作业 11

代卓远 2025210205

2025 年 12 月 14 日

11.1. **解**.

11.2. **解**.

11.3. 求积公式

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx C_0 f(0) + C_1 f(1) + B_0 f'(0)\ ,$$

已知其余项表达式为 $E(f) = kf'''(\xi), \xi \in (0,1)$; 试确定求积公式的系数 C_0, C_1 和 B_0 并求出 k.

解. 由余项表达式可知该求积公式的代数精度为 2，故对 $f(x) = 1, x, x^2$ 分别求解可得

$$\begin{cases} C_0 + C_1 = 1 \\ C_1 + B_0 = \dfrac{1}{2} \\ C_1 + 2B_0 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = \dfrac{1}{3} \\ C_1 = \dfrac{2}{3} \\ B_0 = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

故求积公式为 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{6}f'(0)$.

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}, \quad C_0 f(0) + C_1 f(1) + B_0 f'(0) = \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 0 = \frac{1}{3}$$

误差

$$E = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} = k \cdot 6 \Rightarrow\ k = -\frac{1}{72}.$$

11.4. 计算定积分 $\displaystyle\int_1^2 x\ln x \mathrm{d}x$, 若用复合梯形公式来计算，要使误差不超过 10^{-5}, 问区间 $[1,2]$ 要分为多少等份; 若用复合 Simpson 求积公式来计算, 要达到同样的精度, 区间 $[1,2]$ 应分为多少等份? 若用“端点修正”的复合梯形公式来计算, 要达到同样精度, 区间 $[1,2]$ 应分为多少等份？

解. 复合梯形公式：

$$|E_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a\le\xi\le b} |f''(\xi)| = \frac{1}{12n^2} \le 10^{-5}$$

$$n \ge \sqrt{\frac{10^5}{12}} \approx 91.29$$

故区间 $[1,2]$ 至少要分为 92 等份。复合 Simpson 求积公式：

$$|E_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{a\le\xi\le b} |f^{(4)}(\xi)| = \frac{1}{1440n^4} \le 10^{-5}$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{10^5}{1440}} \approx 2.89$$

故区间 $[1,2]$ 至少要分为 3 等份。端点修正的复合梯形公式：

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^5}{720^4} \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(4)}(\xi)| = \frac{1}{360n^4} \leq 10^{-5}$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{10^5}{360}} \approx 4.08$$

故区间 $[1,2]$ 至少要分为 5 等份。