§3 样条函数

§3.1 分段多项式样条函数

Def 3.1 给定非负整数 n,k 和严格递增 $\{x_i\}$ 为 $[a,b]$ 的一个分割，$a=x_1<x_2<\cdots<x_N=b$，关于分段点 $\{x_i\}$ 的 n 次，k 类光滑样条函数集合为 $S_n^k=\{s: s\in C^k[a,b],\ \forall i\in[1,N-1],\ s|_{[x_i,x_{i+1}]}\in \mathbb{P}_n\}$.

其中 x_i 称为样条函数的结点.

Ex 3.2 $S_n^n=\mathbb{P}_n$，S_1^0 为分段线性函数. 最常用的是三次二类样条函数 S_3^2.

Lem 3.3 记 $m_i=s'(f;x_i)$ $s\in S_3^2$，则对于 $\forall i=2,3,\dots,N-1$，$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=3\mu_i f[x_i,x_{i+1}]+3\lambda_i f[x_{i-1},x_i]$

其中 $\mu_i=\dfrac{x_i-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}$，$\lambda_i=\dfrac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}}$.

PF: 记 $p_i(x)=s|_{[x_i,x_{i+1}]}$，$k_i=f[x_i,x_{i+1}]$（在插值问题中 $p_i(x_i)=f_i$，$p_i'(x_i)=m_i$，$p_i(x_{i+1})=f_{i+1}$，$p_i'(x_{i+1})=m_{i+1}$）

Hermite 插值法中的广义差商表为：

$$\begin{array}{c|cccc}
x_i & f_i & & & \\
x_i & f_i & m_i & & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & k_i & \dfrac{k_i-m_i}{x_{i+1}-x_i} & \\
x_{i+1} & f_{i+1} & m_{i+1} & \dfrac{m_{i+1}-k_i}{x_{i+1}-x_i} & \dfrac{m_i+m_{i+1}-2k_i}{(x_{i+1}-x_i)^2}
\end{array}$$

同时，由牛顿公式得出 $p_i(x)=f_i+(x-x_i)m_i+(x-x_i)^2\dfrac{k_i-m_i}{x_{i+1}-x_i}+(x-x_i)^2(x-x_{i+1})\dfrac{m_i+m_{i+1}-2k_i}{(x_{i+1}-x_i)^2}$

$$=C_{i,0}+C_{i,1}(x-x_i)+C_{i,2}(x-x_i)^2+C_{i,3}(x-x_i)^3$$

$C_{i,0}=f_i$，$C_{i,1}=m_i$，$C_{i,2}=\dfrac{3k_i-2m_i-m_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}$，$C_{i,3}=\dfrac{m_i+m_{i+1}-2k_i}{(x_{i+1}-x_i)^2}$

由 $s\in C^2$ $\therefore p_{i-1}''(x_i)=p_i''(x_i)$ 即 $3C_{i-1,3}(x_i-x_{i-1})=C_{i,2}-C_{i-1,2}$

$$\therefore \frac{3(m_{i-1}+m_i-2k_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}=\frac{3k_i-2m_i-m_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}-\frac{3k_{i-1}-2m_{i-1}-m_i}{x_i-x_{i-1}}\qquad \mu_i+\lambda_i=1$$

$3\lambda_i(m_{i-1}+m_i-2k_{i-1})=\mu_i(3k_i-2m_i-m_{i+1})-\lambda_i(3k_{i-1}-2m_{i-1}-m_i)\Rightarrow -3\lambda_i k_{i-1}+\lambda_i m_{i-1}+2\lambda_i m_i=3\mu_i k_i-2\mu_i m_i-\mu_i m_{i+1}$

$\Rightarrow 2m_i+\mu_i m_{i+1}+\lambda_i m_{i-1}=3\mu_i k_i+3\lambda_i k_{i-1}$

Lem 3.4 记 $M_i=s''(f;x_i)$，$s\in S_3^2$，则对于 $\forall i=2,3,\dots,N-1$，$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$

PF: 将 $s(x)$ 在 x_i 处展开得 $s(x)=f_i+s'(x_i)(x-x_i)+\dfrac{M_i}{2}(x-x_i)^2+\dfrac{s'''(x_i)}{6}(x-x_i)^3$，$x\in[x_i,x_{i+1}]$

对其求 2 阶导 $s''(x)=M_i+s'''(x_i)(x-x_i)$，取 $x=x_{i+1}$ 得 $s'''(x_i)=\dfrac{M_{i+1}-M_i}{x_{i+1}-x_i}$

代回上式得 $f_{i+1}-f_i=s'(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\left(\dfrac{M_i}{2}+\dfrac{M_{i+1}-M_i}{6}\right)(x_{i+1}-x_i)^2\Rightarrow s'(x_i)=f[x_i,x_{i+1}]-\frac{1}{6}(M_{i+1}+2M_i)(x_{i+1}-x_i)$

同理可得 $s'''(x_i)=\dfrac{M_{i-1}-M_i}{x_{i-1}-x_i}\Rightarrow s'(x_i)=f[x_{i-1},x_i]-\frac{1}{6}(M_{i-1}+2M_i)(x_{i-1}-x_i)$

联立得 $6(f[x_{i+1},x_i]-f[x_i,x_{i-1}])=(M_{i+1}+2M_i)(x_{i+1}-x_i)+(M_{i-1}+2M_i)(x_i-x_{i-1})\Rightarrow \mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$

