

作业 1

代卓远 2025210205

2025 年 9 月 27 日

1.1. 已知 4 个四位有效数字的三角函数的值 $\sin 1^\circ = 0.0175$, $\sin 2^\circ = 0.0349$, $\cos 1^\circ = 0.9998$, $\cos 2^\circ = 0.9994$. 用以下四种方法计算 $1 - \cos 2^\circ$ 的值, 比较结果的误差, 并说明各有多少位有效数字.

- (1) 直接用已知数字计算;
- (2) 用公式 $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ 及已知数据;
- (3) 用公式 $1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ 及已知数据;
- (4) 用 $1 - \cos x$ 的 Taylor (泰勒) 展开式, 要计算结果有四位有效数字
($1 - \cos 2^\circ = 6.0917298 \cdots \times 10^{-4}$)

解.

1.2. 下面是两种利用 9 次 Taylor 多项式近似计算 e^{-5} 的方法, 试分析哪种方法能提供较好的近似值.

- (1) $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^9 (-1)^i \frac{5^i}{i!}$
- (2) $e^{-5} \approx \left(\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)^{-1}$

1.3. 下列公式要怎样变换才能使数值计算时能避免有效数字的损失?

- (1) $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(N+1) - \arctan N, N \gg 1;$
- (2) $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}, |x| \gg 1;$
- (3) $\ln(x+1) - \ln x, x \gg 1;$
- (4) $\cos^2 x - \sin^2 x, x \approx \frac{\pi}{4}$

1.4. 已知 $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, n = 0, 1, \cdots$, 满足 $I_0 = 1 - e^{-1}, I_n = 1 - nI_{n-1}, n = 1, 2, \cdots$.

- (1) 取 I_0 近似值 $\tilde{I}_0 = 1 - 0.3679$, 用递推公式 $\tilde{I}_n = 1 - n\tilde{I}_{n-1}$ 计算 I_n 的近似值 $\tilde{I}_n, n = 1, 2, \cdots, 9$ (用四位有效数字计算), 结果是否准确?
- (2) 设 $\varepsilon_n = I_n - \tilde{I}_n$, 推导 $|\varepsilon_n|$ 与 $|\varepsilon_0|$ 的关系.