数理方程期末复习

张宇琛

（电信学院，计算机试验班 81）

目录

一、 复习

1.1 数学建模和基本原理介绍

1.1.1 数学模型

依据所给物理模型写出相应的偏微分方程和定解条件

1. 弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \le x \le l \\ \begin{cases} u(0,t) = g_1(t), u(l,t) = g_2(t) & t \ge 0 \\ u_x(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) = g_2(t) & t \ge 0 \\ u_x(0,t) - \sigma_1 u(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) + \sigma_2 u(l,t) = g_2(t) & t \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

2. 热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f & t \ge 0 \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z) \\ \begin{cases} u|_{\Sigma} = g(x,y,z,t) \\ k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = g(x,y,z,t) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g \end{cases} \end{cases}$$

3. 泊松方程定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{a^2} f \\ \begin{cases} u = \varphi \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \\ (\frac{\partial u}{\partial u} + \sigma u) = \varphi \end{cases} \end{cases}$$

1.1.2 叠加原理

1.2 分离变量法

1.2.1 特征值问题

$$AX(x) = \lambda X(x)$$

1. 两端乘 $X(x)$
2. 在 [0,l] 积分，得

$$X(x)X'(x)\big|_0^l - \int_0^l (X'(x))^2 \mathrm{d}x + \lambda \int_0^l X^2(x) \mathrm{d}x = 0$$

3. 带入边界条件
4. 求通解

$$\begin{cases} \lambda = 0 \quad X(x) = c_1 + c_2 x \\ \lambda \neq 0 \quad X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x \end{cases}$$

5. 证明正交性

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{l}{2} & m = n \end{cases}$$

1.2.2 分离变量法解题步骤

1. 令 $u(x,t) = X(x)T(t)$，并带入方程（齐次）中
2. 做变量分离，等号两侧均等于 $-\lambda$
3. 将边界条件代入
4. 求得方程的无穷多个解 $u_n(x,t) = X_n(x)T_(t)$, 利用叠加原理将它们叠加成级数解
5. 将初始条件代入该级数解，得到 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$
6. 将 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 用特征函数系展成级数

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$$\psi(x) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x)$$

比对系数，找到定解问题的解

方程为非齐次（$u_{tt} - a^2 u_{xx} = A$）时的四步法

1. 利用分离变量法导出并求解特征值问题
2. 正交分解，将 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x,t) = A$ 按特征函数系展开成傅里叶级数

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi}{l}x \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{n\pi}{l}x \\ A = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

其中 $\varphi_n(x) \quad \psi_n(X) \quad f_n$ 分别为 $\varphi(x) \quad \psi(X) \quad f(x,t)$ 的傅里叶系数，具体表示为

$$\begin{cases} \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha \\ \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha \\ f_n = \frac{2}{l}\int_0^l A(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha = \frac{2A}{n\pi}[1-(-1)^{n+1}] \end{cases}$$

3. 利用待定系数法确定 $T_n(t)$, 将 $u(x,t)$ 和 A 带入原定解问题的方程中, 并将 $X_n''(x) =$

$-\lambda_n X_n(x)$ 代入，比较两端 $X_n(X)$ 的系数，得到 $T_n(t)$ 的初值问题

4. 求解 $T_n(t)$ 的初值问题

1.2.3 边界条件齐次化

$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t)$，其中 $v(x,t)$ 为新的未知函数。

1. $u(0,t)=g_1(t), u(l,t)=g_2(t):\omega(x,t)=g_1(t)+\frac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x$
2. $u_x(0,t)=g_1(t), u(l,t)=g_2(t):\omega(x,t)=g_1(t)(x-l)+g_2(t)$
3. $u(0,t)=g_1(t), u_x(l,t)=g_2(t):\omega(x,t)=g_2(t)x+g_1(t)$
4. $u_x(0,t)=g_1(t), u_x(l,t)=g_2(t):\omega(x,t)=g_1(t)x+\frac{g_2(t)-g_1(t)}{2l}x^2$

1.2.4 熟悉题目

- 一维热传导问题
- 弦振动混合问题
- 二维位势方程

1.3 Bessel 函数

1.3.1 Laplace 算子的极坐标表示

$$\Delta u = u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}$$

1.3.2 Bessel 方程及 Bessel 方程本征值问题

r 阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-r^2)y=0$$

n 阶贝塞尔方程的特征值问题

- 问题：方程
$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^2-n^2)R(\rho)=0$$
与齐次边界条件构成的特征值问题
- 特征值：$\lambda_m=(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0})^2$
- 特征函数：$R_m(\rho)=J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho)$

1.3.3 Bessel 函数性质

Γ 函数性质

1. $\Gamma(1)=1, \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$
2. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha), \alpha>0$
3. $\Gamma(n+1)=n!, \Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$
4. 正向趋于零为正无穷，负向趋于零为负无穷；正向趋于负整数为负无穷，负向趋于负整数为正无穷

Bessel 函数　对于任意实数 $r>0$，r 阶贝塞尔方程的两个解为 J_r 和 J_{-r}，其中

$$J_r(x)=(\frac{x}{2})^r\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+r+1)}(\frac{x}{2})^{2k}$$

当 $r=0$ 时，贝塞尔方程的解为 J_0 和

$$N_r=\frac{J_r(x)\cos(r\pi)-J_{-r}(x)}{\sin(r\pi)}$$

Bessel 函数的性质

1. 奇偶性：$J_n(x)=(-1)^n J_{-n}(x)$
2. 零点分布：$J_n(x)=0$ 的根称为 $J_n(x)$ 的零点，无复零点，但有无穷多个在 x 轴上关于原点对称分布的实零点。$J_0(0)=1$，但是 $x=0$ 是 $J_n(x), n\geq 1$ 的 n 重零点，其余零点均为单零点。第 m 个正零点记为 $\mu_m^{(n)}(m\geq 1)$
3. 递推公式：

$$\begin{cases}(x^n J_n(x))'=x^n J_{n-1}(x)\\(x^{-n}J_n(x))'=-x^{-n}J_{n+1}(x)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)\\J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)\end{cases}$$

