作业 13

代卓远 2025210205 2025 年 12 月 28 日

13.1. 用梯形方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^x \sin(xy), \quad x \in [0,1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

若迭代初值为 $y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$, 试选取步长 h 使迭代格式

$$y_{n+1}^{(s+1)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}\right)\right], \quad s = 0, 1, \cdots$$

是收敛的.

解. 对任意 $n \geq 0$，设 y_{n+1} 为方程

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\Big]$$

的解。与上式相减得

$$y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1} = \frac{h}{2}\Big[f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1})\Big].$$

由微分中值定理，存在 $\xi_{n+1}^{(s)}$ 介于 $y_{n+1}^{(s)}$ 与 y_{n+1} 之间，使

$$f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f_y(x_{n+1}, \xi_{n+1}^{(s)})(y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}),$$

$$\big|y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1}\big| = \frac{h}{2}\big|f_y(x_{n+1}, \xi_{n+1}^{(s)})\big|\ \big|y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}\big| \leq \frac{hL}{2}\big|y_{n+1}^{(s)} - y_{n+1}\big|.$$

可得

$$\big|y_{n+1}^{(s+1)} - y_{n+1}\big| \leq \left(\frac{hL}{2}\right)^{s+1}\big|y_{n+1}^{(0)} - y_{n+1}\big|.$$

当 $0 < \dfrac{hL}{2} < 1$ 时，令 $s \to \infty$

$$\big|f_y(x,y)\big| = \big|xe^x \cos(xy)\big| \leq xe^x \leq e.$$

可取 $L = e$。由上结论，当

$$\frac{he}{2} < 1$$

即

$$h < \frac{2}{e}$$

关于 s 收敛。

13.2. 试求出单步法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

的局部截断误差主项及绝对稳定性区间.

解. 考虑初值问题 $y'=f(x,y)$，$y(x_0)=\mu$，假定 y 充分光滑，且 f 对 y 的偏导连续有界。按局部截断误差的定义：

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-\Big[y(x_n)+h\,f\big(x_{n+1},\,y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))\big)\Big].$$

由于 $y'(x)=f(x,y(x))$，故 $f(x_n,y(x_n))=y'(x_n)$，于是

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\,f\big(x_{n+1},\,y(x_n)+hy'(x_n)\big).$$

对 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处作 Taylor 展开：

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n),\qquad \xi_n\in(x_n,x_{n+1}),$$

代入得

$$T_{n+1}=hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)-h\,f\big(x_{n+1},\,y(x_n)+hy'(x_n)\big).$$

再加减 $hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))=hy'(x_{n+1})$，得

$$T_{n+1}=-\frac{h^2}{2}y''(\tilde{\xi}_n)+h\Big(f(x_{n+1},y(x_{n+1}))-f(x_{n+1},y(x_n)+hy'(x_n))\Big),\quad \tilde{\xi}_n\in(x_n,x_{n+1}).$$

存在 ζ_n 在 $y(x_{n+1})$ 与 $y(x_n)+hy'(x_n)$ 之间，使

$$f(x_{n+1},y(x_{n+1}))-f(x_{n+1},y(x_n)+hy'(x_n))=f_y(x_{n+1},\zeta_n)\Big(y(x_{n+1})-y(x_n)-hy'(x_n)\Big).$$

又由 Taylor 展开

$$y(x_{n+1})-y(x_n)-hy'(x_n)=\frac{h^2}{2}y''(\hat{\xi}_n),\qquad \hat{\xi}_n\in(x_n,x_{n+1}),$$

$$T_{n+1}=-\frac{h^2}{2}y''(\tilde{\xi}_n)+O(h^3),$$

局部截断误差主项为

$$T_{n+1}\sim-\frac{h^2}{2}\,y''(x_n)$$

取

$$y'=\lambda y,$$

$$y_{n+1}=y_n+h\lambda\big(y_n+h\lambda y_n\big)=\Big(1+\lambda h+(\lambda h)^2\Big)y_n.$$

令 $z=\lambda h$，得到稳定函数

$$E(z)=1+z+z^2.$$

绝对稳定性条件为

$$|E(z)|=|1+z+z^2|<1.\tag{*}$$

$$1+z+z^2=z^2+z+1>0$$

因此

$$z^2+z<0.$$

即稳定性区间为

$$z\in(-1,0).$$

13.3. 试求出中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)\right)$$

的局部截断误差主项.

