2019-2020 学年春夏学期科学计算回忆卷

整理人：CC98 用户 magisco22

注：第 1-7 题具体分值记不清了，应该是 10，12，15 分中的一个，大家估摸一下吧。在此感谢室友帮我回忆出了最后一道题。

1. 用 Gauss 列主元法求解一个 3×3 的线性方程组 (具体方程忘记了 QAQ)

2. 对于下面这个线性方程组，对方程适当做调整之后，分别写出其 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的具体矩阵形式，并以 $\overrightarrow{x_0} = (0,0,0)^T$ 为初值迭代两步。

$$\begin{cases} 2x_2 + 7x_3 & = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 & = 2 \end{cases}$$

3. 考虑以下求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b) + \beta_0 f'(a) + \beta_1 f'(b)$$

(1) 确定 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$，使得上述求积公式具有最高的代数精度。

(2) 利用上述系数，推导出该求积公式对应的复化求积形式。

4. 考虑 $\varphi(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$，$\varphi(x)$ 对应的不动点是 $x^* = 1/7$

(1) 求 A, B, C，使得 φ 在 x^* 处局部三阶收敛

(2) 推导 $e_n = x_n - x^*$ 和 $e_0 = x_0 - x^*$ 的关系式，其中 x_i 是对 φ 做 i 次不动点迭代的值。

5. 设 $x_0 < x_1 < x_2$，考虑插值多项式 $p(x)$，满足：

$$\begin{cases} p(x_0) = f(x_0) \\ p'(x_1) = f'(x_1) \\ p'(x_2) = f'(x_2) \end{cases}$$

(1) 求上述二次插值多项式 $p(x)$

(2) 设 $x < x_0$，推导上述插值多项式在 x 处的截断误差表达式

6. 证明：下述述常微分方程数值解法的局部截断误差是 $O(h^3)$

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x,y) \\ y(x_0) & = y_0 \\ y_{n+1} & = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)) \end{cases}$$

7. 设实特征矩阵 A 的特征值为：

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

试用幂法求 λ_1, λ_2 和它们对应的特征向量，并给出详细的推导过程。

8.(6 分) 设 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^j}{f'(x_i)} = \begin{cases} 0 & 1 \geq j \geq n-2 \\ 1 & j = n-1 \end{cases}$$