Computing Method - Chapter6-2

Zhixin Zhang, 3210106357

Problems：9, 10, 11, 13, 14

9

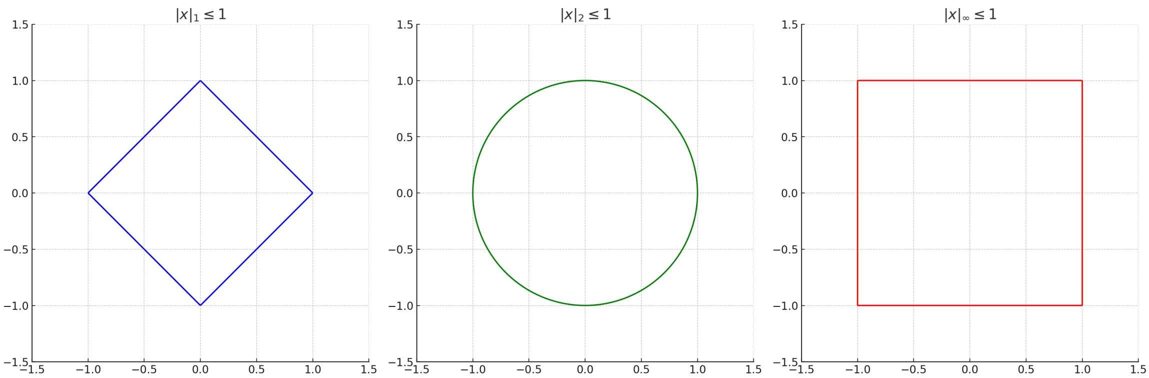
画出 $\mathbb{R}^2$ 中满足下列不等式的集合：

(1) $\|x\|_1 \le 1$.

(2) $\|x\|_2 \le 1$.

(3) $\|x\|_\infty \le 1$.

解:



□

10

求证：$\|I\| \ge 1, \|A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|A\|}$.

证明: 因为 $I = I^2$，所以有 $0 < \|I\| = \|I^2\| \le \|I\| \cdot \|I\|$，所以 $\|I\| \ge 1$.

因为 $I = AA^{-1}$，所以 $1 \le \|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \Rightarrow \|A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|A\|}$.

□

11

试证明：$\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty$.

证明:

$$\|A\|_2^2 \le \rho(A^TA) \le \|A^TA\|_1 \le \|A^T\|_1 \cdot \|A\|_1 = \|A\|_\infty \cdot \|A\|_1.$$

□

13

设 A 是 n 阶实对称正定矩阵，试证：

$$\|x\| = (x^TAx)^{1/2}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

是一种向量范数，且与该矩阵范数相容.

证明:

1. 正定性：对于 $x \in \mathbb{R}^n$，因为 A 正定，所以 $\exists$ 正交矩阵 P，满足 $A = P^T D P$，$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \lambda_i > 0$，所以 $\|x\| = (x^T P^T D P x)^{1/2} = \left((Px)^T D (Px)\right)^{1/2}$，令 $y = Px$，则 $\|x\| = (y^T D y)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2\right)^{1/2}$，所以 $\|x\| \geq 0$，且 $\|x\| = 0$ 当切仅当 $y = 0 = Px$，即 $x = 0$.
2. 奇次性：对于 $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$，$\|\alpha x\| = (\alpha x^T A \alpha x)^{1/2} = \alpha (x^T A x)^{1/2} = \alpha \|x\|$.
3. 三角不等式：同 1，对于 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$，取 $y_1 = Px_1, y_2 = Px_2$，则有 $\|x_1 + x_2\| = \left((y_1 + y_2)^T D (y_1 + y_2)\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n (y_{1i} + y_{2i})^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\lambda_i} y_{1i} + \sqrt{\lambda_i} y_{2i}\right)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\lambda_i} y_{1i}\right)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\lambda_i} y_{2i}\right)^2\right)^{1/2} = \|x_1\| + \|x_2\|$.

则 $\|x\| = (x^T A x)^{1/2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ 是一种向量范数. 对于 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$，$\|B\| = \max_{v^T A v = 1} (v^T B^T A B v)^{1/2}$，所以 $\|Bx\| = (x^T B^T A B x)^{1/2} = \|x\| \left(\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^T B^T A B \left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right)^{1/2} \leq \|x\| \cdot \|B\|$（因为 $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$）.

□

14

对矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

求 $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$, $\|A\|_1$, $\|A\|_\mathbb{F}$ 和 $\mathrm{Cond}(A)_2$.

解:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} |a_{ji}| = 4.$$

$$\|A\|_1 = \max(i=1)^4 \sum_{j=1}^{4} |a_{ij}| = 4.$$

$$\|A\|_2 = \lambda_{\max}(A^T A) = \lambda_{\max}\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\|A\|_\mathbb{F} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}^2} = \sqrt{22}.$$

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)} = 5 + 2\sqrt{5}.$$

□