2 多项式插值

2.1 范德蒙行列式

Def 2.1 对于给定的 n 个参数 $t_1,\dots,t_n$，范德蒙矩阵 $V=(v_{ij})_{n\times n}$，$v_{ij}=t_j^{i-1}$

即 $V(t_1,\dots,t_n)=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1}\end{bmatrix}$

Lem 2.2 $(n+1)\times(n+1)$ 的范德蒙矩阵 $\det V(x_0,\dots,x_n)=\prod_{i>j}(x_i-x_j)$

PF: 令 $U(x)=\det V(x_0,\dots,x_{n-1},x)$ 则 $U(x_i)=0$ $i=0,\dots,n-1$ $\therefore U(x)=A\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$

观察可知 x^n 系数为 $\det V(x_0,\dots,x_{n-1})$ $\therefore U(x)=\det V(x_0,\dots,x_{n-1})\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$

由归纳法 $U(x_0,x_1)=x_1-x_0$ 得 $\det V(x_0,\dots,x_n)=\prod_{i>j}(x_i-x_j)$

Thm 2.3（多项式插值的唯一性）给定两两不同的 $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{C}$，对应函数值 $f_0,\dots,f_n\in\mathbb{C}$，$\exists!\, p_n(x)\in\mathbb{P}_n$ s.t. $p_n(x_i)=f_i$

PF: $a_0+a_1x_i+\dots+a_nx_i^n=f_i$ $i=0,\dots,n$，方程组行列式为 $\prod_{i>j}(x_i-x_j)\neq0$，所以有唯一解

2.2 Cauchy余项

Thm 2.4（一般的Rolle定理）$n\geq2$，$f\in C^{n-1}[a,b]$，$f^{(n)}(x)$ 存在 $\forall x\in(a,b)$，$f(x_0)=f(x_1)=\dots=f(x_n)=0$，$a\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq b$

则 $\exists\xi\in(x_0,x_n)$ $f^{(n)}(\xi)=0$

Thm 2.5 $f\in C^n[a,b]$，假设 $\forall x\in(a,b)$，$f^{(n+1)}(x)$ 存在，令 $p_n(f;x)$ 表示 f 关于 $x_0,\dots,x_n$ 在 $\mathbb{P}_n$ 的唯一插值结果。

定义 $R_n(f;x)=f(x)-p_n(f;x)$ 为Cauchy余项，若 $a\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq b$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ $R_n(f;x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

其中 ξ 取决于 $f,x_0,x_1,\dots,x_n$.

PF: $R_n(f;x_k)\equiv0$，固定 $x\neq x_0,x_1,\dots,x_n$，令 $K(x)=\frac{f(x)-p_n(f;x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$，$W(t)=f(t)-p_n(f;t)-K(x)\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$

显然 $t=x_0,\dots,x_n$ 时 $W(t)=0$，$W(x)=0$，由2.4，$\exists\xi\in(a,b)$，$W^{(n+1)}(\xi)=0$

则 $0=W^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K(x)$ $\therefore K(x)=f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$

Cor 2.6 假设 $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$. 则 $|R_n(f;x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$，其中 $M_{n+1}=\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$

2.3 Lagrange ~~形~~公式

Def 2.7 由给定 $f_0,\dots,f_n$ 值和两两不同的点 $x_0,x_1,\dots,x_n$，则 Lagrange ~~形~~公式为 $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_kl_k(x)$，

其中逐点插值的基本多项式 $l_k(x)=\prod_{i\neq k,i=0}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$，特别地，当 $n=0$ 时 $l_0=1$

~~Lem~~ Ex 2.8 $x_i=1,2,4$; $f(x_i)=8,1,5$

$p_2(x)=8\times\left(\cancel{}\cdot\frac{x-2}{1-2}\cdot\frac{x-4}{1-4}\right)+\left(\frac{x-1}{2-1}\cdot\frac{x-4}{2-4}\right)+5\left(\frac{x-1}{4-1}\cdot\frac{x-2}{4-2}\right)=3x^2-16x+21$

Lem 2.9 定义对称多项式

$\pi_n(x)=\begin{cases}1, & n=0\\ \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i), & n>0\end{cases}$，则对于 $n>0$，逐点插值的基本多项式为 $l_k(x)=\frac{\pi_{n+1}(x)}{(x-x_k)\pi'_{n+1}(x_k)}$ $\forall x\neq x_k$

PF: $\pi'_{n+1}(x_k)=\prod_{i\neq k,i=0}^{n}(x_k-x_i)$

Lem 2.10 (Cauchy relations) 基本多项式 $l_k(x)$ 满足：① $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) \equiv 1$

