清华大学机械工程系

数值分析 A

2025 年秋季学期

## 作业 3

代卓远 2025210205 2025 年 10 月 13 日

3.1. 将第 1 题的系数矩阵作 Doolittle 分解：$A = LU$. 用直接三角分解方法解第 1 题的方程组, 并求 $\det A$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

**解.**

$$a_{11} = 6 > 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 > 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 78 > 0, \quad \det(A) = 191 > 0$$

因此，$A$ 可 LU 分解得

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 37/10 & -9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 191/74 \end{bmatrix}$$

$Ly = b, Ux = y$ 得

$$x = \begin{bmatrix} 151/191 \\ -69/191 \\ 165/191 \\ -213/191 \end{bmatrix}$$

3.2. 用 Cholesky 方法 (平方根法) 解方程组

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

**解.**

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$Ly = b, Ux = y$ 得

$$x = \begin{bmatrix} -9/4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.3. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -5 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$，试求 $\mathrm{cond}(A)_\infty$ 和 $\mathrm{cond}(B)_2$。

**解**.

$$\mathrm{cond}(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 6$$

$$\mathrm{cond}(B)_2 = \|B\|_2 \|B^{-1}\|_2 = 3+2\sqrt{2}$$

3.4. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A$ 非奇异，且 $\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$，试证明 $(A+\delta A)^{-1}$ 存在，且

$$\frac{\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

**证明**. $A+\delta A$ 非奇异，且

$$A^{-1}-(A+\delta A)^{-1} = (A^{-1}(A+\delta A)-I)(A+\delta A)^{-1} = A^{-1}\delta A(A+\delta A)^{-1}$$

因此

$$\begin{aligned}\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\| &\leqslant \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|(A+\delta A)^{-1}\| \\ &\leqslant \|A^{-1}\|\|\delta A\|\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|} \\ &= \frac{\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\|A^{-1}\|\end{aligned}$$

□

3.5. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}, b\in\mathbb{R}^n$, $A$ 非奇异, $x$ 为方程组 $Ax=b$ 的解. 令 $A$ 有误差 $\delta A=\alpha A$, $b$ 有误差 $\delta b=\beta b$, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 满足 $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$, 且 $\det(A+\delta A)\neq 0$. 向量 $x+\delta x$ 满足

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b,$$

试证明相对误差估计式

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leqslant \frac{|\alpha|+|\beta|}{1-|\alpha|}.$$

**证明**.

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right) = \frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1-|\alpha|\|A^{-1}\|\|A\|}(|\alpha|+|\beta|)$$

由于 $\dfrac{x}{1-\|\alpha\|x}$ 单调递增，又 $\|A^{-1}\|\|A\|=\mathrm{cond}(A)\ge 1$，因此

$$\frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1-|\alpha|\|A^{-1}\|\|A\|} \le \frac{1}{1-|\alpha|}$$

综上所述，得证。 □