清华大学机械工程系

数值分析 A

2025 年秋季学期

作业 1

代卓远 2025210205 2025 年 9 月 28 日

1.1. 已知 4 个四位有效数字的三角函数的值 $\sin 1^\circ = 0.0175$, $\sin 2^\circ = 0.0349$, $\cos 1^\circ = 0.9998$, $\cos 2^\circ = 0.9994$. 用以下四种方法计算 $1-\cos 2^\circ$ 的值，比较结果的误差，并说明各有多少位有效数字.

（1） 直接用已知数字计算；

解.

$$\begin{aligned} &x_A = 1-\cos 2^\circ = 1-0.9994 = 10^{-3}\times 0.6 \\ &|x-x_A| \le 0.5\times 10^{-4} \\ &n = -3-(-4) = 1 \end{aligned}$$

有效数字为 1 位.

（2） 用公式 $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ 及已知数据；

解.

（3） 用公式 $1-\cos x = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ 及已知数据；

解.

（4） 用 $1-\cos x$ 的 Taylor（泰勒）展开式，要计算结果有四位有效数字（$1-\cos 2^\circ = 6.0917298\cdots\times 10^{-4}$）

解.

1.2. 下面是两种利用 9 次 Taylor 多项式近似计算 e^{-5} 的方法，试分析哪种方法能提供较好的近似值.

（1） $\mathrm{e}^{-5} \approx \displaystyle\sum_{i=0}^{9}(-1)^i\frac{5^i}{i!}$

（2） $\mathrm{e}^{-5} \approx \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{9}\frac{5^i}{i!}\right)^{-1}$

1.3. 下列公式要怎样变换才能使数值计算时能避免有效数字的损失？

（1） $\displaystyle\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(N+1)-\arctan N$，$N>>1$;

（2） $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x^2-\dfrac{1}{x}}$，$|x|>>1$;

（3） $\ln(x+1)-\ln x$，$x>>1$;

（4） $\cos^2 x-\sin^2 x$，$x\approx\dfrac{\pi}{4}$

1.4. 已知 $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, n = 0, 1, \cdots$, 满足 $I_0 = 1 - e^{-1}, I_n = 1 - nI_{n-1}, n = 1, 2, \cdots$.

（1） 取 I_0 近似值 $\tilde{I}_0 = 1 - 0.3679$，用递推公式 $\tilde{I}_n = 1 - n\tilde{I}_{n-1}$ 计算 I_n 的近似值 $\tilde{I}_n, n = 1, 2, \cdots, 9$(用四位有效数字计算), 结果是否准确？

（2） 设 $\varepsilon_n = I_n - \bar{I}_n$，推导 $|\,\varepsilon_n\,|$ 与 $|\,\varepsilon_0\,|$ 的关系.