作业 5

代卓远 2025210205 2025 年 10 月 29 日

5.1. 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$，满足 $f(x^*) = 0$，$0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$。试证明迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$$

产生的序列 $\{x_k\}$ 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$ 及 $\lambda \in (0, \frac{2}{M})$ 均收敛到 x^*。

证明.

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \lambda(f(x_k) - f(x^*)) \xlongequal{\text{Lagrange}} (1 - \lambda f'(\xi_k))(x_k - x^*)$$

其中 ξ_k 在 x_k 与 x^* 之间。因为收敛所以

$$|x_{k+1} - x^*| = |1 - \lambda f'(\xi_k)||x_k - x^*| \leq |x_k - x^*|$$

$$-1 \leq 1 - \lambda f'(\xi_k) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq \frac{2}{f'(\xi_k)}$$

因为 $(0, \frac{2}{M}) \subseteq [0, \frac{2}{f'(\xi_k)}]$

所以 $\{x_k\}$ 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$ 及 $\lambda \in (0, \frac{2}{M})$ 均收敛到 x^*。 □

5.2. 用 Newton 迭代法和割线法求方程 $3x^2 - e^x = 0$ 在 $[0, 1]$ 上的根

解. 设 $f(x) = 3x^2 - e^x$, 则 $f'(x) = 6x - e^x$

Newton 迭代法:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{3x_k^2 - e^{x_k}}{6x_k - e^{x_k}}$$

取初值 $x_0 = 0.5$, 则有

$$x_1 = 1.165$$
$$x_2 = 0.936$$
$$x_3 = 0.910$$
$$x_4 = 0.910$$

割线法:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

取初值 $x_0 = 0, x_1 = 1$, 则有

$$x_2 = 0.780$$
$$x_3 = 0.903$$
$$x_4 = 0.910$$
$$x_5 = 0.910$$

5.3. (1) 为求 $f(x)=0$ 的根, 用迭代函数 $\varphi(x)=x+f(x)$ 的迭代法不一定收敛. 对此用 Steffensen 迭代法, 试写出迭代公式.

解. Steffensen 迭代法的迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{[f(x_k)]^2}{f(x_k+f(x_k))-f(x_k)}$$

(2) 设 f 有连续的二阶导数,$f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$, 研究迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{[f(x_k)]^2}{f(x_k+f(x_k))-f(x_k)}, \quad k=0,1,\cdots$$

的收敛性和收敛阶。

解.

$$\nu(x)=x-\frac{[f(x)]^2}{f(x+f(x))-f(x)}$$

$$\nu'(x)=1-\left[\frac{f(x)}{\frac{f(x+f(x))-f(x)}{x+f(x)-x}}\right]'$$

$$\lim_{x\to x^*}\nu'(x)=1-\lim_{x\to x^*}\left[\frac{f(x)}{\frac{f(x+f(x))-f(x)}{x+f(x)-x}}\right]'=0$$

因此迭代法收敛且收敛阶至少为 2.

5.4. 构造一种不动点迭代法求方程组

$$\begin{cases}x_1-0.7\sin x_1-0.2\cos x_2=0\\x_2-0.7\cos x_1+0.2\sin x_2=0\end{cases}$$

在 $(0.5,0.5)^T$ 附近的解, 选 $x_0=(0.5,0.5)^T$, 迭代至 x^3 或达到 10^{-3} 的精度. 分析方法的收敛性.

解. 由牛顿迭代法可得不动点迭代格式:

$$\begin{bmatrix}x_1^{k+1}\\x_2^{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1^k\\x_2^k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1-0.7\cos x_1^k & 0.2\sin x_2^k\\0.7\sin x_1^k & 1-0.2\cos x_2^k\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1^k-0.7\sin x_1^k-0.2\cos x_2^k\\x_2^k-0.7\cos x_1^k+0.2\sin x_2^k\end{bmatrix}$$

取初值 $x_0=(0.5,0.5)^T$, 则有

$$x^1=\begin{bmatrix}0.525880696\\0.511810035\end{bmatrix}$$

$$x^2=\begin{bmatrix}0.526982887\\0.506079826\end{bmatrix}$$

$$x^3=\begin{bmatrix}0.526309687\\0.508790639\end{bmatrix}$$

由于在点 $(0.5,0.5)^T$ 处

$$J=\begin{bmatrix}0.3948 & 0.3518\\0.0973 & 0.8252\end{bmatrix}$$

且 $\|J\|_\infty=0.2916<1$, 所以该迭代格式在 $(0.5,0.5)^T$ 附近收敛.