Computing Method - Chapter2

Zhixin Zhang, 3210106357

Problems：2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.8, Exercise-1

1 Week1 Problems

2.1

设 $y=\sqrt{x}$，在 $x=100,121,144$ 三处的值是容易求得的，试以这三点建立 $y=\sqrt{x}$ 的插值多项式，并用此多项式计算 $\sqrt{115}$ 的近似值且给出误差估计．用其中的任意两点构造线性插值函数，用得到的三个线性插值函数计算 $\sqrt{115}$ 的近似值，并分析其结果不同的原因．

解:

$y(100)=10, y(121)=11, y(144)=12$． 差商表计算如下：

$$
\begin{array}{c|cccc}
100 & 10 & & \\
121 & 11 & \frac{1}{21} & \\
144 & 12 & \frac{1}{23} & -\frac{1}{10626}
\end{array}
$$

所以，二次插值多项式为 $y^*(x)=-\frac{1}{10626}(x-100)(x-121)+\frac{1}{21}(x-100)+10=-\frac{1}{10626}x^2+\frac{727}{10626}x+\frac{660}{161}$．代入 $x=115$ 计算得到 $y^*(115)=10.72276$，而 $\sqrt{115}=10.72381$，绝对误差为 $|y^*(115)-\sqrt{115}|=1.05\times 10^{-3}$．

选 $(100,10),(121,11)$ 两个点，得到线性插值函数 $y_1(x)=\frac{1}{21}(x-100)+10 \Rightarrow y_1(115)=10.71429$;

选 $(100,10),(144,12)$ 两个点，得到线性插值函数 $y_2(x)=\frac{1}{22}(x-100)+10 \Rightarrow y_2(115)=10.68182$;

选 $(121,11),(144,12)$ 两个点，得到线性插值函数 $y_3(x)=\frac{1}{23}(x-121)+11 \Rightarrow y_3(115)=10.73913$;

可以发现使用 y_1 进行估计得到的误差最小，而使用 y_2 会使结果偏小，而使用 y_3 会使结果偏大．这是因为该函数是一个凹函数，其斜率随着 x 的增大而不断减小，因此有如下不等式．

$$
\frac{y(115)-y(100)}{115-100} > \frac{y(121)-y(100)}{121-100} > \frac{y(144)-y(100)}{144-100}
$$
$$
\frac{y(100)-y(121)}{100-121} < \frac{y(115)-y(121)}{115-121} < \frac{y(144)-y(121)}{144-121}
$$

因此会导致使用 100,121 处点值线性插值得到的结果偏小，而使用 100,144 处点值插值的结果则会更小，但使用 121，144 处点值插值得到的结果会偏大．

□

2.2

利用 (2.9) 证明：

$$
|R(x)| \le \max_{x_0\le x\le x_1} |\ f''(x)\ | \ \frac{(x_1-x_0)^2}{8}, x_0 \le x \le x_1
$$

证明:

根据 (2.9)， $R(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)(x-x_1), x_0<\xi<x_1$， 所以

$$\begin{aligned}
|R(x)| &= \frac{|f''(\xi)|}{2}(x-x_0)(x_1-x)(x_0<\xi<x_1) \\
&\leq \max_{x_0\leq x\leq x_1} \frac{|f''(x)|}{2} \cdot [(-x^2+(x_1-x_0)x-x_0x_1] \\
&\leq \max_{x_0\leq x\leq x_1} \frac{|f''(x)|}{2} \cdot \left[-\frac{(x_1-x_0)^2}{4}+(x_1-x_0)\frac{x_1-x_0}{2}-x_0x_1\right] \\
&\leq \max_{x_0\leq x\leq x_1} \frac{|f''(x)|}{2} \cdot \left[\frac{(x_1+x_0)^2-4x_0x_1}{4}\right] \\
&= \max_{x_0\leq x\leq x_1} \mid f''(x) \mid \frac{(x_1-x_0)^2}{8}
\end{aligned}$$

□

2.3

若 $x_j(j=0,1,\cdots,n)$ 为互异节点，且有

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

证明：

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k, k=0,1,\cdots,n$$

证明: 定义函数 $y(x)=x^k$， 在 $x_0,x_1,\cdots x_n$ 处插值得到多项式 $p_n(x)\in\mathbb{P}_n$，根据 $n+1$ 个点的 n 次多项式存在而且唯一，而 $y(x)\in\mathbb{P}_n$，所以 $y(x)\equiv p_n(x)$.

根据 Lagrange 插值公式

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n} y(x_j)l_j(x) \Rightarrow x^k \equiv \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x), k=0,1,\cdots,n$$

□

2 Week2 Problems

2.5

用 Lagrange 插值和 Newton 插值找经过点 $(-3,-1),(0,2),(3,-2),(6,10)$ 的三次插值公式.

