3. Probabilidad

3.1. Conceptos básicos: experimento aleatorio, espacio muestral y sucesos

Definiciones

- Un **experimento aleatorio** es un fenómeno o proceso que cuando se repite en condiciones idénticas es imposible predecir su resultado.
- El **espacio muestral** de un experimento aleatorio, denotado por Ω, es el conjunto de todos sus posibles resultados.
- Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral, se suelen denotar por letras mayúsculas (A,B,...). Cada uno de los elementos del espacio muestral es un **suceso elemental**, que se denota por w.
- Un suceso es compuesto cuando está formado por más de un suceso elemental.
- Un suceso A se dice que ocurre cuando al realizar el experimento aleatorio el resultado es alguno de los elementos de A.
- **Suceso seguro** aquel que ocurre siempre sea cual sea el resultado del experimento aleatorio. **Suceso imposible** es el que no ocurre nunca.
- **Suceso complementario o contrario** de un suceso A es el que ocurre cuando el resultado del experimento aleatorio no pertenece a A y se denota como $\overline{A}$ o A^c.
- **Dos sucesos son incompatibles o disjuntos** cuando no tienen elementos comunes. En caso contrario se dice que los **sucesos son compatibles**.

Ejemplos

1. En una fábrica se toma uno de los artículos producidos y se prueba para determinar si es defectuoso. En este caso el espacio muestral es $\Omega = \{B; D\}$ donde B indica sin defectos y D defectuoso.
2. Se lanza un dado repetidamente y se cuenta el número de lanzamientos hasta que salga el 6 por primera vez. En este caso el espacio muestral es el conjunto de los números naturales.

3. Se escoge un punto al azar lanzando un dardo a un disco de radio un metro. En este caso el espacio muestral es el conjunto de puntos del plano que están dentro de la circunferencia de radio 1.

Operaciones con sucesos

- **Unión de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, el suceso unión $A \cup B$ ocurre cuando ocurre el suceso A o el suceso B.

  Propiedades

  - $A \cup B = B \cup A$.
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
  - $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$.

- **Intersección de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, el suceso intersección $A \cap B$ ocurre cuando ocurren los sucesos A y B a la vez.

  Propiedades

  - $A \cap B = B \cap A$.
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
  - $A \cap \Omega = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$.

  Propiedad distributiva: Relaciona la unión y la intersección de sucesos:

  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- **Diferencia de sucesos:** Dados dos sucesos A y B, el suceso diferencia $A - B$ se verifica cuando ocurre A y no ocurre B, es decir, $A - B = A \cap \overline{B}$.

  - En general $A - B \neq B - A$.
  - $\overline{A} = \Omega - A$.

- **Propiedades del suceso contrario:**

  - $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \Omega$.
  - $A \cup \overline{A} = \Omega$.
  - $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
  - $\overline{\overline{A}} = A$.

- **Inclusión de sucesos** El suceso A está incluido en en el suceso B, $A \subseteq B$, cuando todo elemento de A es también un elemento de B, es decir si ocurre A, ocurre B. Se cumplen:
  - $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$.
  - $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.
- **Diferencia simétrica** La diferencia simétrica de dos sucesos A y B, se escribe $A \triangle B$, es el suceso formados por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y los que pertenecen a B y no a A. Es decir, es el suceso que ocurre cuando ocurre A o B pero no ambos a la vez.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

3.2. Definición e interpretación de probabilidad

La probabilidad de un suceso aleatorio mide el grado de confianza de que un suceso ocurra.

- El **enfoque clásico** de la probabilidad considera que en espacio muestrales finitos si los sucesos elementales son equiprobables la probabilidad que se asigna a un suceso

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Casos favorables / casos reales

se denomina Regla de Laplace.

