作业 2

代卓远 2025210205

2025 年 10 月 8 日

2.1. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$x \in \mathbb{R}^n$. 证明:$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F\|x\|_2$

证明. 设 $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, 特征值为 λ_i,

则 $A^TA = \begin{bmatrix} \sum_1^n a_{i1}^2 & \sum_1^n a_{i1}a_{i2} & \cdots & \sum_1^n a_{i1}a_{in} \\ \sum_1^n a_{i2}a_{i1} & \sum_1^n a_{i2}^2 & \cdots & \sum_1^n a_{i2}a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_1^n a_{in}a_{1j} & \sum_1^n a_{in}a_{i2} & \cdots & \sum_1^n a_{in}^2 \end{bmatrix}$, 特征值为 $\lambda_i^2 \ge 0$

$\mathrm{tr}(A^TA) = \sum_{i,j} a_{ij} = \|A\|_F^2 \ge \max_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda^2 = \|A\|_2^2$, 所以 $\|A\|_2 \le \|A\|_F$

所以 $\|Ax\|_2 \le \|A\|_2\|x\|_2 \le \|A\|_F\|x\|_2$ □

2.2. 已知 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m \in [a,b]$, 下面的 (f,g) 是否能构成 $C[a,b]$ 上的内积？证明你的结论.

（1） $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \forall f,g \in C[a,b]$;

解. 性质如下

（i） 正定性: $(f,f) = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \ge 0$, 当且仅当 $f(x) = 0$ 时等号成立.

（ii） 线性: $(\alpha f + \beta g, h) = \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, h(x)\mathrm{d}x =$
$\alpha\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)h(x)\mathrm{d}x = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$

（iii） 对称性: $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x = (g,f)$

所以 (f,g) 能构成 $C[a,b]$ 上的内积.

（2） $(f,g) = \sum_{i=0}^m f(x_i)g(x_i), \forall f,g \in C[a,b]$.

解. 当 $x_i = i\pi$,$f(x) = \sin x$, 此时 $(f,f) = 0$, 但 $f(x) \ne 0$, 所以不满足正定性, 不能构成内积.

2.3. 求下列矩阵 A 的范数 $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_F$ 和 $\rho(A)$.

（1） $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$;

解. A 的特征多项式为

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda - \frac{5+\sqrt{33}}{2})(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2})$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 6,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \frac{5+\sqrt{33}}{2},$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = \sqrt{30},$$

$$\rho(A) = \max |\lambda_i| = \frac{5+\sqrt{33}}{2}.$$

（2） $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

解. A 的特征多项式为

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - (2+\sqrt{2}))(\lambda - (2-\sqrt{2}))$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = 4,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = 2 + \sqrt{2},$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = 4,$$

$$\rho(A) = \max |\lambda_i| = 2 + \sqrt{2}.$$

2.4. 证明

（1） $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n,$

证明. $\max\limits_{1\le k\le n} |x_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \le n \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$, 即 $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$ □

（2） $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$

证明. $\max\limits_{1\le k\le n} |x_k| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} \le \sqrt{n} \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$, 即 $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$ □

（3） $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\|A\|_2, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$

证明. 由题目 2.1 可知 $tr(A^TA)=\sum_{i,j}a_{ij}^2=\|A\|_F^2\geq\max_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda^2=\|A\|_2^2$, 所以 $\|A\|_2\leq\|A\|_F$

又 $tr(A^TA)\leq n\max_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda^2=n\|A\|_2^2$, 所以 $\|A\|_F\leq\sqrt{n}\|A\|_2$

综上所述 $\|A\|_2\leqslant\|A\|_F\leqslant\sqrt{n}\|A\|_2$ □

2.5. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 设 A 对称正定, 记

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,$$

证明 $\|x\|_A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一种向量范数.

证明. 性质如下

（i） 正定性: $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}\geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

（ii） 线性: $\|\alpha x\|_A=\sqrt{(A(\alpha x),\alpha x)}=\sqrt{\alpha^2(Ax,x)}=|\alpha|\|x\|_A$

（iii） 三角不等式:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_A^2&=(A(x+y),x+y)\\&=(Ax,x)+(Ay,y)+(Ax,y)+(Ay,x)\\&=(Ax,x)+(Ay,y)+2(Ax,y)\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,$(Ax,y)^2\leq(Ax,x)(Ay,y)$, 即 $(Ax,y)\leq\|x\|_A\|y\|_A$，所以

$$\begin{aligned}&\|x+y\|_A^2\leq\|x\|_A^2+\|y\|_A^2+2\|x\|_A\|y\|_A=(\|x\|_A+\|y\|_A)^2,\\&\|x+y\|_A\leq\|x\|_A+\|y\|_A\end{aligned}$$

综上所述 $\|x\|_A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一种向量范数.

□

2.6. 设 $A,\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n},\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，证明：

$$\|AQ\|_2 = \|QA\|_2 = \|A\|_2\,,$$
$$\|AQ\|_F = \|QA\|_F = \|A\|_F\,.$$

证明. 对于 2-范数

$$\|AQ\|_2=\sqrt{\rho((AQ)^TAQ)}=\sqrt{\rho(AQ(AQ)^T)}=\sqrt{\rho(AQQ^TA^T)}=\sqrt{\rho(AA^T)}=\|A\|_2$$
$$\|QA\|_2=\sqrt{\rho((QA)^TQA)}=\sqrt{\rho(A^TQ^TQA)}=\sqrt{\rho(A^TA)}=\|A\|_2$$

对于 Frobenius 范数,AQ 和 QA 都是正交变换, 则变换后列 (行) 向量的模长不变, 所以

$$\|AQ\|_F=\sqrt{\sum_{i,j}(AQ)_{ij}^2}=\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}=\|A\|_F$$
$$\|QA\|_F=\sqrt{\sum_{i,j}(QA)_{ij}^2}=\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}=\|A\|_F$$

□

2.7. 设

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

分别求出所有 a, b 的值，使得

（1） A 奇异;

解.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3a - 2b = 0$$
$$\Rightarrow b = \frac{3}{2}a$$

（2） A 严格对角占优;

解.

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$
$$\Rightarrow \begin{cases} |a| \geq 1 \\ 2 \geq |b| + 1 \\ 2 \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} |a| \geq 1 \\ |b| \leq 1 \end{cases}$$

（3） A 对称正定.

解. 对称性：$b = 1$
正定性：主子式均大于 0

$$\begin{cases} b = 1 \\ a > 0 \\ \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1 > 0 \\ \det(A) = 3a - 2 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a > \dfrac{2}{3} \end{cases}$$