② $\forall j=1,\ldots,n \quad \sum_{k=0}^{n} (x_k-x)^j l_k(x) \equiv 0$

PF：由(2.3 插值的唯一性)和(2.5 Cauchy余项)，$\forall q(x)\in \mathbb{P}_n$，有 $p_n(q;x)\equiv q(x)$，(因为 $q^{(n+1)}\equiv 0$)

①对于常数函数插值可得 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\equiv 1$

②定义 $q_j(u)=(u-x)^j$，x为自由参数，$\forall j=1,\ldots,n$ $p_n(q_j;u)\equiv q_j(u) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(u)\equiv (u-x)^j$，令$u=x$

2.4 Newton公式

Def 2.11 给定f在$x_0,\ldots,x_n$的点值$f_0,\ldots,f_n$，Newton公式为 $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \pi_k(x)$

π_k是2.9中的对称多项式，a_k是$p_k(f;x)$ (f在$x_0,\ldots,x_k$的插值公式)的最高次系数，

记作 $a_k=f[x_0,\ldots,x_k]$，称作f在$x_0,\ldots,x_k$的k阶差商，特别地 $f[x_0]=f(x_0)$ (此时插值函数为常函数)

Cor 2.12 $f[x_0,\ldots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_k}]$，其中$\{i_k\}$为0到k一排列.(根据插值的唯一性)

Cor 2.13 $f[x_0,\ldots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=\sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\pi_{k+1}'(x_i)}$

PF：牛顿插值多项式也可用Lagrange插值表示.

则有：$\sum_{i=0}^{k} f_i l_i^k(x)=\sum_{i=0}^{k} a_i\pi_i(x)$

~~$a_k\pi_k(x)=$~~ $[x^k]\sum_{i=0}^{k} a_i\pi_i(x)=a_i=[x^k]\sum_{i=0}^{k} f_i l_i^k(x)=\sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$.

或：$a_k\pi_k(x)=\sum_{i=0}^{k} f_i l_i^k(x)-\sum_{i=0}^{k-1} a_i\pi_i(x)$

$=\sum_{i=0}^{k} f_i l_i^k(x)-\sum_{i=0}^{k-1} f_i l_i^{k-1}(x)$

$=\cdots$

~~Cor~~ Thm 2.14 差商满足如下递推：

$$f[x_0,\ldots,x_k]=\frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

PF：令 $p(x)=p_1(x)+\frac{x-x_0}{x_k-x_0}(p_2(x)-p_1(x)) \Rightarrow p(x_0)=p_1(x_0)$，其中记$p_1(x)$为$x_0,\ldots,x_{k-1}$的插值多项式.

$p_2(x)$为$x_1,\ldots,x_k$的插值多项式.

$\forall i=1,\ldots,k-1$ $p(x_i)=p_1(x_i)+\frac{x_i-x_0}{x_k-x_0}(p_2(x_i)-p_1(x_i))=p_1(x_i)$

$p(x_k)=p_2(x)$ $\quad\therefore p(x)$是$x_0,\ldots,x_k$的插值多项式，由$p(x)$表达式可得上式.

Def 2.15 差商表

$$\begin{array}{c|lllll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & \to f[x_0,x_1] & & \\
x_2 & f[x_2] & \to f[x_1,x_2] & \to f[x_0,x_1,x_2] & \\
x_3 & f[x_3] & \to f[x_2,x_3] & \to f[x_1,x_2,x_3] & \to f[x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}$$

其中 $f[x_i]=f_i$

Thm 2.16 $x_0,\ldots,x_n$互不相同，可得 $f(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\ldots,x_n]\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)+f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ $\forall x\neq x_i$

PF：任取$z\neq x_i$，得f在$x_0,\ldots,x_n,z$的插值多项式，用x替换z即可.

Cor 2.17 设$f\in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$在(a,b)上存在，若$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$x\in[a,b]$，则

$\exists \xi(x)\in(a,b)$ s.t. $f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$

PF：由Thm 2.16，$f[x_0,\ldots,x_n,x]=\frac{f(x)-p_n(f;x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}=\frac{R_n(f;x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$

Cor 2.18 设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $f \in C^n[x_0, x_n]$, 则 $\lim\limits_{x_n \to x_0} f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$

Def 2.19 bisequence 为一个函数 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Def 2.20 定义前移 $(Ef)(i) = f(i+1)$, 后移 $(Bf)(i) = f(i-1)$

记前向差分算子 $\Delta = E - I$, 后向差分算子 $\nabla = I - B$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$, $\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i)$