Def 3.5 三阶样条函数的分类 $s\in S_3^2$：

① 完全三阶样条函数 $s'(f;a)=f'(a)$；$s'(f;b)=f'(b)$

② 在端点处二阶导指定的样条函数 $s''(f;a)=f''(a)$，$s''(f;b)=f''(b)$

③ 自然三阶样条函数 $s''(f;a)=s''(f;b)=0$

④ 无结点三阶样条函数 $s'''(f;x)$ 在 x_2，x_{N-1} 存在

⑤ 周期三阶样条函数 $s(f;a)=s(f;b)$

$s'(f;a)=s'(f;b)$

$s''(f;a)=s''(f;b)$

Lem 3.6 完全三阶样条函数 $s\in\mathbb{S}_3^2$，记 $M_i=s''(f;x_i)$，则有：① $2M_1+M_2=6f[x_1,x_1,x_2]$，② $M_{N-1}+2M_N=6f[x_{N-1},x_N,x_N]$

PF：① $[x_1,x_2]$ 上的三次多项式可以写成 $s_1(x)=f[x_1]+f[x_1,x_1](x-x_1)+\frac{M_1}{2}(x-x_1)^2+\frac{s_1'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3$

$s_1''(x)=\frac{M_1}{\cancel{2}}+s_1'''(x_1)(x-x_1)$，代入 $x=x_2$ 得 $s_1'''(x_1)=\frac{M_2-M_1}{x_2-x_1}$，代回上式得到（令 $x=x_2$）

$f[x_1,x_2]=f[x_1,x_1]+\left(\frac{M_1}{2}+\frac{M_2-M_1}{6}\right)(x_2-x_1)\Rightarrow 2M_1+M_2=6\left(\frac{f[x_1,x_2]-f[x_1,x_1]}{x_2-x_1}\right)=6f[x_1,x_1,x_2]$

Thm 3.7 给定 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，存在一个惟一的完全/自然/周期三次样条 $s(f;x)$ 为 f 的插值。

PF：以完全三次样条为例，由 Lem 3.3 知，s 可以由所有区间上的 m_i 惟一确定。

因为 $m_1=f'(a)$，$m_N=f'(b)$，得到如下方程组

$$\begin{bmatrix}2&\mu_2&&&&&\\ \lambda_3&2&\mu_3&&&&\\ &&\ddots&&&&\\ &&\lambda_i&2&\mu_i&&\\ &&&&\ddots&&\\ &&&&\lambda_{N-2}&2&\mu_{N-2}\\ &&&&&\lambda_{N-1}&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_2\\ m_3\\ \vdots\\ m_i\\ \vdots\\ m_{N-2}\\ m_{N-1}\end{bmatrix}=b$$

，其中 b 可以由已知信息确定，$\because \mu_i+\lambda_i=1$ $\therefore$ 该矩阵是严格对角占优阵（非奇异），所以 $m_2,\dots,m_{N-1}$ 可以确定

类似的 $M_1\sim M_5$ 也可以确定。

Ex 3.8 在 $\{1,2,3,4,6\}$ 上建立完全三次样条函数 $f(x)=\ln(x)$ 在 $\{1,2,3,4,6\}$，即 x_1,x_5 处的导数，估算 $s(5)$。

Sol：由上述信息建立差分表。

x_i	$f[x_i]$		
1	0		
1	0	1	
2	0.6931	0.6931	-0.3069
3	1.0986	0.4055	-0.1438
4	1.3863	0.2877	-0.05889
6	1.7918	0.2027	-0.02831
6	1.7918	0.1667	-0.01803

$$\begin{cases}f[x_i,\dots,x_j]=\dfrac{f[x_i,\dots x_{j-1}]-f[x_{i+1},\dots,x_j]}{x_i-x_j}\\ f[\underbrace{x_i,\dots,x_i}_{n+1个}]=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_i)\end{cases}$$

由 Lem 3.4 $\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$、Lem 3.6 $\begin{cases}2M_1+M_2=6f[x_1,x_1,x_2]\\ M_{N-1}+2M_N=6f[x_{N-1},x_N,x_N]\end{cases}$ 得到如下方程组。

$$\begin{bmatrix}2&1&&&\\1&4&1&&\\&1&4&1&\\&&1&6&2\\&&&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\M_2\\M_3\\M_4\\M_5\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}-1.84112\\-0.1438\times12\\-0.05889\times12\\-0.02831\times18\\-0.01803\times6\end{bmatrix}$$

$s_4(x)=f[x_5]+f[x_5,x_4](x-6)+\frac{M_5}{2}(x-6)^2+\frac{M_5-M_4}{6(6-4)}(x-6)^3$

$\Rightarrow s_4(5)\approx1.60977$

3.2 最小性质

Thm 3.9 (Minimum bending energy) 对任意 $g\in C^2[a,b]$ 满足 $g'(a)=f'(a)$，$g'(b)=f'(b)$ 且 $g(x_i)=f(x_i)$，$i=1,2,\dots,N$，则完全三次样条 $s=s(f;x)$ 满足 $\int_a^b[s''(x)]^2dx\le\int_a^b[g''(x)]^2dx$，等号成立 $\Leftrightarrow g=s(f;x)$

PF：令 $\eta(x)=g(x)-s(x)$，$\eta\in C^2[a,b]$，$\eta'(a)=\eta'(b)=0$，且 $\eta(x_i)=0$，$\forall i=1,\dots,N$

则 $\int_a^b[g''(x)]^2dx=\int_a^b[s''(x)+\eta''(x)]^2dx=\int_a^b[s''(x)]^2dx+\int_a^b[\eta''(x)]^2dx+2\int_a^b s''(x)\eta''(x)dx$

