作业 6

代卓远 2025210205 2025 年 11 月 6 日

6.1. 用 Newton 迭代法和逆 Broyden 迭代法解

$$\begin{cases} x^2+y^2=4\,, \\ x^2-y^2=1\,, \end{cases} \quad x^0=(1.6,1.2)^{\mathrm{T}}$$

解. 1. Newton 迭代法: 设

$$F(x)=\begin{bmatrix} x^2+y^2-4 \\ x^2-y^2-1 \end{bmatrix}, \quad F'(x)=\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^k \\ y^k \end{bmatrix}-F(x^k)^{-1}F(x^k)$$

得

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.5811 \\ 1.2247 \end{bmatrix}$$

2. 逆 Broyden 迭代法:

$$F(x^0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

$$B_0=F(x^0)^{-1}=\begin{bmatrix} 0.15625 & 0.15625 \\ 0.20833 & -0.20833 \end{bmatrix}$$

$$x^{k+1}=x^k-B_kF(x^k)$$

$$B_{k+1}=B_k+\frac{(p^k-B_kq^k)(p^k)^{\mathrm{T}}B_k}{(p^k)^{\mathrm{T}}B_kq^k}$$

其中 $p^k=x^{k+1}-x^k, q^k=F(x^{k+1})-F(x^k)$. 得

$$x^1=\begin{bmatrix} 1.5812 \\ 1.2250 \end{bmatrix}, \quad x^2=\begin{bmatrix} 1.5811 \\ 1.2247 \end{bmatrix}$$

6.2. 利用 Gershgorin 定理估计 $\mathrm{cond}(A)_2$ 的上界

$$A=\begin{bmatrix} 5.2 & 0.6 & 2.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 \\ 2.2 & 0.5 & 4.7 \end{bmatrix}$$

解. 由 Gershgorin 定理, 矩阵 A 的特征值落在以下圆盘中:

$$D_1 : |z-5.2| \le 2.8, \quad D_2 : |z-0.4| \le 1.1, \quad D_3 : |z-4.7| \le 2.7$$
$$\Rightarrow \sigma(A) \subseteq [-0.7, 1.5] \cup [2, 8]$$

因此，$\mathrm{cond}(A)_2 = \dfrac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \le \dfrac{8}{0.7} \approx 11.43.$

6.3. 用逆幂迭代法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 最接近 2 的特征值及对应的特征向量，结果准确到 10^{-3}.

解. 使用原点位移的逆幂迭代法, 取 $\mu = 2$, 则

$$B = A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

取初始向量 $v^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 由逆幂迭代法

$$z = A^{-1} v^{(k)}, \quad v^{(k+1)} = \frac{z}{\|z\|}, \quad k = 0, 1, \cdots.$$

得

$$v^{(1)} = [-0.436, 0.873, 0.218]^T, \quad \lambda^{(1)} - 2 = 0.143, \quad \lambda^{(1)} = 2.143$$
$$v^{(2)} = [-0.496, 0.818, 0.292]^T, \quad \lambda^{(2)} - 2 = 0.133, \quad \lambda^{(2)} = 2.133$$
$$v^{(3)} = [-0.497, 0.820, 0.284]^T, \quad \lambda^{(3)} - 2 = 0.133, \quad \lambda^{(3)} = 2.133$$

6.4. 设 A 有实特征值 $\lambda_1 > \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \cdots \ge \lambda_{n-1} \ge \lambda_n$, 求 λ_1 的原点位移的幂迭代法引人参数 α, 对 $B = A - \alpha I$ 作幂迭代. 试证明这样的迭代当取 $\alpha = \dfrac{\lambda_2 + \lambda_n}{2}$ 时收敛最快

解. B 的特征值为 $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \cdots, \lambda_n - \alpha$, 要求 $\lambda_1 - \alpha$ 是主特征值. 因此要使 $f(\alpha) = \max\left\{ \dfrac{|\lambda_2 - \alpha|}{|\ \lambda_1 - \alpha\ |}, \dfrac{|\lambda_n - \alpha\ |}{|\ \lambda_1 - \alpha\ |} \right\}$ 最小, 迭代速度最快, 得当

$$\lambda_n - \alpha = -\lambda_2 + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda_2 + \lambda_n}{2}$$

时收敛最快.