- El **enfoque frecuentista** considera la repetición del experimento muchas veces, un número considerablemente grande, n, de las que el suceso que interesa ha ocurrido n_A veces, luego la probabilidad del suceso es:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

- **Enfoque axiomático**

Definición de $\sigma-$álgebra

Sea Ω el espacio muestral correspondiente a un fenómeno aleatorio y sea Λ una familia de subconjuntos de Ω verificando que:

- El suceso seguro $\Omega \in$ A.
- Si el suceso $A \in \Lambda$, entonces $\overline{A} \in \Lambda$.

- Si $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \Lambda$ es una familia de sucesos, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Lambda$.

Se dice que la familia Λ es una $\sigma-$álgebra.

Sean Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y Λ una $\sigma-$álgebra de Ω. La función

$$P : \Lambda \to \mathbb{R}$$

es una función de probabilidad cuando verifica los siguientes axiomas (axiomas de Kolmogorov):

- **Axioma 1:** Para cualquier suceso $A \in \Lambda$, $0 \leq P(A) \leq 1$.
- **Axioma 2:** $P(\Omega) = 1$.
- **Axioma 3:** Sea una familia numerable de sucesos $\{A_i\}_{i \in I}$ verificando que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, se cumple que:

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

La terna formada por el espacio muestral, Ω, la familia de sucesos Λ ($\sigma-$álgebra) y la función de probabilidad P, (Ω, Λ, P) se llama espacio de probabilidad.

Consecuencias de los axiomas

1. Para todo $A \in \Lambda \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Para todo $A \in \Lambda$ se cumple que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(\emptyset) = 0$.
4. Sean $A, B \in \Lambda$, verificando $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
5. Para todo $A, B \in \Lambda$ se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. Para todo $A, B \in \Lambda$ se cumple que $P(B - A) = P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$ $(P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}))$.

3.3. Probabilidad condicionada

Definición

Sea (Ω, Λ, P) un espacio de probabilidad y sean dos sucesos $A \in \Lambda$ y $B \in \Lambda$ con $P(B) > 0$ se define la probabilidad del suceso A condicionada al suceso B como

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observación

Si (Ω, Λ, P) es un espacio de probabilidad y $B \in \Lambda$ es un suceso con $P(B) > 0$, se puede definir una función de probabilidad denominada función de probabilidad condicionada al suceso B como

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

que verifica los axiomas de Kolmogorov. Es decir:

- Para cualquier suceso $A \in \Lambda$, $0 \leq P(A/B) \leq 1$.
- $P(\Omega/B) = 1$.
- Sea una familia numerable de sucesos $\{A_i\}_{i \in I}$ verificando que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, se cumple que:

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i/B) = \sum_{i \in I} P(A_i/B)$$

Teorema del producto

Sea el espacio de probabilidad (Ω, Λ, P) y sean n sucesos $A_1, A_2, ..., A_n \in \Lambda$ que verifican $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, se cumple que:

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Este teorema puede probarse por inducción teniendo en cuenta que

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

3.4. Independencia de sucesos

Definición

Sea (Ω, Λ, P) un espacio de probabilidad y sean $A \in \Lambda$ y $B \in \Lambda$ dos sucesos. Se dice que los sucesos son independientes cuando se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- $P(A/B) = P(A)$ si $P(B) > 0$.
- $P(B/A) = P(B)$ si $P(A) > 0$.

Propiedades

Sea (Ω, Λ, P) un espacio de probabilidad y sean dos sucesos $A, B \in \Lambda$ independientes, entonces:

- $\overline{A}$ y B son independientes.
- A y $\overline{B}$ son independientes.
- $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

Observaciones

Sea (Ω, Λ, P) un espacio de probabilidad y sean dos sucesos $A \in \Lambda$ y $B \in \Lambda$ con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, entonces:

- Si los sucesos son independientes, son compatibles.
- Si los sucesos son compatibles, pueden ser dependientes o independientes.
- Si son incompatibles, son dependientes.

