \frac{4 \sin \theta}{r} \right) \mathbf{a}_r + \sin \theta \left( \cos \theta - \frac{4}{r} \right) \mathbf{a}_\theta$   
 (b)  $\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} (\rho \mathbf{a}_\rho + z \mathbf{a}_z), r \sin \theta \mathbf{a}_r$
- 2.7 (a)  $\left( \frac{xyz}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{a}_x + \left( \frac{y^2 z}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{a}_y + 2z \sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{a}_z$   
 (b)  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y)$
- 2.9 A demonstração
- 2.11 (a)  $\frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 \mathbf{a}_x + xy \mathbf{a}_y + yz^2 \mathbf{a}_z), 3$   
 (b)  $r(\sin^2 \theta \cos \phi + r \cos^3 \theta \sin \phi) \mathbf{a}_r + r \sin \theta \cos \theta (\cos \phi - r \cos \theta \sin \phi) \mathbf{a}_\theta, 3$
- 2.13 (a)  $r \sin \theta [\sin \phi \cos \theta (r \sin \theta + \cos \phi) \mathbf{a}_r + \sin \phi (r \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \phi) \mathbf{a}_\theta + 3 \cos \phi \mathbf{a}_\phi], 5 \mathbf{a}_\theta - 21,21 \mathbf{a}_\phi$   
 (b)  $\sqrt{\rho^2 + z^2} \left( \rho \mathbf{a}_\rho + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{a}_\phi + z \mathbf{a}_z \right), 4,472 \mathbf{a}_\rho + 0,8944 \mathbf{a}_\phi + 2,236 \mathbf{a}_z$
- 2.15 (a) Uma linha infinita paralela ao eixo  $z$   
 (b) Ponto  $(2, -1, 10)$   
 (c) Um círculo de raio  $r \sin \theta = 5$ , isto é, a intersecção entre um cone e uma esfera  
 (d) Uma linha infinita paralela ao eixo  $z$   
 (e) Uma linha semi-infinita paralela ao plano  $x-y$   
 (f) Um semicírculo de raio 5 no plano  $x-y$
- 2.17 (a)  $\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 7 \mathbf{a}_z$   
 (b)  $143,26^\circ$   
 (c)  $-8,789$
- 2.19 (a)  $-\mathbf{a}_\theta$   
 (b)  $0,6931 \mathbf{a}_\theta$   
 (c)  $-\mathbf{a}_\theta + 0,6931 \mathbf{a}_\phi$   
 (d)  $0,6931 \mathbf{a}_\phi$
- 2.21 (a)  $3 \mathbf{a}_\phi + 25 \mathbf{a}_z, -15,6 \mathbf{a}_r + 10 \mathbf{a}_\phi$   
 (b)  $2,071 \mathbf{a}_\rho - 1,354 \mathbf{a}_\phi + 0,4141 \mathbf{a}_z$   
 (c)  $\pm (0,5365 \mathbf{a}_r - 0,1073 \mathbf{a}_\theta + 0,8371 \mathbf{a}_\phi)$
- 2.23  $(\sin \theta \cos^3 \phi + 3 \cos \theta \sin^2 \phi) \mathbf{a}_r + (\cos \theta \cos^3 \phi + 2 \operatorname{tg} \theta \cos \theta \sin^2 \phi - \sin \theta \sin^2 \phi) \mathbf{a}_\theta + \sin \phi \cos \phi (\sin \phi - \cos \phi) \mathbf{a}_\phi$

## CAPÍTULO 3

- 3.1 (a) 2,356  
 (b) 0,5236  
 (c) 4,189
- 3.3 (a) 6  
 (b) 110  
 (c) 4,538
- 3.5 0,6667
- 3.7 (a) -50  
 (b) -39,5
- 3.9  $4\mathbf{a}_\rho + 1,333\mathbf{a}_z$
- 3.11 (a) (-2, 0, 6,2)  
 (b)  $-2\mathbf{a}_x + (2,4t + 5)\mathbf{a}_z$  m/s
- 3.13 (a)  $-0,5578\mathbf{a}_x - 0,8367\mathbf{a}_y - 3,047\mathbf{a}_z$   
 (b)  $2,5\mathbf{a}_\rho + 2,5\mathbf{a}_\phi - 17,32\mathbf{a}_z$   
 (c)  $-\mathbf{a}_x + 0,866\mathbf{a}_y$
- 3.15 Ao longo de  $2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$
- 3.17 (a)  $-y^2\mathbf{a}_x + 2z\mathbf{a}_y - x^2\mathbf{a}_z, 0$   
 (b)  $(\rho^2 - 3z^2)\mathbf{a}_\theta + 4\rho^2\mathbf{a}_\phi, 0$   
 (c)  $-\frac{1}{r}\cotg\theta\cos\phi + \frac{1}{r^3}\left(\frac{\cos\phi}{\sen\theta} + \cos\theta\right)\mathbf{a}_\theta, 0$
- 3.19 (a) A demonstração  
 (b)  $2xyz$
- 3.21  $2(z^2 - y^2 - y)$
- 3.23 A demonstração
- 3.25 (a)  $6yz\mathbf{a}_x + 3xy^2\mathbf{a}_y + 3x^2yz\mathbf{a}_z$   
 (b)  $4yz\mathbf{a}_x + 3xy^2\mathbf{a}_y + 4x^2yz\mathbf{a}_z$   
 (c)  $6xyz + 3xy^3 + 3x^2yz$   
 (d)  $2(x^2 + y^2 + z^2)$
- 3.27 A demonstração
- 3.29 (a)  $(6xy^2 + 2x^2 + x^5y^2)e^{xz}; 24,46$   
 (b)  $3z(\cos\phi + \sen\phi), -8,1961$   
 (c)  $e^{-r}\sen\theta\cos\phi\left(1 - \frac{4}{r}\right); 0,8277$
- 3.31 (a)  $\frac{7}{6}$   
 (b)  $\frac{7}{6}$   
 (c) Sim
- 3.33 50,265
- 3.35 (a) A demonstração, ambos os lados iguais a 1,667  
 (b) A demonstração, ambos os lados iguais a 131,57  
 (c) A demonstração, ambos os lados iguais a 136,23
- 3.37 (a)  $4\pi - 2$   
 (b)  $7\pi$
- 3.39 0
- 3.41 A demonstração
- 3.43 A demonstração
- 3.45  $\alpha = 1 = \beta = \gamma, -1$

## CAPÍTULO 4

4.1  $-5,746\mathbf{a}_x - 1,642\mathbf{a}_y + 4,104\mathbf{a}_z \text{ mN}$

- 4.3 (a)  $-3,463 \text{ nC}$   
 (b)  $-18,7 \text{ nC}$

- 4.5 (a)  $0,5 \text{ C}$   
 (b)  $1,206 \mu\text{C}$   
 (c)  $157,9 \text{ nC}$

4.7  $-2,545\mathbf{a}_x + 1,054\mathbf{a}_y \text{ MV/m}$

4.9  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}$

- 4.11 (a) A demonstração  
 (b)  $0,4 \text{ mC}; 31,61\mathbf{a}_z \mu\text{V/m}$

4.13  $-0,591\mathbf{a}_x - 0,18\mathbf{a}_z \text{ N}$

4.15 A dedução

- 4.17 (a)  $8,84xy\mathbf{a}_x + 8,84x^2\mathbf{a}_y \text{ pC/m}^2$   
 (b)  $8,84y \text{ pC/m}^3$

4.19  $5,357 \text{ kJ}$

4.21 A demonstração

$$4.23 D_\rho = \begin{cases} 0, & \rho < 1 \\ \frac{8(\rho^3 - 1)}{2\rho}, & 1 < \rho < 2 \\ \frac{28}{\rho}, & \rho > 2 \end{cases}$$

4.25  $1,050 \text{ J}$

- 4.27 (a)  $-1,250 \text{ J}$   
 (b)  $-3,750 \text{ nJ}$   
 (c)  $0 \text{ J}$   
 (d)  $-8,750 \text{ nJ}$

- 4.29 (a)  $-2x\mathbf{a}_x - 4y\mathbf{a}_y - 8z\mathbf{a}_z$   
 (b)  $-(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z) \cos(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$   
 (c)  $-2\rho(z+1) \sin\phi \mathbf{a}_\rho - \rho(z+1) \cos\phi \mathbf{a}_\theta - \rho^2 \sin\phi \mathbf{a}_z$   
 (d)  $e^{-r} \sin\theta \cos 2\phi \mathbf{a}_r - \frac{e^{-r}}{r} \cos\theta \cos 2\phi \mathbf{a}_\theta + \frac{2e^{-r}}{r} \sin 2\phi \mathbf{a}_\phi$

- 4.31 (a)  $72\mathbf{a}_x + 27\mathbf{a}_y - 36\mathbf{a}_z \text{ V/m}$   
 (b)  $-30,95 \text{ pC}$

4.33 A demonstração

$$4.35 \text{ (a) } \frac{2\rho_o}{15\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r, \frac{2\rho_o}{15\epsilon_0 r} \\ \text{ (b) } \frac{\rho_o}{\epsilon_0} \left( \frac{a^2 r}{3} - \frac{r^3}{5} \right) \mathbf{a}_r, \frac{\rho_o}{\epsilon_0} \left( \frac{r^4}{20} - \frac{a^2 r^2}{6} \right) + \frac{2 \rho_o}{15\epsilon_0} + \frac{7 \rho_o a^4}{60\epsilon_0} \\ \text{ (c) } \frac{8\pi \rho_o}{15}$$

