Day1 模拟赛解题报告

张志心 PaperCloud
浙江大学

2025 年 2 月 6 日

T1. 水果桶

简要题意

对于 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^{n}$，对每个 $k \geq 2$ 计算 $\max_{1\leq i\neq j\leq k} \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j}$

$2 \leq n \leq 1 \times 10^5, 1 \leq a_i, b_i \leq 10^8$

T1. 水果桶

题解

题意实质上就是求平面上的**连线斜率最大的点对**。

通过画图讨论可知，最大斜率一定是横坐标相邻的点。

因此我们每加入一个点时用它和左右两侧横坐标最近的点的斜率和当前答案取 `max` 即可。

如何快速找到一个点左右两侧横坐标最近的点？使用 `set` 维护即可。

复杂度为 $O(n\log n)$

1. T1. 水果桶
2. T2. 矩阵乘法
3. T3. 一〇二四
4. T4. 跑步打卡

T2. 矩阵乘法

简要题意

给一个序列 $\{a_i\}$，求 $\sum_i \sum_j \sum_k (a_i \& a_k)(a_j | a_k)$

依题意暴力。

复杂度 $O(n^3)$，期望得分 20 分。

T2. 矩阵乘法

解法二

$ans = \sum_k (\sum_i a_i \wedge a_k)(\sum_j a_j \vee a_k)$

对于每个 k，求出 $\sum_i a_i \wedge a_k$ 和 $\sum_j a_j \vee a_k$，再相乘后求和即可。

复杂度 $O(n^2)$，期望得分 60 分。

T2. 矩阵乘法

解法三

考虑快速求出 $f_k = \sum_i a_i \wedge a_k$ 和 $g_k = \sum_j a_j \vee a_k$。

因为是位运算，所以按位考虑贡献：

如果 a_k 的第 p 位是 0，那么对应的 $a_i \wedge a_k$ 的这一位也是 0。故对 f_k 的贡献是 0。

如果 a_k 的第 p 位是 1，那么对应的 $a_i \vee a_k$ 的这一位取决于 a_i。故对 f_k 的贡献是 $2^p c_p$。其中 c_p 为序列 $\{a_i\}$ 中第 p 位为 1 的数的个数。

对于 g_k，同理有：

如果 a_k 的第 p 位是 0，那么对应的 $a_j \wedge a_k$ 的这一位取决于 a_j。故对 f_k 的贡献是 $2^p c_p$。

如果 a_k 的第 p 位是 1，那么对应的 $a_j \wedge a_k$ 的这一位也是 1。故对 f_k 的贡献是 $2^p n$。

复杂度 $O(n \log W)$，期望得分 100。

1. T1. 水果桶
2. T2. 矩阵乘法
3. T3. 一〇二四
4. T4. 跑步打卡

T3. 一〇二四

简要题意

给定 n 个数，每次可以选择相邻相同的两个 x 合并为一个 $x+1$，求最少剩余几个数

若最少剩余一个输出合并方案，否则输出最少剩余的个数

多测，$1 \le T \le 5$，$1 \le n \le 512$

T3. 一〇二四

解法〇

全部输出 `si le la!` 或 `jiu shi xun la!`，得分 $= 21$

记得换行，否则 $21 \to 0/14$

T3. 一〇二四

解法一

爆搜，期望得分 < 20

我们先计算最少剩余的个数

区间 DP

设 $f(l,r)$ 表示 $[l,r]$ 最少剩余的个数，$g(l,r)$ 表示若 $[l,r]$ 能合并成一个数，最终剩下的数（易见若它存在，则一定是唯一的），转移方程：

$$f(l,r) = \min\{f(l,i) + f(i+1,r) \mid l \le i < r\}$$
$$f(l,r) = 1 \quad g(l,r) = g(l,i) + 1 \quad [\exists\, i : l \le i \le r \land f(l,i) = f(i+1,r) = 1 \land g(l,i) = g(i+1,r)]$$

复杂度 $O(n^3)$，期望得分 $= 79$

构造方案

DP 转移时记录 i，构造方案时倒序处理：

```
void print(int l, int r) {
    if (l == r) return;
    print(g[l][r] + 1, r);
    print(l, g[l][r]);
    cout << l << " ";
}
```

