Problems of Appendix-D

张志心 计科 2106

日期：2024 年 5 月 28 日

D.5

Let $\mathcal{X}$ be the set of all bounded and unbounded sequences of complex numbers. Show that the function d given by

$$\forall x = (\xi_j),\ \forall y = (\eta_j),\ \ d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|}$$

is a metric on $\mathcal{X}$.

证明.

根据 Def D.3：

1. 非负性：$\forall x = (\xi_j),\ \forall y = (\eta_j),\ \ d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|} \geq 0$;
2. 不可分与同一性：若 $x = y$，即 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j} = 0$，反之，若 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j} = 0$，因为 $\forall j, \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j} \geq 0$，所以 $\forall j, \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j} = 0 \Rightarrow \forall j, \xi_j = \eta_j \Rightarrow x = y$；
3. 对称性：$\forall x = (\xi_j),\ \forall y = (\eta_j),\ \ d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\eta_j-\xi_j|}{1+|\eta_j-\xi_j|} = d(y,x)$；
4. 三角不等式：因为 $f(t) = \frac{t}{1+t}$ 单调递增，所以由 $|a+b| \leq |a| + |b|$ 可以得到 $f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|)$。所以有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

对于 $\forall x = (x_i)_j, y = (\eta_j), z = (\zeta_j)$，取 $a = \xi_j - \eta_j, b = \eta_j - \zeta_j$，有

$$d(x,z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \zeta_j|}{1+|\xi_j-\zeta_j|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left[\frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|} + \frac{|\eta_j-\zeta_j|}{1+|\eta_j-\zeta_j|} \right] = d(x,y) + d(y,z).$$

根据 (1,2,3,4) 可以得到 d 是 $\mathcal{X}$ 上对度量。 □

D.16

The completeness depends on the metric. For the metric $d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,\mathrm{d}t$, show that the metric space $(C[a,b], d_1)$ is not complete.

证明. 取

$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & a \leq t \leq \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2n}, \\ \dfrac{2n}{b-a}\left(t - \dfrac{a+b}{2}\right), & \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2n} < t < \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2n}, \\ 1. & \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2n} \end{cases}$$

对任意 $m>n$，有 $d_1(f_n,f_m)=\dfrac{b-a}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m})\to 0\ (m,n\to\infty$，因此 $\{f_n\}$ 是 $(C[a,b],d_1)$ 上的 Cauchy 列。假设 $\{f_n\}$ 收敛于 $f\in C$，则任意 $a<c<b$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^c |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_c^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^c |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_c^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

因为对任意的 $a<c<\frac{a+b}{2}$，都存在 $N\in\mathbb{N}^+$ 使得 $\forall n>N,\forall a<x<c,f_n(x)=-1$，所以 $\{f_n\}$ 在 $[a,c]$ 上收敛于常值 -1。由 c 的任意性可得 $\{f_n\}$ 在 $[a,\frac{a+b}{2})$ 上收敛于 -1。同理可知 $\{f_n\}$ 在 $(\frac{a+b}{2},b]$ 上收敛于 1。即 f 在 $[a,\frac{a+b}{2})$ 取值为 -1，在 $(\frac{a+b}{2},b]$ 上取值为 1。无论 f 在 $\frac{a+b}{2}$ 上如何取值都不可能连续，因此 $\{f_n\}$ 在 C 上不收敛。即 $(C,\lceil_\infty)$ 不完备。 □

D.40

Show that the ℓ^p space in Definition D.39 is complete for $p\geq 1$.

证明. 设 (x_n) 是 (ℓ^p,d) 上的 Cauchy 列 $x_n=(\xi_{n,j})_{j\geq 1}$，即

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,d_m)=\lim_{n,m\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_{n,j}-\xi_{m,j}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0,$$

所以，$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall m,n>N$，有 $d(x_n,d_m)<\epsilon$，即 $|\xi_{n,j}-\xi_{m,j}|<d(x_n,d_m)<\epsilon$，所以 $\forall j,(\xi_{\cdot,j})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 Cauchy 列，所以 $\exists\xi_j\in\mathbb{C}$ 满足 $\xi_j=\lim_{n\to\infty}\xi_{n,j}$。令 $x=(\xi_j)_{j\geq 1}$。对于每一个固定的 i 和上述 m,n，有 $\sum_{j=1}^i|\xi_{n,j}-\xi_{m,j}|^p<\epsilon^p$，令 $m\to\infty$，有 $\sum_{j=1}^i|\xi_{n,j}-\xi_j|^p\leq\epsilon^p$，再令 $i\to\infty$，有 $\sum_{j=1}^\infty|\xi_{n,j}-\xi_j|^p\leq\epsilon^p$，所以 $x_n-x\in\ell^p$。因此 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ ，根据三角不等式

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}=d(x_n-x,x)\leq d(x_n,0)+d(x_n-x,0)<\infty.$$

所以 $x\in\ell^p$，因此 $(\ell^p,d),p\geq 1$ 是完备的。 □

D.42

Show that the sequence space c_{00} in Notation 24 is a dense subset of ℓ^p in Definition D.39 with $p\in[1,\infty)$.

证明. $\forall(a_n)_{n\geq 1}\in\ell^p$，有 $\sum_{n\geq 1}|a_n|^p<\infty$，所以 $\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}\quad\text{s.t.}\quad\sum_{n\geq N}|a_n|^p<\epsilon^p$，构造 $(b_n)\in c_{00}$ 为 $b_n=\begin{cases}a_n,n<N\\0,\text{Others}\end{cases}$。所以 $d((a_n),(b_n))=\left(\sum_{n\geq N}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon$，根据 Def D.17，$c_{00}$ 是 ℓ^p 的稠密子集。 □

D.49

Show that $\emptyset$ and $\mathcal{X}$ are both open and closed.