1.3.4 将已知函数展开为 Fourier-Bessel 级数及相应的分离变量法

设 $f(\rho)$ 在区间 $[0,\rho_0]$ 连续。且具有分段连续的一阶导数，则在区间 $[0,\rho_0]$ 上，$f(\rho_0)$ 可以按该特征函数系 $\{R_m(\rho)|m\geq 1\}$ 展开成级数

$$f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m R_m(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho)$$

其中

$$A_m=\frac{2}{\left[\rho_0 J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2}\int_0^{\rho_0}\rho f(\rho)J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho)\mathrm{d}\rho(m\geq 1)$$

1.4 Green 函数法

1.4.1 基本解

三维拉普拉斯方程基本解

$$u(x,y,z)=\Gamma(P,P_0)=\frac{1}{4\pi r_{P_0P}}$$

$$-\Delta u=\delta(P,P_0)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)$$

二维拉普拉斯方程基本解

$$\Gamma(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{P_0P}}$$

$$-\Delta u=\delta(P,P_0)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$$

1.4.2 Green 公式

- 格林第一公式

$$\iiint_\Omega u\Delta v\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s-\iiint_\Omega\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v\mathrm{d}V$$

- 格林第二公式

$$\iiint_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V=\iint(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})\mathrm{d}s$$

- 格林第三公式

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\iint_{\partial\Omega}(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial n})\mathrm{d}s-\iiint_\Omega\Gamma\Delta u\mathrm{d}V$$

  这个公式表明函数 u 在 Ω 内的值可以用 Ω 内的 Δu 值与边界 $\partial\Omega$ 上 u 及 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的值表示。

1.4.3 Green 函数构造

1. 设 $P_0(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，找 P_0 关于 $\partial\Omega$ 的对称点 P_1
2. $G(P,P_0)$ 表示点 P_0 和对称点 P_1 产生的电位叠加
3. 将 $\frac{\partial G}{\partial n}$ 做合适变换后，将计算结果带入

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\iint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}mathrmds+\iiint_\Omega Gf\mathrm{d}V$$

1.5 特征线法

1.5.1 一维初值问题特征线法

一阶线性偏微分方程

$$au_t + bu_x + cu = f$$

特征方程

$$a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{t}} - b = 0$$

其积分曲线

$$\psi(x,t) = C$$

称为特征曲线

一阶拟线性偏微分方程特征线法

$$\begin{cases} a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,y) & -\infty < x < \infty, t > t_0 \\ u(x,t_0) = \varphi(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

注意这里的顺序是先 u_x 再 u_t，跟前面不一样

特征向量场

$$\boldsymbol{\alpha} = (a(x,t,u), b(x,t,u), c(x,t,y))$$

特征方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = a(x,t,u) & x(s_0) = \tau \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = b(x,t,u) & t(s_0) = t_0 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = c(x,t,u) & u(s_0) = \varphi(\tau) \end{cases}$$

其中参数初始值 $s_0 = t_0$，解特征方程组后，由初始条件确定出常数，求得特征线，再消去参数 τ 和 s 就得到了待求的函数。

1.5.2 无限长弦自由振动问题达朗贝尔公式

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

特征方程

$$(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{t}})^2 - a^2 = 0$$

定解问题的解为

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

根据定解条件可以求得 $f(x)$ 和 $g(x)$

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2}(f(0)-g(0))$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha-\frac{1}{2}(f(0)-g(0))$$

带入到解中得到达朗贝尔公式

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

二、 数学建模和基本原理介绍

2.1 数学模型的建立

2.1.1 弦振动方程和定解条件

$$a^2=\frac{T_0}{\rho}$$

$$f(x,t)=\frac{f_0(x,t)}{\rho}$$

一维弦振动方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$$

二维波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+f(x,y,t))$$

三维波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t)$$

初始条件

$$u(x,0)=\phi(x),u_t(x,0)=\psi(x)$$

边界条件

1. Dirichlet 边界条件，已知端点的位移变化

$$u(0,t)=g_1(t),u(l,t)=g_2(t)$$

2. Neumann 边界条件，已知端点所受的外力

$$u_x(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) = g_2(t)$$

3. Robin 边界条件，是一二类的线性组合

$$x = 0 : u_x(0,t) - \sigma_1 u(0,t) = g_1(t), t \geq 0$$

$$x = l : u_x(l,t) - \sigma_2 u(l,t) = g_2(t), t \geq 0$$

2.1.2 热传导方程和定解条件

$$Q_2(t = t_2) - Q_1(t = t_1) = W + \Phi$$

三维热传导方程

$$u_t = a^2 \Delta u + f$$

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{k}{\rho c} > 0 \\ f = \dfrac{f}{c} \\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \end{cases}$$

初始条件　初始条件是初始时刻导体内的温度分布

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$$

边界条件

1. 已知边界 $\partial\Omega$ 上的温度分布，即

$$u|_\Sigma = g(x,y,z,t)$$

2. 已知通过边界 $\partial\Omega$，即

$$k\frac{\partial u}{\partial n}|_\Sigma = g(x,y,z,t)$$

3. 导热体置于介质中，该介质温度已知，这时边界条件表示为

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g$$

2.1.3 泊松方程和定解条件

如果热源与边界条件都与时间无关，则经过充分长的时间后，区域 G 内各点温度不再随时间变化，即 $u_t = 0$，此时热传导方程可以简化为 $0 = a^2\Delta u + f$，即

$$-\Delta u = \frac{1}{a^2}f$$

称为泊松方程，当 $f \equiv 0$ 时，称为 Laplace 方程

边界条件

1. Dirichlet 边界条件
$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = \varphi \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ (\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u) = \varphi \end{cases}$$

