1 求解线性方程组

1.1 二分法

Input: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$

$M\in\mathbb{N}$, $\delta\in\mathbb{R}$, $\epsilon\in\mathbb{R}$

Preconditions: $f\in C[a,b]$

$\operatorname{sgn}(f(a))\neq\operatorname{sgn}(f(b))$

Output: c, h, k

Postconditions: $|f(c)|<\epsilon$ 或 $|h|<\delta$ 或 $k=M$

```
h ← b-a, u ← f(a)
for k=0:M do
   h ← h/2, c ← a+h
   if |h|<δ or k=M then break
   w ← f(c)
   if |w|<ε then break
   else if sgn(w) = sgn(u) then a ← c
   end
end
```

1.2 Q-阶收敛

Def 1.1 (Q-order convergence) 称一个收敛数列 $\{x_n\}$ Q-阶 p 收敛于 L $(p\geq 1)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}-L|}{|x_n-L|^p}=c>0$

其中，c 为渐近因子；特别的，$p=1$ 时称为 Q-线性收敛，$p=2$ 时称为 Q-平方收敛.

Def 1.2 迭代序列 $\{x_n\}$ 线性收敛到 L，当且仅当 $\exists c\in(0,1)$，$\exists d>0$，s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$，$|x_n-L|\leq c^n d$

若 $\{x_n\}\to L$，其收敛阶为最大的 $p\,(\in\mathbb{R}^+)$ 满足 $\exists c>0, \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n>N$，$|x_{n+1}-L|\leq c|x_n-L|^p$

Thm 1.3 任意单调有界序列必收敛.

Thm 1.4 二分法的收敛性：对于连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(\operatorname{sgn}(f(a))\neq\operatorname{sgn}(f(b)))$

迭代序列以渐进因子 $\frac{1}{2}$ 线性收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$，$f(\alpha)=0$，$|c_n-\alpha|\leq 2^{-(n+1)}(b_0-a_0)$

Pf: ① $a_0\leq a_1\leq\cdots\leq b_0$，$b_0\geq b_1\geq\cdots\geq a_0$，$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$

$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n-a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)=0$ 因此 $\lim a_n=\lim b_n=\alpha$

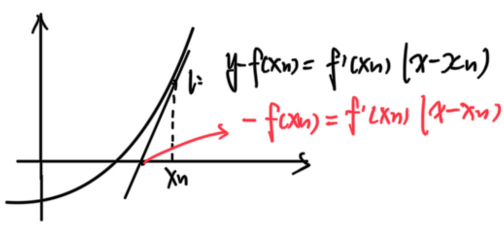
由于 $f(a_n)f(b_n)\leq 0$，则由 f 的连续性知 $f(a_n)f(b_n)\longrightarrow f(\lim a_n)f(\lim b_n)=f^2(\alpha)\leq 0\Rightarrow f(\alpha)=0$

② 由于 $c_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ 而 $\alpha\in[a_n,b_n]$，因此 $|c_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}(b_n-a_n)=\frac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0)$

1.3 牛顿法

Alg 1.5 寻找 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的根：$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，$n\in\mathbb{N}$

终止条件：$k=M$ 或 $|f(x_n)|<\delta$



Thm 1.6 牛顿法的收敛性证明 一个C^2函数 $f:[\alpha-\delta,\alpha+\delta]\to\mathbb{R}$，其中$f(\alpha)=0$，$f'(\alpha)\neq 0$，若$x_0$足够接近$\alpha$，那么收敛序列$\{x_n\}$在牛顿法中，至少平方收敛到$\alpha$. i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha-x_{n+1}}{(\alpha-x_n)^2}=-\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$

PF: $f(\alpha)=f(x_n)+(\alpha-x_n)f'(x_n)+\frac{(\alpha-x_n)^2}{2}f''(\xi)$ ξ在α到x_n之间