最后一项应用分部积分：$\int_a^b s''(x)\eta''(x)dx=\sum_{i=1}^{N-1}s''(x)\eta'(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}-\sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}s'''(x)\eta'(x)dx$

$=-\sum_{i=0}^{N-1}s'''(x)\eta(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}+\sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}s^{(4)}(x)\eta(x)dx=0$ $[\eta(x_i)=0,\ s^{(4)}(x)=0]$

从而 $\int_a^b[g''(x)]^2dx=\int_a^b[s''(x)]^2dx+\int_a^b[\eta''(x)]^2dx\ge\int_a^b[s''(x)]^2dx$

Thm 3.10 (Minimum bending energy) 对任意 $g\in C^2[a,b]$ 满足 $g(x_i)=f(x_i)$, $i=1,2,\dots,N$, 则自然三次样条 $s(f;x)$

满足 $\int_a^b [s''(x)]^2dx \le \int_a^b [g''(x)]^2dx$, 等式成立当且仅当 $s(f;x)=g(x)$.

PF: 类似 Thm 3.9, $s''(a)=s''(b)=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} s''(x)\eta'(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}=0$

Lem 3.11 设 C^2 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 通过完全/在端点处二阶导指定的样条函数插值 $s\in S_3^2$, 则 $\forall x\in[a,b]$ $|s''(x)|\le 3\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$

PF: ∵ $s''(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 为线性函数, $|s''(x)|$ 在某节点处达到 max 值. 若 $j=2,\dots,N-1$, 由 Lem 3.4

$2M_j=6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]-\mu_jM_{j-1}-\lambda_jM_{j+1} \Rightarrow 2|M_j|\le 6|f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]|+(\mu_j+\lambda_j)|M_j|$

由 Cor 2.22 {若 $f\in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 处点点有定义, $a=x_0<\dots<x_n=b$ 则 $\forall x\in[a,b]$ $\exists\xi\in(a,b)$: $f[x_0,\dots,x_n,x]=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$}

$\Rightarrow \exists\xi\in(x_{j-1},x_{j+1})$ $|M_j|\le 3|f''(\xi)| \Rightarrow |s''(x)|\le 3\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$

若 $j=1,N$, (i) 由 $2M_1+M_2=6f[x_1,x_1,x_2] \Rightarrow 2|M_1|\le 6|f[x_1,x_1,x_2]|+|M_2|\le 6|f[x_1,x_1,x_2]|+|M_1|$

$\Rightarrow \exists\xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $|M_1|\le 3|f''(\xi)|$ (对于完全样条函数)

(ii) $s''(a)=f''(a)$, $s''(b)=f''(b)$ (对于端点二阶导指定的样条函数)

§3.3 误差分析

Thm 3.12 设 C^4 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 通过完全/特定二阶导数的三次样条插值, 则

$\forall j=0,1,2$ $|f^{(j)}(x)-s^{(j)}(x)|\le c_jh^{4-j}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$, $c_0=\frac{1}{16}$, $c_1=c_2=\frac{1}{2}$, $h=\max_{i=1}^{N-1}|x_{i+1}-x_i|$

① $j=2$

PF: 辅助函数 $\hat{s}\in C^2[a,b]$ 满足 $\forall i=1,2,\dots,N-1$ $\begin{cases}\hat{s}|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_3 \\ \hat{s}''(x_i)=f''(x_i)\end{cases}$, $\hat{s}''(x_N)=f''(x_N)$

可以对 f'' 求 S_1^0 分段一次函数 $\hat{s}''$, 再积分 2 次得 $\hat{s}$.

由 Thm 2.5 (Cauchy 余项), $\exists\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ s.t. $\forall x\in[x_i,x_{i+1}]$ $|f''(x)-\hat{s}''(x)|\le\frac{1}{2}|f^{(4)}(\xi_i)||(x-x_i)(x-x_{i+1})|$

$\therefore |f''(x)-\hat{s}''(x)|_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\le\frac{1}{8}\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f^{(4)}(x)|(x_{i+1}-x_i)^2\le\frac{h^2}{8}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$

对 $f(x)-\hat{s}(x)$ 求三次样条得到 $s(x)-\hat{s}(x)$ ($\hat{s}(x)\in S_3^2$), 由 Lem 3.11 $\forall x\in[a,b]$ $|s''(x)-\hat{s}''(x)|\le 3\max_{x\in[a,b]}|f''(x)-\hat{s}''(x)|$

$\therefore |f''(x)-s''(x)|\le|f''(x)-\hat{s}''(x)|+|\hat{s}''(x)-s''(x)|\le 4\max_{x\in[a,b]}|f''(x)-\hat{s}''(x)|\le\frac{1}{2}h^2\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$.

② $j=1$ ∵ $x=x_i,x_{i+1}$ 时 $f(x)-s(x)=0$. 由 Rolle Thm, $\exists\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ $f'(\xi_i)-s'(\xi_i)=0 \Rightarrow \forall x\in[x_i,x_{i+1}]$

$\Rightarrow |f'(x)-s'(x)|_{x\in[x_i,x_{i+1}]}=|x-\xi_i||f''(\eta_i)-s''(\eta_i)|\le\frac{1}{2}h^3\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$ $\quad f'(x)-s'(x)=\int_{\xi_i}^x(f''(t)-s''(t))dt$

③ $j=0$ 对 $f(x)-s(x)$ 进行线性样条 $\hat{s}\in S_1^0$, 则 $\forall x\in[a,b]$, $\hat{s}(x)\equiv 0$

$\therefore |f(x)-s(x)|_{x\in[x_i,x_{i+1}]}=|f(x)-s(x)-\hat{s}|_{x\in[x_i,x_{i+1}]}=\frac{f''(\xi)-s''(\xi)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1})\le\frac{1}{8}(x_{i+1}-x_i)^2\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f''(x)-s''(x)|$

$\le\frac{1}{16}h^4\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$

§3.4 B样条

记 $\mathbb{S}_n^{n-1}(t_1,\dots,t_N)$，$t_i$表示样条结点，有时简写成$\mathbb{S}_n^{n-1}$.

