Computing Method - Chapter10-1

Zhixin Zhang, 3210106357

Problems：Chapter9-3,Chapter10-3

9-3

试证明 Jacobi 方法计算公式 (9.33) 可写成，

$$
\begin{aligned}
&d=\cot 2\varphi, t=d+\operatorname{sign}(d)\sqrt{1+d^2}\\
&c=1/\sqrt{1+t^2}, s=ct,\\
&a_{ii}^{(1)}=a_{ii}+ta_{ij}, a_{jj}^{(1)}=a_{jj}-ta_{ij},\\
&a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}=0,\\
&a_{il}^{(1)}=a_{li}^{(1)}=ca_{il}+sa_{jl},\\
&a_{jl}^{(1)}=a_{lj}^{(1)}=-sa_{il}+ca_{jl}, l\neq i,j\\
&a_{ml}^{(1)}=a_{lm}^{(1)}=a_{ml}, m,l\neq i,j
\end{aligned}
$$

证明: 对于 (9.33)，若取

$$\cot 2\varphi=\frac{a_{ii}-a_{jj}}{2a_{ij}}, |\varphi|\leq\frac{\pi}{4},$$

则 $a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}=\frac{1}{2}(a_{jj}-a_{ii})\sin\varphi+\frac{a_{ii}-a_{jj}}{2\cot 2\varphi}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=\frac{1}{2}(a_{jj}-a_{ii})\sin\varphi+\frac{1}{2}(a_{ii}-a_{jj})\frac{\cos 2\varphi}{\cot 2\varphi}=0$，根据 $d=\cot 2\varphi$，则 $\frac{1}{d}=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}\Rightarrow\tan\varphi=d+\operatorname{sign}(d)\sqrt{1+d^2}$，所以 $t=\tan\varphi$.

$$
\begin{aligned}
a_{ii}^{(1)}&=a_{ii}\cos^2\varphi+a_{jj}\sin^2\varphi+2a_{ij}\cos\varphi\sin\varphi\\
&=a_{ii}-(a_{ii}-a_{jj})\sin^2\varphi+a_{ij}\sin 2\varphi\\
&=a_{ii}-2\cot 2\varphi a_{ij}\sin^2\varphi+a_{ij}\sin 2\varphi\\
&=a_{ii}+a_{ij}\left(\sin 2\varphi-2\cot 2\varphi\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)\\
&=a_{ii}+a_{ij}\frac{\sin^2 2\varphi-\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}\\
&=a_{ii}+a_{ij}\frac{2\sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}=a_{ii}+ta_{ij}\\
a_{jj}^{(1)}&=a_{ii}\sin^2\varphi+a_{jj}\cos^2\varphi-2a_{ij}\cos\varphi\sin\varphi\\
&=a_{jj}+(a_{ii}-a_{jj})\sin^2\varphi+a_{ij}\sin 2\varphi=a_{jj}-ta_{ij}
\end{aligned}
$$

$c=1/\sqrt{1+t^2}=\cos\varphi, s=ct=\sin\varphi$，所以，

$$
\begin{aligned}
&a_{il}^{(1)}=a_{li}^{(1)}=ca_{il}+sa_{jl},\\
&a_{jl}^{(1)}=a_{lj}^{(1)}=-sa_{il}+ca_{jl}, l\neq i,j
\end{aligned}
$$

□

10-3

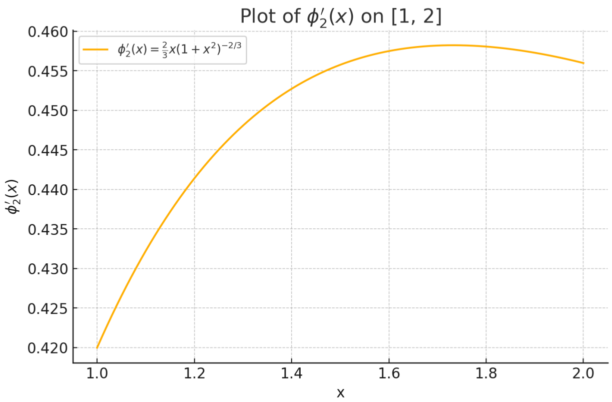
方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近有根，把方程写成三种不同等价形式，
(1) $x = 1 + \frac{1}{x^2}$，对应迭代格式： $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2}$；
(2) $x^3 = 1 + x^2$，对应迭代格式： $x_{n+1} = (1 + x_n^2)^{\frac{1}{3}}$；
(3) $x^2 = \frac{1}{x-1}$，对应迭代格式： $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{x_n - 1}}$.

判断迭代格式在 $x_0 = 1.5$ 的收敛性，并估计收敛速度，选一种收敛格式计算出 1.5 附近的根到 4 位有效数字，从 $x_0 = 1.5$ 出发，计算时保留 5 位有效数字.

解:

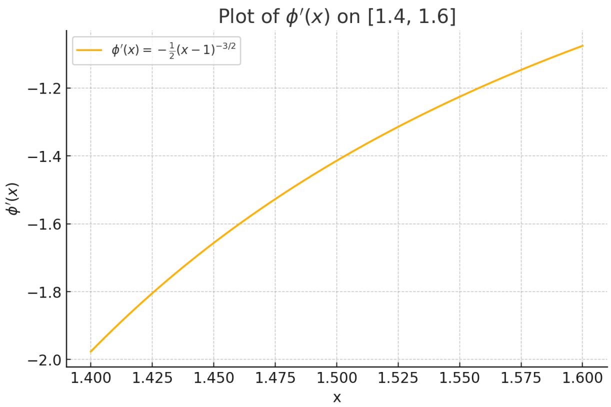
(1) 收敛，$\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, \varphi_{1'}(x) = -\frac{2}{x^3}$，因为 $1.3^3 = 2.197 > 2$，所以 $x \in [1.3, 1.7]$ 上，$|\varphi_{1'}(x)| \le \left(\frac{2}{1.3^3}\right) < 1$，所以该区间上为收缩映射，因此迭代法收敛.

(2) 收敛，$\varphi_2(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{3}}, \varphi_{2'}(x) = \frac{2}{3}x(1 + x^2)^{-\frac{2}{3}}$，如下图所示，



，因此在 $[1, 2]$ 上 $|\varphi_{2'}(x)| < 0.46 < 1$，为压缩映射，因此迭代法收敛.

(3) 不收敛，$\varphi_3(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}, \varphi_{3'}(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$，如下图所示，



在 $[1.4, 1.6]$ 区间上，$|\varphi(x)'| > 1$，因此不收敛.

因为 $|\varphi_{2'}(1.5)| = 0.46 < |\varphi_{1'}(1.5)| = 0.59$，所以迭代格式 (2) 的收敛速度更快. 使用第二种迭代格式，计算结果如下：

$$x_0 = 1.5, x_1 = 1.4812, x_2 = 1.4727, x_3 = 1.4688, x_4 = 1.4670, x_5 = 1.4662$$
$$x_6 = 1.4659, x_7 = 1.4657, x_8 = 1.4656, x_9 = 1.4656$$

数值解为 $x^* = 1.466$（保留四位有效数字）.

$\square$