(d) A demonstração

- 4.37 (a)  $-1,136 \mathbf{a}_y \text{ kV/m}$   
 (b)  $(\mathbf{a}_x + 0,2\mathbf{a}_y) \times 10^7 \text{ m/s}$

4.39 A demonstração,  $\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \sin\theta \sin\phi \mathbf{a}_r - \cos\theta \sin\phi \mathbf{a}_\theta - \cos\phi \mathbf{a}_\phi) \text{ V/m}$

4.41  $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$

4.43  $6,612 \text{ nJ}$

**CAPÍTULO 5**

- 5.1  $-6,283 \text{ A}$   
 5.3  $5,026 \text{ A}$   
 5.5 (a)  $-16xyz \epsilon_0$ , (b)  $-1,131 \text{ mA}$   
 5.7 (a)  $3,5 \times 10^7 \text{ S/m}$ , alumínio  
      (b)  $5,66 \times 10^6 \text{ A/m}^2$   
 5.9 (a)  $0,27 \text{ m}\Omega$   
      (b)  $50,3 \text{ A}$  (cobre);  $9,7 \text{ A}$  (aço)  
      (c)  $0,322 \text{ m}\Omega$   
 5.11  $1,000182$   
 5.13 (a)  $12,73z\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$ ,  $12,73 \text{ nC/m}^3$   
      (b)  $7,427z\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$ ,  $-7,472 \text{ nC/m}^3$   
 5.15 (a)  $\frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$   
      (b) 0  
      (c)  $-\frac{Q}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$ ,  $\frac{Q}{4\pi b^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)$   
 5.17  $-24,72\mathbf{a}_x - 32,95\mathbf{a}_y + 98,86\mathbf{a}_z \text{ V/m}$   
 5.19 (a) A demonstração  
      (b)  $\frac{\rho_0 d^2}{3\epsilon_0}$   
 5.21 (a)  $0,442\mathbf{a}_x + 0,442\mathbf{a}_y + 0,1768\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$   
      (b)  $0,2653\mathbf{a}_x + 0,5305\mathbf{a}_y + 0,7958\mathbf{a}_z$   
 5.23 (a)  $46,23 \text{ A}$   
      (b)  $45,98 \mu\text{C/m}^3$   
 5.25 (a)  $18,2 \mu\text{s}$   
      (b)  $20,58$   
      (c)  $19,23\%$   
 5.27 (a)  $-1,061\mathbf{a}_x + 1,768\mathbf{a}_y + 1,547\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$   
      (b)  $-0,7958\mathbf{a}_x + 1,326\mathbf{a}_y + 1,161\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$   
      (c)  $39,79^\circ$   
 5.29 (a)  $387,8\mathbf{a}_\rho - 452,4\mathbf{a}_\phi + 678,6\mathbf{a}_z \text{ V/m}$ ,  $12\mathbf{a}_\rho - 14\mathbf{a}_\phi + 21\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$   
      (b)  $4\mathbf{a}_\rho - 2\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$ , 0  
      (c)  $12,62 \text{ mJ/m}^3$  para a região 1 e  $9,839 \text{ mJ/m}^3$  para a região 2  
 5.31 (a)  $705,9 \text{ V/m}$ ,  $0^\circ$  (vidro),  $6,000 \text{ V/m}$ ,  $0^\circ$  (ar)  
      (b)  $1,940,5 \text{ V/m}$ ,  $84,6^\circ$  (vidro),  $2,478,6 \text{ V/m}$ ,  $51,2^\circ$  (ar)  
 5.33 (a)  $381,97 \text{ nC/m}^2$   
      (b)  $\frac{0,955\mathbf{a}_r}{r^2} \text{ nC/m}^2$   
      (c)  $12,96 \mu\text{J}$

## CAPÍTULO 6

6.1  $120\mathbf{a}_x + 120\mathbf{a}_y - 24\mathbf{a}_z; 530,52 \text{ pC/m}^3$   
 6.3 (a)  $\frac{\rho_0 x^3}{6d\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0} + \left( \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0} \right) x, \left( \frac{\rho_0 x^2}{2d\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} - \frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0} \right) \mathbf{a}_x$   
 (b)  $\frac{\rho_0 d}{3} - \frac{\varepsilon_0 V_0}{d}, \frac{\varepsilon_0 V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6}$

6.5  $157,08y^4 - 942,5y^2 + 30,374 \text{ kV}$

6.7 A demonstração

6.9 A demonstração

6.11  $25z \text{ kV}, -25\mathbf{a}_z \text{ kV/m}, -332\mathbf{a}_n \text{ nC/m}^2, \pm 332\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$

6.13  $9,52 \text{ V}; 18,205\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}; 0,161\mathbf{a}_\rho \text{ nC/m}^2$

6.15  $11,7 \text{ V}; -17,86\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$

6.17 A dedução

$$6.19 \text{ (a)} \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{ímpar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{b}(a-y)}{n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}}$$

$$\text{(b)} \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{ímpar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{a}}{n \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a}}$$

$$\text{(c)} \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{ímpar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{b}(a-x)}{n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}}$$

6.21 A demonstração

6.23 A demonstração

6.25 A demonstração

6.27  $0,5655 \text{ cm}^2$

6.29 A demonstração

6.31 (a)  $100 \text{ V}$

(b)  $99,5 \text{ nC/m}^2, -99,5 \text{ nC/m}^2$

6.33 (a)  $25 \text{ pF}$

(b)  $63,662 \text{ nC/m}^2$

$$6.35 \frac{4\pi}{\frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{c} - \frac{1}{d}} + \frac{\varepsilon_2}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} + \frac{\varepsilon_3}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}}$$

6.37  $21,85 \text{ pF}$

6.39  $693,1 \text{ s}$

6.41 A demonstração

6.43 A demonstração

6.45  $0,7078 \text{ mF}$

6.47 (a)  $1 \text{ nC}$

(b)  $5,25 \text{ nN}$

6.49  $-0,1891(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)\mathbf{N}$

6.51 (a)  $-138,24\mathbf{a}_x - 184,32\mathbf{a}_z \text{ V/m}$

(b)  $-1,018 \text{ nC/m}^2$

## CAPÍTULO 7

- 7.1 (b)  $0,2753\mathbf{a}_x + 0,382\mathbf{a}_y + 0,1404\mathbf{a}_z$  A/m  
 7.3  $0,9549\mathbf{a}_x$  A/m  
 7.5 (a)  $28,47 \mathbf{a}_y$  mA/m  
     (b)  $-13\mathbf{a}_x + 13\mathbf{a}_y$  mA/m  
     (c)  $-5,1\mathbf{a}_x + 1,7\mathbf{a}_y$  mA/m  
     (d)  $5,1\mathbf{a}_x + 1,7\mathbf{a}_y$  mA/m  
 7.7 (a)  $-0,6792\mathbf{a}_z$  A/m  
     (b)  $0,1989\mathbf{a}_z$  mA/m  
     (c)  $0,1989\mathbf{a}_x + 0,1989\mathbf{a}_y$  A/m  
 7.9 (a)  $1,964\mathbf{a}_z$  A/m  
     (b)  $1,78\mathbf{a}_z$  A/m  
     (c)  $-0,1178\mathbf{a}_z$  A/m  
     (d)  $-0,3457\mathbf{a}_x - 0,3165\mathbf{a}_y + 0,1798\mathbf{a}_z$  A/m  
 7.11 (a) A demonstração  
     (b)  $1,78$  A/m;  $1,125$  A/m  
     (c) A demonstração  
 7.13 (a)  $1,36\mathbf{a}_z$  A/m  
     (b)  $0,884\mathbf{a}_z$  A/m  
 7.15 (a)  $69,63$  A/m  
     (b)  $36,77$  A/m
- 7.17 (b) 
$$H_\phi = \begin{cases} 0, & \rho < a \\ \frac{I}{2\pi\rho} \left( \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right), & a < \rho < b \\ \frac{I}{2\pi\rho}, & \rho > b \end{cases}$$
- 7.19 (a)  $-2\mathbf{a}_z$  A/m<sup>2</sup>  
     (b) A demonstração, ambos os lados iguais  $-30$  A  
 7.21 (a)  $80\mathbf{a}_\phi$  nWb/m<sup>2</sup>  
     (b)  $1,756 \mu\text{Wb}$   
 7.23 (a)  $31,43\mathbf{a}_y$  A/m  
     (b)  $12,79\mathbf{a}_x + 6,366\mathbf{a}_y$  A/m  
 7.25  $13,7$  nWb  
 7.27 (a) campo magnético  
     (b) campo magnético  
     (c) campo magnético  
 7.29  $(14\mathbf{a}_\rho + 42\mathbf{a}_\phi) \times 10^4$  A/m,  $-1,011$  Wb  
 7.31  $\frac{I_\rho}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$   
 7.33  $-\frac{40}{\mu_0 \rho^4} \mathbf{a}_z$  A/m<sup>2</sup>  
 7.35  $\frac{\mu_0 I}{28\pi} \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 9 \right) - \frac{8\mu_0 I}{7\pi} \ln \frac{\rho}{3a}$   
 7.37 (a)  $50$  A  
     (b)  $-250$  A  
 7.39 A demonstração