Thm 3.14 样条集合$\mathbb{S}_n^{n-1}(t_1,\dots,t_N)$是$n+N-1$维线性空间.

PF: 很容易证明它是线性空间，零元为零函数；$N-1$段n次多项式有$(N-1)(n+1)$种系数，中间$N-2$个结点要满足$0,1,\dots,n-1$次导数条件，$(N-1)(n+1)-(N-2)n=n+N-1$

§3.4.1 截断幂函数

Def 3.16 n次截断幂函数为 $x_+^n=\begin{cases}x^n & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

Ex 3.17 $\forall t\in[a,b]$ $\int_a^b (t-x)_+^n dx=\int_a^t (t-x)^n dx=\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}$

Lem 3.18 如下函数构成$\mathbb{S}_n^{n-1}(t_1,\dots,t_N)$的一组基 $1,x,x^2,\dots,x^n,(x-t_2)_+^n,\dots,(x-t_{N-1})_+^n$

PF: 显然 $\mathrm{spam}\{1,x,x^2,\dots,(x-t_2)_+^n,\dots,(x-t_{N-1})_+^n\}\subseteq\mathbb{S}_{n,N}^{n-1}$

下证这$n+N-1$个函数线性无关. 设 $\sum_{i=0}^n a_i x^i+\sum_{j=2}^{N-1}a_{n+j}(x-t_j)_+^n=0(x)$

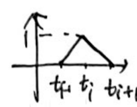
$x<t_2$时 $\sum_{i=0}^n a_i x^i=0(x)\Rightarrow a_i=0,\ i=0,1,\dots,n$，再取$x\in[t_i,t_{i+1})$，可证 $a_{n+j}=0,\ j=2,\dots,N-1$

Cor 3.19 任意$s\in\mathbb{S}_{n,N}^{n-1}$可表示为$\sum_{i=0}^n a_i(x-t_1)^i+\sum_{j=2}^{N-1}a_{n+j}(x-t_j)_+^n$ $x\in[t_1,t_N]$

PF: 由Lem 3.18，$\mathrm{span}\{1,x,\dots,x^n\}=\mathrm{span}\{1,(x-t_1),\dots,(x-t_1)^n\}$

§3.4.2 B样条的局部支撑

Def 3.21 定义t_i处的帽子函数(hat function)为 $\tilde{B}_i(x)=\begin{cases}\frac{x-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, & x\in(t_{i-1},t_i]\\ \frac{t_{i+1}-x}{t_{i+1}-t_i}, & x\in(t_i,t_{i+1}]\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$



Thm 3.22 hat function 构成$\mathbb{S}_1^0$一组基.

PF: $\sum_{i=1}^N c_i\tilde{B}_i(x)=0(x)$ 代入$x=t_i,\ \forall i=1,\dots,N$，则有$c_i\overset{D}{=}0$

Def 3.23 定义B样条的递推式为 $B_i^{n+1}(x)=\frac{x-t_{i-1}}{t_{i+n}-t_{i-1}}B_i^n(x)+\frac{t_{i+n+1}-x}{t_{i+n+1}-t_i}B_{i+1}^n(x)$，$B_i^0(x)=\begin{cases}0, & \text{otherwise}\\ 1, & x\in(t_{i-1},t_i]\end{cases}$

可以发现 B_i^n的支撑集为 $[t_{i-1},t_{i+n}]$，$n\geq 0$

Def 3.26 $f:X\to\mathbb{R}$ 的支集 $\mathrm{supp}(f)=\mathrm{closure}\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}$

Def 3.28 令X为向量空间，对$x\in X$，$L(x)\in\mathbb{R}(\text{or }\mathbb{C})$，$\forall x,y\in X$，$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}(\text{or }\mathbb{C})$，有$L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$

则称L为X上的线性泛函.

Ex 3.29 $X=C[a,b]$，$L(f)=\int_a^b f(x)dx$，$L(f)=\int_a^b x^2 f(x)dx$ 都是X上的线性泛函.

记$[x_0,\dots,x_k]f$表示在$C[x_0,x_k]$上的线性泛函的差分.

Thm 3.30 (Leibniz formula) 对$k\in\mathbb{N}$，两个函数乘积的第k个差分满足

$$[x_0,\dots,x_k]fg=\sum_{i=0}^k[x_0,\dots,x_i]f\cdot[x_i,\dots,x_k]g$$

Thm 3.30 PF:

$k=0$时, $[x_0]fg = f(x_0)g(x_0)$

由 $[x_0,\dots,x_{k+1}]fg = \frac{[x_1,\dots,x_{k+1}]fg-[x_0,\dots,x_k]fg}{x_{k+1}-x_0} \Rightarrow [x_1,\dots,x_{k+1}]fg=\sum_{i=0}^{k}[x_1,\dots,x_{i+1}]f\cdot[x_{i+1},\dots,x_{k+1}]g$

$= \underbrace{\sum_{i=0}^{k}(x_{i+1}-x_0)\cdot[x_0,\dots,x_{i+1}]f\cdot[x_{i+1},\dots,x_{k+1}]g}_{S_1} + \sum_{i=0}^{k}[x_0,\dots,x_i]f\cdot[x_{i+1},\dots,x_{k+1}]g$

