

Solution

题目分析

ZJU-2022SU-GroupC-Contest1

2022 年 7 月 12 日

A. String

题目大意

给定一个正整数 k ，求一个最短的 01 串 s ，使得 s 的循环同构串的子串包含了所有长度为 k 的二进制串。
相当于求一个最短的环形 01 串，使得子串包含所有长度为 k 的二进制串。

A. String

题解

设环形串 s 长度为 n 。

显然, s 长度为 k 的子串至多有 n 种。因此 $n \geq 2^k$ 。

结论: 存在一种构造方案使得 $n = 2^k$ 。

构造方法有很多, 例如把长度为 $k-1$ 的串看成点, 长度为 k 的串看成边, 那么等价于欧拉回路。一些简单的搜索剪枝或者合理的贪心也可以直接通过此题。

std 可见字符数不超过 200。

B. Arbitrary Arrangement

题目大意

给定三个整数 k , p_a , p_b 以及一个空的序列。

每次有 $\frac{p_a}{p_a + p_b}$ 的概率在后增加一个 a , 有 $\frac{p_b}{p_a + p_b}$ 的概率 b , 直到字符串中有 k 个非连续子序列为 ab , 求最终字符串的期望长度。

B. Arbitrary Arrangement

题解

考虑设 $f(x, y)$ 表示已经有 x 个 ab , y 表示已经有 y 个 a 时的期望长度。

转移方程: $f(x, y) = \frac{pa}{pa + pb} f(x, y + 1) + \frac{pb}{pa + pb} f(x + y, y) + 1$ 。

当 $x + y \geq k$ 时只需要一个 b 就能结束, 它的期望是 $f(x, y) = \frac{pa + pb}{pb}$ 。

特殊的 $f(0, 0)$ 状态点会产生自环, 即只加 b 不加 a 导致无法启动, 所以 $f(0, 0) = f(0, 1) + \frac{pa + pb}{pa}$ 。

总复杂度为 $O(k^2)$ 。

C. Escape from the Gas

题目大意

一段路上，每个整数点都有一个减血量，Bob 可以无视距离的冲刺。冲刺完后进入虚弱状态，虚弱的时间与冲刺距离线性相关。虚弱状态下不能移动，且 Bob 的减血量每秒增加，数值等于该点减血量。

有 q 个询问，每个询问给出 m 个数，Bob 可以提前在最多 m 个位置放置毒气净化瓶，每个位置最多一个。拾起瓶子时减血量减少 b_i ，问到达终点且从虚弱状态恢复，最少扣多少血。

C. Escape from the Gas

题解

斜率优化 dp

记 $f(i, j)$ 表示走 i 步，到 j 点的最小减血量，转移方程

$$f(i, j) = \min_{0 \leq p \leq j-1} \{f(i-1, p) + (j - p + t) * a_j\}$$

将方程转化成

$$f(i-1, p) = a_j \times p + f(i, j) - (j + t) \times a_j$$

对于每个的 i ，我们维护一个斜率单调递增的下凸壳，对于斜率 a_j ，在单调队列中二分找到 p 的位置。

C. Escape from the Gas

题解

由于 $m \leq 100$, 我们可以维护重复 100 次, 来处理 100 步内到达终点的最小值。

对于 100 步以上到达终点的情况, 可以拿 $i = 101$ 时的 f 数组更新 $i = 100$ 的数组。

处理询问时, 分类讨论走了 cnt 步, 减去 b 数组的 cnt 数, 取 \max 即可。
时间复杂度 $O(nm \log n + qm)$ 。

D. Un Tree Problem

题目大意

给出一颗 n 个点的树，定义一条路径的权值为其中边权的最大值。定义一类特殊点，记一个点 u 到所有特殊点的路径中权值的最小值为 $f(u)$ ，记树的权值为 $\max(f(u)), 1 \leq u \leq n$ 。要求构造一个排列 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n-1} s_i$ 最小，其中 s_i 是当 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i$ 作为特殊点时树的权值。

D. Un Tree Problem

题解

先考虑如何在选择 i 个点时最小化 s_i ，显然存在一种设置特殊点的方法，使得 $s_i = e_i$ ，其中 e_i 是按照边权排序后第 i 大的边 ($s_n = 0$)。

设置方案可以等效考虑成把树上前 $i-1$ 大的边断掉，树上剩下 i 个联通块，在每个联通块中设置一个特殊点，显然可以满足最大的一条被经过的边是 e_i 。而如果存在更小化 s_i 的方案，相当于必须把前 i 条边断掉，剩下 $i+1$ 个联通块，至少需要设置 $i+1$ 个特殊点，矛盾。

因为每一次断边都是以前一次断完的状态为基础的，所以存在一种增量构造的方案，使得 s_i 可以分别取到最小。

考虑倒着构造，构造方法是从小到大加边，每次合并当前边连接的两个联通块时，需要至少在新的联通块中设置一个特殊点，同时不能与已经设置的特殊点重合。可以归纳证明边的两端联通块中各有一个未被设置点，设置新特殊点后新联通块中也只有一个未被设置点。

合法性证明：若当前加入的是第 i 大的边，则在此特殊点前已经设置了 $n-1-i$ 个特殊点，构成了排列 p 中的 $p_{i+2}, p_{i+3}, p_{i+4}, \dots, p_n$ ，而当前特殊点作为 p_{i+1} 。同时还有一个未被设置点在 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i$ 中。因为当前特殊点和未被设置点分别位于边两端联通块中，刚好保证了断 e_i 。

D. Un Tree Problem

题解

考虑从小到大排序边，建 Kruskal 重构树。那么相当于 p_1, p_2, \dots, p_i 在前 $i-1$ 小的边对应的节点的两棵子树都出现。直接维护每棵子树的标号最小点，若此点未出现过则直接加入 p 即可。总复杂度 $O(n\alpha(n))$ 。

E. Table Making

题目大意

给出一个 n 行 m 列的逗号分隔的表格。将该表格绘制成带边框的表格，用文本的形式输出。要求每列的内容按给定的方式对齐（左对齐，右对齐，居中）。在此基础上，使输出的表格宽度尽量小。

$$1 \leq n, m \leq 100$$

表格中每一格中的单词长度不超过 50。

E. Table Making

题解

直接按照题目要求模拟即可。首先要计算出每一列的列宽（即为该列中最长的单词的长度）。然后根据该列的对其方式计算每一个格子中单词左右两边的空格数量。对于居中情况，如果一个格子内两侧空格总量为奇数，则左边的空格比右边少一个。注意 `char` 数组要开够大。推荐使用 `python`。

F. Purple Crayon

题目大意

给定一棵 n 个点的树，对每个结点 u ，先把 u 子树染红，求染蓝至多一棵子树的方案使得没有红色结点被染蓝且最小化 $(n - r - b)(r - b)$ ，其中 r, b 分别为红色、蓝色的节点个数。

F. Purple Crayon

题解

$$(n - r - b)(r - b) = nr - nb - r^2 + b^2 = (b - \frac{n}{2})^2 - (r - \frac{n}{2})^2$$

故始终只需要最小化 $(b - \frac{n}{2})^2$ 。相当于求子树外且不为祖先的结点 v 中子树大小最接近 $\frac{n}{2}$ 的。

考虑 dfs 序，相当于一段前缀的某些点和一段后缀的 min。后缀 min 可以 $O(1)$ 维护。

按照 dfs 序依次计算，则这段前缀的可贡献点恰好是 dfs 过程中已经出栈的点。因此直接记全局最小即可，也能 $O(1)$ 维护。

总复杂度 $O(n)$ 。

谢谢!