清华大学机械工程系

数值分析 A

2025 年秋季学期

作业 6

代卓远 2025210205 2025 年 11 月 5 日

6.1. 用 Newton 迭代法和逆 Broyden 迭代法解

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4\,, \\ x^2 - y^2 = 1\,, \end{cases} \quad x^0 = (1.6, 1.2)^{\mathrm{T}}$$

解. 1. Newton 迭代法: 设

$$F(x) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ x^2 - y^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad F'(x) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix} - F(x^k)^{-1} F(x^k)$$

得

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5811 \\ 1.2247 \end{bmatrix}$$

2. 逆 Broyden 迭代法:

$$F(x^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = F(x^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.15625 & 0.15625 \\ 0.20833 & -0.20833 \end{bmatrix}$$

$$x^{k+1} = x^k - B_k F(x^k)$$

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(p^k - B_k q^k)(p^k)^{\mathrm{T}} B_k}{(p^k)^{\mathrm{T}} B_k q^k}$$

其中 $p^k = x^{k+1} - x^k, q^k = F(x^{k+1}) - F(x^k)$. 得

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1.5812 \\ 1.2250 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 1.5811 \\ 1.2247 \end{bmatrix}$$

6.2. 利用 Gershgorin 定理估计 $\mathrm{cond}(A)_2$ 的上界

$$A = \begin{bmatrix} 5.2 & 0.6 & 2.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 \\ 2.2 & 0.5 & 4.7 \end{bmatrix}$$

解. 由 Gershgorin 定理, 矩阵 A 的特征值落在以下圆盘中:

$$D_1 : |z - 5.2| \le 2.8, \quad D_2 : |z - 0.4| \le 1.1, \quad D_3 : |z - 4.7| \le 2.7$$
$$\Rightarrow \sigma(A) \subseteq [-0.7, 1.5] \cup [2, 8]$$

因此，$\mathrm{cond}(A)_2 = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \le \frac{8}{0.7} \approx 11.43.$

6.3. 用逆幂迭代法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 最接近 2 的特征值及对应的特征向量，结果准确到 10^{-3}.

解.

6.4. 设 A 有实特征值 $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$, 求 λ_1 的原点位移的幂迭代法引人参数 α, 对 $B = A - \alpha I$ 作幂迭代. 试证明这样的迭代当取 $\alpha = \dfrac{\lambda_2 + \lambda_n}{2}$ 时收敛最快