$[x_0,\dots,x_k]fg = \sum_{i=0}^{k}[x_0,\dots,x_i]f\cdot[x_i,\dots,x_k]g = \underbrace{-\left(\sum_{i=0}^{k}[x_0,\dots,x_i]f\cdot(x_{k+1}-x_i)\cdot[x_i,\dots,x_{k+1}]g\right)}_{S_2} + \sum_{i=0}^{k}[x_0,\dots,x_i]f\cdot[x_{i+1},\dots,x_{k+1}]g$

$\Rightarrow [x_0,\dots,x_{k+1}]fg = \frac{S_1+S_2}{x_{k+1}-x_0} = \sum_{i=0}^{k+1}[x_0,\dots,x_i]f\cdot[x_i,\dots,x_{k+1}]g$ △差商是线性泛函

Thm 3.32 (用截断函数的差分表示B样条) $\forall n\in\mathbb N$, 有 $B_i^n(x) = (t_{i+n}-t_{i-1})\cdot[t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n$

PF: $n=0$时 $B_i^0(x) = (t_i-t_{i-1})\cdot[t_{i-1},t_i](t-x)_+^0 = (t_i-x)_+^0 - (t_{i-1}-x)_+^0 = \begin{cases}0, & x\in(-\infty,t_{i-1}]\\ 1, & x\in(t_{i-1},t_i]\\ 0, & x\in(t_i,+\infty)\end{cases}$ 注 $(t-x)_+^n$ 是关于 $\{(t-x)_+^n : t\in\mathbb R\}$ 的一类函数.

$[t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)_+^{n+1} = [t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)(t-x)_+^n \overset{\text{Thm 3.30}}{=} (t_{i-1}-x)\cdot[t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n + [t_i,\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n$ (*)

由Def 3.23 $B_i^{n+1}(x) = \beta(x)+\gamma(x)$.

$\beta(x) = \frac{x-t_{i-1}}{t_{i+n}-t_{i-1}}B_i^n(x) = (x-t_{i-1})[t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n \overset{(*)}{=} [t_i,\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n - [t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)_+^{n+1}$

$\gamma(x) = \frac{t_{i+n+1}-x}{t_{i+n+1}-t_i}B_{i+1}^n(x) = (t_{i+n+1}-x)[t_i,\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^n$

$= (t_{i+n+1}-t_i)[t_i,\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^n + (t_i-x)\cdot[t_i,\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^n$

$= [t_{i+1},\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^n - [t_i,\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n + [t_i,\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^{n+1} - [t_{i+1},\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^n$

$= [t_i,\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^{n+1} - [t_i,\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n$

$B_i^{n+1}(x) = [t_i,\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^{n+1} - [t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)_+^{n+1} = (t_{i+n+1}-t_{i-1})[t_{i-1},\dots,t_{i+n+1}](t-x)_+^{n+1}$

§3.4.3 积分和导数

Cor 3.33 B样条在支集上的平均值只依赖于它的次数. $\frac{1}{t_{i+n}-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_{i+n}} B_i^n(x)dx = \frac{1}{n+1}$.

PF: LHS $= \int_{t_{i-1}}^{t_{i+n}}[t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n dx = [t_{i-1},\dots,t_{i+n}]\int_{t_{i-1}}^{t_{i+n}}(t-x)_+^n dx = [t_{i-1},\dots,t_{i+n}]\frac{(t-t_{i-1})^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Thm 3.34 对$n\geq 2$, 有$\forall x\in\mathbb R$ $\frac{d}{dx}B_i^n(x) = \frac{nB_i^{n-1}(x)}{t_{i+n-1}-t_{i-1}} - \frac{nB_{i+1}^{n-1}(x)}{t_{i+n}-t_i}$

$n=1$时,上式对除 t_{i-1},t_i,t_{i+1} 以外的点成立 (这些点 B_i^1 没有一阶导), $n\geq 2$时 $\frac{d}{dx}B_i^n(x)$ 对$\forall x\in\mathbb R$存在

PF: $\frac{d}{dx}B_i^n(x) = \frac{d}{dx}(t_{i+n}-t_{i-1})\cdot[t_{i-1},\dots,t_{i+n}](t-x)_+^n = (t_{i+n}-t_{i-1})\frac{[t_i,\dots,t_{i+n}]-[t_{i-1},\dots,t_{i+n-1}]}{t_{i+n}-t_{i-1}}\frac{d}{dx}(t-x)_+^n$

$= -n[t_i,\dots,t_{i+n}](t-x)_+^{n-1} + n[t_{i-1},\dots,t_{i+n-1}](t-x)_+^{n-1} = \frac{nB_i^{n-1}(x)}{t_{i+n-1}-t_{i-1}} - \frac{nB_{i+1}^{n-1}(x)}{t_{i+n}-t_i}$

Cor 3.35 $B_i^n\in\mathbb S_n^{n-1}$

PF: ~~由3.32~~ 由 $B_i^1=\hat B_i$ 得 $B_i^1\in\mathbb S_1^0$ ∨ $B_i^{n+1}(x) = \frac{x-t_{i-1}}{t_{i+n}-t_{i-1}}B_i^n(x) + \frac{t_{i+n+1}-x}{t_{i+n+1}-t_i}B_{i+1}^n(x) \in \mathbb P_{n+1}$ (由归纳法)

$\frac{d}{dx}B_i^{n+1}(x) = \frac{nB_i^{n-1}(x)}{t_{i+n-1}-t_{i-1}} - \frac{nB_{i+1}^{n-1}(x)}{t_{i+n}-t_i} \in \cancel{C^{n-1}[t_{i-1},t_i]}\ C^{n-1}[t_{i-1},t_{i+n}]$

$\forall x\in[t_{j-1},t_j]$ $B_i^{n+1}(x)\in C^n[t_{j-1},t_j] \Rightarrow B_i^{n+1}\in\mathbb S_{n+1}^n$

§3.4.4 Marsden's identity

Thm 3.36 对任意 $n\in\mathbb{N}$，有 $(t-x)^n=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(t-t_i)\cdots(t-t_{i+n-1})B_i^n(x)$.

