Mathematical Analysis

Nankai University

作者：Eureka

组织：放学后茶会

时间：爱上 K-ON 的那天

这世上最美妙的便是我与数学相处的时光；没有野心，无需伪装，忘怀天地。——拉普拉斯

目录

Reference

Text 1: 数学分析 卓里奇

Text 2: 数学分析 南开大学出版社

Text 3: 数学分析原理 Walter Rudin

Text 4: 普林斯顿数学分析读本

Text 5: 数学分析习题课讲义 谢惠民

Text 6: 数学分析中的典型问题与方法 裴礼文

第 1 章 预备知识

内容提要

- ❑ 实数、集合和函数
- ❑ 初等函数
- ❑ 分情形定义的函数
- ❑ 平面曲线

1.1 实数、集合和函数

1.2 初等函数

1.3 分情形定义的函数

1.4 平面曲线

第 2 章 极限

内容提要

- ❑ 数列极限的定义
- ❑ 收敛数列的性质与极限的运算法则
- ❑ 数列敛散的判别定理
- ❑ 函数极限的定义
- ❑ 函数极限的性质与运算法则
- ❑ 函数极限存在的判别定理
- ❑ 无穷大量与无穷小量

2.1 数列极限的定义

2.2 收敛数列的性质与极限的运算法则

2.3 数列敛散的判别定理

2.4 函数极限的定义

2.5 函数极限的性质与运算法则

2.6 函数极限存在的判别定理

2.7 无穷大量与无穷小量

✍ **练习 2.1**

1. 按定义证明下列各极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+1}{2n^2-3}=\dfrac{3}{2}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})^n=1$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^\alpha-n^\alpha=0;(0<\alpha<1)$

2. 按定义证明下列各数列发散

（1） $\{n^{(-1)^n}\}$

证明 反证：若 $\{n^{(-1)^n}\}$ 收敛，则原数列必有界，不妨设 $\forall n>0,\exists M>0,s.t.|n^{(-1)^n}|\le M.$

取 $n=2M>0$, 则有 $2M>M$, 与原假设矛盾，所以原数列发散。

(2)$\{\sin n\}$

证明 假设 $\sin n$ 收敛, 那么不妨令 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$

因此 $0=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin n-\sin(n+2))=2\sin 1\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)$, 由于 $2\sin 1\neq 0$, 那么有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=0$

同理，$0=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n-\cos(n+2))=-2\sin 1\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)$

同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$, 根据恒等式 $\sin^2 n+\cos^2 n=1$, 两边同时令 $n\to\infty$,

$1=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2 n+\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2 n=0+0=0$, 显然矛盾，所以原数列发散。

✍ **练习 2.2**

1.

2.

3. 求下列各极限

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}\quad(|a|<1,|b|<1)$

解 原式 = $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-b}{1-a}\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\dfrac{1-b}{1-a}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})$

解 原式 = $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1\cdot3}{2^2})(\dfrac{2\cdot4}{3^2})\cdots[\dfrac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots\dfrac{n}{a^n})\quad(a>1)$

解 原式 = $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\dfrac{i}{a^i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n(-a)(\dfrac{1}{a^i})'=(-a)(\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\dfrac{1}{a^i})'=(-a)\left(\dfrac{1}{a-1}\right)'=\dfrac{a}{(a-1)^2}$

练习 2.3

1. 证明下列各极限：

(1)

(2)

(3)

(4)

2. 求下列各极限：

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

3. 利用单调收敛定理判定数列 $\{x_n\}$ 的收敛性，其中

(1)$x_1=\sqrt{2},\cdots,x_n=\sqrt{2x_{n-1}}...$;

解 作数学归纳法证明 $x_n<2$

n=1 时显然，假设 n=k-1 时成立，那么我们证明 n=k 时:

$x_k=\sqrt{2x_{k-1}}<\sqrt{2\cdot2}=2$, 根据归纳假设，命题成立

根据题设我们有 $\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\sqrt{\dfrac{2}{x_{n-1}}}>1$, 所以原数列单调递增，且有上界 2，根据单调收敛定理，该数列收敛。

(2)$x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$

解 作 $x_n-x_{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}=\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}<0$，原数列单调递减

$$\begin{aligned}x_n&=1+\frac{2}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{2}{2\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\\&>1+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n}\\&=1+2\sum_{i=2}^{n}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})-2\sqrt{n}\\&=1-2\sqrt{2}+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})>1-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

根据单调收敛定理，该数列收敛。

第 2 章 练习

A 组

1.
2.
3.
4. 设 $x_n > 0, n = 1, 2, \cdots$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = a$$

举例说明逆命题不真.