2.2 定解问题的适定性

2.2.1 一些基本概念

偏微分方程　含有未知函数及未知函数的偏导数的等式成为偏微分方程。

自由项　方程中不含有未知函数或其偏导数的项成为自由项

齐次偏微分方程　自由项为零的方程称为齐次偏微分方程，否则称为非齐次偏微分方程。

古典解　如果一个函数在某区域内具有偏微分方程中所有的各阶连续偏导数，并且将它带入该方程时使方程成为恒等式，则称此函数为方程的古典解。(各阶连续可导，带进去成立)

2.2.2 适定性概念

如果一个定解问题的解同时具有存在唯一性（有且只有一个解）和稳定性（解对定解数据连续依赖)，就称这个定解问题是适定的

2.3 叠加原理

2.3.1 二阶线性偏微分方程解的叠加原理

二阶线性偏微分算子

$$L = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + c$$

于是二阶微分方程可以表示为

$$Lu = f$$

且有

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L u_1 + \beta L u_2$$

波算子

拉普拉斯算子

热算子

叠加原理 1 已知 $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ 如果 u_i 是 $Lu = f_i$ 的解，$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ 是方程 $Lu = f$ 的解

2.3.2 线性定解问题的叠加原理

定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

可以被分解为下面三个定解问题

1. 保留自由项

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

2. 保留一个初始条件

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

3. 保留另一个初始条件

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

叠加原理 2　如果 $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)$ 分别为这三个定解问题的解，那么 $u = u_1 + u_2 + u_3$ 是原定解问题的一个解

叠加原理 3　假设 $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,t), \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$，且对每个 $n \geq 1, u_n(x,t)$ 是

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi_n(x), u_t(x,0) = \psi_n(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

的解，则 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ 是原定解问题的一个解。

边界条件的齐次化处理　当定解问题含有非其次边界条件时，需要对边界条件作齐次化处理，使两端的边界条件都转化为齐次边界条件，方法是通过未知函数的变换，使新的未知函数满足齐次边界条件，通常采用的变换形式为 $u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t)$，其中 $v(x,t)$ 为新的未知函数。

1. $u(0,t) = g_1(t), u(l,t) = g_2(t) : \omega(x,t) = g_1(t) + \frac{g_2(t) - g_1(t)}{l} x$
2. $u_x(0,t) = g_1(t), u(l,t) = g_2(t) : \omega(x,t) = g_1(t)(x - l) + g_2(t)$
3. $u(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) = g_2(t) : \omega(x,t) = g_2(t)x + g_1(t)$
4. $u_x(0,t) = g_1(t), u_x(l,t) = g_2(t) : \omega(x,t) = g_1(t)x + \frac{g_2(t) - g_1(t)}{2l} x^2$

三、 分离变量法

3.1 特征值问题

3.1.1 二阶微分算子的特征值问题

二阶微分算子 $A=-\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}$

一般的函数空间 $H=\left\{X(x)\in C^2\left[0,l\right]|X(x)\right.$ 在端点 $x=0,x=l$ 处满足齐次边界条件 $\}$，设齐次边界条件为 $X(0)=X(l)=0$

微分算子 A 的特征值问题 $AX(x)=\lambda X(x),X(x)\in H$

等价于

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

其非零解称为 A 的特征函数，相应的 λ 称为特征值。

1. 先证明特征值非负，设 $X(x)$ 是相应于 λ 的一个非零解，用 $X(x)$ 乘方程两端，并在 [0,l] 上积分可得

$$\int_0^l \left[X''(x)X(x)+\lambda X(x)X(x)\right]\mathrm{d}x=0$$

$$\int_0^l X''(x)X(x)\mathrm{d}x+\lambda\int_0^l X^2(x)\mathrm{d}x=0$$

$$X(x)X'(x)|_0^l-\int_0^l (X'(x))^2\mathrm{d}x+\lambda\int_0^l X^2(x)\mathrm{d}x=0$$

将 $X(0)=X(l)=0$ 代入，得

$$\lambda\int_0^l X^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^l (X'(x))^2\mathrm{d}x$$

$$\lambda=\frac{\int_0^l (X'(x))^2\mathrm{d}x}{\int_0^l X^2(x)\mathrm{d}x}\geq 0$$

当 $\lambda=0$ 时, 方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$ 的通解为 $X(x)=c_1+c_2x$, 将 $X(0)=X(l)=0$ 代入得 $c_1=c_2=0$，因此 $\lambda=0$ 不是特征值。

2. 当 $\lambda=0$ 时，方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$ 的通解为

$$X(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

将 $X(0)=X(l)=0$ 代入，得 $c_1=0, c_1\cos\sqrt{\lambda}l+c_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$，即 $c_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$，令 $c_2>0$，有 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$ ，又因为 $\sqrt{\lambda}l>0$，所以有

$$\sqrt{\lambda}l=n\pi$$

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2, n\geq 1, n\in Z$$

取 $c_2=1$，并将 λ_n 代入通解，得 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x, n\geq 1$

因此该特征值问题的特征值和特征函数分别为

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2, X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x, n\geq 1$$

在区间 [0,l] 上，任意分段光滑的连续函数 $f(x)$ 可以按该特征函数系展开成傅里叶正弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其傅里叶系数

$$f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

定理 求解如下特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & 0<x<l \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$$

其特征值和特征函数分别为

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2, \quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x, \quad n\geq 0$$

定理 考虑二阶微分算子 $A=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 的特征值问题（该定理是例子的一般形式）

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & 0<x<l \\ X^{(k)}(0)=0, X^{(m)}(l)=0 & 0\leq k,m\leq 1, k,m\in Z \end{cases}$$

在区间 [0,l] 上，任意分段光滑的连续函数 $f(x)$ 可以按特征函数系 $\{X_n(x)\}_{n\geq 1}$ 展开成如下傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nX_n(x)$$