复杂度 $O(n^3)$，期望得分 $= 100$

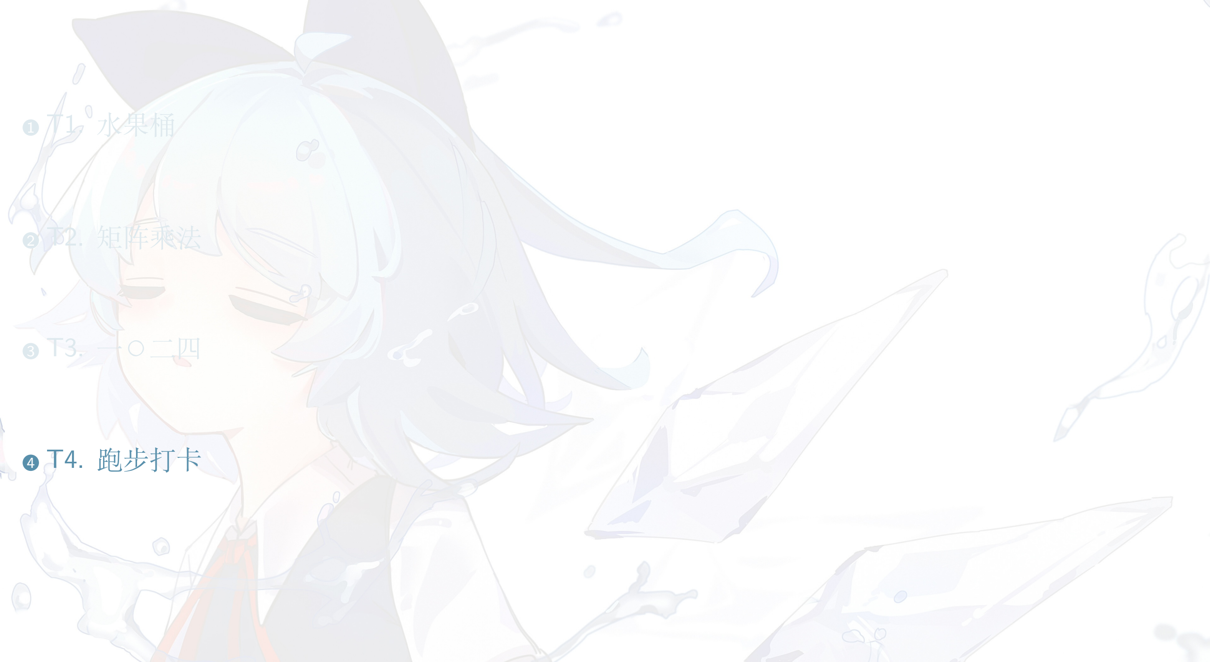
T3. 一〇二四

解法四（hacked）

本题另有一个贪心做法。从左到右考虑每个数，如果它和右边相邻的数相等就合并，直到无法合并为止。可以用`stack`维护这个过程。

这个做法在有解时确实可以给出正确的方案，但在无解时，可能会因错误的合并导致剩余数字的数量变多。例如下面这组数据：$n = 4, a = \{1, 1, 1, 2\}$，正确的合并方案是先将后两个 1 合并为 2 后再和后面的 2 合并，而贪心做法只能将前两个 1 合并。

期望得分 $79 \sim 100$，实际得分为 97。



1. T1. 水果桶
2. T2. 矩阵乘法
3. T3. 一〇二四
4. T4. 跑步打卡

T4. 跑步打卡

简要题意

给一张无向图，定义路径的长度为原长减去最长边加上最短边，求 1 号点到其他点的最短路。

$1 \le n \le 10^5$。

T4. 跑步打卡

解法一

$n \leq 10$

暴力枚举所有路径并记录最长最短边长即可。

复杂度 $O(n!)$，期望得分 12。

T4. 跑步打卡

解法二

边权全为 1

此时所求就是正常意义下的最短路。直接上 SPFA/dijkstra 即可。

复杂度 $O(m)$，期望得分 16。

我们把条件“放宽”，即：可以任取一条边权消除，任取一条边权加倍。

这是经典的分层图问题。我们将原图分成 4 层，分别表示：两条边均未取、取了消除的边、取了加倍的边、两条边都取完。

然后按分层图的套路连边即可。具体地，对原图的每条边我们连接：

- $((x,k),(y,k),z), k=0,1,2,3$
- $((x,0),(y,1),0)$
- $((x,2),(y,3),0)$
- $((x,0),(y,2),2z)$
- $((x,1),(y,3),2z)$

直接对分层图求最短路，此时由于不合法的路径一定不是最短的（显然你可以将消除边换成更长的，将加倍边换成更短的），所以此时的最短路就是答案。

复杂度 $O(m\log n)$，期望得分 100。