作业 2

代卓远 2025210205 2025 年 10 月 7 日

2.1. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$x \in \mathbb{R}^n$. 证明:$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F\|x\|_2$

证明. 设 $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, 则 $A^TA = \begin{bmatrix} \sum_1^n a_{i1}^2 & \sum_1^n a_{i1}a_{i2} & \cdots & \sum_1^n a_{i1}a_{in} \\ \sum_1^n a_{i2}a_{i1} & \sum_1^n a_{i2}^2 & \cdots & \sum_1^n a_{i2}a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_1^n a_{in}a_{1j} & \sum_1^n a_{in}a_{i2} & \cdots & \sum_1^n a_{in}^2 \end{bmatrix}$,

$\mathrm{tr}(A^TA) = \sum_{i,j}$ □

2.2. 已知 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m \in [a,b]$, 下面的 (f,g) 是否能构成 $C[a,b]$ 上的内积？证明你的结论.

（1） $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \forall f,g \in C[a,b]$;

（2） $(f,g) = \sum_{i=0}^m f(x_i)g(x_i), \forall f,g \in C[a,b]$.

解.

2.3. 求下列矩阵 A 的范数 $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_F$ 和 $\rho(A)$.

（1） $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$;

解.

（2） $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

解.

2.4. 证明

（1） $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$,

证明. □

（2） $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;

证明. □

（3） $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\|A\|_2, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

证明. □

2.5. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 设 A 对称正定, 记

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,,$$

证明 $\|x\|_A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一种向量范数.

证明. □

2.6. 设 $A, \boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，证明：

$$\|AQ\|_2 = \|QA\|_2 = \|A\|_2\,,$$
$$\|AQ\|_F = \|QA\|_F = \|A\|_F\,.$$

证明. □

2.7. 设

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

分别求出所有 a, b 的值，使得

（1） A 奇异;

解.

（2） A 严格对角占优;

解.

（3） A 对称正定.

解.