其傅里叶系数

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) \mathrm{d}x}{\int_0^l X_n^2(x) \mathrm{d}x}, n \geq 1$$

其中分母积分 $\int_0^l X_n^2(x)\mathrm{d}x$ 称为 $X_n(x)$ 的平方模，其值与特征函数形式有关，前面所述的例子中，$X_n(x)$ 正交，其平方模为 $\frac{l}{2}$。

定理 求解如下带有周期条件的特征值问题

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta = 0) & -\infty < \theta < +\infty \\ \Phi(\theta) = \Phi(2\pi + \theta) & -\infty < \theta < +\infty \end{cases}$$

其特征值与特征函数分别为

$$\lambda_0 = 0, \Phi_0 = 1; \quad \lambda_n = n^2, \Phi_n(\theta) = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}, n \geq 1$$

3.2 分离变量法

3.2.1 弦振动方程定解问题

来源：齐次方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 的解 $u(x,t) = X_n(x) T_n(t)$

考虑如下弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$，将其带入方程，得

$$T''(t)X(x) - a^2 X''(x) T(t) = 0$$

分离变量，得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$$

左侧是关于 x 的函数，右侧是关于 t 的函数，相等的充要条件是都等于一常数，因此

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$$

即

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$$

又由边界条件可得

$$X'(0)T(t) = 0, \quad X'(l)T(t) = 0$$

假定 $T(t)$ 非零，有

$$X'(0) = X'(l) = 0$$

可得特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad 0 < x < l \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

其特征值和特征函数分别为

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x, \quad n \geq 0$$

将其带入方程 $T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$，易得其通解为

$$T_0 = C_0 + D_0 t$$

$$T_n(t) = C_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + D_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t, n \geq 1$$

至此求得了方程的无穷多个满足边界条件的解 $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t), n \geq 0$，但是这些解有可能不满足初始条件。

使用叠加原理将无穷个解叠加成级数形式的解

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \frac{c_0 + d_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + d_n \sin\frac{n\pi a}{l}t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

其中 $c_0 = 2C_0, d_0 = 2D_0, c_n = C_n, d_n = D_n, n \geq 1$

由初始条件可得

$$\varphi(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$\psi(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

将 $\varphi(x)\psi(x)$ 按特征函数系展成级数

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$\psi(x) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

分别按 $\varphi(x)\psi(x)$ 的傅里叶系数 φ_n 和 ψ_n 取对应的 c_n 和 d_n，即

$$c_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha, n \geq 0$$

$$d_0 = \psi_0 = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha)d\alpha$$

$$d_n = \frac{l}{n\pi a}\psi_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\alpha)\cos\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha, n > 0$$

最后将 c_n　d_n 带入

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \frac{c_0 + d_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + d_n \sin\frac{n\pi a}{l}t)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

即可得到定解问题的解。

3.2.2 两端固定弦振动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), t_t(x,0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

注意到这是一个非其次方程，用特征函数法求解

1. 利用变量分离法导出并求解特征值问题

   令 $u(x,t) = X(x)T(t)$，将其带入到方程所对应的齐次方程中，得

$$T''(t)X(x) - a^2 X''(x)T(t) = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$$

   令上式左端为 $-\lambda$，有

$$X'' + \lambda X(x) = 0, T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0$$

   根据边界条件，$X(0)T(t) = 0, X(l)T(t) = 0$。由于 $T(t)$ 非零，所以 $X(0) = X(l) = 0$，因此该定解问题的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

其特征值和特征函数分别为 $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2, X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x, n\geq 1$

2. 正交分解

设

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中 $T_n(t)$ 为待定函数，再将 $\varphi(x)$ $\psi(X)$ $f(x,t)=A$ 按特征函数系 $\{X_n(x)\}_{n\geq 1}$ 展开成傅里叶级数

$$\begin{cases}\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x\\ \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x\\ A=\sum_{n=1}^{\infty}f_n X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\frac{n\pi}{l}x\end{cases}$$

其中 $\varphi_n(x)$ $\psi_n(X)$ f_n 分别为 $\varphi(x)$ $\psi(X)$ $f(x,t)$ 的傅里叶系数，具体表示为

$$\begin{cases}\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha\\ \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha\\ f_n=\frac{2}{l}\int_0^l A(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha d\alpha=\frac{2A}{n\pi}[1-(-1)^{n+1}]\end{cases}$$

3. 待定系数法确定 $T_n(t)$

将上步的结果带入方程，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nX_n(x)$$

将 $X_n''(X)=-\lambda_nX_n(x)$ 带入上式，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t))X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nX_n(x)$$

$$T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)=f_n$$

下面求 $T_n(t)$ 满足的初始条件：令 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$ 中的 $t=0$，得

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=\varphi(x)$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(x)X_n(x)=\psi(x)$$

结合由傅里叶级数有

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_nX_n(x)$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_nX_n(x)$$

因此可知 T_n 的初值条件 $T_n(0)=\varphi_n,T_n'(0)=\psi_n$，综上，$T_n(t)(n\geq 1)$ 是如下二阶常系数非其次方程初值问题的解

$$\begin{cases} T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)=f_n \quad t>0 \\ T_n(0)=\varphi_n,T_n'(0)=\psi_n \end{cases}$$

4. 求解关于 $T_n(t)$ 的初值问题

易得该方程对应的其次方程的基础解系为

$$v_1(t)=\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)=\cos\frac{n\pi a}{l}t \quad v_2(t)=\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)=\sin\frac{n\pi a}{l}t$$

注意到 f_n 为常数，所以方程有常数特解 $\overline{T_n}(t)=B_n$，带入可得

$$\overline{T_n}(t)=\frac{f_n}{a^2\lambda_n}$$

因此方程的通解为

$$T_n(t)=c_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+d_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+\frac{f_n}{a^2f_n}$$

