Computing Method - Chapter6

Zhixin Zhang, 3210106357

Problems：1，3，4，5

1

用 Gauss 消去法解方程组：

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\1&1&9\\1&2&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

并求系数矩阵的行列式和逆矩阵.

解:

$$\begin{bmatrix}2&3&4&0\\1&1&9&2\\1&2&-6&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&4&0\\0&-\frac{1}{2}&7&2\\0&\frac{1}{2}&-8&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&4&0\\0&-\frac{1}{2}&7&2\\0&0&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&75\\0&1&0&-46\\0&0&1&-3\end{bmatrix}$$

所以 $(x_1,x_2,x_3)=(75,-46,-3)$. $\det(A)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)=-1$.

$$\begin{bmatrix}2&3&4&1&0&0\\1&1&9&0&1&0\\1&2&-6&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&4&1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&7&-\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{1}{2}&-8&-\frac{1}{2}&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&4&1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&7&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&-1&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-24&26&23\\0&1&0&15&-16&-14\\0&0&1&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

所以，$A^{-1}=\begin{bmatrix}-24&26&23\\15&-16&-15\\1&-1&-1\end{bmatrix}$.

□

3

用平方根法和 LDL^T 分解求解方程组：

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\2x_1+2x_2+\quad=3\\x_1+\quad+3x_3=4\end{cases}$$

解:

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$$

求矩阵 L 和 D 的元素：

$$d_1=a_{11}=3$$

$$j=2:t_1=a_{21}=2,l_{21}=\frac{t_1}{d_1}=\frac{2}{3}$$

$$d_2=a_{22}-t_1l_{21}=2-2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$j=3: t_1 = a_{31} = 1, l_{31} = \frac{t_1}{d_1} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = a_{32} - t_1 l_{21} = -\frac{2}{3}, l_{32} = \frac{t_2}{d_2} = -1$$

$$d_3 = a_{33} - t_1 l_{31} - t_2 l_{32} = 2$$

得到

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{3} & 1 & \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & \frac{2}{3} & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

解 $Ly = b$ 得 $y = \left[5, -\frac{1}{3}, 2\right]^T$， 计算 $z = \left[\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}, 1\right]^T$ 解 $L^T x = z$ 得 $x = \left[1, \frac{1}{2}, 1\right]^T$.
所以 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$.

□

4

证明：
1. 两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵；
2. 下三角矩阵之逆仍为下三角矩阵.

证明:

1. 对于下三角矩阵 A ，$a_{ij} = 0, \forall i < j, i, j = 1, 2, ..., n$， 设 A, B 都是下三角矩阵，$C = AB$，那么对于 $i < j, i, j = 1, 2, ..., n$，$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} \times 0 + \sum_{k=i+1}^{n} 0 \times b_{kj} = 0$，所以 C 还是下三角矩阵.
2. 用数学归纳法证明，对于 $n = 1$，所有 1×1 的矩阵都是下三角矩阵，结论显然成立. 若对于任意 $n \leq k, k > 0$ 的矩阵结论都成立，那么对于任意一个可逆下三角 $(k+1) \times (k+1)$ 矩阵 A，可以将其写为

   $$A = \begin{bmatrix} A'_{k\times k} & 0 \\ b & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{k\times k} & c \\ d & e \end{bmatrix},$$

   所以

   $$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A'_{k\times k} B_{k\times k} & A'_{k\times k} c \\ bB_{k\times k} + a_{k+1,k+1} e & bc + a_{k+1,k+1} e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   所以，$B_{k\times k} = {A'_{k\times k}}^{-1}$，根据归纳假设，$B_{k\times k}$ 是下三角矩阵. 又因为 $A'_{k\times k}$ 满秩且 $A'_{k\times k} c = 0$，所以 $c = 0$. 由此得到 A^{-1} 是下三角矩阵.
   因此，任意可逆下三角矩阵的逆矩阵都是下三角矩阵.

□

5

用主元素消去法解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

取 4 位数字计算.

解:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

消除后两个方程的 x_1 得到

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ -2.333x_2 - 4.667x_3 = -4.667 \\ 1.667x_2 - 0.6667x_3 = 1.333 \end{cases}$$

消除最后一个方程的 x_2 得到

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ -2.333x_2 - 4.667x_3 = -4.667 \\ -4.000x_3 = -2.001 \end{cases}$$

，所以 $x_3 = 0.5003, x_2 = 0.9996, x_1 = 1.9995$.

□