# Advanced Algebra

## Lecture Note


作者：Eureka

组织：葬送的芙莉莲

时间：勇者辛美尔死去 26 年


这世上最美妙的便是我与数学相处的时光；没有野心，无需伪装，忘怀天地。——拉普拉斯

# 目录

# Preface

# 第 1 章 多项式理论

内容提要

- 预备知识
- 一元多项式运算和性质
- 带余除法
- 最大公因式
- 因式分解
- 韦达定理

## 1.1 预备知识

**定义 1.1 (常用的记号)**

$$\sum_{min}^{max} \text{连和}, \prod_{min}^{max} \text{连乘}, \forall, \exists, \exists! \text{存在唯一}, s.t.(such\ that)$$

**定义 1.2 (Mathematical induction)**

1. 第一数学归纳法

(1)$E(1)$

(2) 假设 $E(n)$, 根据归纳假设证明 $E(n+1)$

2. 第二数学归纳法

(1)$E(1)$

(2) 假设 $E(k)(k<n)$

(3)$E(n)$

**例题 1.1Fibonacci 数列**

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

**定义 1.3 (封闭)**

若对数集中的任意两个数，做某种运算，其运算结果仍在数集中，称 (该数集) 对于这种运算封闭。

**定义 1.4 (数域)**

设 $P$ 为一个数集 (包括 0，1)，若 $P$ 关于 $+,-,\times,\div$ 封闭, 则称 $P$ 是一个数域.

**例题 1.2** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$, 则 $\mathbb{Q}$ 是一个数域

证明 只需要按照定义验证 0,1，再验证对于四则运算封闭即可. 加减乘易证, 我们只考虑除法

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\text{讨论 } c^2 \neq 2d^2)$$

**定理 1.1**

设 $\mathbb{P}$ 为一个数域, 若 $\mathbb{R}\subset\mathbb{P}$, 则 $\mathbb{P}=\mathbb{C}$

证明

$$\forall x+yi\in\mathbb{C}, \mathbb{R}\subset\mathbb{P}, \exists\alpha = a+bi\in\mathbb{P}, b\neq 0 \to i = \frac{\alpha-a}{b}\in\mathbb{P}$$

$x,y\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{P}, i\in\mathbb{P}$, 从而 $\mathbb{P}=\mathbb{C}$

**例题 1.3** 设 $\mathbb{P}$ 是至少有两个数的数集, 证明: 若对差、商封闭，则 $\mathbb{P}$ 是一个数域.

证明 $\forall$

## 1.2 一元多项式: 定义与运算

https://github.com/Hermitcity/Notes-in-Stat..git

git remote add origin https://github.com/Hermitcity/Notes-in-Stat..git git branch -M main git push -u origin main

## 1.3 带余除法

## 1.4 最大公因式

## 1.5 因式分解

# 第 2 章 行列式

内容提要

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- 行列式按行 (列) 展开
- 克拉默 (Cramer) 法则

## 2.1 引言

如果要研究行列式，就需要思考我们研究行列式的动机以及行列式对于处理哪些问题具有作用，通常来说行列式的发现来源于对于线性方程组求解问题的研究。我们可以先从简单的二阶行列式 (也就是二元线性方程组求解) 开始:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

过去我们就求解过这样的问题，也就是根据消元法降低未知项的个数我们很容易地得出这种方程组的解 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a12}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a21b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

我们可以观察分子分母的包含的原方程组系数，并定义出一种记号 (也就是后面的行列式记号)

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

简化之后可以得到

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = d_1, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = d_2, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = d$$

那么之前的方程组的解可以表示为 $x_1 = \dfrac{d_1}{d}, x_2 = \dfrac{d_2}{d}$, 我们很自然地就会开始做一些大胆的猜想是否可以得到 $x_i = \dfrac{d_i}{d}$，事实上，这就是本章最后得出的 Cramer 法则.

注 关于

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的记法，我们可以简单的先认为主对角线 (左上至右下) 乘积减去副对角线 (从右上到左下) 乘积

而关于 $d_i$ 的表达方式就是把系数矩阵中 $i$ 对应列用常数列替代

## 2.2 n 级排列

**定义 2.1**

$1, 2 \ldots n$ 组成的一个有序数组称为一个 $n$ 级排列, 记为 $i_1, i_2 \ldots i_n$, 其中 1,2,...n 称为自然排列在 n 级排列 $i_1 ... i_k, i_l \ldots, i_n$ 中，若有 $i_k > i_l$，称 $(i_k, i_l)$ 为逆序. ♣

**定义 2.2 (逆序数)**

一个 n 级排列 $i_1 \ldots i_n$ 中逆序的总个数称为排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 \ldots i_n)$，考虑逆序数的奇偶性将排列分为奇排列 (偶排列). ♣

**定理 2.1**

对换必改变排列的奇偶性

证明 (1) 先考虑相邻情况下的对换

$$i_1 \dots i_k, i_{k+1} \dots i_n \to i_1 \dots i_{k+1}, i_k \dots i_n$$

易知 $\tau(i_1 \dots i_k, i_{k+1} \dots i_n) = \tau(i_1 \dots i_{k+1}, i_k \dots i_n) \pm 1$, 故奇偶性改变.

(2) 再来考虑一般情形

$$i_1 \dots i_k \dots i_{k+s} \dots i_n \to i_1 \dots i_{k+s} \dots i_k \dots i_n$$

易知共经过了 $2s-1$ 次的相邻对换, 由于 $(-1)^{2s-1} = -1$ 也可以得到，对换后的奇偶性发生了改变. ♡

**定理 2.2**

在 n 级排列中，奇偶排列个数相等, 即 $\dfrac{n!}{2}$.

证明 不妨假设一共有 $p$ 个奇排列, 偶排列有 $q$ 个偶排列,p+q=n!.

不妨考虑奇排列, 全都取其中的任意两个位置 $(i_k, i_j)$ 对换, 将得到 $p$ 个不同的偶排列, 为什么不同呢？因为如果存在相同的两个偶排列就说明原本的奇排列也相同, 与我们的题设矛盾. 可得 $p \leq q$, 同理可得,$q \leq p$, 即得 $p = q$. ♡

**定理 2.3**

任一个排列总可以经过有限次对换变为自然排列 (1,...,n), 且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

证明 ♡