证明 首先利用 2.1 中例 5 的一个结论，若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，有 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = a$

(1) $a = 0$ 时, 根据均值不等式 $0 < \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, 根据两边夹定理有

$0 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a = 0$, 有 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = a = 0$

(2) $a \ne 0$ 时, 仍然根据均值不等式 $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

根据除法原则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, 同理可得 $\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{a}$, 即 $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = a$

同样根据两边夹定理 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

有 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = a$

综上所述：结论成立

反例：$x_n = \begin{cases} 100 & 2 \mid n \\ 1 & 2 \nmid n \end{cases}$, 有 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = 10$ 但 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 不存在

5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.

B 组

29.

30. 证明均值不等式：对任意非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 有

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

其中等式成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

证明

31. (1) 证明柯西 (Cauchy) 不等式：对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$, 有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$$

(2) 柯西不等式中，等式成立的充分必要条件是什么

第 3 章 连续函数

内容提要

- 连续与间断
- 初等函数的连续性
- 连续函数及其性质
- 闭区间上连续函数的性质

3.1 连续与间断

3.2 连续函数及其性质

3.3 初等函数的连续性

3.4 闭区间上连续函数的性质

第 3 章 练习

1.

第 4 章 导数

内容提要

- ❑ 导数的概念
- ❑ 导函数的计算
- ❑ 高阶导数
- ❑ 微分

4.1 导数的概念

4.2 导函数的计算

4.3 高阶导数

4.4 微分

第 4 章 练习

1.

第 5 章 导数的应用

内容提要

- 微分中值定理
- 函数的单调性与极值
- 函数的凸性与函数作图
- 洛必达法则
- 泰勒公式

5.1 微分中值定理

5.2 函数的单调性与极值

5.3 函数的凸性与函数作图

5.4 洛必达法则

5.5 泰勒公式

第 5 章 练习

1.

第 6 章 实数理论及其应用

内容提要

- ❑ 确界原理及其应用
- ❑ 子列
- ❑ 有限覆盖定理
- ❑ 闭区间上连续函数性质的证明
- ❑ 一致连续
- ❑ 上极限与下极限

6.1 确界原理及其应用

6.2 子列

6.3 有限覆盖定理

6.4 闭区间上连续函数性质的证明

6.5 一致连续

6.6 上极限与下极限

第 6 章 练习

1.

6.7 数学分析 I 总结

第 7 章 不定积分

内容提要

- ❏
- ❏
- ❏
- ❏

7.1

7.2

7.3

7.4

第 7 章 练习

1.

第 8 章 定积分

内容提要

- 定积分的定义
- 可积的充分必要条件与可积函数类
- 定积分的性质
- 微积分基本定理
- 换元积分法

8.1 定积分的定义

8.2 可积的充分必要条件与可积函数类

8.3 定积分的性质

8.4 微积分基本定理

8.5 换元积分法

第 8 章 练习

1.

第 9 章 定积分及其应用

内容提要

- 在几何计算中的应用
- 在物理计算中的应用

9.1 在几何计算中的应用

9.2 在物理计算中的应用

第 9 章 练习

1.

第 10 章 多元函数的极限与连续

内容提要

- ❏
- ❏
- ❏
- ❏

10.1

10.2

10.3

10.4

第 10 章 练习

1.

第 11 章 多元函数的微分学

内容提要

- ❏
- ❏
- ❏
- ❏

11.1

11.2

11.3

11.4

第 11 章 练习

1.

第 12 章 重积分

内容提要

- ❏
- ❏
- ❏
- ❏

12.1

12.2

12.3

12.4

第 12 章练习

1.

第 13 章 曲线积分与曲面积分

内容提要

13.1

13.2

13.3

13.4

第 13 章 练习

1.

13.5 数学分析 II 总结

第 14 章 数项级数

内容提要

❑ ❑
❑ ❑
❑

14.1

14.2

14.3

14.4

练习 14.1

1. 求下列级数的和

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$

(3)$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

第 14 章 练习

1.
2.