**CAPÍTULO 8**

- 8.1  $-4,4\mathbf{a}_x + 1,3\mathbf{a}_y + 11,4\mathbf{a}_z$  kV/m  
 8.3 (a)  $(2,1933, -3,156)$   
 (b) 1,177 J  
 8.5 (a) A demonstração  
 (b)  $\frac{2\mu_0}{R_o\rho}$   
 8.7  $-86,4\mathbf{a}_x$  pN  
 8.9  $-15,59$  mJ  
 8.11  $1,949\mathbf{a}_x$  mN/m  
 8.13  $2,133\mathbf{a}_x - 0,2667\mathbf{a}_y$  Wb/m<sup>2</sup>  
 8.15 (a)  $-18,52\mathbf{a}_z$  mWb/m<sup>2</sup>  
 (b)  $-4\mathbf{a}_z$  mWb/m<sup>2</sup>  
 (c)  $-111\mathbf{a}_r + 78,6\mathbf{a}_\theta$  mWb/m<sup>2</sup>  
 8.17 (a) 5,5  
 (b)  $81,68\mathbf{a}_x + 204,2\mathbf{a}_y - 326,7\mathbf{a}_z$   $\mu$ Wb/m<sup>2</sup>  
 (c)  $55\mathbf{a}_x + 137,5\mathbf{a}_y - 220\mathbf{a}_z$  A/m  
 (d) 9,5 mJ/m<sup>2</sup>  
 8.19 476,68 kA/m  
 8.21  $2\frac{k_0}{a}\mathbf{a}_z$   
 8.23 (a)  $25\mathbf{a}_\rho + 15\mathbf{a}_\phi - 50\mathbf{a}_z$  mWb/m<sup>2</sup>  
 (b) 666,5 J/m<sup>3</sup>; 57,7 J/m<sup>3</sup>  
 8.25  $26,83\mathbf{a}_x - 30\mathbf{a}_y + 33,96\mathbf{a}_z$  A/m  
 8.27 (a)  $-5\mathbf{a}_y$  A/m,  $-6,283\mathbf{a}_y$   $\mu$ Wb/m<sup>2</sup>  
 (b)  $-35\mathbf{a}_y$  A/m,  $-110\mathbf{a}_y$   $\mu$ Wb/m<sup>2</sup>  
 (c)  $5\mathbf{a}_y$  A/m,  $6,283\mathbf{a}_y$   $\mu$ Wb/m<sup>2</sup>  
 8.29 (a) 167,4  
 (b) 6,181 kJ/m<sup>3</sup>  
 8.31 11,58 mm  
 8.33 5.103 espiras  
 8.35 A demonstração  
 8.37 190,8 A - esp; 19,080 A/m  
 8.39 88,5 mWb/m<sup>2</sup>  
 8.41 (a) 6,66 mN  
 (b) 1,885 mN  
 8.43 A demonstração

**CAPÍTULO 9**

- 9.1 0,4738 sen 377t  
 9.3  $-54$  V  
 9.5 (a)  $-0,4t$  V  
 (b)  $-2t^2$   
 9.7 9,888  $\mu$ V, o ponto A está em um potencial mais alto  
 9.9 0,97 mV  
 9.11 6A, no sentido anti-horário  
 9.13 277,8 A/m<sup>2</sup>; 77,78 A  
 9.15 36 GHz

9.17 (a)  $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \rho_{ov}/\epsilon$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{E}_s = j\omega\mu\mathbf{H}_s$ ,  $\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma - j\omega\epsilon)\mathbf{E}_s$

(b)  $\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_v$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}$$

9.19 A demonstração

9.21  $-0,3z^2 \operatorname{sen} 10^4 t \text{ mC/m}^3$

9.23  $0,833 \text{ rad/m}$ ;  $100,5 \operatorname{sen} \beta x \operatorname{sen} \omega t \mathbf{a}_y \text{ V/m}$

9.25 (a) Sim

(b) Sim

(c) Não

(d) Não

9.27  $3 \cos \phi \cos (4 \times 10^6 t) \mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$ ;  $84,82 \cos \phi \operatorname{sen} (4 \times 10^6 t) \mathbf{a}_z \text{ kV/m}$

9.29  $(2 - \rho)(1 + t)e^{-\rho-t} \mathbf{a}_z \text{ Wb/m}^2$ ,  $\frac{(1 + t)(3 - \rho)}{4\pi} 10^7 e^{-\rho-t} \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}^2$

9.31 (a)  $6,39/242,4^\circ$

(b)  $0,2272/-202,14^\circ$

(c)  $1,387/176,8^\circ$

(d)  $0,0349/-68^\circ$

9.33 (a)  $5 \cos(\omega t - \beta x - 36,37^\circ) \mathbf{a}_y$

(b)  $\frac{20}{\rho} \cos(\omega t - 2z) \mathbf{a}_\rho$

(c)  $\frac{22,36}{r^2} \cos(\omega t - \phi + 63,43^\circ) \operatorname{sen} \theta \mathbf{a}_\theta$

9.35 A demonstração

## CAPÍTULO 10

10.1 (a) Ao longo de  $\mathbf{a}$

(b)  $1 \mu s$ ;  $1,047 \text{ m}$ ;  $1,047 \times 10^6 \text{ m/s}$

(c) Veja Figura C.1

10.3 (a)  $5,4105 + j6,129 \text{ /m}$

(b)  $1,025 \text{ m}$

(c)  $5,125 \times 10^7 \text{ m/s}$

(d)  $101,41/41,44^\circ \Omega$

(e)  $-59,16e^{-j41,44^\circ} e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y \text{ mA/m}$

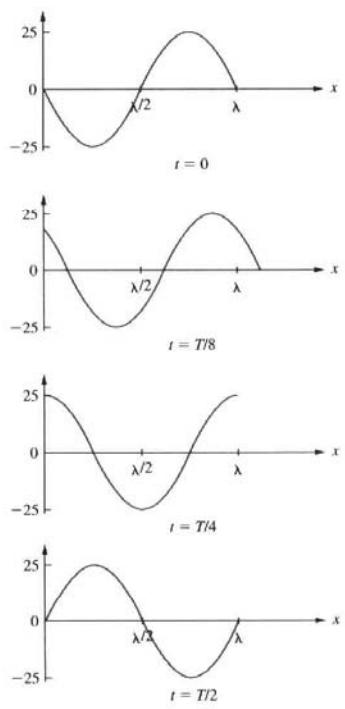


Figura C.1 Referente ao Problema 10.1.

- 10.5** (a) 1,732  
 (b) 1,234  
 (c)  $(1,091 - j1,89) \times 10^{-11}$  F/m  
 (d) 0,0164 Np/m
- 10.7** (a)  $5 \times 10^5$  m/s  
 (b) 5 m  
 (c) 0,796 m  
 (d)  $14,05\angle45^\circ$  Ω
- 10.9** (a)  $0,05 + j2$  /m  
 (b) 3,142 m  
 (c)  $10^8$  m/s  
 (d) 20 m
- 10.11** (a) ao longo de  $-x$   
 (b)  $7,162 \times 10^{-10}$  F/m  
 (c)  $1,074 \operatorname{sen}(2 \times 10^8 t + 6x)\mathbf{a}_z$  V/m
- 10.13** (a) sem perdas  
 (b) 12,83 rad/m; 0,49 m  
 (c) 25,66 rad  
 (d) 4,617 Ω
- 10.15** A demonstração
- 10.17**  $5,76, -0,2546 \operatorname{sen}(10^9 t - 8x)\mathbf{a}_y + 0,3183 \cos(10^9 t - 8x)\mathbf{a}_z$  A/m
- 10.19** (a) Não  
 (b) Não  
 (c) Sim

10.21 2,183 m;  $3,927 \times 10^7$  m/s10.23 0,1203 mm; 0,126  $\Omega$ 10.25  $2,94 \times 10^{-6}$  m10.27 (a) 131,6  $\Omega$ (b)  $0,1184 \cos^2(2\pi \times 10^8 t - 6x)\mathbf{a}_x$  W/m<sup>2</sup>

(c) 0,3535 W

10.29 (a)  $2,828 \times 10^8$  rad/s,  $\frac{0,225}{\rho} \sin(\omega t - 2z)\mathbf{a}_\phi$  A/m(b)  $\frac{9}{\rho^2} \sin^2(\omega t - 2z)\mathbf{a}_z$  W/m<sup>2</sup>

(c) 11,46 W

10.31 (a)  $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2$ (b)  $-10 \cos(\omega t + z)\mathbf{a}_x$  V/m;  $26,53 \cos(\omega t + z)\mathbf{a}_y$  mA/m10.33  $26,038 \times 10^{-6}$  H/m10.35 (a)  $0,5 \times 10^8$  rad/m

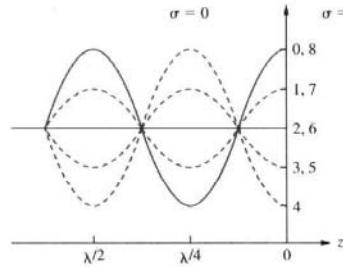
(b) 2

(c)  $-26,53 \cos(0,5 \times 10^8 t + z)\mathbf{a}_x$  mA/m(d)  $1,061\mathbf{a}_z$  W/m<sup>2</sup>10.37 (a) 6,283 m,  $3 \times 10^8$  rad/s,  $7,32 \cos(\omega t - z)\mathbf{a}_y$  V/m(b)  $-0,0265 \cos(\omega t - z)\mathbf{a}_x$  A/m(c)  $-0,268; 0,732$ (d)  $\mathbf{E}_1 = 10 \cos(\omega t - z)\mathbf{a}_y - 2,68 \cos(\omega t + z)\mathbf{a}_y$  V/m, $\mathbf{E}_2 = 7,32 \cos(\omega t - z)\mathbf{a}_y$  V/m,  $P_{1\text{med}} = 0,1231\mathbf{a}_z$  W/m<sup>2</sup>, $P_{2\text{med}} = 0,1231\mathbf{a}_z$  W/m<sup>2</sup>