证明. 因为 $\mathcal{X}=\mathcal{X}\backslash\emptyset,\emptyset=\mathcal{X}\backslash\mathcal{X}$，所以只需要证明 $\emptyset,\mathcal{X}$ 都是开集。因为 $\forall x\in\mathcal{X},x\notin\emptyset$，所以 $\emptyset$ 为开集（虚真命题）；因为 $\forall x\in\mathcal{X},\forall r>0,B_r(x)\in\mathcal{X}$，所以 $\mathcal{X}$ 是开集。 □

D.52

If a closed set F in a metric space $\mathcal{X}$ does not contain any open set, then $\mathcal{X} \setminus F$ is dense in $\mathcal{X}$.

证明. 反证法，若 $\mathcal{X} \setminus F$ 在 $\mathcal{X}$ 中不稠密，那么 $\exists x \in \mathcal{X}, \epsilon > 0, B_r(x) \cap \mathcal{X} \setminus F = \emptyset$，所以 $B_r(x) \subset F$，所以 $\emptyset \neq E := \{y : d(x,y) < \frac{r}{2}\} \subset F$ 是一个开集（因为 $\forall y \in E, \exists r_1 = \frac{\frac{r}{2} - d(x,y)}{2} > 0, \forall z \in B_{r_1}(y), d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \le r_1 + d(x,y) < \frac{r}{2}, \Rightarrow z \in E, \Rightarrow B_{r_1} \subset E$），与 F 中不包含任何开集矛盾。
所以 $\mathcal{X} \setminus F$ 在 $\mathcal{X}$ 中稠密。 □

D.112

What is the connection between the logical statements in (D.27) and (D.30)?

解. (D.30) 是 (D.27) 的充分不必要条件。
假设 (D.30) 成立，对任意的 $\epsilon > 0$，取 $\delta = \dfrac{\epsilon}{L}$，则

$$\forall x, y \in \mathcal{X}, d_{\mathcal{X}}(x,y) < \delta \Rightarrow d_{\mathcal{Y}}(x,y) < L\delta = \epsilon.$$

因此 (D.27) 成立。
反之，若 (D.27) 成立，取 $f(x) = \sqrt{x}, \mathcal{X} = [0,1], \mathcal{Y} = [0,1]$。对任意 $\epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon^2$，则

$$\forall x, y \in [0,1], |x-y| < \epsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right| < \frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \epsilon.$$

因此 (D.27) 成立。但因为 $f(x)$ 的导数无界，所以 (D.30) 不成立。 □

D.137

Show that the *Hilbert cube* in the metric space ℓ^2,

$$C := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}^+} : x_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \right\},$$

is sequentially compact.

证明. C 显然是闭集。因此根据 Lem D.136，只需证明 C 完全有界。
对任意 $\epsilon > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{\epsilon^2}{2}$。令

$$N_\epsilon = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) : \forall k = 1, \ldots, n, x_k = \frac{j_k \epsilon}{\sqrt{2n}}, j_k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor \frac{\sqrt{2n}}{k\epsilon} \right\rfloor \right\},$$

则对任意 $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$，存在 $x \in N_\epsilon$，使得

$$d(x,y)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2n}} \right)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^2 < \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2.$$

故 C 完全有界。因此 C 列紧。 □

D.159

Denote by $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a bounded open convex set. For $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^+$, show that the set

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in C^{(1)}(\overline{\Omega}) : \forall x \in \Omega,\ |f(x)| \leq M_1;\ \|\nabla f(x)\| \leq M_2 \right\}$$

is sequentially compact.

证明.

一致有界性：因为 $\forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in \Omega, |f(x)| \leq M_1$，所以 $\mathcal{F}$ 是一致有界的。

等度连续性：对任意 $f \in \mathcal{F}, x, y \in \Omega$，因为 Ω 是凸集，所以线段 $[x, y] \subset \Omega$。令 $\phi(t) = f((1-t)x + ty)$，则 $\phi(0) = f(x), \phi(1) = f(y), \phi'(t) = (y-x)^T \nabla f((1-t)x + ty)$。根据微分中值定理有

$$|f(y) - f(x)| = |\phi(1) - \phi(0)| = |\phi'(\xi)| = |(y-x)^T \nabla f((1-\xi)x + \xi y| \leq |y - x||\nabla f((1-\xi)x + \xi y| \leq M_2|y - x|.$$

因此 $f \in \mathcal{F}$ Lipschitz 连续且有一致的 Lipschitz 常数 M_2。对任意 $\epsilon > o$，取 $\delta = \dfrac{\epsilon}{M_2}$，则对任意 $f \in \mathcal{F}, x, y \in \Omega, |x - y| < \delta$，有 $|f(x) - f(y)| < M_2\delta = \epsilon$。

由 Ascoli-Arzela 定理（Theorem D.158），$\mathcal{F}$ 是列紧函数空间。 □

D.172

If the radius of convergence of f in Example D.171 is $+\infty$, does $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge to f uniformly or locally uniformly?

解. 局部一致收敛。由 Example D.170，对任意 $r > 0$，$\{T_n(x)\}$ 在闭区间 $[a - r, a + r]$ 上局部一致收敛于 $f(x)$。下面举反例证明 $\{T_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛于 f。

考虑 $f(x) = e^x, a = 0$。因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上解析，所以其泰勒级数 $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛半径为 $+\infty$。

取 $\epsilon = 1$，对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，取 $x = n + 1$，则

$$|T_n(x) - f(x)| = |\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - e^x| = \sum_{k=n+1}^{n} \frac{(n+1)^k}{k!} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} > 1.$$

所以 $\{T_n(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛于 $f(x)$。 □