作业 9

代卓远 2025210205 2025 年 11 月 27 日

9.1. 设 $[a,b]=[-1,1]$，$\rho(x)\equiv 1$，$P_0(x)\equiv 1$，试用 Gram-Schmidt 方法计算 P_1，P_2，P_3

解.

$$P_1(x)=x-\frac{(x,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0=x-\frac{\int_{-1}^{1}x\cdot 1\,dx}{\int_{-1}^{1}1^2\,dx}\cdot 1=x-0=x$$

$$\begin{aligned}P_2(x)=x^2-\frac{(x^2,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0-\frac{(x^2,P_1)}{(P_1,P_1)}P_1&=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}x^2\cdot 1\,dx}{\int_{-1}^{1}1^2\,dx}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^{1}x^2\cdot x\,dx}{\int_{-1}^{1}x^2\,dx}\cdot x\\&=x^2-\frac{\frac{2}{3}}{2}-0=x^2-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_3(x)&=x^3-\frac{(x^3,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0-\frac{(x^3,P_1)}{(P_1,P_1)}P_1-\frac{(x^3,P_2)}{(P_2,P_2)}P_2\\&=x^3-\frac{\int_{-1}^{1}x^3\cdot 1\,dx}{\int_{-1}^{1}1^2\,dx}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^{1}x^3\cdot x\,dx}{\int_{-1}^{1}x^2\,dx}\cdot x-\frac{\int_{-1}^{1}x^3(x^2-\frac{1}{3})\,dx}{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2\,dx}(x^2-\frac{1}{3})\\&=x^3-0-\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}x-0=x^3-\frac{3}{5}x\end{aligned}$$

9.2. 设区间 $[0,+\infty)$ 上权函数 $\rho(x)=\mathrm{e}^{-x}$, 其正交多项式为 Laguerre 多项式，已知 $L_0(x)\equiv 1$, 试用 Gram-Schmidt 方法计算 L_1, 并用递推关系式计算出 L_2 及 L_3.

解.

$$L_1(x)=x-\frac{(x,L_0)}{(L_0,L_0)}L_0=x-\frac{\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx}{\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx}\cdot 1=x-1$$

递推关系式为

$$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$$

则

$$L_2(x)=(1+2-x)L_1(x)-1^2L_0(x)=(3-x)(x-1)-1=-x^2+4x-4$$

$$L_3(x)=(1+4-x)L_2(x)-2^2L_1(x)=(5-x)(-x^2+4x-4)-4(x-1)=x^3-9x^2+20x-16$$

9.3. 用 Chebyshev 多项式 T_3 的零点在 [-1,1] 上对函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 构造二次 Lagrange 插值项式并估计其误差界.

解. T_3 的零点为

$$x_k = \cos\frac{2k-1\,\pi}{6}\pi, \quad k = 1,2,3$$

即

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

则 $f(x_1) = \ln(2+\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1.05293$, $f(x_2) = \ln 2 = 0.69315$, $f(x_3) = \ln(2-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0.12573$，插值多项式为

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= 1.05293\frac{(x-0)(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})} + 0.69315\frac{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(0-\frac{\sqrt{3}}{2})(0+\frac{\sqrt{3}}{2})} + 0.12573\frac{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})(x-0)}{(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0)} \\
&\approx 0.69315 + 0.53532x - 0.13843x^2
\end{aligned}$$

误差界为

$$\|f-L_n\|_\infty \leqslant \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}\|f^{(n+1)}\|_\infty = \frac{h^3}{12}\|f^{(3)}\|_\infty \approx 0.1083$$

9.4. 设 T_n 是 n 次 Chebyshev 多项式, 令 $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$, $x \in [0,1]$, 试证明 $\{T_n^*\}$ 是 [0, 1] 上权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式.

解.

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1) = \cos(n\arccos(2x-1))$$

则

$$\begin{aligned}
\int_0^1 T_n^*(x)T_m^*(x)\rho(x)\,dx &= \int_0^1 \cos(n\arccos(2x-1))\cos(m\arccos(2x-1))\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx \\
&\xlongequal{t=2x-1} \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \cos(n\arccos t)\cos(m\arccos t)\frac{1}{\sqrt{\frac{t+1}{2}-(\frac{t+1}{2})^2}}\,dt \\
&= \int_{-1}^1 \cos(n\arccos t)\cos(m\arccos t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt
\end{aligned}$$

由于 Chebyshev 多项式 T_n 在 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ 正交，因此 $\{T_n^*\}$ 在 $[0,1]$ 上关于权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 正交。

9.5. 设 $f(x) = x\ln x$, $x \in [1,3]$, 试求出 f 在 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$ 中的最佳平方逼近多项式 P_1^* 和 P_2^*。

解. 在 $\mathscr{P}_1$ 中，设 $P_1^*(x) = a_0 + a_1x$，则

$$\begin{cases}(f-P_1^*,1)=0\\(f-P_1^*,x)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\displaystyle\int_1^3(x\ln x - a_0 - a_1x)\,dx = 0\\ \displaystyle\int_1^3(x\ln x - a_0 - a_1x)x\,dx = 0\end{cases}$$

解得 $a_0 = \dfrac{9}{4}\ln 3 - \dfrac{13}{3}$，$a_1 = \dfrac{5}{3}.$，则

$$P_1^*(x) = \left(\frac{9}{4}\ln 3 - \frac{13}{3}\right) + \frac{5}{3}x$$

在 $\mathscr{P}_2$ 中，设 $P_2^*(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$，则

$$\begin{cases} (f - P_2^*, 1) = 0 \\ (f - P_2^*, x) = 0 \\ (f - P_2^*, x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_1^3 (x\ln x - b_0 - b_1x - b_2x^2)\,dx = 0 \\ \displaystyle\int_1^3 (x\ln x - b_0 - b_1x - b_2x^2)x\,dx = 0 \\ \displaystyle\int_1^3 (x\ln x - b_0 - b_1x - b_2x^2)x^2\,dx = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} b_0 &= \dfrac{567}{32}\ln 3 - \dfrac{163}{8}, \\ b_1 &= \dfrac{115}{6} - \dfrac{135}{8}\ln 3, \\ b_2 &= \dfrac{135}{32}\ln 3 - \dfrac{35}{8}. \end{cases}$，则

$$P_2^*(x) = \left(\frac{567}{32}\ln 3 - \frac{163}{8}\right) + \left(\frac{115}{6} - \frac{135}{8}\ln 3\right)x + \left(\frac{135}{32}\ln 3 - \frac{35}{8}\right)x^2$$