∵ $f(\alpha)=0$ ∴ $-\alpha=-x_n+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+\frac{(\alpha-x_n)^2}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}$

∵ $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

∴ $x_{n+1}-\alpha=\frac12(\alpha-x_n)^2\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}$ ∵ f'连续，$f'(\alpha)\neq0$ ∴ $\exists\delta_1\in(0,\delta)$ s.t. $\forall x\in[\alpha-\delta_1,\alpha+\delta_1]$，$f'(x)\neq0$

定义 $M=\frac{\max_{x\in[\alpha-\delta_1,\alpha+\delta_1]}|f''(x)|}{2\min_{x\in[\alpha-\delta_1,\alpha+\delta_1]}|f'(x)|}$ 选择足够接近α的满足以下条件的x_0：(i) $|x_0-\alpha|=\delta_0<\delta_1$ (ii) $M\delta_0<1$

$\Rightarrow x_{n+1}-\alpha\le M(x_n-\alpha)^2 \xRightarrow{M|x_0-\alpha|<1} |x_n-\alpha|\le\frac1M(M|x_0-\alpha|)^{2^n}$ ∴ $\{x_n\}\to\alpha$

Thm 1.7 连续函数 $f:[a,b]\to[c,d]$ 双射 $\Leftrightarrow$ f严格单调

Thm 1.8 一个二阶连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(\alpha)=0$，$f'>0$，$f''>0$，则α是其唯一根，且牛顿法的序列$\{x_n\}$平方收敛.

PF: ∵ $f\in C^2$、$f'>0$ ∴ f是双射 ∵ $0\in f(\mathbb{R})$ ∴ $f(x)=0$有惟一解

由thm 1.6. $x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)^2\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}>0$ ξ在x_n与α之间 ∴ $\forall n>0$，$x_n>\alpha$

∵ $x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ∴ $\{x_n-\alpha: n>0\}\downarrow$ 所以$\{x_n\}$收敛

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则 $a=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$ ∴ $f(a)=0$ ∴ $a=\alpha$

平方收敛性：令 $M=\frac{\max f''(x_1)}{2\min f'(x_2)}$ $x_1,x_2\in[\min(\alpha,x_0),x_1]$

$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n\geq N$，$|x_n-\alpha|<\frac1M$ 且由于 $x_{n+1}-\alpha<M(x_n-\alpha)^2$

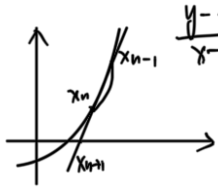
∴ $x_n-\alpha<\frac1M(M|x_N-\alpha|)^{2^{n-N}}$ $\forall n\geq N$

Def 1.9 V是一个向量空间，$U\subseteq V$ 是个凸集，当且仅当 $\forall x,y\in U$，$\forall t\in[0,1]$ $f(tx+(1-t)y)\in U$

$f:U\to\mathbb{R}$是凸函数，当且仅当 $\forall x,y\in U$，$\forall t\in[0,1]$，$f(tx+(1-t)y)\le f(x)\cdot t+f(y)\cdot(1-t)$

$\boxed{\text{1.4 割线法}}$

$\frac{y-f(x_n)}{x-x_n}=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$



Alg 1.10：求 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的一个根，初始值$x_0,x_1$，$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

终止条件：$|f(x_n)|<\epsilon$, or $|x_n-x_{n-1}|<\delta$, or $k=M$

Def 1.11 Fibonacci数列 $F_0=F_1=1$，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$

$r_0=\frac{1+\sqrt5}{2}$，$r_1=\frac{1-\sqrt5}{2}$，$F_n=\frac{r_0^n-r_1^n}{\sqrt5}$，$\Delta F_{n+1}=r_0F_n+r_1^n$

Lem 1.12 $\exists\xi_n$在x_{n-1}和x_n之间，ζ_n在$\min(x_{n-1},x_n,\alpha)$和$\max(x_{n-1},x_n,\alpha)$之间 $x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)}$