根据初始条件

$$\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=c_n+\frac{f_n}{a^2\lambda_n}$$

$$\psi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)X_n(x)=d_n\frac{n\pi a}{l}$$

代入得

$$T_n(t)=(\varphi_n-\frac{f_n}{a^2f_n})\cos\frac{n\pi a}{l}t+(\frac{\psi_nl}{n\pi a})\sin\frac{n\pi a}{l}t+\frac{f_n}{a^2f_n}$$

代入到原定解问题的解中，得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi_n-\frac{f_n}{a^2f_n})\cos\frac{n\pi a}{l}t+(\frac{\psi_nl}{n\pi a})\sin\frac{n\pi a}{l}t+\frac{f_n}{a^2f_n}]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

3.2.3 **热传导方程定解问题**

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = u_0, u_x(l,t) = \sin\omega & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

要先将边界条件齐次化，设 $v = u - w$，其中 $w(x,t) = u_0 + x\sin\omega t$，将定解问题转化为

$$\begin{cases} v_t + \omega x\cos\omega t = a^2 v_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ v(0,t) = 0, v_x(l,t) = 0 & \\ v(x,0) = -u_0 & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

接下来用特征函数法求解

该问题的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & 0 < x < l \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

容易求得特征值和特征函数分别为

$$\lambda_n = (\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2, X_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

于是设定解问题的形式解为

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

四、 贝塞尔函数

4.1 Γ 函数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x, \alpha > 0$$

显然 $\Gamma > 0$

常用性质

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
2. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0$ 即 $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$
3. $\Gamma(n+1) = n!$

4. $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$
5. $\lim_{a\to 0^+}\Gamma(\alpha)=\lim_{a\to 0^+}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=+\infty, \lim_{a\to 0^-}\Gamma(\alpha)=-\infty$，在负整数处 $\Gamma(\alpha)$ 的左右极限为正负无穷大

4.2 贝塞尔方程和贝塞尔函数

r 阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-r^2)y=0, r\geq 0$$

r 阶贝塞尔函数 r 阶贝塞尔方程的解

$$J_r(x)=(\frac{x}{2})^r\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+r+1)}(\frac{x}{2})^{2k}$$

当 $r=n(n\geq 1)$ 为正整数时，可得 $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$

第二类贝塞尔函数 诺伊曼函数 对于任意非负整数 $n\geq 0$，假设 $n<r<n+1$，则函数

$$N_r(x)=\frac{J_rx\cos(r\pi)-J_{-r}(x)}{sin(r\pi)}$$

是 r 阶贝塞尔方程的解，与 $J_r(x)$ 线性无关

当 r 趋向于 n 时

$$\lim_{r\to n^+}N_r(x)=\frac{1}{\pi}\left[\lim_{r\to n^+}\frac{\partial}{\partial r}J_r(x)-(-1)^n\lim_{r\to n^+}\frac{\partial}{\partial r}J_{-r}(x)\right]$$

是 n 阶贝塞尔方程的一个解，通常记为 $N_n(x)$，称为第二类贝塞尔函数或诺伊曼函数，且 $\lim_{x\to 0^+}N_n(x)=-\infty$，是无界函数，在 $x\to+\infty$ 时震荡衰减

r 阶贝塞尔方程的通解 综上所述，对于任意 $r\geq 0$（包括整数和非整数），r 阶贝塞尔方程的通解可以表示为

$$y(x)=cJ_r(x)+dN_r(x)$$

其中 cd 为任意常数

当 $r>0$ 且不为整数时，r 阶贝塞尔方程的通解也可以表示为

$$y(x)=cJ_r(x)+dJ_{-r}(x)$$

4.3 贝塞尔函数的性质

整数阶贝塞尔函数具有和三角函数类似的性质

1. 奇偶性：当 n 为奇数时，$J_n(x)$ 为奇函数，n 为偶数时，$J_n(x)$ 为偶函数

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$$

2. 零点分布：$J_n(x)=0$ 的根都称为 $J_n(x)$ 的零点，$J_n(x)$ 无复零点，但是有无穷多个实零点，在 x 轴上关于原点对称分布。$J_0(0)=1$，$x=0$ 不是 $J_0(x)$ 的零点，但 $x=0$ 是 $J_n(x)(n\geq 1)$ 的 n 重零点。除 $x=0$ 外，$J_n(x)$ 的其他零点均为单零点。
   通常记 $J_n(x)$ 的第 m 个正零点为 $\mu_m^{(n)}(m\geq 1)$，当 $m\to\infty$ 时，$\mu_m^{(n)}\to\infty$，$\mu_{m+1}^{(n)}-\mu_m^{(n)}\to\pi$；并且当 $x\to\infty$ 时，$J_n(x)$ 有如下表达式

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$$

   是一个震荡衰减函数。
3. 递推公式

$$\begin{cases} (x^n J_n(x))' = x^n J_{n-1}(x) \\ (x^{-n} J_n(x))' = -x^{-n} J_{n+1}(x) \end{cases}$$

   可得

$$\begin{cases} J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) \\ J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x) = 2J_n(x) \end{cases}$$

   将这四个公式中的 n 全部替换为非负实数 r，公式仍然成立。

4.4 贝塞尔方程的特征值问题

讨论二阶线性微分算子 $A=-\Delta=-(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})$ 的特征值问题，即方程 $-\Delta u=\lambda u$ 和某种齐次边界条件构成的特征值问题。

在极坐标下，有

$$\Delta u = u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}$$

因此，二阶线性微分算子 $-\Delta$ 在圆域上的特征值问题即由方程

$$-(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}) = \lambda u(\rho,\theta), 0<\rho<\rho_0, 0\leq\theta\leq 2\pi$$