10.39 Veja Figura C.2.

10.41 A demonstração,  $\mathbf{H}_x = \frac{-j20}{\omega\mu_0} [k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \mathbf{a}_x + k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \mathbf{a}_y]$ 

10.43 (a) 36,87°

(b)  $79,58\mathbf{a}_y + 106,1\mathbf{a}_z$  mW/m<sup>2</sup>(c)  $(-1,518\mathbf{a}_y + 2,024\mathbf{a}_z) \sin(\omega t + 4y - 3z)$  V/m,  $(1,877\mathbf{a}_y - 5,968\mathbf{a}_z) \sin(\omega t - 9,539y - 3z)$  V/m10.45 (a)  $15 \times 10^8$  rad/s(b)  $(-8\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z) \sin(15 \times 10^8 t + 3x + 4y)$  V/mFigura C.2 Referente ao Problema 10.39; curva  $n$  correspondente ao  $t = nT/8$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**CAPÍTULO 11**

- 11.1  $0,0104 \Omega/m$ ;  $50,26 \text{ nH/m}$ ;  $221 \text{ pF/m}$ ,  $0 \text{ S/m}$   
 11.3 A demonstração  
 11.5 (a)  $13,34/-36,24^\circ$ ;  $2,148 \times 10^7 \text{ m/s}$   
 (b)  $1,606 \text{ m}$   
 11.7 A demonstração  
 11.9  $\frac{V_o}{Z_o} \sin(\omega t - \beta z) \text{ A}$   
 11.11 A demonstração  
 (b) (i)  $\frac{2n}{n+1}$   
 (ii) 2  
 (iii) 0  
 (iv) 1  
 11.13  $798,3 \text{ rad/m}$ ;  $3,542 \times 10^7 \text{ m/s}$   
 11.15 A demonstração  
 11.17 (a)  $0,4112, 2,397$   
 (b)  $34,63/-40,65^\circ \Omega$   
 11.19  $0,2/40^\circ \text{ A}$   
 11.21 (a)  $46,87 \Omega$   
 (b)  $48,39 \text{ V}$   
 11.23 A demonstração  
 11.25  $10,2 + j13,8 \Omega$ ;  $0,7222/154^\circ$ ;  $6,2$   
 11.27 (a)  $j300 \Omega$   
 (b)  $15 + j0,75 \Omega$   
 11.29  $0,35 + j0,24$   
 11.31 (a)  $125 \text{ MHz}$   
 (b)  $72 + j72 \Omega$   
 (c)  $0,444/120^\circ$   
 11.33 (a)  $35 + j34 \Omega$   
 (b)  $0,375\lambda$   
 11.35 (a)  $24,5 \Omega$   
 (b)  $55,33 \Omega$ ;  $67,74 \Omega$   
 11.37  $10,25 \text{ W}$   
 11.39  $20 + j15 \text{ mS}$ ,  $-j10 \text{ mS}$ ,  $-6,408 + j5,189 \text{ mS}$ ,  $20 + j15 \text{ mS}$ ,  $j10 \text{ mS}$ ,  
 $2,461 + j5,691 \text{ mS}$   
 11.41 (a)  $34,2 + j41,4 \Omega$   
 (b)  $0,38\lambda$ ;  $0,473\lambda$   
 (c)  $2,65$   
 11.43  $4,0,6/-90^\circ$ ;  $27,6 - j52,8 \Omega$   
 11.45  $2,11; 1,764 \text{ GHz}$ ;  $0,357/-44,5^\circ$ ;  $70 - j40 \Omega$   
 11.47 Veja Figura C.3.  
 11.49 Veja Figura C.4.  
 11.51 (a)  $77,77 \Omega$ ;  $1,8$   
 (b)  $0,223 \text{ dB/m}$ ;  $4,974 \text{ dB/m}$   
 (c)  $3,848 \text{ m}$   
 11.53  $9,112 \Omega < Z_o < 21,03 \Omega$

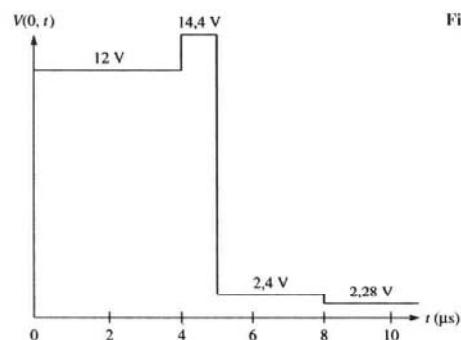


Figura C.3 Referente ao Problema 11.47.

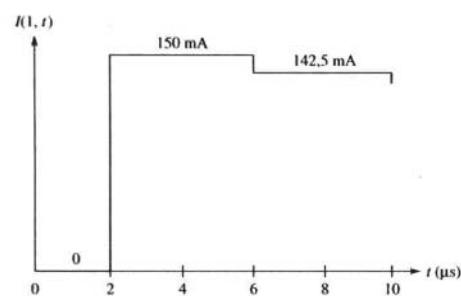
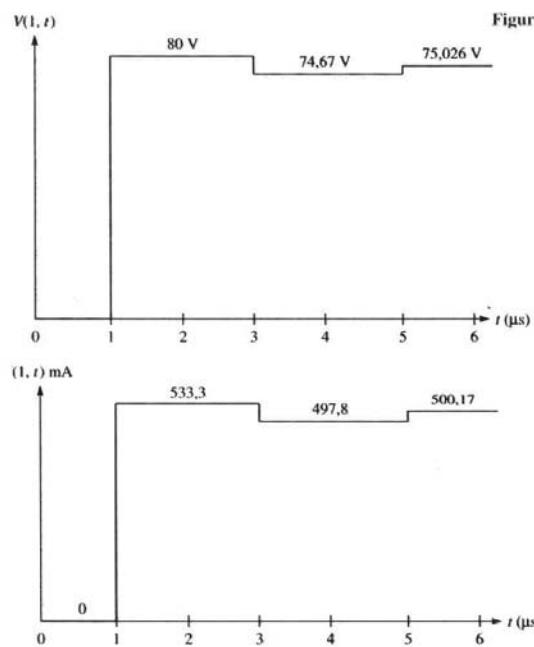


Figura C.4 Referente ao Problema 11.49.



## CAPÍTULO 12

- 12.1 A demonstração  
 12.3 (a) Veja Tabela C.1  
 (b)  $\eta_{TE13} = 573,83 \Omega$ ;  $\eta_{TM15} = 3,058 \Omega$   
 (c)  $3,096 \times 10^7 \text{ m/s}$   
 12.5 (a) Não  
 (b) Sim  
 12.7 430 ns  
 12.9 375,1  $\Omega$ ; 0,8347 W  
 12.11 (a) TE<sub>23</sub>  
 (b)  $j400,7/\text{m}$   
 (c) 985,3  $\Omega$   
 12.13 (a) A demonstração  
 (b)  $4,06 \times 10^8 \text{ m/s}$ ; 2,023 cm;  $5,669 \times 10^8 \text{ m/s}$ ; 2,834 cm

TABELA C.1

Modo	$f_c$ (GHz)
TE <sub>01</sub>	0,8333
TE <sub>10</sub> , TE <sub>02</sub>	1,667
TE <sub>11</sub> , TM <sub>11</sub>	1,863
TE <sub>12</sub> , TM <sub>12</sub>	2,357
TE <sub>03</sub>	2,5
TE <sub>13</sub> , TM <sub>13</sub>	3
TE <sub>04</sub>	3,333
TE <sub>14</sub> , TM <sub>14</sub>	3,727
TE <sub>05</sub> , TE <sub>23</sub> , TM <sub>23</sub>	4,167
TE <sub>15</sub> , TM <sub>15</sub>	4,488

- 12.15 (a) 1,193  
 (b) 0,8381  
 12.17 4,917  
 12.19  $\frac{\omega^2 \mu^2 b^3 a}{4\pi^2 \eta} H_0^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi y}{b} \mathbf{a}_z, \frac{\omega^2 \mu^2 ab^3 H_0}{4\pi^2 \eta}$   
 12.21 0,04637 Np/m; 4,811 m  
 12.23 (a)  $2,165 \times 10^{-2}$  Np/m  
 (b)  $4,818 \times 10^{-3}$  Np/m  
 12.25 A demonstração  
 12.27 A demonstração,  $-\frac{1}{h^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{p\pi}{c} \right) H_0 \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \cos \left( \frac{p\pi z}{c} \right)$   
 12.29 (a) TE<sub>011</sub>  
 (b) TM<sub>110</sub>  
 (c) TE<sub>101</sub>  
 12.31 Veja Tabela C.2

TABELA C.2

Modo	$f_i$ (GHz)
011	1,9
110	3,535
101	3,333
102	3,8
120	4,472
022	3,8

12.33 (a) 6,629 GHz

(b) 6,387

12.35  $2,5(-\sin 30\pi x \cos 30\pi y \mathbf{a}_x + \cos 30\pi x \sin 30\pi y \mathbf{a}_y) \operatorname{sen} 6 \times 10^9$ 

## CAPÍTULO 13

13.1  $-\frac{50\eta\beta}{\mu r} \operatorname{sen}(\omega t - \beta r)(-\operatorname{sen}\phi \mathbf{a}_\phi + \cos\theta \cos\phi \mathbf{a}_\theta) \text{ V/m}$

$-\frac{50\beta}{\mu r} \operatorname{sen}(\omega t - \beta r)(\operatorname{sen}\phi \mathbf{a}_\theta + \cos\theta \cos\phi \mathbf{a}_\phi) \text{ A/m}$

13.3 94,25 mV/m;  $j0,25 \text{ mA/m}$ 13.5  $1,974 \Omega$ 

13.7 28,47 A

13.9 (a)  $E_{\theta s} = \frac{j\eta I_s \beta \ell e^{-j\beta r} \operatorname{sen}\theta}{8\pi r}, H_{\phi s} = \eta E_{\theta s}$

(b) 1,5

13.11 (a)  $0,9071 \mu\text{A}$ 

(b) 25 nW

13.13 Veja Figura C.5

13.15 Veja Figura C.6

13.17  $8 \operatorname{sen}\theta \cos\phi, 8$ 13.19 (a)  $1,5 \operatorname{sen}\theta$ 

(b) 1,5

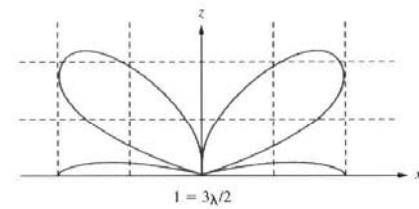
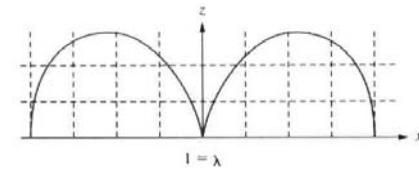


Figura C.5 Referente ao Problema 13.13.