PF: 定义 $f[a,b]=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

$x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-f(x_n)f^{-1}[x_{n-1},x_n]=f^{-1}[x_{n-1},x_n]\Big((x_n-\alpha)f[x_{n-1},x_n]-f(x_n)\Big)$

$=f^{-1}[x_{n-1},x_n]\Big(\frac{(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)f[x_{n-1},x_n]}{x_{n-1}-\alpha}-(f(x_n)-f(\alpha))\Big)=(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\frac{\frac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_n,\alpha]}{x_{n-1}-\alpha}}{f[x_{n-1},x_n]}$

存在ξ_n在x_{n-1}在x_n之间：$f[x_{n-1},x_n]=f'(\xi_n)$

定义 $g(x)=f[x_n,x]$，故$\exists\beta$在x_{n-1}和α之间 $\frac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_n,\alpha]}{x_{n-1}-\alpha}=g'(\beta)=\left(\frac{f(\beta)-f(x_n)}{\beta-x_n}\right)'=\frac{f'(\beta)(\beta-x_n)-f(\beta)+f(x_n)}{(\beta-x_n)^2}$

$f(x_n)=f(\beta)-f'(\beta)(\beta-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2}(\beta-x_n)^2\Rightarrow\frac{f'(\beta)(\beta-x_n)-f(\beta)+f(x_n)}{(\beta-x_n)^2}=\frac{f''(\zeta_n)}{2}$ ζ_n在β和x_n之间

∴ $x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)}$

Thm 1.13 (割线法的收敛性) 一个 C^2 函数 $f:\beta\to\mathbb{R}$ ($\beta=[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$) $f(\alpha)=0$ 且 $f'(\alpha)\neq0$. 若 x_0 和 x_1 都充分接近 α, $f''(\alpha)\neq0$, 则 $\{x_n\}$ 以阶 $p=\frac{1+\sqrt5}{2}$ 收敛到 α.

利用 $E_{n+1}=E_nE_{n-1}\frac{f''(\xi_n)}{2f'(\zeta_n)}$

PF: ∵ f' 连续, $f'(\alpha)\neq0$, ∴ $\exists\delta_1\in(0,\delta)$ s.t. $\forall x\in B(\alpha,\delta_1)$ $f'(x)\neq0$ 令 $E_i=|x_i-\alpha|$

$$M=\frac{\max_{x\in B(\alpha,\delta_1)}|f''(x)|}{\min_{x\in B(\alpha,\delta_1)}|f'(x)|}$$ 由 Lem 1.12, $ME_{n+1}\le ME_nME_{n-1}$

若 x_1, x_0 满足 (i) $E_0<\delta$, $E_1<\delta$; (ii) $\max(ME_1, ME_0)=\eta<1$ 则由归纳 $E_n<\delta$, $ME_n<\eta$

∴ $ME_{n+1}\le ME_nME_{n-1}\le\eta^{q_n+q_{n-1}}=\eta^{q_{n+1}}$ 且中 $\{q_n\}=\{F_n\}$ $q_n\to\frac{r_0^{n+1}}{\sqrt5}$ $E_n\le B_n:=\frac{1}{M}\eta^{q_n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

要估计收敛速度, 考虑上界 $\{B_n: B_n=\frac{1}{M}\eta^{q_n}\}$ 的下降速度

$$\frac{B_{n+1}}{B_n^{r_0}}=\frac{\frac{1}{M}\eta^{q_{n+1}}}{(\frac{1}{M})^{r_0}\eta^{r_0q_n}}=M^{r_0-1}\eta^{q_{n+1}-r_0q_n}\le M^{r_0-1}\eta^{-1}$$ 其中 $q_{n+1}-r_0q_n=r_1^{n+1}>-1$