$n=0$ 时 $(t-t_i)\cdots(t-t_{i+n-1})=1$

PF: $n=0$ 显然，对 $t-x$ 在 t_{i-1},t_{i+n} 处应用 Lagrange 插值得到 $t-x=\frac{t-t_{i+n}}{t_{i-1}-t_{i+n}}(t_{i-1}-x)+\frac{t-t_{i-1}}{t_{i+n}-t_{i-1}}(t_{i+n}-x)$

由归纳法 $(t-x)^{n+1}=(t-x)\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(t-t_i)\cdots(t-t_{i+n-1})B_i^n(x)$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(t-t_i)\cdots(t-t_{i+n})\frac{x-t_{i-1}}{t_{i+n}-t_{i-1}}B_i^n(x)+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(t-t_i)\cdots(t-t_{i+n})\frac{t_{i+n+1}-x}{t_{i+n+1}-t_i}B_{i+1}^n(x)$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(t-t_i)\cdots(t-t_{i+n})B_i^{n+1}(x)$$

Cor 3.37 $\forall j\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$，有 $(t_j-x)_+^n=\sum_{i=-\infty}^{j-n}(t_j-t_i)\cdots(t_j-t_{i+n-1})B_i^n(x)$

PF: $(t_j-x)^n=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(t_j-t_i)\cdots(t_j-t_{i+n-1})B_i^n(x)$，又 $\because \forall i=j-n+1,\dots,j$ $(t_j-t_i)\cdots(t_j-t_{i+n-1})=0$

当 $i>j$ 时 $\operatorname{supp}B_i^n(x)\cap(-\infty,t_j]=\phi$ $\therefore (t_j-x)^n=\sum_{i=-\infty}^{j-n}(t_j-t_i)\cdots(t_j-t_{i+n-1})B_i^n(x)$

易证 RHS 的支集在 $(-\infty,t_j]$ 中.

§3.4.5 对称多项式

Def 3.38 k 次初等对称多项式为 $\sigma_k(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$，特别的 $\sigma_0(x_1,\dots,x_n)=1$

$\forall k>n$ $\sigma_k(x_1,\dots,x_n)=0$

k 次完全对称多项式为 $\tau_k(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$

Lem 3.40 对 $k\le n$，初等对称多项式满足 $\sigma_{k+1}(x_1,\dots,x_{n+1})=\sigma_{k+1}(x_1,\dots,x_n)+x_{n+1}\sigma_k(x_1,\dots,x_n)$

Def 3.42 初等对称多项式生成函数为 $g_{\sigma,n}(z)=\prod_{i=1}^n(1+x_iz)$，完全对称多项式为 $g_{\tau,n}(z)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{1-x_iz}$

Lem 3.43 $g_{\sigma,n}(z)=\sum_{k=0}^n\sigma_k(x_1,\dots,x_n)z^k$，$g_{\tau,n}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\tau_k(x_1,\dots,x_n)z^k$

Lem 3.45 $\tau_{k+1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=\tau_{k+1}(x_1,\dots,x_n)+x_{n+1}\tau_k(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\Rightarrow g_{\tau,n+1}=g_{\tau,n}+x_{n+1}z\,g_{\tau,n+1}$

Thm 3.46 $m-n$ 次 $n+1$ 元完全对称多项式是 x^m 的第 n 个差分，即：

$\forall m\in\mathbb{N}^+,\ \forall i\in\mathbb{N},\ \forall n=0,1,\dots,m$ $\tau_{m-n}(x_i,\dots,x_{i+n})=[x_i,\dots,x_{i+n}]x^m$

PF: $n=0$ 时 $\tau_m(x_i)=[x_i]x^m=x_i^m$，设对 $n(<m)$ 成立，

$\tau_{m-n}(x_i,\dots,x_{i+n})=[x_i,\dots,x_{i+n}]x^m$

$\tau_{m-n}(x_{i+1},\dots,x_{i+n+1})=[x_{i+1},\dots,x_{i+n+1}]x^m$

目标是 $\tau_{m-n-1}(x_i,\dots,x_{i+n+1})=\frac{\tau_{m-n}(x_{i+1},\dots,x_{i+n+1})-\tau_{m-n}(x_i,\dots,x_{i+n})}{x_{i+n+1}-x_i}=[x_i,\dots,x_{i+n+1}]x^m$

$\therefore\Leftrightarrow (x_{i+n+1}-x_i)\tau_{m-n-1}(x_i,\dots,x_{i+n+1})=\tau_{m-n}(x_{i+1},\dots,x_{i+n+1})-\tau_{m-n}(x_i,\dots,x_{i+n})$

$\Leftrightarrow \tau_{m-n}(x_i,\dots,x_{i+n})+x_{i+n+1}\tau_{m-n-1}(x_i,\dots,x_{i+n+1})=\tau_{m-n}(x_{i+1},\dots,x_{i+n+1})+x_i\tau_{m-n-1}(x_i,\dots,x_{i+n+1})$

左=右 $=\tau_{m-n}(x_i,\dots,x_{i+n+1})$，故成立

§3.4.6 B样条构成基

Thm 3.47 给定 $k\in\mathbb{N}$，对 $\forall n\geq k$，x^k 可以表示为 B样条的线性组合，

$$\binom{n}{k}x^k=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sigma_k(t_i,\dots,t_{i+n-1})B_i^n(x)$$

PF：$\because (1+t_ix)\cdots(1+t_{i+n-1}x)=\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(t_i,\dots,t_{i+n-1})x^k$.