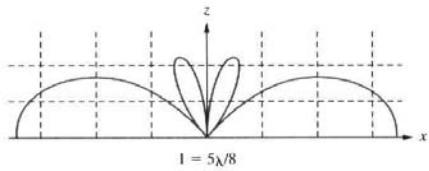


Figura C.5 Continuação.

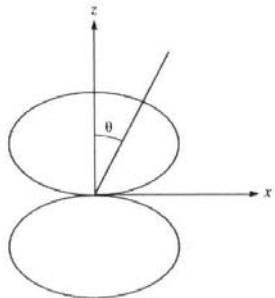


Figura C.6 Referente ao Problema 13.15.

$$(c) \frac{1,5\lambda^2 \sin^2 \theta}{4\pi}$$

$$(d) 3,084 \Omega$$

13.21 99,97%

13.23 (a)  $1,5 \sin^2 \theta, 5$ 

$$(b) 6 \sin^2 \theta \cos^2 \phi, 6$$

$$(c) 66,05 \cos^2 \theta \sin^2 \phi/2, 66,05$$

$$13.25 \frac{j\eta\beta I_o d\ell}{2\pi r} \sin \theta \cos \left( \frac{1}{2} \beta d \cos \theta \right) \mathbf{a}_\theta$$

13.27 Veja Figura C.7

13.29 Veja Figura C.8

13.31 0,2686

13.33 (a) A demonstração

$$(b) 12,8 \mu\text{W}$$

13.35 21,28 pW

13.37 19 dB

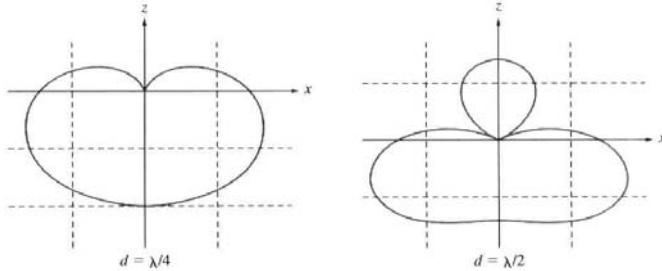


Figura C.7 Referente ao Problema 13.27.

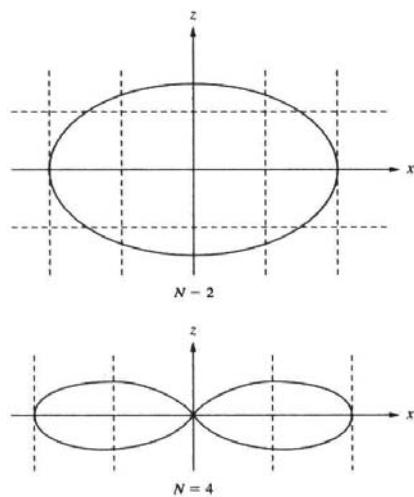


Figura C.8 Referente ao Problema 13.29.

- 13.39 (a) 1,708 V/m  
 (b)  $11,36 \mu\text{V}/\text{m}$   
 (c) 30,95 mW  
 (d) 1,91 pW
- 13.41 77,52 W

## CAPÍTULO 14

- 14.1 A discussão  
 14.3  $0,33 - j0,15; 0,5571 - j0,626$   
 14.5 3,571  
 14.7 A demonstração  
 14.9 1,428  
 14.11 (a) 0,2271  
 (b)  $13,13^\circ$   
 (c) 376  
 14.13 (a)  $29,23^\circ$   
 (b) 63,1%  
 14.15  $\alpha_{10} = 8.686 \alpha_{14}$   
 14.17 A discussão

## CAPÍTULO 15

- 15.1 Veja Figura C.9  
 15.3 (a) 10,117, 1,56  
      (b) 10,113, 1,506  
 15.5 A demonstração  
 15.7 6 V, 14 V  
 15.9  $V_1 = V_2 = 37,5; V_3 = V_4 = 12,5$

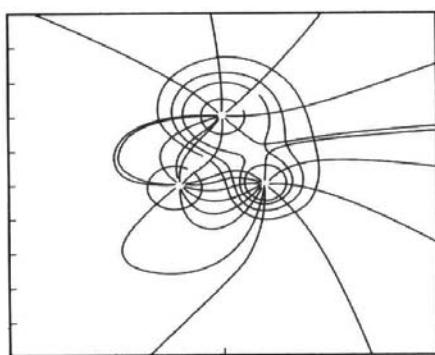
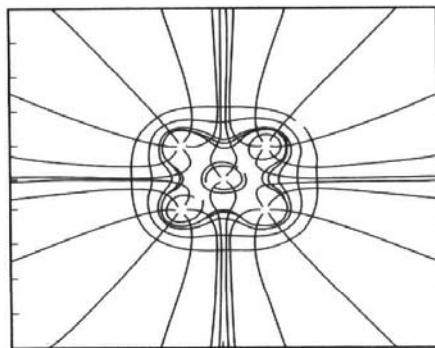


Figura C.9 Referente ao Problema 15.1.



15.11 (a) Matriz  $[A]$  permanece a mesma mas  $-h^2 ps/\epsilon$  deve ser adicionado a cada um dos termos da matriz  $[B]$ .

- (b)  $V_a = 4,276, V_b = 9,577, V_c = 11,126$   
 $V_d = -2,013, V_e = 2,919, V_f = 6,069$   
 $V_g = -3,424, V_h = -0,109, V_i = 2,909$

15.13 O resultado numérico está completamente de acordo com a solução exata, por exemplo, para  $t = 0$ ,

$$V(0, 0) = 0; V(0,1, 0) = 0,3090; V(0,2, 0) = 0,5878; V(0,3, 0) = 0,809;$$

$$V(0,4, 0) = 0,9511; V(0,5, 0) = 1,0; V(0,6, 0) = 0,9511, \text{ etc.}$$

- 15.15 12,77 pF/m (numérico); 12,12 pF/m (exato)  
 15.17 Veja Tabela C.3

TABELA C.3

$\theta$ (graus)	$C$ (pF)
10	8,5483
20	9,0677
30	8,893
40	8,606
.	.
.	.
170	11,32
180	8,6278

- 15.19 (a) Exata:  $C = 80,26$  pF/m,  $Z_o = 41,56 \Omega$ ; para solução numérica, veja Tabela C.4

TABELA C.4

$N$	$C$ (pF/m)	$Z_o$ ( $\Omega$ )
10	82,386	40,486
20	80,966	41,197
40	80,438	41,467
100	80,025	41,562

- (b) Para os resultados numéricos, veja Tabela C.5

TABELA C.5

$N$	$C$ (pF/m)	$Z_o$ ( $\Omega$ )
10	109,51	30,458
20	108,71	30,681
40	108,27	30,807
100	107,93	30,905

- 15.21 A demonstração

- 15.23 (a) Em  $(1,5; 0,5)$  ao longo do trecho 12 e em  $(0,9286; 0,9286)$  ao longo do trecho 13.  
 (b) 56,67 V

$$15.25 \begin{bmatrix} 0,8788 & -0,208 & 0 & -0,6708 \\ -2,08 & 1,528 & -1,2 & -0,1248 \\ 0 & -1,2 & 1,408 & -0,208 \\ -0,6708 & -0,1248 & -0,208 & 1,0036 \end{bmatrix}$$

- 15.27 18 V, 20 V

- 15.29 Veja Tabela C.6

TABELA C.6

Nodo nº	FEM	Exata
8	4,546	4,366
9	7,197	7,017
10	7,197	7,017
11	4,546	4,366
14	10,98	10,66
15	17,05	16,84
16	17,05	16,84
17	10,98	10,60
20	22,35	21,78
21	32,95	33,16
22	32,95	33,16
23	22,35	21,78
26	45,45	45,63
27	59,49	60,60
28	59,49	60,60
29	45,45	45,63