和齐次边界条件 $u(\rho_0,\theta)=0$（狄利克雷边界条件）或 $u_\rho(\rho_0,\theta)=0$（诺伊曼边界条件）构成。

4.4.1 n 阶贝塞尔方程的特征值问题

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)R(\rho) = 0$$

与其次边界条件构成的特征值问题成为 n 阶贝塞尔方程的特征值问题。

在狄利克雷边界条件 $u(\rho_0, \theta) = R(\rho_0)\Phi(\theta) = 0$ 下，$R(\rho_0) = 0$，n 阶贝塞尔方程的特征值问题可以表示为

$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)R(\rho) = 0 \quad 0 < \rho < \rho_0 \\ R(\rho_0) = 0, |R(0)| < +\infty \end{cases}$$

设 n 为任意非负整数，$\mu_m^{(n)}(m \geq 1)$ 为 $J_m(x)$ 的第 m 个正零点，则该特征值问题的特征值和特征函数分别为

$$\lambda_m = (\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0})^2 \quad R_m(\rho) = J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho), m \geq 1$$

对于任意的 $m \quad k$ 有

$$\int_0^{\rho_0} \rho R_m(\rho) R_k(\rho) d\rho = \delta_{mk} \frac{\rho_0^2}{2} \left[J_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2$$

其中

$$\delta_{mk} = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

该特征函数系的展开 设 $f(\rho)$ 在区间 $[0, \rho_0]$ 连续。且具有分段连续的一阶导数，则在区间 $[0, \rho_0]$ 上，$f(\rho_0)$ 可以按该特征函数系 $\{R_m(\rho)|m \geq 1\}$ 展开成级数

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m R_m(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho)$$

其中

$$A_m = \frac{2}{\left[\rho_0 J_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2} \int_0^{\rho_0} \rho f(\rho) J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho) d\rho (m \geq 1)$$

$\sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho)$ 称为 $f(\rho)$ 的傅里叶-贝塞尔级数、广义傅里叶级数，或者简称为傅里叶级数，A_m 称为 $f(\rho)$ 关于特征函数系 $\{R_m(\rho)|m \geq 1\}$ 的傅里叶系数。

该定理表明，该特征函数系不仅是加权正交的，而且是完备的。

4.5 多个自变量分离变量法

4.5.1 圆柱体或圆域上的定解问题

问题描述 设圆柱体 $\Omega=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2<1\right\}$ 为各项同性均匀导热体, 其边界温度为 0, 初始温度为 $\varphi(x,y,z)$ (只与 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 有关), 求圆柱体内的温度分布 $u(x,y,z,t)$。

解 记 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$，则 u 满足以下定解问题

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta u & (x,y,z)\in\Omega \quad t>0 \\ u=0 & (x,y,z)\in\partial\Omega \quad t\geq 0 \\ u|_{t=0}=\varphi(\sqrt{x^2+y^2}) & x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$$

做柱面坐标变化：$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$ 将定解问题的方程转化为

$$u_t=a^2(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+u_{zz})$$

由于温度分布与 z 和 θ 无关，因此定解问题可以表示为

$$\begin{cases} u_t=a^2(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho) & 0\leq\rho<1, t>0 \\ u|_{\rho=1}=0 & t\geq 0 \\ u|_{t=0}=\varphi(\rho) & 0\leq\rho\leq 1 \end{cases}$$

接下来用分离变量法求解该问题。

令 $u(\rho,t)=R(\rho)T(t)$，代入到方程中，可得

$$RT'=a^2(R''+\frac{1}{\rho}R')$$

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''+\frac{1}{\rho}R'}{R}=-\lambda$$

$$T'+a^2\lambda T=0 \quad R''+\frac{1}{\rho}R'+\lambda R=0$$

因此该定解问题的特征值问题为

$$\begin{cases} \rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0 & 0<\rho<1 \\ |R(0)|<+\infty, R(1)=0 \end{cases}$$

这是一个零阶贝塞尔方程特征值问题，边界即 $\rho_0=1$，其特征值与特征函数分别为

$$\lambda_m=(\mu_m^{(0)})^2 \quad R_m(\rho)=J_0(\mu_m^{(0)}\rho), m\geq 1$$

将 λ_m 代入到 $T'+a^2\lambda T=0$ 中并求解，可得

$$\underbrace{T_m(t)=A_m e^{-a^2(\mu_m^{(0)})^2 t}}, m\geq 1$$

因此

$$u_m(\rho,t)=R(\rho)T(t)=A_m e^{-a^2(\mu_m^{(0)})^2 t}J_0(\mu_m^{(0)}\rho), m\geq 1$$

根据叠加原理，得到该定解问题的形式解为

$$u(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(\rho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-a^2(\mu_m^{(0)})^2 t}J_0(\mu_m^{(0)}\rho)$$

令 $t=0$，结合初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(\rho)$ 可得

$$\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0(\mu_m^{(0)}\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2J_0(\mu_m^{(0)}\rho)}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2}\int_0^1\rho\varphi(\rho)J_0(\mu_m^{(0)}\rho)d\rho$$

五、 格林函数法

5.1 格林公式

格林公式是高斯公式的直接推广。

高斯公式

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\\ \boldsymbol{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\\ \boldsymbol{F}=(P,Q,R)\end{cases}$$

高斯公式表示为

$$\iiint_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}dV=\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

即

$$\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z})dV=\iint_{\partial\Omega}(P\cos\alpha,Q\cos\beta,R\cos\gamma)ds$$

或

$$\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z})dV=\iint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

格林公式

- 格林第一公式

$$\iiint_\Omega u\Delta v\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s-\iiint_\Omega\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v\mathrm{d}V$$

- 格林第二公式

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}V = \iint(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\mathrm{d}s$$

- 格林第三公式

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \iint_{\partial\Omega}(\Gamma\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial n})\mathrm{d}s - \iiint_{\Omega}\Gamma\Delta u\mathrm{d}V$$

这个公式表明函数 u 在 Ω 内的值可以用 Ω 内的 Δu 值与边界 $\partial\Omega$ 上 u 及 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的值表示。

