清华大学机械工程系

数值分析 A

2025 年秋季学期

作业 4

代卓远 2025210205　　2025 年 10 月 21 日

4.1. 下列向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 是否有极限? 若有, 写出其极限向量.

(1) $\boldsymbol{x}^{(k)} = \left(\mathrm{e}^{-k}\cos k, k\sin\frac{1}{k}, 3+\frac{1}{k^2}\right)^{\mathrm{T}}$

解. 该向量序列有极限.

$\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{e}^{-k}\cos k = 0,$

$\lim\limits_{k\to\infty} k\sin\frac{1}{k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1,$

$\lim\limits_{k\to\infty} 3+\frac{1}{k^2} = 3.$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)} = (0,1,3)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{x}^{(k)} = \left(k\mathrm{e}^{-k^2}, \frac{\cos k}{k}, \sqrt{k^2+k}-k\right)^{\mathrm{T}}$

解. 该向量序列有极限.

$\lim\limits_{k\to\infty} k\mathrm{e}^{-k^2} = 0,$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\cos k}{k} = 0,$

$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{k^2+k}-k = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{k^2+k}-k)(\sqrt{k^2+k}+k)}{\sqrt{k^2+k}+k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{\sqrt{k^2+k}+k} =$
$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1} = \frac{1}{2}.$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)} = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

4.2. 分析方程组

$$\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

J 法和 GS 法的收敛性.

解.

$$a_{11} = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix} = 1-a^2 > 0 \Rightarrow |a| < 1$$

$$\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{vmatrix} = 1-2a^2 > 0 \Rightarrow |a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

综上所述，当 $|a| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时收敛.

4.3. 设 A 对称正定, 其特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. 证明迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}), \quad k = 0, 1, \cdots$$

当 $\omega \in \left(0, \dfrac{2}{\lambda_1}\right)$ 时收敛，并讨论 ω 取什么值时收敛最快?

解.

4.4.

$$\begin{cases} 10x_1 & -x_2 & & = & 9, \\ -x_1 & +10x_2 & -2x_3 & = & 7, \\ & 2x_2 & +10x_3 & = & 6. \end{cases}$$

(1) 写出 SOR 法计算公式;

(2) 求最优松弛因子及 $\omega = \omega_b$ 时 SOR 法的渐近收敛率;

(3) 取 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, 用 $\omega = \omega_b$ 的 SOR 法求 $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$

4.5. 取初始向量为零向量，用共瓶梯度法解方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

证明. $\square$