15.31 A demonstração.

## Apêndice D

### LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos	Grandeza	Unidades	Dimensões*
<b>A. Alfabeto normal</b>			
<b>A</b>	Potencial Magnético Vetorial função vetorial em geral	weber/metro	$ML/TQ$
$A_e$	área efetiva	metro <sup>2</sup>	$L^2$
$\hat{e}_A$	vetor unitário ao longo de <b>A</b>	—	—
<b>B</b>	densidade de fluxo magnético	weber/metro <sup>2</sup>	$M/TQ$
<b>C</b>	capacitância	farad	$T^2 Q^2 / ML^2$
<b>c</b>	velocidade da luz no vácuo	metro/segundo	$LT$
<b>D</b>	densidade de fluxo elétrico ou deslocamento elétrico	coulomb.metro <sup>2</sup>	$Q/L^2$
<b>D</b>	diretividade	—	—
$d\ell$	elemento diferencial de comprimento	metro	$L$
$dS$	elemento diferencial de superfície	metro <sup>2</sup>	$L^2$
$dv$	elemento diferencial de volume	metro <sup>3</sup>	$L^3$
<b>E</b>	intensidade de campo elétrico ou rigidez elétrica	volt/metro	$ML^2 T^2 Q$
<b>e</b>	carga elétrica	coulomb	$Q$
<b>F</b>	força	newton	$MLT^2$
<b>f</b>	freqüência	hertz	$1/T$
$f_c$	freqüência de corte	hertz	$1/T$
<b>G</b>	condutância	mho	$QT^2 / ML^2$
$G_d$	ganho diretivo	—	—
$G_p$	ganho de potência	—	—
<b>H</b>	intensidade de campo magnético	ampère/metro	$Q/TL$
<b>I</b>	corrente	ampère	$Q/T$
<b>J</b>	densidade de corrente em um volume	ampère.metro <sup>2</sup>	$Q/TL^2$
$J_d$	densidade de corrente de deslocamento	ampère.metro <sup>2</sup>	$Q/TL^2$
$j$	$\sqrt{-1}$	—	—
<b>K</b>	densidade de corrente em uma superfície	ampère/metro	$Q/TL$
<b>L</b>	indutância	henry	$ML^2 / Q^2$
$L_{ext}$	indutância externa	henry	$ML^2 / Q^2$
$L_{int}$	indutância interna	henry	$ML^2 / Q^2$
<b>M</b>	magnetização	ampère/metro	$Q/LT$
<b>m</b>	momento magnético	ampère-metro <sup>2</sup>	$QL^2 / T$
<b>m</b>	massa	quilograma	$M$
<b>n</b>	índice de refração	—	—
<b>P</b>	polarização	coulomb.metro <sup>2</sup>	$Q/L^2$
<b>P</b>	potência	watt	$ML^2 T^4$
$P_{med}$	potência média no tempo	watt	$ML^2 T^4$
<b>P</b>	momento de dipolo	coulomb/metro	$QL$
$q, Q$	carga	coulomb	$Q$
<b>R</b>	resistência	ohm	$ML^2 / TQ^2$
$R_u$	resistência de radiação	ohm	$ML^2 / TQ^2$

\* N. de T. Esta coluna indica as dimensões fundamentais usando os símbolos **M** (massa), **L** (comprimento), **T** (tempo) e **Q** (carga elétrica).

Símbolos	Grandeza	Unidades	Dimensões
$r, \phi, \theta$	coordenadas esféricas	metro, radiano, radiano metro <sup>2</sup>	$L, —, —$ $L^2$
$S$	área de uma superfície	—	—
$s$	relação de onda estacionária	—	—
$T$	torque	newton-metro	$ML^2/T^2$
$t$	tempo	segundo	$T$
$u$	velocidade	metro/segundo	$M/T$
$V$	potencial	volt	$ML^2/T^2 Q$
$v$	função escalar em geral	metro <sup>3</sup>	$L^3$
$W$	volume	joule	$ML^2/T^2$
$w$	energia, trabalho	joule/metro <sup>3</sup>	$M/LT^2$
$X$	densidade de energia	ohm	$ML^2/TQ^2$
$x, y, z$	reatância	metro	$L$
$Y$	coordenadas cartesianas	mho	$TQ^2/ML^2$
$Y_0$	admitância característica	mho	$TQ^2/ML^2$
$Z$	impedância	ohm	$ML^2/TQ^2$
	impedância por unidade	ohm/metro	$ML/TQ^2$
	de comprimento	ohm	$ML^2/TQ^2$
$Z_0$	impedância característica	ohm	$ML^2/TQ^2$
<b>B. Alfabeto grego</b>			
$\alpha$	constante de atenuação	neper/metro	$1/L$
$\beta$	constante de fase	radiano/metro	$1/L$
$\Gamma$	coeficiente de reflexão	—	—
$\delta$	profundidade pelicular	metro	$L$
$\gamma$	constante de propagação	1/metro	$1/L$
$\epsilon$	permisividade	farad/metro	$T^2 Q^2 / ML^2$
$\epsilon_0$	permisividade do espaço livre	farad/metro	$T^2 Q^2 / M L^2$
$\epsilon_r$	permisividade relativa	—	—
$\eta$	impedância intrínseca	ohm	$ML^2/TQ^2$
$\Lambda$	fluxo concatenado	weber	$ML^2/TQ$
$\lambda$	comprimento de onda	metro	$L$
$\mu$	permeabilidade	henry/metro	$ML/Q^2$
$\mu_0$	permeabilidade do	henry/metro	$ML/Q^2$
	espaço livre	—	—
$\mu_r$	permeabilidade relativa	—	—
$\rho, \phi, z$	coordenadas cilíndricas	metro, radiano, radiano	$L, —, —$
$\rho_L$	densidade de carga linear	coulomb/metro	$Q/L$
$\rho_m$	densidade de carga de	coulomb/metro <sup>2</sup>	$Q/L^2$
$\rho_{pv}$	polarização superficial	coulomb/metro <sup>3</sup>	$Q/L^3$
$\rho_p$	densidade de carga de	coulomb/metro <sup>3</sup>	$Q/L^3$
$\rho_s$	polarização volumétrica	coulomb/metro <sup>3</sup>	$Q/L^3$
$\rho_t$	densidade de carga superficial	coulomb/metro <sup>3</sup>	$Q/L^3$
$\sigma$	densidade de carga volumétrica	mho/metro	$TQ^2/ML^2$
$\tau$	condutividade	segundo	$T$
	tempo de relaxação	—	—
$\psi$	coeficiente de transmissão	—	—
	fluxo elétrico	coulomb	$Q$
	fluxo magnético	weber	$ML^2/TQ$
	fluxo em geral	—	—
$\chi_e$	susceptibilidade elétrica	—	—
$\chi_m$	susceptibilidade magnética	—	—
$\omega$	frequência angular	radiano/segundo	$1/T$
<b>C. Alfabeto especial</b>			
$\mathcal{F}$	força magnetomotriz	ampère-espira	$Q/T$
$\ell$	comprimento	metro	$L$
$\mathcal{P}$	vetor de Poynting	watt/metro <sup>2</sup>	$M/T^3$
$\mathcal{P}$	permeância	weber/ampère-espira	$ML^2/Q^2$
$\mathcal{R}$	relutância	ampère-espira/weber	$Q^2/ML^2$
$\nabla$	operador <i>del</i>	—	—

# Índice

- Abertura numérica, 582-583  
Admitância característica, 432  
Amplitude, 372-373  
Anel carregado, 120-121  
Ângulo azimutal, 42-43  
Ângulo crítico, 583-584  
Ângulo de aceitação, 583-584  
Ângulo de Brewster, 409-410  
Ângulo de incidência, 406-407  
Ângulo de perdas, 381-382  
Antena dipolo, 527  
Antena dipolo de meia onda, 531-532  
Antena isotrópica, 540-542  
Antena monopolo de quarto de onda, 534-535  
Antena pequena em anel, 535-536  
Antenas, 526-553  
tipos de, 527  
Área diferencial normal, 63-64, 66, 94  
Área efetiva, 554-555  
Arranjo de antenas, 546-553  
tipo binomial, 554-555  
tipo longitudinal, 549-550  
tipo transversal, 549-550  
Atenuação, 579-580, 584  
Aterrramento, 577-579  
Auto-indutância, 306  
  
Blindagem eletrostática, 180-181  
Bomba eletrodinâmica, 195-196  
  
Caminho amperiano, 253  
Campo conservativo, 92-93  
Campo de irradiação, 530  
Campo distante, 530  
Campo,  
classificação de, 91-94  
definição de, 20-21  
tipo harmônico no tempo, 351-352  
tipo harmônico, 89-90  
tipo uniforme, 23-24  
Campo eletrostático, 107, 530  
Campo indutivo, 530  
Campo irrotacional, 92-93  
Campo magnetostático, 243  
Campo solenoidal, 92-93  
Capacitância, 213-219  
Capacitor, 213-219  
Capacitor coaxial, 215-216  
Capacitor de placas paralelas, 214-215  
  
Capacitor esférico, 215-216  
Carga pontual, 107-108, 127-128, 227  
Carga superficial, 116-117  
Carta de Smith, 442-449  
Circulação, 68-69  
Círculo de reatâncias, 445-446  
Círculo de resistâncias, 444-445  
Coeficiente de reflexão, 398-399, 573-575  
Coeficiente de reflexão da corrente, 438  
Coeficiente de reflexão de tensão, 437-438  
Coeficiente de transmissão, 398-399  
Co-latitude, 45  
Compatibilidade eletromagnética (EMC), 575-576  
Componente escalar, 29-30  
Componentes de microondas, 570-571  
Componentes de um vetor, 21-22, 29-30  
Comprimento de onda de corte, 493-494  
Comprimento de onda no guia, 505  
Comprimento de onda, 372-373  
Comprimento elétrico, 437-438  
Condição de Lorentz, 350-351  
Condições de casamento de fase, 407-408  
Condutividade, 159-162  
valores de, 660  
Condutores, 159, 161-165  
Conexão, 577-579  
Conservação da carga, 175-176  
Conservação do fluxo magnético, 261-262  
Constante de atenuação, 380-381, 431-432  
Constante de fase, 372-373, 380-381, 431-432  
Constante de propagação, 378-379, 431-432  
Constante de separação, 202-203, 210-211  
Constante dielétrica, 171-172  
valores de, 661  
Coordenadas cartesianas, 41-42, 62  
Coordenadas circular cilíndricas, 41-42, 64  
Coordenadas esféricas, 44-45, 65  
Corrente, 159-162  
definição de, 159-160  
tipo condução, 161-162  
tipo convecção, 160-161  
tipo deslocamento, 345-346  
Corte, 493  
Curva de magnetização, 300  
  