令 $m_n=\left|\frac{f''(\xi_n)}{2f'(\zeta_n)}\right|$, $m_\alpha=\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$ $E_{n+1}=E_nE_{n-1}m_n\Rightarrow E_n=E_0^{F_{n-1}}E_1^{F_n}m_1^{F_{n-1}}m_2^{F_{n-2}}\cdots m_{n-1}^{F_1}$

$E_{n+1}=E_0^{F_n}E_1^{F_{n+1}}m_1^{F_n}m_2^{F_{n-1}}\cdots m_{n-1}^{F_2}m_n^{F_1}$

$$\Rightarrow\frac{E_{n+1}}{E_n^{r_0}}=E_1^{F_{n+1}-r_0F_n}E_0^{F_n-r_0F_{n-1}}m_1^{F_n-r_0F_{n-1}}\cdots m_{n-1}^{F_2-r_0}m_n^{F_1}=E_1^{r_1^n}E_0^{r_1^{n-1}}m_1^{r_1^{n-1}}\cdots m_{n-1}^{r_1^1}m_n^1$$

根据收敛性和连续性 $\lim_{n\to\infty}m_n=m_\alpha\Rightarrow\exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n>N$ $m_n\in(\frac12m_\alpha, 2m_\alpha)$

定义 $A=E_1^{r_1^n}E_0^{r_1^{n-1}}m_1^{r_1^{n-1}}\cdots m_N^{r_1^{n-N}}$ $B=m_{N+1}^{r_1^{n-N-1}}\cdots m_n^1$ $\Rightarrow\frac{E_{n+1}}{E_n^{r_0}}=AB$

∵ $|r_1|<1$, $\lim_{n\to\infty}A=1$ $B\le(2m_\alpha)^1(\frac12m_\alpha)^{r_1}\cdots m_{N+1}^{r_1^{n-N-1}}\le2^{1-r_1+r_1^2+\cdots+(-r_1)^{n-N-1}}m_\alpha^{1+r_1+r_1^2+\cdots+r_1^{n-N-1}}$ ($r_1<0$)

$\le2^{\sum_{i=0}^{n-N-1}(-r_1)^i}m_\alpha^{\sum_{i=0}^{n-N-1}r_1^i}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_{n+1}}{E_n^{r_0}}=\lim_{n\to\infty}A\lim_{n\to\infty}B$$
$$=\lim_{n\to\infty}B\le2^{\frac{1}{1+r_1}}m_\alpha^{\frac{1}{r_0}}$$ $\Longrightarrow\{E_n\}$ 以阶 r_0 收敛

Cor 1.13 在根 α 附近 $f(x)=0$, 令 m 和 sm 为计算 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的时间, 求解精确度 ϵ

用 Newton 法 $T_N=(1+s)m\lceil\log_2k\rceil$, 用割线法 $T_S=m\lceil\log_{r_0}k\rceil+m$

其中 $r_0=\frac{1+\sqrt5}{2}$, $C=\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$ $k=\frac{\log C\epsilon}{\log C|x_0-\alpha|}$

PF: Newton法 $ME_n\le(ME_0)^{2^n}$ 令 $i\in\mathbb{N}^+$ s.t. $(ME_0)^{2^i}\le M\epsilon$ 且 i 最小 $M\to C$ ∴ $i=\lceil\log_2k\rceil$

割线法 假设 $ME_0\ge ME_1$, $ME_n\approx(ME_0)^{\frac{\sqrt5}{5}r_0^{n+1}}$ 令 $j\in\mathbb{N}^+$ s.t. $r_0^j\le\frac{\sqrt5}{r_0}k$ $j=\lceil\log_{r_0}k+\log_{r_0}\frac{\sqrt5}{r_0}\rceil\le\lceil\log_{r_0}k\rceil+1$

1.5 不动点法

Def 1.14 α 为 g 的不动点 $\Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$

Lem 1.15 若 $g:[a,b]\to[a,b]$ 连续, 则 g 至少有一个不动点 (令 $f(x)=g(x)-x$)

Thm 1.16 (Brouwer's 动点) 任一连续 $f:\mathbb{D}^n\to\mathbb{D}^n$ $\mathbb{D}^n:=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\le1\}$ 有不动点.

