Computing Method - Programming 3

Zhixin Zhang, 3210106357

1 问题

编写列主元的 Gauss 消去法求解线性方程组.
尝试不同的测试例子，其中可能的一个例子：Hilbert 矩阵 $H = (h_{ij})$，

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

2 算法

1. 输入系数矩阵 A，右端项 b，阶 n.
2. 对 $k = 1, 2, ..., n-1$，循环：
   (a) 按列选主元 $\alpha = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}|$，保存主元所在的行指标 i_k.
   (b) 若 $\alpha = 0$，则系数矩阵奇异，计算停止；否则顺序进行.
   (c) 若 $i_k = k$，则转向 (d)；否则换行:
   $$a_{i_k,j} \leftrightarrows a_{kj}, j = 1, 2, ..., n$$
   $$b_{i_k} \leftrightarrows b_k.$$
   (d) 计算乘子 $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \Rightarrow a_{ik}, i = k+1, ..., n$.
   (e) 消元：
   $$a_{ij} := a_{ij} - m_{ik} a_{kj}, i, j = k+1, ..., n$$
   $$b_i := b_i - m_{ik} b_k, i = k+1, ..., n$$
3. 回代：
$$b_i := \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} b_j}{a_{ii}}, i = n, n-1, ..., 1$$

3 程序

3.1 构造 Hilbert 矩阵和右端项

```
function P = Hilbert(n)
    P = zeros(n, n);
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            P(i, j) = 1.0/(i+j-1);
        end
    end
end

function P = construct_RHS(H, n)
    P = zeros(n, 1);
    for i = 1:n
        for j = 1:n
```

```
            P(i) = P(i) + H(i, j);
        end
    end
end
```

3.2 列主元 Gauss 消元

```
function P = Gauss(A, b, n)
    P = zeros(1, n);
    for k = 1:n
        id_ = k;
        for j = k:n
            if abs(A(id_, k)) < abs(A(j, k))
                id_ = j;
            end
        end
        for j = k:n
            t = A(id_, j);
            A(id_, j) = A(k, j);
            A(k, j) = t;
        end
        t = b(id_);
        b(id_) = b(k);
        b(k) = t;
        num = A(k, k);
        for j = k:n
            A(k, j) = A(k, j) / num;
        end
        b(k) = b(k) / num;
        if k ~= n
            for i = k+1:n
                num = A(i, k);
                for j = k:n
                    A(i, j) = A(i, j) - num * A(k, j);
                end
                b(i) = b(i) - num * b(k);
            end
        end
    end
    P(n) = b(n);
    for j=(-1)*(1:n-1)+n
        P(j) = b(j);
        for k = j+1:n
            P(j) = P(j) - A(j, k) * P(k);
        end
    end
end
```

4 数据与结果

为了方便比较误差，我们对于 5 阶到 17 阶的 Hilbert 矩阵分别构造了解为 $x_1 = x_2 = c... = x_n = 1$ 的右端项．并进行 Gauss 消元求解测试．

测试代码如下：

```
for n = 5:17
    H = Hilbert(n);
    b = construct_RHS(H, n);
    x = Gauss(H, b, n);
    % x
    x_ = ones(1,n);
    e = norm(abs(x-x_))/sqrt(n);
    e
end
```

我们定义误差的计算公式为：

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i - \hat{\boldsymbol{x}}_i)^2}{n}}$$

最后得到不同 n 的求解误差如下：

n	5	6	7	8	9	10
ε	6.0808e-13	3.0340e-10	1.2428e-08	1.9735e-07	8.5773e-06	1.8210e-04
11	12	13	14	15	16	17
0.0063	0.0727	6.3890	3.2200	4.6501	4.1133	7.6828

可以看出在 $n \leq 10$ 的时候，算法得到的误差较小（小于 $2e-4$），但是当 $n \geq 11$ 之后，算法误差变得不可接受.

5 结论

列主元消元法对条件数不是很大的方程组都可以得到精确解，但对高阶 Hilbert 方程组这类病态的方程组，消元求出的数值解是完全没有意义的.