

2020-2021 春夏学期科学计算回忆卷

CC98 @ 懿胤

2021 年 7 月 2 日

1 直接法解线性方程组

给定方程组 $Ax = b$, 对系数矩阵 A 进行 LDL^T 分解, 并基于此分解求解方程组。

2 迭代法解线性方程组

给定方程组 $Ax = b$, 试写出其 Gauss-Seidel 迭代公式, 并判断迭代是否收敛。

3 最小二乘法

对数据 x, y 进行测量, 并进而得到 $x - y, x + y$, 其测量结果分别为 d_1, d_2, d_3, d_4 .

(1) 试用最小二乘法求解 x, y 的估计

(2) 设测量最大误差限为 $\delta > 0$, 请问采用最小二乘法得到的 x, y 的值是否比直接测量更精确?

4 插值问题

已知

$$s(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & x \in [0, 1] \\ 2x^3 + ax^2 + bx + 7, & x \in [1, 2] \\ h(x), & x \in [2, 3] \end{cases}$$

为三次样条函数, 试求系数 a, b 的值并确定 $h(x)$.

5 非线性方程求根

迭代形式

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + a)}{3x_n^2 + 3} \quad (1)$$

(1) 上述迭代格式是用来计算 $\sqrt{3}$ 的, 试确定系数 a .

(2) 试证明: 当初值 $x_0 \in [1, 2]$ 时, 迭代格式收敛.

(3) 试证明上述迭代格式三阶收敛.

6 数值积分

给定数值积分公式

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f'(a) + \alpha_2 f''(a) + \beta_0 f(b) \quad (2)$$

(1) 试确定系数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0$, 使得上述求积公式有 3 阶代数精度.

(2) 试证明截断误差估计式:

$$\int_a^b f(x)dx - (\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f'(a) + \alpha_2 f''(a) + \beta_0 f(b)) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{480}(b-a)^5 \quad (3)$$

7 常微分方程数值解

给定计算格式:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2), \\ k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \end{aligned}$$

(1) 讨论上述求解方法的截断误差.

(2) 应用上述计算格式求解常微分方程 $y' = -y$, 并求出当上述计算格式绝对稳定时 h 的范围.

8 特征值与特征向量

给定对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 26 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 设 A 的特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

(1) 试证明 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subset [0, 4] \cup [8, 12] \cup [24, 28]$. (Gerschgorin 圆盘定理)

(2) 应用迹等式 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 26 + 10 + 2$ 证明: $\lambda_1 \in [24, 28], \lambda_2 \in [8, 12], \lambda_3 \in [0, 4]$.

(3) 设初值 $x_0 = (1, 1, 1)^T$, 采用幂法迭代两次, 求 λ_1 的近似值.