Def 1.17 不动点法即找 $x_{n+1}=f(x_n)$, 如 Newton 法就是不动点法

Def 1.18 $f:[a,b]\to[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的一个收缩映射, 若 $\exists\lambda\in(0,1)$, s.t. $\forall x,y\in[a,b]$ $|f(x)-f(y)|\le\lambda|x-y|$

Thm 1.19 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续收缩映射, 则其有惟一不动点 $\alpha\in[a,b]$.

对于任意 $x_0\in[a,b]$, 不动点法收敛到 α, 且 $|x_n-\alpha|\le\frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1-x_0|$

PF: 由 lem 1.15, $g(x)$ 有不动点, 假设有 2 个, 则与 $|\alpha-\beta|\lambda\ge|f(\alpha)-f(\beta)|$ 矛盾. 所以有惟一不动点.

$|x_{n+1}-\alpha|=|g(x_n)-g(\alpha)|\le|x_n-\alpha|\cdot\lambda$

∴ $|x_n-\alpha|\le\lambda^n|x_0-\alpha|\le\lambda^n(|x_1-x_0|+|x_1-\alpha|)\le\lambda^n(|x_1-x_0|+\lambda|x_0-\alpha|)$

代入 $n=0$ 得 $|x_0-\alpha|\le\lambda(|x_1-\alpha|+\lambda|x_0-\alpha|)\Rightarrow|x_0-\alpha|\le\frac{1}{1-\lambda}|x_1-x_0|$

Thm 1.20 考虑 $g:[a,b]\to[a,b]$，若 $g\in C^1[a,b]$，$\lambda=\max_{x\in[a,b]}|g'(x)|<1$，则 g 有一个唯一不动点 $\alpha\in[a,b]$

任意 $x_0\in[a,b]$，不动点法均收敛到 α. 误差上界存在，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=g'(\alpha)$

PF: ① 由中值定理 $\forall x,y\in[a,b]$，$|g(x)-g(y)|\le\lambda|x-y|$

② $x_{n+1}-\alpha=g(x_n)-g(\alpha)=g'(\xi)(x_n-\alpha)$

Cor 1.21 α 是 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的不动点，$|g'(\alpha)|<1$ 且 $g\in C^1(B)$ $B=[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$. 若 x_0 足够接近 α，则 1.19 结论成立.

PF: 取 $\lambda\in(|g'(\alpha)|,1)$. $\delta_0<\delta$ s.t. $\max_{x\in[\alpha-\delta_0,\alpha+\delta_0]}|g'(x)|\le\lambda<1\to g(B_0)\subset B_0$. 则由 1.20 可得证.

Cor 1.22 $g:[a,b]\to[a,b]$ 有不动点 α

不动点法以 p 阶收敛 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} g\in C^p[a,b] \\ \forall k=1,2,\dots,p-1 \quad g^{(k)}(\alpha)=0 \\ g^{(p)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$ 且 x_0 足够多接近于 α.

PF: ① 由 g' 的连续性，$g'(\alpha)=0$，则若 x_0 足够接近 α，由 1.21，收敛性 ✓

② 将 g 在 α 处 Taylor 展开：$E_{abs}(x_{n+1})=|x_{n+1}-\alpha|=|g(x_n)-g(\alpha)|$

$$=\left|\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(x_n-\alpha)^i}{i!}g^{(i)}(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}g^{(p)}(\xi)\right|$$

$\because$ $\xi\in[a,b]$，且 $g^{(p)}$ 连续，则 $g^{(p)}(\xi)$ 有界

$\therefore \exists M$ $\quad E_{abs}(x_{n+1})<ME^p_{abs}(x_n)$