解:

1. 用 Lagrange 插值：

$$\begin{aligned}
p_n^{(1)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} L_k(x)y_k \\
&= \frac{x(x-3)(x-6)}{-3\times(-6)\times(-9)}\times(-1)+\frac{(x+3)(x-3)(x-6)}{3\times(-3)\times(-6)}\times 2+\frac{(x+3)x(x-6)}{6\times 3\times(-3)}\times(-2)+\frac{(x+3)x(x-3)}{9\times 6\times 3}\times 10 \\
&= \frac{23x^3}{162}-\frac{7x^2}{18}-\frac{13x}{9}+2
\end{aligned}$$

2. 用 Newton 插值：

$$
\begin{array}{l|llll}
-3 & -1 & & & \\
0 & 2 & 1 & & \\
3 & -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{18} & \\
6 & 10 & 4 & \frac{8}{9} & \frac{23}{162}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
p_n^{(2)}(x) &= \tfrac{23}{162}(x+3)x(x-3) - \tfrac{7}{18}x(x+3) + (x+3) - 1 \\
&= \tfrac{23x^3}{162} - \tfrac{7x^2}{18} - \tfrac{13x}{9} + 2
\end{aligned}
$$

□

2.6

确定一个次数不高于 4 的多项式 $\varphi(x)$，使 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=0,\varphi(1)=\varphi'(1)=1,\varphi(2)=1$.

解: 建立差商表如下：

$$
\begin{array}{l|lllll}
0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 1 & 1 & 0 & -1 & \\
2 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

$p_n(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2x^2 - (x-1)x^2 + x^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{2} + \frac{9x^2}{4}$

□

2.8

过 $0, 1$ 两点构造一个三次 Hermite 插值多项式，满足条件：

$$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}, f(1)=2, f'(1)=\frac{1}{2}$$

解: 建立差商表如下：

$$
\begin{array}{l|llll}
0 & 1 & & & \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \\
1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1
\end{array}
$$

$p_n(x) = -x^2(x-1) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = -x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$

□

Exercise-1

给定三个实数 $x_0 < x_1 < x_2$，设 $f(x)$ 是三阶连续可微函数，
(1) 找出二次多项式 $p(x)$ 满足插值条件，

$$p(x_0) = f(x_0), p'(x_k) = f'(x_k), k = 1, 2$$

(2) 当 $x < x_0$ 时，导出并证明误差估计式 $e(x) = f(x) - p(x)$.

证明:

(1) 使用线性插值得到 $p'(x)$ 的估计式

$$p'(x) = f'(x_1) + \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

两侧积分得到

$$\begin{aligned}p(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} p'(y)\mathrm{d}y &= f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}\left[(x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2\right] \\ &= f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_0)(x + x_0 - 2x_1)\end{aligned}$$

(2) 记

$$E(x) = \int_{x_0}^{x} (s - x_1)(s - x_2)\mathrm{d}s, E(x_0) = 0, E'(x_1) = E'(x_2) = 0$$

构造

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{E(x)}E(t)$$

可以验证

$$\phi(x) = \phi(x_0) = \phi'(x_1) = \phi'(x_2) = 0$$

所以 $\exists x_3 \in [x, x_0], \phi'(x_3) = 0$，
根据 广义 Rolle's theorem， $\exists \xi \in [x_3, x_2], \phi'''(\xi) = 0$． 所以，

$$\begin{aligned}\phi'''(\xi) &= f'''(\xi) - p'''(\xi) + \frac{f(x) - p(x)}{E(x)}E'''(\xi) \\ &= f'''(\xi) - 0 + 2\frac{f(x) - p(x)}{E(x)} = 0\end{aligned}$$

得到 $\forall x > x_0, \exists \xi \in [x, x_2], \quad f'''(\xi)E(x) = p(x) - f(x)$， 所以

$$\begin{aligned}e(x) = f(x) - p(x) &= -\frac{1}{2}f'''(\xi)\int_{x_0}^{x}(s - x_1)(s - x_2)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}f'''(\xi)\int_{x}^{x_0}(s - x_1)(s - x_2)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}f'''(\xi)\int_{x}^{x_0}(s^2 - (x_1 + x_2)s + x_1x_2)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}f'''(\xi)\left[\frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)s^2 + x_1x_2x\right]_{x}^{x_0} \\ &= \frac{1}{2}f'''(\xi)\left[\frac{1}{3}(x_0^3 - x^3) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_0^2 - x^2) + x_1x_2(x_0 - x)\right] \\ &= \frac{1}{2}f'''(\xi)(x_0 - x)\left[\frac{1}{3}(x_0^2 + x_0x + x^2) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_0 + x) + x_1x_2\right]\end{aligned}$$

□