Computing Method - Chapter5

Zhixin Zhang, 3210106357

Problems：1,2(1),5,6

1

试证明：

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi), a < \xi < b.$
(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(b) - \frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta), a < \eta < b.$
(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\zeta), a < \zeta < b.$

证明:

(1)
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a) + (x-a)f'(\xi_x)\mathrm{d}x = (b-a)f(a) + \int_a^b (x-a)f'(\xi_x)\mathrm{d}x,$$

根绝 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 有界可设 $m \leq f'(x) \leq M$，所以

$$\int_a^b m(x-a)\mathrm{d}x < \int_a^b (x-a)f'(\xi_x)\mathrm{d}x < \int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \frac{(b-a)^2}{2}m < \int_a^b (x-a)f'(\xi_x)\mathrm{d}x < \frac{(b-a)^2}{2}M,$$

所以，有

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(a)}{\frac{1}{2}(b-a)^2} \leq M,$$

根据 $f \in C^1$ 可知存在 $\xi \in (a,b)$，满足

$$f'(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(a)}{\frac{1}{2}(b-a)^2},$$

所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$.

(2)
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,$$

类似(1)的证明，存在 $\eta \in (a,b)$，

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = (a-b)f(b) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta),$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(b) - \frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta).$$

(3) $\forall x \in [a,b], f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{x-\frac{a+b}{2}}{2}f''(\xi_x), \xi \in \left[\min\left(x, \frac{a+b}{2}\right), \max\left(x, \frac{a+b}{2}\right)\right]$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(\xi_x)\mathrm{d}x \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b \frac{x-\frac{a+b}{2}}{2} f''(\xi_x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根绝 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 有界可设 $m \le f'(x) \le M$，所以

$$\int_a^b m\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(\xi_x)\mathrm{d}x < \int_a^b M\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)^3}{24} m \le \int_a^b \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(\xi_x)\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^3}{24} M.$$

所以，有

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{24}(b-a)^3} \le M,$$

根据 $f \in C^1$ 可知存在 $\zeta \in (a,b)$，满足

$$f'(\zeta) = \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{1}{24}(b-a)^3},$$

所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\zeta)$.

□

2(1)

用梯型公式和抛物线公式计算积分，并比较其结果.

$$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x \qquad (\textbf{八等分}).$$

解:

(1) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}f(0) + f\left(\frac{1}{8}\right) + \cdots + f\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{1}{2}f(1)\right) = 0.11140235$

(2) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{3}{16}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{8}\right) + \cdots + \frac{2}{3}f\left(\frac{15}{16}\right) + \frac{1}{6}f(1)\right) = 0.11157181$

(3) 真值 $\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) = 0.11157177$，
使用梯型公式计算误差为：0.000169，
使用抛物线公式计算误差为：3.75e-8，
可以发现使用抛物线公式计算效果更好.

□

5

如果 $f''(x) > 0$, 证明用梯型公式计算积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 所得结果比准确值大，并说明其几何意义.

证明: 因为 $f''(x) > 0$，所以 f 是凸函数，所以有

$$f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b), \forall 0 < t < 1,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= (b-a)\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t \\ &< (b-a)\int_0^1 (tf(a)+(1-t)f(b))\mathrm{d}t \\ &= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).\end{aligned}$$

对于凸函数，因为其任意两点间割线总是位于这两点间曲线的上方，所以使用割线以下梯形的面积作为积分的估计总是比真实值来的大.

□

6

验证当 $f(x)=x^5$ 时，$n=4$ 的 Newton-Cotes 公式是准确的.

证明: 对于 $n=4$，Newton-Cotes 公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{4}\right)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7f(b)\right),$$

对于 $f(x)=x^5$，

$$\frac{b-a}{90}(7a^5+30\left(\frac{3a+b}{4}\right)^5+12\left(\frac{a+b}{2}\right)^5+32\left(\frac{a+3b}{4}\right)^5+7b^5=\frac{(b-a)^6}{6}.$$

所以公式是准确的.

□