$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$, $\nabla^n f_i = \nabla(\nabla^{n-1} f_i)$

Thm 2.21 ① $\Delta^n f_i = \nabla^n f_{i+n}$ (可用归纳法证明)

② $\Delta^n f_i = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_{i+k}$, $\nabla^n f_i = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{i-k}$

PF: ① $\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta(\nabla^{n-1} f_{i+n-1}) = \nabla^{n-1} f_{i+n} - \nabla^{n-1} f_{i+n-1} = \nabla^{n-1}(f_{i+n} - f_{i+n-1}) = \nabla^{n-1}(\nabla f_{i+n}) = \nabla^n f_{i+n}$

② 归纳法 (i) $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i = \binom{1}{1} f_{i+1} - \binom{1}{0} f_i$

(ii) 若 $\Delta^n f_i = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_{i+k}$, 则 $\Delta^{n+1} f_i = \Delta\left(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_{i+k}\right)$

$$(*) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (f_{i+k+1} - f_{i+k})$$

$$(*) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{n-k+1} \binom{n}{k-1} f_{i+k} + (-1)^{n-k+1} \binom{n}{k} f_{i+k} \right] + (-1)^{n-0+1} \binom{n}{0} f_{i+0} + (-1)^{n-n} \binom{n}{n} f_{i+n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f_{i+k} + (-1)^{n+1-0} \binom{n+1}{0} f_{i+0} + (-1)^{(n+1)-(n+1)} \binom{n+1}{n+1} f_{i+n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f_{i+k}$$

Thm 2.22 设 $x_0, h \in \mathbb{R}$, $x_i = x_0 + ih$, $f_i = f(x_i)$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$

PF: $\pi'_{n+1}(x_k) = \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i) = \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (k-i)h = h^n k! (n-k)! (-1)^{n-k}$

$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\pi'_{n+1}(x_k)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} f_k}{h^n k! (n-k)!} = \frac{1}{h^n n!} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k = \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$

Thm 2.23 (牛顿向前差分定理) 设 $p_n(f; x) \in \mathbb{P}_n$ 是 $f(x)$ 在均匀网格 $x_0, \ldots, x_n$ ($x_i = x_0 + ih$) 上的 (n次) 插值多项式

则 $\forall s \in \mathbb{R}$ $p_n(f; x_0 + sh) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$, 其中 $\Delta^0 f_0 = f_0$

PF: $p_n(f; x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod\limits_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = f_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$

$p_n(f; x_0 + sh) = f_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (sh - ih) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!} s^{\underline{k}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$

2.5 Neville-Aitken 算法

Thm 2.24 令 $p_0^{[i]} = f(x_i)$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$, $\forall k = 0, \ldots, n$, $i = 0, \ldots, n-k-1$ 定义 $p_{k+1}^{[i]}(x) = \frac{(x - x_i)\, p_k^{[i+1]}(x) - (x - x_{i+k+1})\, p_k^{[i]}(x)}{x_{i+k+1} - x_i}$

则 $p_k^{[i]}$ 是 f 在 $x_i, \ldots, x_{i+k}$ 的 k 次插值多项式.

PF: 归纳法, (i) $k=0$ 时, 结论显然成立.

(ii) 若结论对 k 成立, $\forall j = i+1, \ldots, i+k$, $p_k^{[i+1]}(x_j) = p_k^{[i]}(x_j) = f(x_j)$

因此 $p_{k+1}^{[i]}(x_j) = \frac{(x_j - x_i) f(x_j) - (x_j - x_{i+k+1}) f(x_j)}{x_{i+k+1} - x_i} = f(x_j)$ $\quad \forall j = i+1, \ldots, i+k$

又: $p_{k+1}^{[i]}(x_i) = p_k^{[i]}(x_i) = f(x_i)$, $p_{k+1}^{[i]}(x_{i+k+1}) = p_k^{[i+1]}(x_{i+k+1}) = f(x_{i+k+1})$

因此结论对 $k+1$ 成立.

