第四届 CCF 大赛高校赛道 - 决赛

1 编程题一

1.1 证明量子线路优化方案的正确性

H、X、Y 和 Z 门均为单比特量子门，可通过计算并比较优化前后矩阵表达式是否一致来验证优化的正确性。

a.

$$HXH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = Z$$

b.

$$HYH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix} = -Y$$

c.

$$HZH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = X$$

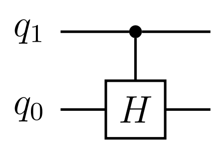
根据以上三个式子，可证得优化前后的线路等价，且都由三个量子门减为单个量子门，优化了量子门个数。

1.2 计算量子线路酉矩阵

假设有任意两量子比特量子态 $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = |q_1q_0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$$

a.

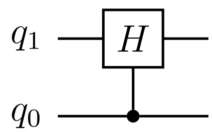


上述量子电路通过 q_1 控制 q_0 的 H 门操作，当 q_1 为 $|0\rangle$ 时，q_0 不做任何操作；当 q_1 为 $|1\rangle$ 时，对 q_0 做 H 门操作。$|\psi\rangle$ 作用在上述量子电路后得到 $|\psi'\rangle$：

$$\begin{aligned}
|\psi'\rangle = |q_1'q_0'\rangle &= \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma\left(|1\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\right]\right) + \delta\left(|1\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\right]\right) \\
&= \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma+\delta)|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma-\delta)|11\rangle \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma+\delta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma-\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

因此，对应的酉矩阵为 $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$.

b.



上述量子电路通过 q_0 控制 q_1 的 H 门操作，当 q_0 为 $|0\rangle$ 时，q_1 不做任何操作；当 q_0 为 $|1\rangle$ 时，对 q_1 做 H 门操作。$|\psi\rangle$ 作用在上述量子电路后得到 $|\psi'\rangle$：

$$
\begin{aligned}
|\psi'\rangle = |q_1'q_0'\rangle &= \alpha|00\rangle + \beta\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] \otimes |1\rangle\right) + \gamma|10\rangle + \delta\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right] \otimes |1\rangle\right) \\
&= \alpha|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta+\delta)|01\rangle + \gamma|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta-\delta)|11\rangle \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta+\delta) \\ \gamma \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta-\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

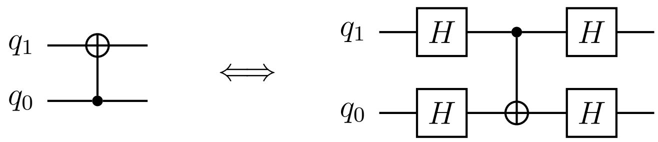
因此，对应的酉矩阵为 $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$.

1.3 $SWAP$ 门操作

该部分为提交代码。

1.4 用 H 门和 $CNOT_{1,0}$ 完成 $SWAP$ 门功能

由 (3) 可知，两个 $CNOT_{1,0}$ 和一个 $CNOT_{0,1}$ 可以构造 $SWAP$ 门。但由于不可使用 $CNOT_{0,1}$ 门，因此可以通过 H 门和 $CNOT_{1,0}$ 构造一个 $CNOT_{0,1}$ 门，具体线路如下：



现证明上述等价替换成立：
设左侧线路对应矩阵 $CNOT_{0,1}$，右侧线路对应矩阵 M，则有：

$$CNOT_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M &= (H_1 \otimes H_0) \cdot CNOT_{1,0} \cdot (H_1 \otimes H_0) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = CNOT_{0,1} \end{aligned}$$

将上述对 $CNOT_{0,1}$ 的等价替换带入 (3) 中的线路，得到的线路如下：

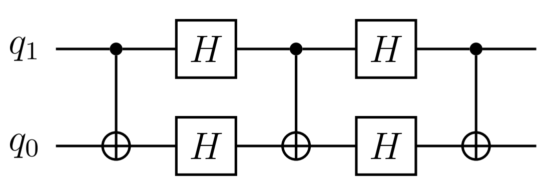


图 1: H 门和 $CNOT_{1,0}$ 门构建 $SWAP$

验证该线路正确性：
设该线路对应的矩阵为 M_{SWAP}，则有：

$$\begin{aligned}
M_{SWAP} &= CNOT_{1,0} \cdot M \cdot CNOT_{1,0} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = SWAP
\end{aligned}$$

综上，可按**图 1**方式用 H 门和 $CNOT_{1,0}$ 门构建 $SWAP$ 门。