3.5. Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Teorema de la Probabilidad Total

Sea (Ω, Λ, P) un espacio de probabilidad y sean n sucesos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Lambda$ un sistema completo de sucesos, esto es

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad \forall i \neq j$$

con $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Entonces, para cualquier suceso $B \in \Lambda$ se cumple

$$P(B) = \sum_{i=n}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$$

Teorema de Bayes

Sea (Ω, Λ, P) un espacio de probabilidad y sean n sucesos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Lambda$ un sistema completo de sucesos con $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Entonces, para cualquier suceso $B \in \Lambda$ con $P(B) > 0$ se cumple que

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)}$$

para todo $j = 1, 2, ..., n$.

3.6. Ejemplos

Ejemplo 1

Se sabe que $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$. Calcular

$$P(\overline{A}) \quad P(A \cap B) \quad P(A - B) \quad P(B \cap \overline{A}) \quad P(A/B) \quad P(B/\overline{A})$$

¿Son A y B incompatibles? ¿Son independientes? Justifica las respuestas.

Solución

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,55 = 0,45$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) + P(A \cup B)$ luego $P(A \cap B) = 0,55 + 0,5 - 1 = 0,05$.
- $P(A - B) = P(A \cap \overline{B})$, como $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ se tiene que

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,55 - 0,05 = 0,5$$

- $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A) = 0,5 - 0,05 = 0,45$.
- $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,05}{0,5} = 0,1$.
- $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,45}{0,55} = \dfrac{9}{11}$.

Los sucesos A y B son compatibles, puesto $P(A \cap B) \neq 0$, luego su intersección es distinta de cero.

No son independientes puesto que $P(A/B) \neq P(A)$.

Ejemplo 2

Sean dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, de los que se sabe que

$$P(B) = 2P(A) \qquad P(A \cup B) = 2P(A \cap B) \qquad P(A \cap B) = 0,1$$

Se pide:

a) $P(A)$.

b) Determinar qué suceso es más probable que ocurra habiendo ocurrido el otro.

Solución

a) $P(A \cup B) = 2P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ entonces

$$3P(A \cap B) = 3P(A) \Rightarrow 0,3 = 3P(A).$$

Por tanto $P(A) = 0,1$.

b) $P(A/B) = \dfrac{0,1}{0,2} = 1/2$ y $P(B/A) = \dfrac{0,1}{0,1} = 1$.

Ejemplo 3

La probabilidad de que un sistema de alarma funcione cuando hay una situación peligrosa es del 95 % y de que funcione por error, es decir sin existir una situación de peligro es del 3 %. Si la probabilidad de que haya una situación de peligro es del 10 %:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la alarma funcione?

b) Calcular el porcentaje de veces que habiendo funcionado la alarma no haya peligro.

c) Hallar la probabilidad de que haya peligro y la alarma no funcione.

d) Calcular la probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma haya peligro.

Solución

Sean los sucesos F =la alarma funciona y D =situación peligrosa.

$$\begin{array}{cc} P(F/D) = 0,95 & P(F/\overline{D}) = 0,03 \\ P(D) = 0,1 & P(\overline{D}) = 0,9 \end{array}$$

$$P(\overline{F}/D) + P(F/D) = 1 \Rightarrow P(\overline{F}/D) = 0,05$$

a) $P(F) = P(F/D) \cdot P(D) + P(F/\overline{D}) \cdot P(\overline{D}) = 0,95 \cdot 0,1 + 0,03 \cdot 0,9 = 0,122.$

b) $P(\overline{D}/F) = \dfrac{P(F/\overline{D}) \cdot P(\overline{D})}{P(F)} = \dfrac{0,027}{0,122}.$

c) $P(D \cap \overline{F}) = P(D) \cdot P(\overline{F}/D) = 0,05 \cdot 0,1 = 0,005.$

d) $P(D/\overline{F}) = \dfrac{P(D) \cdot P(\overline{F}/D)}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,005}{1 - 0,122} = \dfrac{5}{878}$