Densidade de corrente,  
definição de, 160-161  
Densidade de corrente de deslocamento, 345  
Densidade de corrente de magnetização em  
um volume, 297  
Densidade de corrente de magnetização em  
uma superfície, 297  
Densidade de fluxo elétrico, 124-126  
Densidade de fluxo magnético, 259-260  
Densidade superficial de carga de polariza-  
ção, 169-170  
Densidade volumétrica de carga de polariza-  
ção, 169-170  
Derivada direcional, 74-75  
Derivadas, 654  
Deslocamento diferencial, 62, 64-65, 94  
Deslocamento elétrico, 125-126  
Diagrama de antena. *Veja* diagrama de irra-  
dição  
Diagrama de campo, 540  
Diagrama de escada. *Veja* diagrama de  
saltos  
Diagrama de irradiação, 540  
Diagrama de potência, 540  
Diagrama de saltos, 462-463  
Diagrama do grupo, 547-548  
Diagrama resultante, 547-548  
Diamagnetismo, 298-299  
Dielétrico com perdas, 377-378  
Dielétricos, 159  
Diferença de potencial, 134  
Diferencial de ângulo sólido, 540-542  
Diferencial de volume, 63-64, 66, 94  
Dipolo elétrico, 142  
Dipolo hertziano, 528  
Dipolo magnético, 290-291  
Diretividade, 540-542  
Dispersão, 584  
Divergência, 76-80  
definição de, 76-77  
propriedades da, 79  
  
Efeito peculiar, 386  
Eficiência da blindagem, 579  
Eficiência de conexão, 579  
Eficiência de irradiação, 543-544  
Elemento da matriz dos coeficientes, 623-  
624  
Elementos finitos, 619-620  
Eletromagnético (EM), 19  
Eletrômetro, 174-175  
Eletrostática, 107  
Emissões irradiadas, 575-576

- Energia, 145-146, 308-310  
Equação da continuidade, 175-176, 348-349  
Equação da força de Lorentz, 279-280, 347-348  
Equação de Helmholtz, 378-379  
Equação de Laplace, 89-90, 192-195, 262-263, 599-600, 627-628  
Equação de onda, 350-351, 371-372, 378-379, 431-432  
Equação de Poisson, 192-195, 267-268, 598-600, 609-610  
Equação de transmissão do radar, 560-561  
Equação diferencial de Bessel, 212-213  
Equação do alcance do radar, 560-561  
Equação integral, 609-610  
Equações das linhas de transmissão, 429-432  
Equações de diferenças, 597-598  
Equações de Fresnel, 409-412  
Equações de Maxwell, 19-20, 127, 139-140, 177, 252-253, 261-262, 335-352, 377-378, 395-396, 406-407, 487-490  
Escalar, 20-21  
Esfera carregada, 129-130  
Esfera isolada, 216-217  
Spectro, 375-376
- Fase, 372-373  
Fasor, 351-352  
Fator de qualidade, 517-519  
Fator de rede, 547-548  
Fem. *Veja* força eletromotriz  
Fem de movimento, 338-339  
Fem de transformador, 338-339  
Ferromagnetismo, 299-300  
Fibra ótica, 579-580  
definição de, 580-582  
Filtração, 579-580  
Fluxo, 68-69  
Fluxo concatenado, 306  
Fluxo elétrico, 125-126  
Força, 107-108, 279-283, 316-317  
Força de Lorentz, 279-280, 287-288  
Força eletromotriz (fem), 335-336  
Força magnetomotriz, 315  
Fórmula de transmissão de Friis, 556-557  
Frequência, 372-373  
Frequência angular, 372-373  
Frequência de corte, 487, 493-494  
Frequência de ressonância, 516-517  
Funções de forma, 621-622  
Funções hiperbólicas, 651-652
- Ganho de potência, 542-544  
Ganho diretivo, 540-542  
Gradiente, 72-75
- Histerese, 300
- Identidades exponenciais, 653  
Identidades logarítmicas, 653  
Identidades trigonométricas, 650-651  
Identidades vetoriais, 658  
Impedância característica, 431-432, 471-472  
Impedância de entrada, 435-438  
Impedância intrínseca, 379-380  
do espaço livre, 382-383  
Impedância normalizada, 443-444  
Imunidade a ruído, 579-580  
Índice de refração, 408  
Indutância, 306  
Indutância externa, 307-308  
Indutância interna, 307-308  
Indutância mútua, 306-307  
Indutor, 306  
Integrais definidas, 657  
Integrais indefinidas, 655-657  
Integral de linha, 68-69  
Integral de superfície, 68-69  
Integral de volume, 70-71  
Intensidade de campo elétrico, 109-110  
Intensidade de campo magnético, 244-245, 259-260  
Intensidade de irradiação, 541  
Interferência eletromagnética (EMI), 575-576  
Irradiação, 526  
Isolantes, 159-160. *Veja também* dielétricos
- Lâmina infinita de carga, 117-118, 129-130  
Lâmina infinita de corrente, 254-255  
Laplaciano, 88-91  
Largura da banda, 570, 579-580  
Lei da refração, 179-180, 302-303  
Lei de Ampère, 244, 252-253, 267  
aplicações de, 253-258  
Lei de Biot-Savart, 244-248, 267, 281-282  
Lei de Coulomb, 107-111, 279-280  
Lei de Faraday, 335-336  
Lei de Gauss, 126-127, 261-262  
aplicações da, 127-132, 213-217  
Lei de Joule, 164-165  
Lei de Kirchhoff da corrente, 175-176, 315-316, 430-431  
Lei de Kirchhoff da tensão, 429-430  
Lei de Lenz, 336-337, 339  
Lei de Ohm, 161-164, 176-177, 315-316  
Lei de Snell, 408  
Leis de Newton, 282-283  
Linha casada, 440  
Linha coaxial, 255-256  
Linha com perdas, 432  
Linha curto-circuitada, 440  
Linha de carga infinita, 116-117, 128-129  
Linha de carga, 115, 228  
Linha em aberto, 440  
Linha equipotencial, 143-144
- Linha fendida, 456-457  
Linha infinita de corrente, 253  
Linha sem distorção, 433  
Linha sem perdas, 432  
Linhas de fluxo elétrico, 143-144  
Linhas de microfitas, 470-473  
Linhas de transmissão, 426-473
- Magnetização, 296  
Magnitude, 20-21  
Máquina copiadora xerográfica, 196-197  
Materiais não magnéticos, 298-299  
Material homogêneo, 171-172  
Material isotrópico, 171-172  
Material linear, 171-172  
Matriz dos coeficientes globais, 624  
Método da matriz de banda, 600, 626-627  
Método das diferenças finitas, 597-602  
Método das imagens, 226-227  
Método dos elementos finitos, 619-628  
Método dos momentos, 609-614  
Método iterativo, 600, 626-627  
Microondas, 570  
Modo dominante, 497-498, 517-518  
Modo evanescente, 493  
Modo transversal elétrico (TE), 491-492, 495-499  
Modo transversal magnético (TM), 491-495  
Modo, 490-493  
Modos degenerados, 515-516  
Momento de dipolo magnético, 290  
Momento de dipolo, 143  
Monopolio, 143  
Mudança de coordenadas, 46  
Multiplicação de diagramas, 547-548
- Nó fixo, 598-599  
Nó livre, 598-599  
Nodo de diferenças finitas a cinco nós, 600  
Núcleo da equação, 609-610  
Número de onda, 372-373
- Onda, 371  
definição de, 371-372  
Onda eletromagnética transversal (TEM), 384, 490-491  
Onda estacionária, 398-399  
Onda plana uniforme, 384  
Operador *del*, 71-72  
Operador gradiente, 71-72
- Paramagnetismo, 298-299  
Parâmetros das linhas de transmissão, 427-429  
Parâmetros de espalhamento, 571-573  
Perda por inserção, 579-580  
Período, 372-373

