

UD02_03 Práctica02: Lógica Difusa

Difusa



Lógica difusa. Funciones de pertenencia

Funciones difusas de pertenencia básicas

Otras funciones difusas de pertenencia

Relaciones de funciones difusas

Producto cartesiano

Composición de funciones

1. Lógica difusa. Funciones de pertenencia

En esta práctica se presentan diferentes funciones difusas.

1.1. Funciones difusas de pertenencia básicas

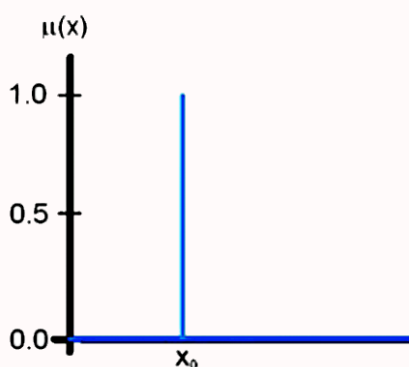
En la primera parte de la práctica vamos a completar un cuaderno de jupyter en el que vamos a realizar en python las siguientes funciones de pertenencia:

- Función **singleton**(x, x0): función de pertenencia singleton.
 - x0: valor de referencia (int, float)
- Función **trimf**(x, param): función de pertenencia triangular.
 - param = [a, b, c]: debe cumplirse $a \leq b \leq c$
- Función **trapmf**(x, [a, b, c, d]): función de pertenencia trapezoidal.
 - [a, b, c, d]: debe cumplirse $a \leq b \leq c \leq d$

Funciones de pertencias básicas

Singleton

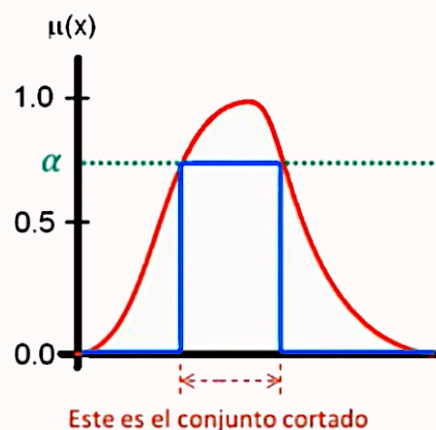
$$\mu_A(x_0) = \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$$



Conjunto Cortado

$$A_\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$$A'_\alpha = \{x | \mu_A(x) > \alpha\} \quad (\text{Fuertemente})$$

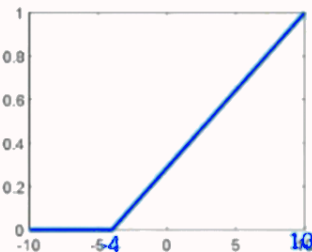
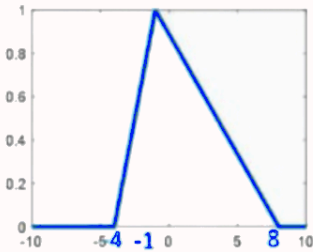


Triangular

$$f(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

$a \leq b \leq c$

$$y = \text{trimf}(x, [a \ b \ c])$$

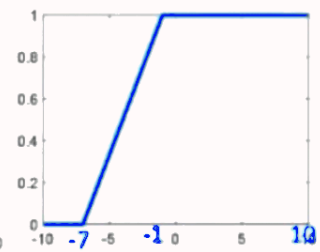
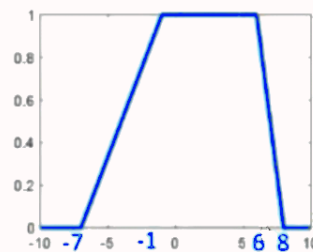


Trapezoidal

$$f(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

$a \leq b \leq c \leq d$

$$y = \text{trapezmf}(x, [a \ b \ c \ d])$$



Tarea: Debes terminar las funciones si alguna tiene pendiente parte de su implementación y verificar el funcionamiento de las mismas, no solo con el ejemplo suministrado, y explicar brevemente el significado de sus parámetros.