5.2 拉普拉斯方程基本解和格林函数

5.2.1 基本解

三维拉普拉斯方程的基本解 设 $P_0(\xi,\eta,\zeta)\in \boldsymbol{R}^3$。若在该点放置一单位正电荷，则该电荷在空间产生的电位分布为

$$u(x,y,z) = \Gamma(P,P_0) = \frac{1}{4\pi r_{P_0P}}$$

函数 $\Gamma(P,P_0)$ 满足方程

$$-\Delta u = \delta(P,P_0)$$

其中

$$\delta(P,P_0) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)$$

是三维狄拉克函数（$\delta-$ 函数）

称 $\Gamma(P,P_0)$ 为三维拉普拉斯方程的基本解

其中 $r_{P_0P} = |P_0 - P| = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$

二维拉普拉斯方程的基本解

$$\Gamma(P,P_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{P_0P}}$$

$\Gamma(P,P_0)$ 满足二维狄拉克函数（$\delta-$ 函数）

$$-\Delta u = \delta(P,P_0) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$$

5.2.2 格林函数

考虑如下定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y,z) & (x,y,z)\in\Omega \\ u(x,y,z)=\varphi(x,y,z) & (x,y,z)\in\partial\Omega \end{cases}$$

设 $P_0(x,y,z)$ 和 $u(x,y,z)$ 是该问题的解，则根据格林第三公式，得

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\iint_{\partial\Omega}\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s-\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\mathrm{d}s-\iiint_{\Omega}\Gamma\Delta u\mathrm{d}V$$

将定解问题的边值和自由项带入该方程，得

$$\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\mathrm{d}s\quad\iiint_{\Omega}\Gamma\Delta u\mathrm{d}V=-\iiint_{\Omega}f\Gamma\mathrm{d}V$$

但是第一项中的 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 仍然是未知的，因此要消去 $\iint_{\partial\Omega}\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$，方法是引入在边界上取值为零的格林函数，并用格林函数取代原式中的基本解。

设 h 为定解问题

$$\begin{cases} -\Delta h=0 & (x,y,z)\in\Omega \\ h=-\Gamma & (x,y,z)\in\partial\Omega \end{cases}$$

的解，在格林第二公式中取 $v=h$ 得

$$-\iiint_{\Omega}h\Delta u\mathrm{d}V=\iint_{\partial\Omega}(u\frac{\partial h}{\partial n}-h\frac{\partial u}{\partial n})\mathrm{d}s$$

将上式与

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\iint_{\partial\Omega}\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s-\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\mathrm{d}s-\iiint_{\Omega}\Gamma\Delta u\mathrm{d}V$$

相加，得到

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\iint_{\partial\Omega}(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n})\mathrm{d}s-\iiint_{\Omega}G\Delta u\mathrm{d}V$$

是定解问题

$$\begin{cases} -\Delta G=\delta(P,P_0) & P(x,y,z)\in\Omega \\ G(P,P_0)=0 & P(x,y,z)\in\partial\Omega \end{cases}$$

的解，其中 $G(P,P_0)=\Gamma+h$，称为拉普拉斯方程在区域 Ω 内的格林函数，因此可得

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\iint_{\partial\Omega}u\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s-\iiint_{\Omega}G\Delta u\mathrm{d}V$$

于是原定解问题的解可以表示为

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\iint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s+\iiint_{\Omega}Gf\mathrm{d}V$$

这样就消除了 $\frac{\partial u}{\partial n}$，

5.3 半空间和圆域上的狄利克雷问题

5.3.1 半空间上狄利克雷问题

设 $\Omega=\{(x,y,z)|z>0\},\partial\Omega=\{(x,y,z)|z=0\}$，考虑如下定解问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,y,z) & (x,y,z)\in\Omega \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y) & (x,y)\in\mathbf{R}^2 \end{cases}$$

设 $P_0(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，则 $P_1(\xi,\eta,-\zeta)$ 为 P_0 关于 $\partial\Omega$ 的对称点，在这两点各放置一个正单位点电荷，则他们在空间产生的电位分别为

$$\Gamma(P,P_0)=\frac{1}{4\pi r_0},-\Delta\Gamma(P,P_0)=\delta(P,P_0),P\in\Omega$$

$$\Gamma(P,P_1)=\frac{1}{4\pi r_1},\Delta\Gamma(P,P_1)=0,P\in\Omega$$

令 $G(P,P_0)=\Gamma(P,P_0)-\Gamma(P,P_1)$，由于 P_0 和 P_1 关于 $\partial\Omega$ 对称，所以 $G(P,P_0)$ 在边界 $\partial\Omega$ 上为零，于是有

$$\begin{cases} -\Delta G=\delta(P,P_0) & P\in\Omega \\ G=0 & P\in\partial\Omega \end{cases}$$

$G(P,P_0)$ 是上半空间的格林函数 $G(P,P_0)=\Gamma(P,P_0)-\Gamma(P,P_1)=\frac{1}{4\pi}(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1})$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{3}{2}}}$$

代入到公式

$$u(\xi,\eta,\zeta)=-\iint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s+\iiint_{\Omega}Gf\mathrm{d}V$$

中，得

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta,\zeta) &= -\iint_{\partial\Omega}\varphi\tfrac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s+\iiint_{\Omega}Gf\mathrm{d}V \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{\varphi(x,y)\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{3}{2}}}+\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(P,P_0)f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned}$$

5.3.2 圆域上狄利克雷问题

设 $\Omega=\left\{(x,y|x^2y^2<R^2)\right\}$，则 $\partial\Omega=\left\{(x,y)|x^2+y^2=R^2\right\}$。考虑圆域 Ω 上的狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,y) & (x,y)\in\Omega \\ u(x,y)=g(x,y) & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases}$$

