Computing Method - Chapter5

Zhixin Zhang, 3210106357

Problems：8,10,15

8

试用两点三次 Hermite 插值函数作(5.1)式的求积公式.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

解： 设 $f(a)=y_a, f(b)=y_b, f'(a)=y_a', f'(b)=y_b'$. 差商表如下：

$$\begin{array}{c|cccc}
a & y_a & & & \\
a & y_a & y_a' & & \\
b & y_b & \frac{y_b-y_a}{b-a} & \frac{y_a'-\frac{y_b-y_a}{b-a}}{a-b} & \\
b & y_b & y_b' & \frac{y_b'-\frac{y_b-y_a}{b-a}}{b-a} & \frac{y_b'+y_a'-2\frac{y_b-y_a}{b-a}}{(b-a)^2}
\end{array}$$

所以插值函数为：

$$p(f;x)=\frac{y_b'+y_a'-2\frac{y_b-y_a}{b-a}}{(b-a)^2}(x-b)(x-a)^2+\frac{y_a'-\frac{y_b-y_a}{b-a}}{a-b}(x-a)^2+y_a'(x-a)+y_a$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b p(f;x)\mathrm{d}x &= y_a(b-a)+\frac{1}{2}(b-a)^2y_a'-\frac{1}{3}\left(y_a'-\frac{y_b-y_a}{b-a}\right)(b-a)^2-\frac{1}{12}\left(y_b'+y_a'-2\frac{y_b-y_a}{b-a}\right)(b-a)^2 \\
&=(b-a)y_a+\left[\left(\frac{1}{2}\frac{y_b-y_a}{b-a}\right)-\frac{1}{12}(y_b'-y_a')\right](b-a)^2 \\
&=\frac{1}{2}(y_b+y_a)(b-a)-\frac{1}{12}(y_b'-y_a')(b-a)^2
\end{aligned}$$

□

10

用 $n=2,4$ 的 Gauss 公式计算下列积分：

(1) $\int_1^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x$.

(2) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解： 使用 Gauss-Legendre 求积公式：

$n=2$: $x_k=\pm0.5773503, A_k=1, k=1,2$

(1)
$$I=\int_{-1}^1\sqrt{4t+5}d(4t+5)=\int_{-1}^1 4\sqrt{4t+5}\mathrm{d}t=4\sqrt{4t+5}|_{x_1}+4\sqrt{4t+5}|_{x_2}=17.375579645963338$$

(2)
$$I=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}(t+1)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^2 e^{-\frac{1}{4}(x_i+1)^2}=0.8424418886754169$$

(3)
$$I=\int_{-1}^1\frac{1}{2}\frac{\arctan\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)}{\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\frac{\arctan\left(\frac{1}{2}(x_i+1)\right)}{\left(\frac{1}{2}(x_i+1)\right)^{\frac{3}{2}}}=1.548617790677832$$

$n=4$: $x_{12}=\pm 0.8611363, x_{34}=0.3399810, A_{12}=0.3478548, A_{34}=0.6521452$

(1)
$$I=\int_{-1}^{1} 4\sqrt{4t+5}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{4} 4\sqrt{4x_i+5}\cdot A_i=17.3342011001631$$

(2)
$$I=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}(t+1)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{4} A_i e^{-\frac{1}{4}(x_i+1)^2}=0.8427011772004525$$

(3)
$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\frac{\arctan\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)}{\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\arctan\left(\frac{1}{2}(x_i+1)\right)}{\left(\frac{1}{2}(x_i+1)\right)^{\frac{3}{2}}}=1.7034547032433185$$

□

15

令 $x_i=x_0+ih, y_j=y_0+jk$(h 和 k 分别表示 x 方向与 y 方向的步长)，又令 f_{ij} 表示 $f(x,y)$ 在 (x_i,y_j) 的值．应用抛物线公式推导关于在矩形 $x_0\le x\le x_2, y_0\le y\le y_2$ 上的二重积分

$$\int_{x_0}^{x_2}\int_{y_0}^{y_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

的求积公式

$$\frac{hk}{9}(f_{00}+f_{02}+f_{20}+f_{22}+4(f_{01}+f_{10}+f_{12}+f_{21})+16f_{11})$$

且余项是

$$E=-\frac{hk}{45}\left(h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_1,\eta_1)+k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\xi_2,\eta_2)\right)$$

其中，ξ_1,ξ_2 是介于 x_0,x_2 之间的值，η_1,η_2 是介于 y_0,y_2 之间的值．

把结果推广，计算积分

$$\int_{x_0}^{x_m}\int_{y_0}^{y_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，m,n 是偶数．