1.2. Otras funciones difusas de pertenencia

En la segunda parte de la práctica vamos a ampliar nuestras funciones de pertenencia con:

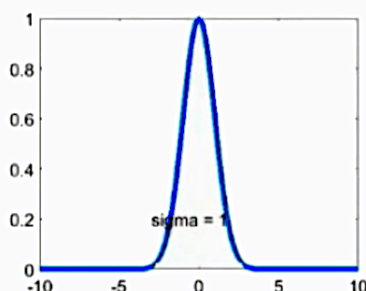
- Función **gaussmf**(x, param): función de pertenencia gaussiana.
 - sig: desviación estándar (> 0); x0: media de la función
- Función **gbellmf**(x, param): función de pertenencia campana generalizada.
 - param = [a, b, x0]: debe cumplirse a, b > 0, con a= ancho, b=pendiente y x0=centro
- Función **sigmf**(x): función de pertenencia sigmoidal.
 - param = [a, x0]: con a pendiente y x0 punto de cruce

Gaussiana

$$f(x; \sigma, x_0) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-x_0}{\sigma} \right)^2}$$

σ determina el ancho
 x_0 fija el centro

$$y = \text{gaussmf}(x, [\text{sig } x0])$$

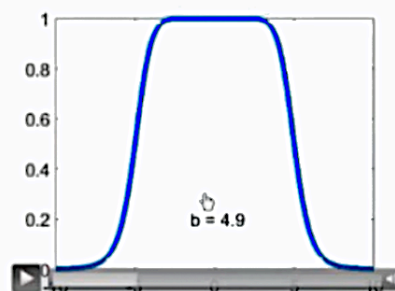


Campana Generalizada

$$f(x; a, b, x_0) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-x_0}{a} \right|^{2b}}$$

a determina el ancho
b determina la pendiente
 x_0 fija el centro

$$y = \text{gbellmf}(x, [a \ b \ x0])$$



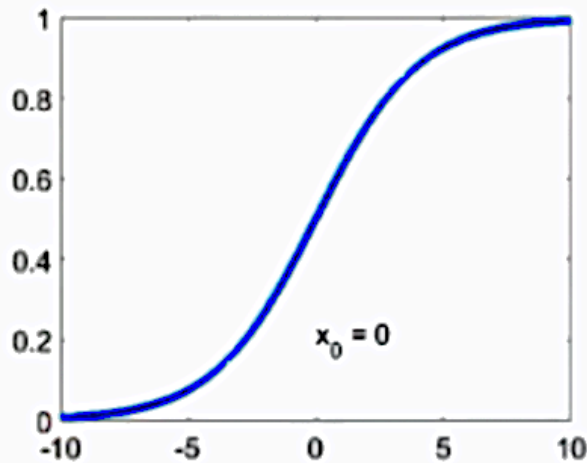
Sigmoidal

$$f(x; a, x_0) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-x_0)}}$$

a determina la pendiente

x_0 fija el punto de cruce

$$y = \text{sigmf}(x, [a \ x_0])$$



Si $a > 0$, abre a la derecha

Si $a < 0$, abre a la izquierda

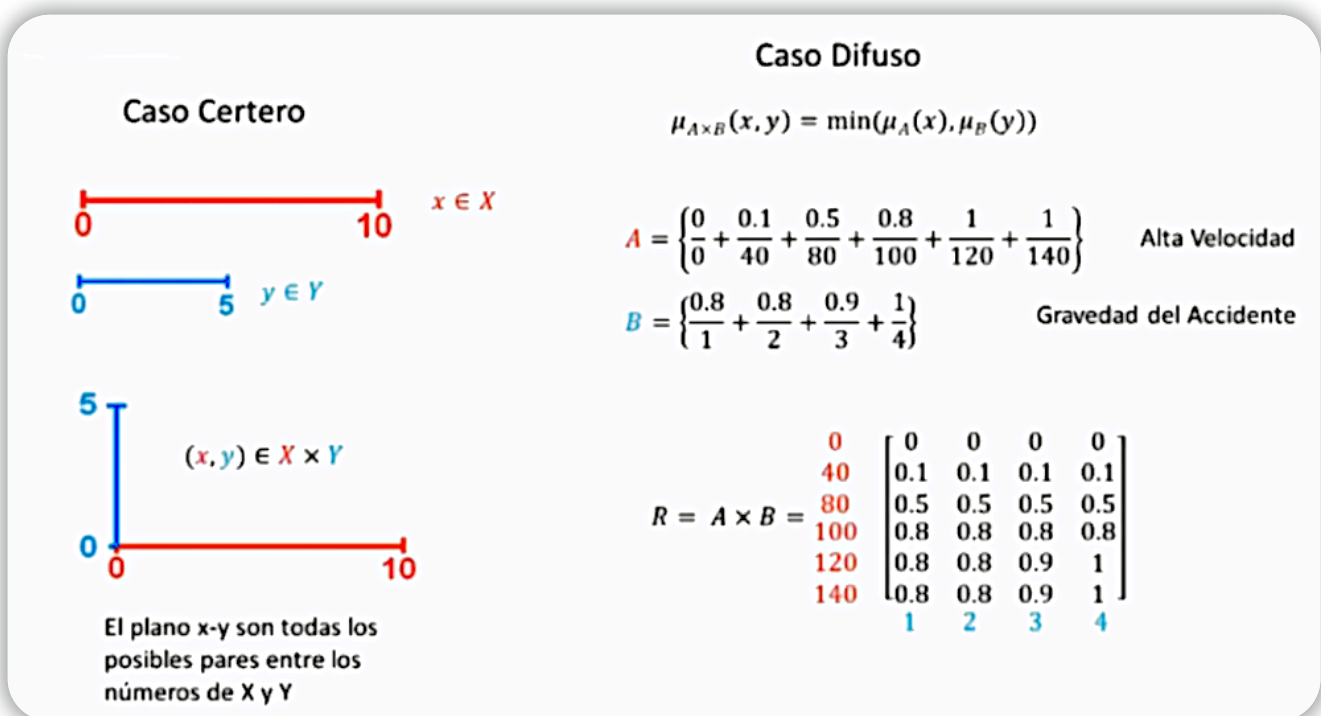
Tarea: Debes terminar las funciones si alguna tiene pendiente parte de su implementación y verificar el funcionamiento de las mismas, no solo con el ejemplo suministrado, y explicar brevemente el significado de sus parámetros.