解. 假定 y 是初值问题 $y' = f(x, y)$ 的充分光滑精确解，局部截断误差

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \left[y(x_n) + h\,f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n))\right)\right].$$

Taylor 展开：

$$y(x_{n+1}) = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x_n) + O(h^4).$$

有

$$y'(x_n) = f_n, \qquad y''(x_n) = \big(f_x + f_y f\big)_n,$$
$$y^{(3)}(x_n) = \Big(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f)\Big)_n.$$

对 f 在点 (x_n, y_n) 作二元 Taylor 展开，令

$$\Delta x = \frac{h}{2}, \qquad \Delta y = \frac{h}{2}f_n,$$

则

$$\begin{aligned} f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}f_n\right) &= f_n + f_x\Delta x + f_y\Delta y + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2\Big) + O(h^3) \\ &= f_n + \frac{h}{2}\big(f_x + f_y f\big)_n + \frac{h^2}{8}\big(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2\big)_n + O(h^3). \end{aligned}$$

$$h\,f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}f_n\right) = hf_n + \frac{h^2}{2}\big(f_x + f_y f\big)_n + \frac{h^3}{8}\big(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2\big)_n + O(h^4).$$

$$T_{n+1} = \frac{h^3}{6}y^{(3)}(x_n) - \frac{h^3}{8}\big(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2\big)_n + O(h^4).$$

得局部截断误差主项为

$$T_{n+1} = \frac{h^3}{24}\Big[\big(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2\big) + 4f_y\big(f_x + f_y f\big)\Big]_{(x_n, y(x_n))} + O(h^4).$$

13.4. 对于初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1, \quad x \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

试证明用中点方法、改进的 Euler 方法以及 Heun 方法 (见第 6 题) 来解，对任意的步长 h 均有相同的近似值.

解. 记

$$f(x, y) = -y + x + 1, \qquad x_{n+1} = x_n + h, \qquad y_n \approx y(x_n).$$

1. 中点方法设

$$k_1 = f(x_n, y_n) = -y_n + x_n + 1.$$

则

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) = -\left(y_n + \frac{h}{2}(-y_n + x_n + 1)\right) + \left(x_n + \frac{h}{2}\right) + 1.$$

$$k_2 = -(1 - \tfrac{h}{2})y_n + (1 - \tfrac{h}{2})x_n + 1 = (1 - \tfrac{h}{2})(x_n - y_n) + 1.$$

得

$$y_{n+1} = y_n + hk_2 = y_n + h\Big[(1 - \tfrac{h}{2})(x_n - y_n) + 1\Big]. \tag{A}$$

2. 改进 Euler 方法

令 $k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1) = -\big(y_n + h(-y_n + x_n + 1)\big) + (x_n + h) + 1$. 化简：

$$k_2 = -(1 - h)y_n + (1 - h)x_n + 1 = (1 - h)(x_n - y_n) + 1.$$

更新为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ &= y_n + \frac{h}{2}\Big[(x_n - y_n + 1) + \big((1 - h)(x_n - y_n) + 1\big)\Big] \\ &= y_n + h\Big[(1 - \tfrac{h}{2})(x_n - y_n) + 1\Big], \end{aligned}$$

3. Heun 方法：

$$k_1 = f(x_n, y_n), \qquad k_2 = f\left(x_n + \frac{2h}{3},\, y_n + \frac{2h}{3}k_1\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2\right).$$

结论：三种方法产生同一递推关系

$$y_{n+1} = y_n + h\Big[(1 - \tfrac{h}{2})(x_n - y_n) + 1\Big]$$

且 $y_0 = 1$，因此对所有 n 都有三种方法给出相同的近似值。