证明: 令 $g(x)=\int_{y_0}^{y_2} f(x,y)\mathrm{d}y$，应用抛物线公式得

$$g(x)\approx\frac{k}{3}(f(x,y_0)+4f(x,y_1)+f(x,y_2)),$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_{x_0}^{x_2} g(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}(g(x_0)+4g(x_1)+g(x_2))\\&\approx\frac{h}{3}\left[\frac{k}{3}(f_{00}+4f_{01}+f_{02})+4\frac{k}{3}(f_{10}+4f_{11}+f_{12})+\frac{k}{3}(f_{20}+4f_{21}+f_{22})\right]\\&=\frac{hk}{9}(f_{00}+f_{02}+f_{20}+f_{22}+4(f_{01}+f_{10}+f_{12}+f_{21})+16f_{11})\end{aligned}$$

计算二重积分的余项， 设 m,M 是 $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ 在 $[x_0,x_2]\times[y_0,y_2]$ 中的最小值和最大值， 所以有:

$$-\frac{k^5}{90}M \le \frac{k}{3}(f_{00}+4f_{01}+f_{02})-g(x_0) \le -\frac{k^5}{90}m$$
$$-\frac{k^5}{90}M \le \frac{k}{3}(f_{10}+4f_{11}+f_{12})-g(x_1) \le -\frac{k^5}{90}m$$
$$-\frac{k^5}{90}M \le \frac{k}{3}(f_{20}+4f_{21}+f_{22})-g(x_2) \le -\frac{k^5}{90}m$$

所以，

$$-\frac{hk^5}{45}M \le \frac{hk}{9}(f_{00}+f_{02}+f_{20}+f_{22}+4(f_{01}+f_{10}+f_{12}+f_{21})+16f_{11})-\frac{h}{3}(g(x_0)+4g(x_1)+g(x_2)) \le -\frac{hk^5}{45}m$$

由介值定理得，存在 $x_0 \le \xi_2 \le x_1, y_0 \le \eta_2 \le y_2$，

$$\frac{hk}{9}(f_{00}+f_{02}+f_{20}+f_{22}+4(f_{01}+f_{10}+f_{12}+f_{21})+16f_{11})-\frac{h}{3}(g(x_0)+4g(x_1)+g(x_2)) = -\frac{hk^5}{45}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\xi_2,\eta_2)$$

根据一元抛物线公式的余项公式可以得到：

$$\frac{h}{3}(g(x_0)+4g(x_1)+g(x_2))-I = -\frac{h^5}{90}g^{(4)}(\xi_1), \quad (x_0 \le \xi_1 \le x_1)$$

其中，$g^{(4)}(\xi_1)=\int_{y_0}^{y_2}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\xi_1,y)\mathrm{d}y$，根据积分中值定理，$g^{(4)}(\xi_1)=2k\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\xi_1,\eta_1), \quad (y_0 \le \eta_1 \le y_1)$. 所以

$$\frac{h}{3}(g(x_0)+4g(x_1)+g(x_2))-I = -\frac{h^5k}{45}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_1,\eta_1)$$

相加得，

$$\begin{aligned}E &= \frac{hk}{9}(f_{00}+f_{02}+f_{20}+f_{22}+4(f_{01}+f_{10}+f_{12}+f_{21})+16f_{11})-I \\ &= -\frac{hk^5}{45}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\xi_2,\eta_2)-\frac{h^5k}{45}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_1,\eta_1) = \frac{hk}{45}\left(h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\xi_1,\eta_1)+k^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\xi_2,\eta_2)\right)\end{aligned}$$

其中，ξ_1,ξ_2 是介于 x_0,x_2 之间的值，η_1,η_2 是介于 y_0,y_2 之间的值.

根据复化梯形公式，

$$\int_{x_0}^{x_m}\int_{y_0}^{y_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{h}{3}\left(g(x_0)+g(x_m)+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}g(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}g(x_{2k})\right)$$

$$\approx \frac{hk}{9}\left(f_{00}+f_{0n}+f_{m0}+f_{mn}+4\left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(f_{0,2k-1}+f_{m,2k-1})+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}(f_{2k-1,0}+f_{2k-1,n})\right)\right.$$

$$2\left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(f_{0,2k}+f_{m,2k})+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}(f_{2k,0}+f_{2k,n})\right)+16\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}f_{2k-1,2j-1}+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}f_{2k,2j}$$

$$\left.8\left(\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}f_{2k-1,2j}+\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}f_{2k,2j-1}\right)\right)$$

□