作业 1

代卓远 2025210205 2025 年 9 月 28 日

1.1. 已知 4 个四位有效数字的三角函数的值 $\sin 1^\circ = 0.0175$, $\sin 2^\circ = 0.0349$, $\cos 1^\circ = 0.9998$, $\cos 2^\circ = 0.9994$. 用以下四种方法计算 $1 - \cos 2^\circ$ 的值，比较结果的误差，并说明各有多少位有效数字.

（1） 直接用已知数字计算；

解. 直接计算

$$x_A = 1 - \cos 2^\circ = 1 - 0.9994 = 10^{-3} \times 0.6$$

误差

$$|x - x_A| \leq 0.5 \times 10^{-4}$$
$$n = -3 - (-4) = 1$$

有效数字为 1 位.

（2） 用公式 $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ 及已知数据；

解.

$$x_A = 1 - \cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ = 2 \times 0.0175^2 = 10^{-3} \times 0.6125$$

误差

$$|x - x_A| \leq 0.5 \times 10^{-5}$$
$$n = -3 - (-5) = 2$$

有效数字为 2 位.

（3） 用公式 $1 - \cos x = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ 及已知数据；

解.

$$x_A = 1 - \cos 2^\circ = \frac{\sin^2 2^\circ}{1 + \cos 2^\circ} = \frac{0.0349^2}{1 + 0.9994} \approx 10^{-3} \times 0.60918$$

误差

$$|x - x_A| \leq 0.5 \times 10^{-7}$$
$$n = -3 - (-7) = 4$$

有效数字为 4 位.

（4） 用 $1 - \cos x$ 的 Taylor（泰勒）展开式，要计算结果有四位有效数字
（$1 - \cos 2^\circ = 6.0917298 \cdots \times 10^{-4}$）

解.

$$
\begin{aligned}
x_A = 1-\cos 2^\circ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{(2^\circ)^{2i}}{(2i)!} \\
&\approx \frac{(2\times\frac{\pi}{180})^2}{2!}-\frac{(2\times\frac{\pi}{180})^4}{4!} \\
&\approx 10^{-3}\times 0.60917298
\end{aligned}
$$

误差

$$
\begin{aligned}
&|x-x_A| \le 0.5\times 10^{-7} \\
&n > -3-(-7) = 4
\end{aligned}
$$

有效数字 >4 位.

1.2. 下面是两种利用 9 次 Taylor 多项式近似计算 e^{-5} 的方法，试分析哪种方法能提供较好的近似值.

（1） $\mathrm{e}^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9}(-1)^i\frac{5^i}{i!}$

（2） $\mathrm{e}^{-5} \approx \left(\sum_{i=0}^{9}\frac{5^i}{i!}\right)^{-1}$

解.

x	$\sum_{i=0}^{x}(-1)^i\frac{5^i}{i!}$	$\left(\sum_{i=0}^{x}\frac{5^i}{i!}\right)^{-1}$
0	1	1
1	-4	0.166666667
2	8.5	0.054054054
3	-12.33333333	0.025423729
4	13.70833333	0.015296367
5	-12.33333333	0.010938924
6	9.368055556	0.008840322
7	-6.132936508	0.007774898
8	3.555183532	0.007230283
9	-1.827105379	0.006959453

显然第二种方法更好.

1.3. 下列公式要怎样变换才能使数值计算时能避免有效数字的损失？

（1） $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(N+1)-\arctan N$，$N>>1$;

解.

$$
\arctan(N+1)-\arctan N = \arctan\left(\frac{1}{1+(N+1)N}\right)
$$

（2） $\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2-\frac{1}{x}}$，$|x|>>1$;

解.

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2-\frac{1}{x}}=\frac{2}{x\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{x}}\right)}$$

（3） $\ln(x+1)-\ln x$，$x>>1$;

解.

$$\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

（4） $\cos^2 x-\sin^2 x$，$x\approx\frac{\pi}{4}$

解.

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

1.4. 已知 $I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x, n=0,1,\cdots$, 满足 $I_0=1-\mathrm{e}^{-1}, I_n=1-nI_{n-1}, n=1,2,\cdots$.

（1） 取 I_0 近似值 $\tilde{I}_0=1-0.3679$，用递推公式 $\tilde{I}_n=1-n\tilde{I}_{n-1}$ 计算 I_n 的近似值 $\tilde{I}_n, n=1,2,\cdots,9$(用四位有效数字计算), 结果是否准确？

解.

n	$\tilde{I}_n$	I_n
0	0.6321	0.632120559
1	0.3679	0.367879441
2	0.2642	0.264241118
3	0.2074	0.207276647
4	0.1704	0.170893412
5	0.1480	0.145532941
6	0.1120	0.126802357
7	0.2160	0.112383504
8	-0.7280	0.100931967
9	7.552	0.091612293

从 $n=7$ 开始，误差过大，不准确.

（2） 设 $\varepsilon_n=I_n-\tilde{I}_n$，推导 $|\varepsilon_n|$ 与 $|\varepsilon_0|$ 的关系.

解.

$$\varepsilon_n=I_n-\tilde{I}_n=1-nI_{n-1}-(1-n\tilde{I}_{n-1})=-n\varepsilon_{n-1}$$

$$|\varepsilon_n|=n|\varepsilon_{n-1}|=n(n-1)|\varepsilon_{n-2}|=\cdots=n!|\varepsilon_0|$$