第 15 章 广义积分

内容提要

- ❏ 无限区间上的广义积分
- ❏ 有限区间上无界函数的广义积分
- ❏ 广义重积分 *

对比一般的 Riemann 积分，需要满足:1. 积分区间是有限区间 $[a,b]$, 2. 被积函数 f(x) 在 $[a,b]$ 上有界。本章我们以 Riemann 积分为基础，探讨积分区间是无限区间或者被积函数是无界函数时引进广义积分 (也称反常积分)，我们需要讨论两种广义积分也就是：

1. 无限区间上的广义积分 2. 有限区间上无界函数的广义积分

15.1 无限区间上的广义积分

首先，我们需要了解广义积分是什么以及广义积分收敛的定义 (包括有两个无穷的区间情形)

定义 15.1 (广义积分收敛的定义)

设函数 f(x) 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，对任何实数 $A>a$, 函数 f(x) 都在 $[a,A]$ 上有可积. 如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = I \tag{15.1}$$

存在，则称 f(x) 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分 (或反常积分) 收敛，并称实数 I 为该广义积分的值，记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = I \tag{15.2}$$

否则就称该广义积分 (或反常积分) 发散，对于区间在 $(-\infty,a]$ 上的广义积分可同理定义。 ♣

定义 15.2 (区间在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分定义)

设对任何满足 $A'<A$ 的实数 A 和 A', 函数 f(x) 都在 $[A',A]$ 上可积。如果存在实数 a，使得广义积分 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{15.3}$$

否则，只要上式右端其中一个广义积分发散，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

极限形式表示如下

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty\\ A'\to-\infty}}\int_{A'}^A f(x)dx \tag{15.4}$$

♣

为说明定义 15.2 的合理性，理应说明广义积分的收敛性与收敛值与 a 的选取无关

定理 15.1

设实数 a<b, 那么有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散。若收敛有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx \tag{15.5}$$

♡

由于无限区间上的广义积分是变上限 (或变下限) 积分定义的函数取极限得到的，所以许多定积分的性质都可以通过对积分上限 (或下限) 取极限的方式迁移到广义积分中。

定理 15.2 (线性性)

如果广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛且有 $\lambda, \mu \in R$, 则有 $\int_a^{+\infty}(\lambda f(x) + \mu g(x))dx$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{15.6}$$

♡

还可以将微积分基本公式和分部积分公式挪用进广义积分中

命题 15.1

设对任何实数 A>a, 函数 f(x) 都在 $[a, A]$ 上可积，F(x) 是 f(x) 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函数，则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在. 记 $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛或 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在时，就有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) \tag{15.7}$$

♠

命题 15.2

设 F(x) 和 g(x) 都在 $[a, +\infty)$ 上连续可导且 $F'(x) = f(x)$. 如果下面的等式中有两项存在，则第三项也存在，且有

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx \tag{15.8}$$

♠

例题 15.1 伽玛函数 (Gamma Function) 计算积分 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx, n \in \mathcal{N}$

解 记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$, 则 $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$, 对任何正整数 n，有

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = nI_{n-1} \tag{15.9}$$

故 $I_n = n!$

定理 15.3 (柯西收敛原理)

广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充分必要条件:

$$\forall\epsilon > 0, \exists M > a, A' > A > M, s.t. \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \epsilon \tag{15.10}$$

♡

定理 15.4 (积分第二中值定理)

♡

定理 15.5

♡

定理 15.6

♡

15.2 有限区间上无界函数的广义积分

15.3 广义重积分 *

15.3.1

第 15 章 练习

1.

第 16 章 一致收敛

内容提要

- 函数列的一致收敛
- 一致收敛与极限换序
- 逼近定理 *
- 函数项级数的一致收敛
- 利用函数项级数构造特殊函数的例子

16.1 函数列的一致收敛

16.2 一致收敛与极限换序

16.3 逼近定理 *

16.4 函数项级数的一致收敛

16.5 利用函数项级数构造特殊函数的例子

第 16 章 练习

1.

第 17 章 幂级数

内容提要

- ❑
- ❑
- ❑
- ❑

17.1 test

17.2

17.3

17.4

第 17 章练习

1.

第 18 章 傅里叶分析

内容提要

-
-
-
- Fourier Analysis written by Stein

18.1

18.2

18.3

18.4

第 18 章练习

1.

第 19 章 含参变量积分

内容提要

19.1

19.2

19.3

19.4

第 19 章 练习

1.

19.5 数学分析 III 总结

第 20 章 Acknowledgement