令 $x=-\frac{1}{t}$，然后同乘 t^n，得到 $(t-t_i)\cdots(t-t_{i+n-1})=\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(t_i,\dots,t_{i+n-1})(-1)^k t^{n-k}$

由 Thm 3.36 $(t-x)^n=\sum_{-\infty}^{+\infty}(t-t_i)\cdots(t-t_{i+n-1})B_i^n(x)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\sigma_k(t_i,\dots,t_{i+n-1})(-1)^k t^{n-k}B_i^n(x)$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{n-k}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sigma_k(t_i,\dots,t_{i+n-1})B_i^n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{n-k}\binom{n}{k}x^k \Rightarrow \text{得证}$$

Cor 3.48 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}B_i^n=1$ （Thm 3.47 代入 $k=0$ 即可）

Thm 3.49 如下B样条构成 $\mathbb{S}_n^{n-1}(t_1,\dots,t_N)$ 的一组基：$B_{2-n}^n(x), B_{3-n}^n(x),\dots,B_N^n(x)$ （$n+N-1$ 个）

PF：由 Lem 3.18，$1,x,\dots,x^n,(x-t_2)_+^n,(x-t_3)_+^n,\dots,(x-t_{N-1})_+^n$ 构成 $\mathbb{S}_n^{n-1}(t_1,\dots,t_N)$ 的一组基，

只需证明这一组基可以用上述B样条表示，由于 $\forall t_i\in\mathbb{R}$，$(x-t_i)_+^n=(x-t_i)^n-(-1)^n(t_i-x)_+^n$

由 Thm 3.36 和 Cor 3.37 $(x-t_i)^n$，$(t_i-x)_+^n$ 均可用B样条表示，再由 Thm 3.47 x^k 也可以被表示

§3.4.7 基数B样条

Def 3.50 n 次基数B样条 $B_{i,\mathbb{Z}}^n$ 为以整点为结点的B样条.

Cor 3.51 基数B样条关于平移不变 $\forall x\in\mathbb{R}$，$B_{i,\mathbb{Z}}^n(x)=B_{i+1,\mathbb{Z}}^n(x)$

Cor 3.52 基数B样条关于其支集区间中心对称，即 $\forall n>0$，$\forall x\in\mathbb{R}$，$B_{i,\mathbb{Z}}^n(x)=B_{i,\mathbb{Z}}^n(2i+n-1-x)$

△递推关系 $B_{i,\mathbb{Z}}^{n+1}(x)=\frac{x-i+1}{n+1}B_{i,\mathbb{Z}}^n(x)+\frac{i+n+1-x}{n+1}B_{i+1,\mathbb{Z}}^n(x)$

Thm 3.55 n 次基数B样条可表示为 $B_{i,\mathbb{Z}}^n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=-1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+1}{k+1}(k+i-x)_+^n$

PF：由 Thm 3.32 $B_{i,\mathbb{Z}}^n(x)=(n+1)[i-1,\dots,i+n](t-x)_+^n\xlongequal{\text{Thm 2.29}}\frac{n+1}{(n+1)!}\Delta^{n+1}(i-1-x)_+^n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}(i-1+k-x)_+^n$

Cor 3.56 基数B样条在整数 j 处的取值为 $B_{i,\mathbb{Z}}^n(j)=\frac{1}{n!}\sum_{k=j-i+1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+1}{k+1}(k+i-j)_+^n$

Thm 3.57 存在唯一的B样条 $S(x)\in\mathbb{S}_3^2$ 在 $1,2,\dots,N$ 处对 f 插值，且有 $S'(1)=f'(1)$，$S'(N)=f'(N)$

$S(x)=\sum_{i=-1}^{N}a_iB_{i,\mathbb{Z}}^3(x)$，$a_{-1}=a_1-2f'(1)$，$a_N=a_{N-2}+2f'(N)$，$a^T=[a_0,\dots,a_{N-1}]$ 是 $Ma=b$ 的解.

$b^T=[3f(1)+f'(1),6f(2),\dots,6f(N-1),3f(N)-f'(N)]$ $\quad M=\begin{bmatrix}2&1&&&\\1&4&1&&\\&&\ddots&&\\&&1&4&1\\&&&1&2\end{bmatrix}$

PF：$f(i)=a_{i-2}B_{i-2,\mathbb{Z}}^3(i)+a_{i-1}B_{i-1,\mathbb{Z}}^3(i)+a_iB_{i,\mathbb{Z}}^3(i)$ (*)

由 $B_{i,\mathbb{Z}}^3(j)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & j\in\{i,i+2\}\\ \frac{2}{3}, & j=i+1\\ 0, & j\in\mathbb{Z}\setminus\{i,i+1,i+2\}\end{cases}$ 得 $a_{i-2}+4a_{i-1}+a_i=6f(i)$ 为 $Ma=b$ 的中间 $N-2$ 项

由 Thm 3.34 $\frac{d}{dx}B_{i,\mathbb{Z}}^n(x)=B_{i,\mathbb{Z}}^{n-1}(x)-B_{i+1,\mathbb{Z}}^{n-1}(x)$，由 $B_{i,\mathbb{Z}}^2(j)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & j\in\{i,i+1\}\\ 0, & j\in\mathbb{Z}\setminus\{i,i+1\}\end{cases}$，对(*)求导，令 $x=1 \Rightarrow 2a_0+a_1=f'(1)+3f(1)$

