浙江大学 20 <u>20</u> —20 <u>21</u> 秋冬学期

《科学计算》课程期末考试试卷

课程号: <u>061Q0032</u>, 开课学院: <u>数学科学学院</u>

考试试卷: ✓A 卷、B 卷 (请在选定项上打✓)

考试形式: ✓闭、开卷 (请在选定项上打✓), 允许带 <u>无</u> 进场

考试日期: <u>2021</u> 年 <u>01</u> 月 <u>24</u> 日, 考试时间: <u>120</u> 分钟

诚信考试, 沉着应考, 杜绝违纪

考生姓名: ________________ 学号: ________________ 所属院系: ________________

由 CC98 @*Serapay* 回忆整理, 请勿用于商业用途

1. (15 分) 将系数矩阵分解成 $\boldsymbol{LU}$ 的形式, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是下三角阵, $\boldsymbol{U}$ 是单位上三角阵, 然后求解方程

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. (10 分) 设线性方程组的系数矩阵和常数项分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

松弛迭代的格式为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \omega \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{b} \right) (k = 0, 1, \cdots),$$

求 ω 的取值范围, 使得该迭代收敛, 并求最优松弛因子.

3. (10 分) 求次数不超过 4 次的多项式 $p(x)$, 满足:

$$p(0)=5, p'(0)=4, p''(0)=6, p(1)=15, p'(1)=20.$$

4. (15 分) 设 $x_0>0$, 迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+6)}{3x_k^2+2}(k=0,1,\cdots).$$

(1) 证明该迭代收敛到 $\sqrt{2}$, 且收敛是三阶的;

(2) 用 Newton 迭代公式求 $\sqrt{2}$ 的四阶、五阶收敛的估计.

5. (10 分) 设 $f\in C^4[a,b]$, 求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{8}\left(f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right).$$

(1) 求该求积公式的代数精度;

(2) 设该求积公式的截断误差为 $c\cdot f^{(4)}(\eta)$, 其中 $\eta\in(a,b)$, 求常数 c 的值.

6. (10 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值满足:

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|>|\lambda_3|\geq\cdots\geq|\lambda_n|, \lambda_1=-\lambda_2,$$

试用幂法求 λ_1,λ_2.

7. (15 分) 设常微分方程初值问题为

$$\begin{cases}y'=f(x,y), 1\leq x\leq 2\\ y(1)=y_0\end{cases},$$

$x_n=1+nh, y_n=y(x_n)$, 改进的 Euler 方法的格式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h\left(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})\right).$$

(1) 求改进的 Euler 方法的局部截断误差;

(2) 若 $f(x,y)=8-3y, y_0=2$, 求 y_n 的表达式, 并证明: 对任意的 $x\in[1,2]$, 当 $1+nh\to x, h\to 0$ 时, $y_n\to y(x)$.

8. (15 分) 设 f 是 $[x_0-h, x_0+h]$ 上充分光滑的函数, 区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上 f, f' 的值已知, 用这些值来近似计算 $f'(x_0)$.

(1) 设 $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$, 求截断误差主项;

(2) 设 $f'(x_0) \approx \dfrac{f'(x_0+h)+f'(x_0-h)}{2}$, 求截断误差主项;

(3) 设 $f'(x_0) \approx \alpha\dfrac{f'(x_0+h)+f'(x_0-h)}{2} + \beta\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$, 求 α, β 的值, 使得该近似方法的精度最高, 并求截断误差主项.