- Permeabilidade relativa, 297-298  
valores de, 661
- Permeabilidade, 297-298  
do espaço livre, 259-260
- Permeância, 315-316
- Permissividade, 171-172  
do espaço livre, 107-108
- Permissividade complexa, 381-382
- Permissividade relativa, 171-172. *Veja também* constante dieletrica
- Permissividade relativa efetiva, 471-472
- Plano de incidência, 406-407
- Plotagem de campo, 590-593
- Polarização, 167-171, 384
- Potência, 164-165, 392-396
- Potenciais com retardo, 351-352
- Potenciais magnéticos, 262-265
- Potencial, 135
- Pressão, 317-318
- Problemas de valor de fronteira, 192
- Produto cruzado, 27-28
- Produto escalar, 26-29
- Produto ponto, 26-27
- Produto vetorial, 27-29
- Profundidade de penetração. *Veja* profundidade pelicular
- Profundidade pelicular, 384-385
- Radar, 571-573, 558-559  
tipos de, 560-561
- Reflexão total, 583-584
- Regra da mão direita, 28-29, 86-87, 244-245, 337-338
- Regra do bac-cab, 29-30
- Regra do parafuso de rosca direita, 86-87, 244-245
- Relações constitutivas, 348-349
- Relações de fronteira, 177-182, 301-303, 348-349
- Relutância, 315-316
- Resistência, 163-164, 212-213
- Resistência ca, 386
- Resistência cc, 386, 577-579
- Resistência de irradiação, 530-531
- Resistência ôhmica, 543-544
- Resistência pelicular, 386-387
- Resistividade, 164-165
- Ressonador de guia de onda, 515
- Rigidez dieletrica, 171-172
- Rotacional, 81-87  
definição de, 82-83  
propriedades de, 84-85
- Ruptura dielétrica, 171-172
- Satélite, 570-571
- Seção reta de espalhamento, 558-560
- Seção reta de radar, 558-560
- Semicondutor, 159-160
- Sintonizador com toco simples, 455-456
- Sistema ortogonal, 41
- Solenóide, 251-252
- Solução na forma fechada, 590
- Supercondutores, 159-160
- Superfície equipotencial, 143-144
- Superfície gaussiana, 127-128
- Superfícies de coordenadas constantes, 52-55
- Superposição, 109-110, 135-136, 206-207
- Susceptibilidade elétrica, 170-171
- Susceptibilidade magnética, 297-298
- Tamanho da malha, 599-600
- Tangente de perdas, 381-382
- Taxa de onda estacionária (SWR), 400-401
- Temperatura Curie, 299-300
- Tempo de relaxação, 176-177, 217-218
- Tensor, 172
- Teorema da divergência, 79, 127
- Teorema da unicidade, 193-195
- Teorema de Helmholtz, 93-94
- Teorema de Poynting, 393-395
- Teorema de Stokes, 85-86
- Torque, 289
- Trabalho realizado, 134
- Transformação de um vetor, 46-47
- Transformador de quarto de onda, 454-455
- Transiente, 459-461
- Variáveis complexas, 651-652
- Variáveis de separação, 202-203, 210-211
- Velocidade de fase, 505
- Velocidade de grupo, 505
- Velocidade de onda, 371-372
- Velocidade no meio, 505
- Vetor de Poynting, 393-394
- Vetor de propagação, 406-407
- Vetor distância, 23-24
- Vetor posição, 22-23, 109-110, 135-136, 406-407
- Vetor unitário, 20-22
- Vetor,  
definição de, 20-21  
multiplicação de, 25-26  
soma de, 21-22  
subtração de, 21-22
- Volume de carga, 117-118

## Prefácio

Os objetivos principais deste livro permanecem os mesmos da primeira edição: apresentar os conceitos do eletromagnetismo (EM) de forma mais clara e interessante do que outros livros. Alcançamos este objetivo das seguintes maneiras:

1. A fim de superar eventuais dificuldades no tratamento simultâneo de conceitos de eletromagnetismo e de matemática, a análise vetorial é tratada no início do livro e aplicada gradualmente. Esta abordagem evita a introdução repetida de fundamentos de análise vetorial, o que geraria uma descontinuidade no desenvolvimento do raciocínio. Os teoremas matemáticos e os conceitos físicos são abordados separadamente, facilitando ao aluno a compreensão da generalidade de tais teoremas.
2. Cada capítulo começa com uma breve introdução, que serve de guia para todo o capítulo e que estabelece sua relação com o restante do livro. A introdução auxilia os alunos a perceber a relevância do capítulo e sua relação com o capítulo precedente. Os pontos-chave são destacados para chamar a atenção do leitor. Ao final do capítulo, é apresentado um breve resumo dos conceitos principais.
3. A fim de assegurar que os alunos compreendam claramente os pontos importantes, os termos-chave são definidos e destacados. Fórmulas fundamentais recebem uma moldura para facilitar sua identificação.
4. Cada capítulo contém um número razoável de exemplos com solução. Já que os exemplos são parte do texto, eles são explicados em detalhe, de modo que, para o leitor, não restem lacunas no desenvolvimento da solução. Exemplos minuciosamente resolvidos dão confiança aos alunos para resolver problemas por si mesmos e para aprender a aplicar conceitos, o que é parte integrante do processo educativo em engenharia. Cada exemplo resolvido é seguido de um problema na forma de um exercício com resposta.
5. Ao final de cada capítulo, há dez questões de revisão objetivas de múltipla escolha. Sabe-se que questões com resposta em aberto, apesar de pretender-se que instiguem o raciocínio, são ignoradas pela maioria dos alunos. Questões objetivas de revisão, imediatamente seguidas de opções de resposta, encorajam os alunos a resolver os problemas, proporcionando-lhes um retorno imediato.  
Grande parte dos problemas propostos é apresentada na mesma ordem que os conceitos no corpo do texto. Os problemas de nível de dificuldade intermediária são identificados com um único asterisco. Os problemas mais difíceis são identificados com dois asteriscos. O número de problemas apresentado é suficiente para permitir ao professor selecionar alguns como exemplo em sala de aula e outros como atividade extra-classe. As respostas dos problemas ímpares estão no apêndice C.
6. Uma vez que a maioria das muitas aplicações práticas envolve campos variáveis no tempo, seis capítulos são destinados a tratar desse tipo de campo. Contudo, é dada a devida ênfase aos campos estáticos porque são casos especiais dos campos dinâmicos. Não é mais aceitável ignorar a eletrostática porque há indústrias de grande porte, como as de fotocópia e de periféricos de computadores, que embasam seu funcionamento na compreensão dos fenômenos eletrostáticos.
7. O último capítulo trata de métodos numéricos com aplicações práticas e com programas de computador. Este capítulo é de suma importância porque a maioria das questões práticas só podem ser resolvidos com o uso de técnicas numéricas.
8. Mais de 130 exemplos ilustrativos e de 400 figuras são apresentados no texto. Algumas informações adicionais, como fórmulas e identidades matemáticas básicas, estão incluídas no Apêndice. Algumas orientações são dadas em uma nota especial para os estudantes, que sucede este prefácio.

Nesta edição, foi acrescentado um novo capítulo tratando de tópicos contemporâneos, como microondas, interferência e compatibilidade eletromagnética e fibras ópticas. Além disso, a linguagem Fortran, das edições anteriores, foi convertida para a linguagem Matlab porque verificou-se que os alunos têm mais familiaridade com Matlab do que com Fortran.

Embora este livro tenha sido escrito com a intenção de ser auto-explicativo e útil para um estudo autônomo, o contato pessoal, que é sempre necessário no ensino, foi contemplado. A escolha dos tópicos do curso, bem como da ênfase dada aos mesmos, depende da preferência pessoal do professor. Por exemplo, o professor que considerar os tópicos dedicados a análise vetorial ou a campos estáticos muito extensos pode não abordar parte do conteúdo, que, no entanto, pode ser usado pelos estudantes como material de referência. Dessa forma, uma vez tendo sido trabalhados os Capítulos de 1 a 3, é possível explorar os Capítulos de 9 a 15. Professores que discordarem da abordagem "partindo do cálculo vetorial" podem começar com os Capítulos 1 e 2 e avançar para o Capítulo 4, fazendo referência ao Capítulo 3, quando necessário. Há conteúdo suficiente para um curso de dois semestres. Se o livro for adotado em um curso com duração de um semestre, algumas seções podem ser abordadas brevemente ou ainda consignadas como atividades extra-classe. Seções que possam estar nessa categoria são marcadas com o sinal de adaga (†).

### Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Peter Gordon e ao grupo de editores e produtores da Oxford University Press por este trabalho bem feito. Esta edição se beneficiou dos perspicazes comentários dos seguintes revisores: Leo C. Kempel, da Michigan State University; Andrew Dienes, da University of California, em Davis; George W. Hanson, da University of Wisconsin-Milwaukee; Samir El-Ghazaly, da Arizona State University; e Sadasiva M. Rao, da Auburn University. Devo muito a Raymond Garcia, Jerry Sagliocca e Dr. Oladega Sorryan pela ajuda na elaboração de manual de soluções e ao Dr. Saroj Biswas pela ajuda prestada com o Matlab. Estou muito grato à Temple University por ter-me concedido uma licença no outono de 1998, período no qual pude trabalhar na revisão deste livro. Agradeço, em especial, ao Dr. Keya Sadeghipour, dirigente da College of Engineering, e ao Dr. John Helferty, chefe do Departamento de Engenharia Elétrica e Computação por seu apoio constante. Como sempre, agradecimentos especiais à minha esposa, Chris e às nossas filhas, Ann e Joyce, pela paciência, pelas orações e pelo total apoio.

Como de praxe, comentários, sugestões e correções são bem-vindos.

Matthew N. O. Sadiku

### Programação sugerida:

Capítulo	Título	Número aproximado de horas-aula
1	Álgebra vetorial	2
2	Sistemas de coordenadas e transformação	2
3	Cálculo vetorial	4
4	Campos eletrostáticos	6
5	Campos elétricos em meio material	4
6	Problemas de valor de fronteira em eletrostática	5
7	Campos magnetostáticos	4
8	Forças, materiais e dispositivos magnéticos	6
9	Equações de Maxwell	4
10	Propagação de onda eletromagnética	5
11	Linhas de transmissão	5
12	Guias de onda	4
13	Antenas	5
14	Tópicos modernos	(3)
15	Métodos numéricos	(6)
	Exames	4
	<b>TOTAL</b>	<b>60</b>