Ex 2.25 估计 $f(\frac{3}{2})$

x_i	$x - x_i$	$f(x_i)$	$p_1^{[i]}(x)$	$p_2^{[i]}(x)$	$p_3^{[i]}(x)$
0	1.5	6	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{21}{4}$	-6
1	0.5	-3	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{27}{4}$	
2	-0.5	-6	$-\frac{27}{2}$		
3	-1.5	9			

2.6 Hermite插值问题

Def 2.26 $x_0,\dots,x_k\in[a,b]$两两不同，$m_0,\dots,m_k$为非负整数，$M=\max_{i=0}^{k} m_i$，$f\in C^M[a,b]$

给出f在x_i处的$1\sim m_i$阶导数值，Hermite插值问题旨在求一个次数最低的$p\in\mathbb{P}$

使得$\forall i=0,1,\dots,k$ $\forall\mu=0,1,\dots,m_i$ $p^{(\mu)}(x_i)=f_i^{(\mu)}(:=f^{(\mu)}(x_i))$ $f_i^{(0)}=f(x_i)$

Thm 2.27 Hermite插值问题的解唯一。

PF：取$N=k+\sum_{i=0}^{k}m_i$，则Hermite插值问题等价于关于$a_0,\dots,a_N$的$N+1$阶线性方程组。

其中$a_0,\dots,a_N$是多项式$p_N(x)\in\mathbb{P}_N$的各项系数。设方程组的系数矩阵$M\in\mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$

若$\exists a\in\mathbb{R}^{N+1}$ s.t. $Ma=0$，则$p_0(x)=\sum_{i=0}^{N}a_i x^i$，可知$p(x)=\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)^{m_i+1}$是$p_0(x)$的因子

而$p(x)$次数为$N+1$，大于$p_0(x)$，所以$p_0\equiv 0$，所以$\det(M)=N+1$

Def 2.28（广义差商）设$x_0,\dots,x_k$为$k+1$个两两不同的点，且x_i $(i=0,\dots,k)$出现了m_i+1次，

令$N=k+\sum_{i=0}^{k}m_i$，则称f在$\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{m_0+1},\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{m_1+1},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{m_k+1}$处的广义差商为：

Hermite插值结果N次项系数，记为$f[x_0,\dots,x_0,\dots,x_k,\dots,x_k]$

Cor 2.29 f在$\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{n+1}$处的差商为$f[x_0,\dots,x_0]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

PF：在Hermite问题中，令$k=0$，$m_0=n$，唯一解为$p(x)\in\mathbb{P}_n$，$f^{(n)}(x_0)=p^{(n)}(x_0)=n!f[x_0,\dots,x_0]$

Thm 2.30 设$p_N(f;x)$是Hermite问题的解，则$f(x)-p_N(f;x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)^{m_i+1}$

PF：固定$x\neq x_0,\dots,x_k$，定义$k(x)=\frac{f(x)-p_N(f;x)}{\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)^{m_i+1}}$，$W(t)=f(t)-p_N(f;t)-k(x)\prod_{i=0}^{k}(t-x_i)^{m_i+1}$

当$t=x_0,\dots,x_k$，$W^{(\mu)}(t)=0$，$\mu=0,\dots,m_i$，类似可知$\exists\xi$，$W^{(N+1)}(\xi)=0\Rightarrow k(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}$

当$k=0$时，Hermite问题退化为经典Taylor展开。

广义差商表：

$$
\begin{array}{c|llll}
x_0 & f_0 & & & \\
x_1 & f_1 \to f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f_1 \quad f_1' & \to f[x_0,x_1,x_1] & & \\
x_2 & f_2 \to f[x_1,x_2] & \to f[x_1,x_1,x_2] & \to f[x_0,x_1,x_1,x_2] &
\end{array}
$$

2.7 切比雪夫多项式

传统的多项式插值在某些情形下效果并不好，如$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $x\in[-5,5]$

Def 2.31 称$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$为第一类切比雪夫多项式。

Thm 2.32（No.1切比雪夫多项式的递推关系）$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$

PF：令$x=\cos\theta$ $T_n(x)=\cos n\theta$ $T_{n+1}(x)=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$，$T_{n-1}(x)=\cos(n-1)\theta=\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta$

Cor 2.33 T_n的n次项系数为2^{n-1}（由$T_1=x$，$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$）

Thm 2.34 $T_n(x)$有n个单重0点，$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ $(k=1,2,\dots,n)$和$n+1$个极值点$x_k'=\cos\frac{k}{n}\pi$ $(k=0,\dots,n)$

PF：$T_n(x_k)=\cos\left(n\arccos\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)=\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)=0$，$T_n'(x)=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$

$T_n'(x_k)=\frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi}}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)\neq 0$ $T_n'(x_k')=\frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\frac{k}{n}\pi}}\sin(k\pi)=0$，$T_n''(x_k')=\frac{n^2\cos(k\pi)}{\cos^2\frac{k}{n}\pi-1}+\frac{n\cos\frac{k}{n}\pi\sin(k\pi)}{(1-\cos^2\frac{k}{n}\pi)^{\frac{3}{2}}}\neq 0$

