作业 1

代卓远 2025210205　　2025 年 9 月 28 日

1.1. 已知 4 个四位有效数字的三角函数的值 $\sin 1^\circ = 0.0175$, $\sin 2^\circ = 0.0349$, $\cos 1^\circ = 0.9998$, $\cos 2^\circ = 0.9994$. 用以下四种方法计算 $1-\cos 2^\circ$ 的值，比较结果的误差，并说明各有多少位有效数字.

（1） 直接用已知数字计算；

解. 直接计算

$$x_A = 1-\cos 2^\circ = 1-0.9994 = 10^{-3}\times 0.6$$

误差

$$|x-x_A| \le 0.5\times 10^{-4}$$
$$n = -3-(-4) = 1$$

有效数字为 1 位.

（2） 用公式 $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ 及已知数据；

解.

$$x_A = 1-\cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ = 2\times 0.0175^2 = 10^{-3}\times 0.6125$$

误差

$$|x-x_A| \le 0.5\times 10^{-5}$$
$$n = -3-(-5) = 2$$

有效数字为 2 位.

（3） 用公式 $1-\cos x = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ 及已知数据；

解.

$$x_A = 1-\cos 2^\circ = \frac{\sin^2 2^\circ}{1+\cos 2^\circ} = \frac{0.0349^2}{1+0.9994} \approx 10^{-3}\times 0.60918$$

误差

$$|x-x_A| \le 0.5\times 10^{-7}$$
$$n = -3-(-7) = 4$$

有效数字为 4 位.

（4） 用 $1-\cos x$ 的 Taylor（泰勒）展开式，要计算结果有四位有效数字
（$1-\cos 2^\circ = 6.0917298\cdots\times 10^{-4}$）

解.

$$
\begin{aligned}
x_A = 1-\cos 2^\circ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{(2^\circ)^{2i}}{(2i)!}\\
&\approx \frac{(2\times\frac{\pi}{180})^2}{2!}-\frac{(2\times\frac{\pi}{180})^4}{4!}\\
&\approx 10^{-3}\times 0.60917298
\end{aligned}
$$

误差

$$
\begin{aligned}
&|x-x_A|\le 0.5\times 10^{-7}\\
&n > -3-(-7) = 4
\end{aligned}
$$

有效数字 >4 位.

1.2. 下面是两种利用 9 次 Taylor 多项式近似计算 e^{-5} 的方法，试分析哪种方法能提供较好的近似值.

（1） $\mathrm{e}^{-5}\approx\sum_{i=0}^{9}(-1)^i\frac{5^i}{i!}$

（2） $\mathrm{e}^{-5}\approx\left(\sum_{i=0}^{9}\frac{5^i}{i!}\right)^{-1}$

1.3. 下列公式要怎样变换才能使数值计算时能避免有效数字的损失？

（1） $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan(N+1)-\arctan N$，$N>>1$;

（2） $\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2-\frac{1}{x}}$，$|x|>>1$;

（3） $\ln(x+1)-\ln x$，$x>>1$;

（4） $\cos^2 x-\sin^2 x$，$x\approx\frac{\pi}{4}$

1.4. 已知 $I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x, n=0,1,\cdots$, 满足 $I_0=1-\mathrm{e}^{-1}, I_n=1-nI_{n-1}, n=1,2,\cdots$.

（1） 取 I_0 近似值 $\tilde{I}_0=1-0.3679$，用递推公式 $\tilde{I}_n=1-n\tilde{I}_{n-1}$ 计算 I_n 的近似值 $\tilde{I}_n, n=1,2,\cdots,9$(用四位有效数字计算), 结果是否准确？

（2） 设 $\varepsilon_n=I_n-\bar{I}_n$，推导 $|\,\varepsilon_n\,|$ 与 $|\,\varepsilon_0\,|$ 的关系.