$f'(1)=-\frac{1}{2}a_{-1}+\frac{1}{2}a_1 \Rightarrow a_{-1}=a_1-2f'(1)$，代入 $a_{-1}=6f(1)-a_1-4a_0 \Rightarrow 2a_0+a_1=f'(1)+3f(1)$

$\because$ M是对角占优阵. 所以 $\det(M)>0$ 有唯一解

Thm 3.58 存在唯一样条 $s(x)\in\mathbb{S}_2^1$，在 $t_i=i+\frac{1}{2}$，$i=1,2,\dots,N-1$ 处对 f 插值，且有 $s(1)=f(1)$，$s(N)=f(N)$

$s(x)=\sum_{i=0}^{N}a_iB_{i,\mathbb{Z}}^2(x)$ 其中 $a_0=2f(1)-a_1$，$a_N=2f(N)-a_{N-1}$，$a^T=[a_1,\dots,a_{N-1}]$ 是 $Ma=b$ 的解.

$b^T=[8f(\frac{3}{2})-2f(1),\ 8f(\frac{5}{2}),\dots,\ 8f(N-\frac{3}{2}),\ 8f(N-\frac{1}{2})-2f(N)]$，$M=\begin{bmatrix}5 & 1 & & & \\ 1 & 6 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 6 & 1 \\ & & & 1 & 5\end{bmatrix}$

PF: $f(t_i)=a_{i-1}B_{i-1,\mathbb{Z}}^2(t_i)+a_iB_{i,\mathbb{Z}}^2(t_i)+a_{i+1}B_{i+1,\mathbb{Z}}^2(t_i)$，由 Thm 3.55，$B_{0,\mathbb{Z}}^2(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$，$B_{0,\mathbb{Z}}^2(-\frac{1}{2})=B_{0,\mathbb{Z}}^2(\frac{3}{2})=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow f(t_i)=a_{i-1}\cdot\frac{1}{8}+a_i\times\frac{3}{4}+a_{i+1}\times\frac{1}{8}\Rightarrow Ma=b$ 的中间 $N-3$ 项

$x=1$ 时 $f(1)=a_0B_{0,\mathbb{Z}}^2(1)+a_1B_{1,\mathbb{Z}}^2(1)=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1$　代入 $a_0=8f(\frac{3}{2})-6a_1-a_2$ 得 $5a_1+a_2=8f(\frac{3}{2})-2f(1)$

§3.5 利用样条曲线进行曲线拟合.

Def 3.59 开曲线是连续映射 $\gamma:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^n$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，若 γ 是单射，则称它是简单的.

Def 3.60 曲线 γ 的正切向量: $\gamma'=\frac{d\gamma}{dt}$ 标准化得到的单位正切向量，记为 t.

Def 3.61 单位速度曲线为每一点正切向量为单位长度的曲线.

Def 3.62 点 $\gamma(t_0)$ 称为 regular point 如果 $t(t_0)$ 存在且不为0，所有点均正规则称曲线正规.

Def 3.63 从 $\gamma(t_0)$ 开始的曲线参数长度 arc-length 为 $s_\gamma(t)=\int_{t_0}^{t}\|\gamma'(u)\|_2du$

Def 3.64 若映射 $X\mapsto Y$ 是连续双射且反函数也连续，则该映射为同态 homomorphism. 称 X,Y 同态.

Def 3.65 曲线 $\tilde{\gamma}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\to\mathbb{R}^n$ 是曲线 $\gamma(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^n$ 的 reparameterization (重参量化)，如果存在同态 $\phi:(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\to(\alpha,\beta)$

使得 $\tilde{\gamma}(\tilde{t})=\gamma(\phi(\tilde{t}))$，$\tilde{t}\in(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$

Lem 3.66 正规曲线的重参量化是单位速度的当且仅当它是基于参数长度的.

Ex 3.67 $\gamma(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t)$，$\gamma'(t)=(e^t(\cos t-\sin t),e^t(\cos t+\sin t))\Rightarrow\|\gamma'(t)\|_2=\sqrt{2}e^t$

$s(t)=\int_0^t e^\tau\sqrt{2}d\tau=\sqrt{2}(e^t-1)\Rightarrow t=\ln(\frac{s}{\sqrt{2}}+1)$，$\gamma(s)=(\frac{s}{\sqrt{2}}+1)(\cos(\ln(\frac{s}{\sqrt{2}}+1)),\sin(\ln(\frac{s}{\sqrt{2}}+1)))$.

Def 3.68 闭曲线是连续映射 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 满足 $\gamma(0)=\gamma(1)$，若严格限制 γ 在 $[0,1)$ 上，且它是单射，则称其为简单闭曲线或若当曲线.

Def 3.69 曲线的单位符号方向记为 n_s，由正切向量逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到.

Def 3.70 对于单位速度曲线 γ，signed curvature 定义为 $\kappa_s=\gamma''\cdot n_s$

Def 3.71 累积弦长: 由 $\{x_i\in\mathbb{R}^D: i=1,\dots,n\}$ 得到 n 个实数 $t_i=\begin{cases}0, & i=1\\ t_{i-1}+\|x_i-x_{i-1}\|_2, & i>1\end{cases}$

Alg 3.72 曲线 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^D$ 可用 D 个样条逼近: (a) 计算累积弦长　(b) 拟合每个坐标的样条函数.