在x_k'处展开式：$T_n(x_k'+\delta)=T_n(x_k')+\frac{1}{2}T_n''(x_k')\delta^2+O(\delta^3)$

Thm 2.35（切比雪夫定理）记 $\widetilde{\mathbb{P}}_n$ 为所有 n 次首一多项式，则

$$\forall p\in\widetilde{\mathbb{P}}_n,\ \max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\right|\le\max_{x\in[-1,1]}|p(x)|$$

PF：反证，设结论不成立，则

由 Thm 2.33 $T_n(x)$ 的最值为 ±1，故 $\exists p\in\widetilde{\mathbb{P}}_n$ s.t. $\max_{x\in[-1,1]}|p(x)|<\frac{1}{2^{n-1}}$

令 $Q(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)-p(x)$，$Q(x_k')=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}-p(x_k')$，$k=0,1,\dots,n$

$\because |p(x)|<\frac{1}{2^{n-1}}\ \forall x\in[-1,1]$ $\therefore \forall k$ 为奇数，$Q(x_k')<0$，$\forall k$ 为偶数 $Q(x_k')>0$

$\therefore Q$ 在 $(x_0',x_1'),(x_1',x_2'),\dots,(x_{n-1}',x_n')$ 上各有至少一个零点.

$\therefore Q$ 有 n 个零点，但 Q 的次数至多 $n-1$，所以 $Q(x)\equiv0$，$p(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$，矛盾.

Cor 2.36 $\max_{x\in[-1,1]}|x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n|\ge\frac{1}{2^{n-1}}\quad\forall n,\ \forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$

Cor 2.37 $T_{n+1}(x)$ 在其 $n+1$ 个零点上的插值多项式的 Cauchy 余项满足 $|R_n(f;x)|\le\frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{x\in[-1,1]}|f^{(n+1)}(x)|$

PF：$|R_n(f;x)|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{2^n(n+1)!}\underbrace{|T_{n+1}|}_{\le1}\le\frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{x\in[-1,1]}|f^{(n+1)}(x)|$

2.8 Bernstein 多项式

Def 2.38 $n\in\mathbb{N}^+$ 次基本 Bernstein 为 $b_{n,k}(t)=\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$，$k=0,\dots,n$

Lem 2.39 Bernstein 多项式，满足：

① $\forall k=0,1,\dots,n$，$\forall t\in(0,1)$ $b_{n,k}(t)>0$ ② $\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(t)=1$ ③ $\sum_{k=0}^{n}kb_{n,k}(t)=nt$

④ $\sum_{k=0}^{n}(k-nt)^2b_{n,k}(t)=nt(1-t)$

Lem 2.40 n 次 Bernstein 基本多项式构成 $\mathbb{P}_n$ 的一组基.

Def 2.41 $f\in C[0,1]$ 的 n 次 Bernstein 多项式为 $(B_nf)(t):=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})b_{n,k}(t)$

Thm 2.42（Weierstrass 估计）所有连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{P}_n$ 中稠密.（可被一致估计）

$\forall f\in C[a,b]$，$\forall\epsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n>N$，$\exists p_n\in\mathbb{P}_n$ s.t. $\forall x\in[a,b]$，$|p_n(x)-f(x)|<\epsilon$

PF：不失一般性，令 $[a,b]=[0,1]$，令 $p_n=B_nf$

$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,n\in\mathbb{N}^+$ $|(B_nf)(t)-f(t)|=|(B_nf)(t)-f(t)\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(t)|\le\sum_{k=0}^{n}|f(\frac{k}{n})-f(t)|b_{n,k}(t)$

$$=\left(\sum_{k:|\frac{k}{n}-t|<\delta}+\sum_{k:|\frac{k}{n}-t|\ge\delta}\right)|f(\tfrac{k}{n})-f(t)|\,b_{n,k}(t)\quad\left(\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(t)=1\right)$$

$$\le\sup_{|t-s|\le\delta}|f(t)-f(s)|+\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

其中 $\sum_{k:|\frac{k}{n}-t|\ge\delta}b_{n,k}(t)\le\sum_{k:|\frac{k}{n}-t|\ge\delta}b_{n,k}(t)\frac{(k-nt)^2}{\delta^2n^2}$

$$\le\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(t)(k-nt)^2\cdot\frac{1}{\delta^2n^2}=\frac{t(1-t)}{n\delta^2}\le\frac{1}{4n\delta^2}\text{，取 }n=\left\lceil\frac{\|f\|_\infty}{\epsilon\delta^2}+1\right\rceil$$