设 $P_0(\xi,\eta)\in\Omega, P_1(\overline{\xi},\overline{\eta})$ 为 $P_0(\xi,\eta)$ 关于圆周 $\partial\Omega$ 的对称点，即 $|OP_0||OP_1|=R^2$，对于任意的 $M\in\partial\Omega$ 有

$$\Delta_{OP_0M}\sim\Delta_{OP_1M}$$

因此有

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{P_0M}}-\frac{1}{2\pi}\ln(\frac{R}{|OP_0|}\frac{1}{r_{P_1M}})=0$$

令

$$G(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{P_0M}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|OP_0|}\frac{1}{r_{P_1M}}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{P_0M}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|OP_0|}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{P_1M}}$$

G 在圆周上恒为零。$G(P,P_0)$ 表示点 $P_0(\xi,\eta)$ 处正点电荷产生的电位和点 $P_1(\overline{\xi},\overline{\eta})$ 处负点电荷产生的电位的叠加。由二维拉普拉斯方程基本解定义可知

$$\begin{cases}-\Delta G(P,P_0)=\delta(P,P_0) & P\in\Omega\\ G(P,P_0)=0 & P\in\partial\Omega\end{cases}$$

即 $G(P,P_0)$ 是圆域上的格林函数。

引入极坐标：$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，记点 P_0 的坐标为 (ρ_0,θ_0)，则 $P_1(\frac{R^2}{\rho_0},\theta_0)$，对于圆内任意点 $P(\rho,\theta)$，若记 $\overrightarrow{OP_0}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 α，则有

$$\cos\alpha=(\cos\theta_0,\sin\theta_0)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=cos(\theta_0,\theta)$$

利用余弦定理

$$r_{P_0P}=\sqrt{\rho^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\alpha}$$
$$r_{P_1P}=\frac{1}{\rho_0}\sqrt{R^4+\rho_0^2\rho^2-2\rho_0\rho R^2\cos\alpha}$$

带入求解 $G(P,P_0)$，得

$$G(P,P_0)=-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\rho_0^2R^2+\rho^2R^2-2\rho_0\rho R^2\cos(\theta_0-\theta)}{R^4+\rho_0^2\rho^2-2\rho_0\rho R^2\cos(\theta_0-\theta)}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial G}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}=-\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2\rho_0R\cos(\theta_0-\theta)}$$

六、 特征线法

6.1 一阶偏微分方程特征线法

6.1.1 一阶线性偏微分方程特征线法

求解线性方程柯西问题

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = x + t & t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = x^2 & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

将 (x,t) 限制在直线 $x - 3t = \tau$ 上，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u_t + 3u_x$$

这样就将原问题化为了

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 4t + \tau & t > 0 \\ u(0) = u(x(0),0) = x^2(0) \end{cases}$$

其中 $x(0) = \tau$，因此解得

$$u = 2t^2 + \tau t + \tau^2$$

将 $x - 3t = \tau$ 代入，得

$$u(x,t) = x^2 + 8t^2 - 5xt$$

在这个方法中，称直线

$$x - 3t = \tau$$

为一阶线性偏微分方程 $u_t + 3u_x = x + t$ 的特征线，由于该直线是方程 $\frac{\mathrm{d}x}{dt} - 3 = 0$ 的解，因此称

$$\frac{\mathrm{d}x}{dt} - 3 = 0$$

为原方程的特征方程。

一般形式

- 一阶线性偏微分方程的一般形式为

$$au_t + bu_x + cu = f$$

- 称常微分方程

$$a\frac{\mathrm{d}x}{dt} - b = 0$$

为特征方程

- 称其积分曲线

$$\psi(x,t)=C$$

为特征曲线

6.1.2 一阶拟线性偏微分方程特征线法

考虑如下一阶偏微分方程柯西问题

$$\begin{cases} a(x,t,u)u_x+b(x,t,u)u_t=c(x,t,u) & -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

第一个方程成为一阶拟线性偏微分方程，它可能是线性的，也可能是非线性的

1. 向量场 $\boldsymbol{\alpha}=(a(x,t,u),b(x,t,u),c(x,t,u)), x\in\boldsymbol{R}, t>t_0, u\in\boldsymbol{R}$ 称为方程的特征向量场；
2. 方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{ds}=a(x,t,u) & x(s_0)=\tau \\ \frac{dt}{ds}=b(x,t,u) & t(s_0)=t_0 \\ \frac{du}{ds}=c(x,t,u) & u(s_0)=\varphi(\tau) \end{cases}$$

   称为柯西问题的特征方程组，其解称为该问题的特征曲线族，其中参数初始值 $s_0=t_0$。

6.2 一维波动方程特征线法

考虑弦振动方程柯西问题　（常称为无界弦振动问题）

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & \infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

弦振动方程的特征方程定义为

$$(\frac{du}{dt})^2-a^2=0$$

该方程的解为 $x-at=c_1, x+at=c_2$，称为弦振动方程的特征线。令

$$\begin{cases} \xi=x-at \\ \eta=x+at \end{cases}$$

代入弦振动方程，得

$$u_{\xi\eta}=0$$

对该等式两端分别关于 η 和 ξ 积分，得

$$u = f(\xi) + g(\eta)$$

将自变量还原

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$$

该方程为无界弦振动方程解的基本形式，其中函数与初始条件有关。

根据初始条件

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x)$$

得

$$\varphi(x) = f(x) + g(x)$$

$$\psi(x) = (-a)f'(x) + ag'(x)$$

将上式两端在区间 $[0,x]$ 上积分，得

$$\int_0^x \psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha = (-a)f(x) + ag(x) + af(0) - ag(0)$$

从而解得 $f(x)$ 和 $g(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}(f(0)-g(0))$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}(f(0)-g(0))$$

代入，得

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x-at) + g(x+at) \\
&= \tfrac{1}{2}\varphi(x-at) - \tfrac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\alpha)d\alpha + \tfrac{1}{2}\varphi(x+at) + \tfrac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \tfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

称为达朗贝尔公式。