2. Relaciones de funciones difusas

En esta parte de la práctica vamos a estudiar cómo podemos construir relaciones entre funciones difusas.

2.1. Producto cartesiano

Podemos establecer relaciones difusas entre x e y , de forma que un valor de x se va a relacionar con un valor de y , $f(x) = y$ con un grado de pertenencia. Para ello utilizamos una matriz de relación, que no es más que un **producto cartesiano**.



En el ejemplo anterior se muestra la **relación entre los vehículos que circulan a alta velocidad y la gravedad de los accidentes**, definida por el producto cartesiano. Antes de determinar el producto cartesiano es necesario ordenar el universo del discurso de A y de B de los conjuntos. Cada conjunto aporta información por separado, pero al establecer la relación aportamos nueva información.

Definición Para realizar el producto cartesiano entre conjuntos difusos se aplica la función de mínimo: $\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Tarea: Implementar en python la función `cartesian(mA, mB)` para determinar el producto cartesiano de dos conjuntos

```

1 def cartesian(mA, mB):
2     # mA: numpy.ndarray, Vector con valores de pertenencia de xA
3     # mB: numpy.ndarray, Vector con valores de pertenencia de xB
4
5     # Realizar
6     # Alta velocidad
7     x = np.array([0, 0.1, 0.5, 0.8, 1, 1])
8     # Gravedad del accidente
9     y = np.array([0.8, 0.8, 0.9, 1])
10
11 # Producto cartesiano de funciones discretas
12 cartesian(x, y)

```

Igualmente podemos relacionar 2 funciones continuas:

- Sea A un conjunto que representa la **venta de libros** con un universo de [0,100]
- Sea B un conjunto que representa el número de libros en el almacén con un universo de [0,1000]
- Podemos definir la **función de venta de libros** como una campana de gaus, con un punto central en 50, un ancho de 20 y una pendiente de 3.
- Igualmente podemos definir la **función de libros en el almacén**, como una sigmoide con pendiente de 0.1 y punto de inflexión en 500.

```

1 # Definir el tamaño de la figura
2 plt.figure(figsize=(8, 4)) # Ajustar el tamaño de la figura
3
4 # Generar los datos
5 # array de 50 elemntos de 0 1 100
6 # que representa la cantidad de libros vendidos mensualmente
7 # [0,100] libros vendidos al mes
8 xA = np.linspace(0, 100, 50)
9
10 # Conjunto A = función de Ventas
11 # campana con punto central en 50,
12 # ancho de a= 20
13 # pendiente de b= 3
14 mA = gbellmf(xA, [20, 3, 50])
15
16 # Libros en el almacén [0,1000]
17 xB = np.linspace(0, 1000, 50)
18
19 # Conjunto B = Función de libros en el almacén
20 mB = sigmf(xB, [0.01, 500])

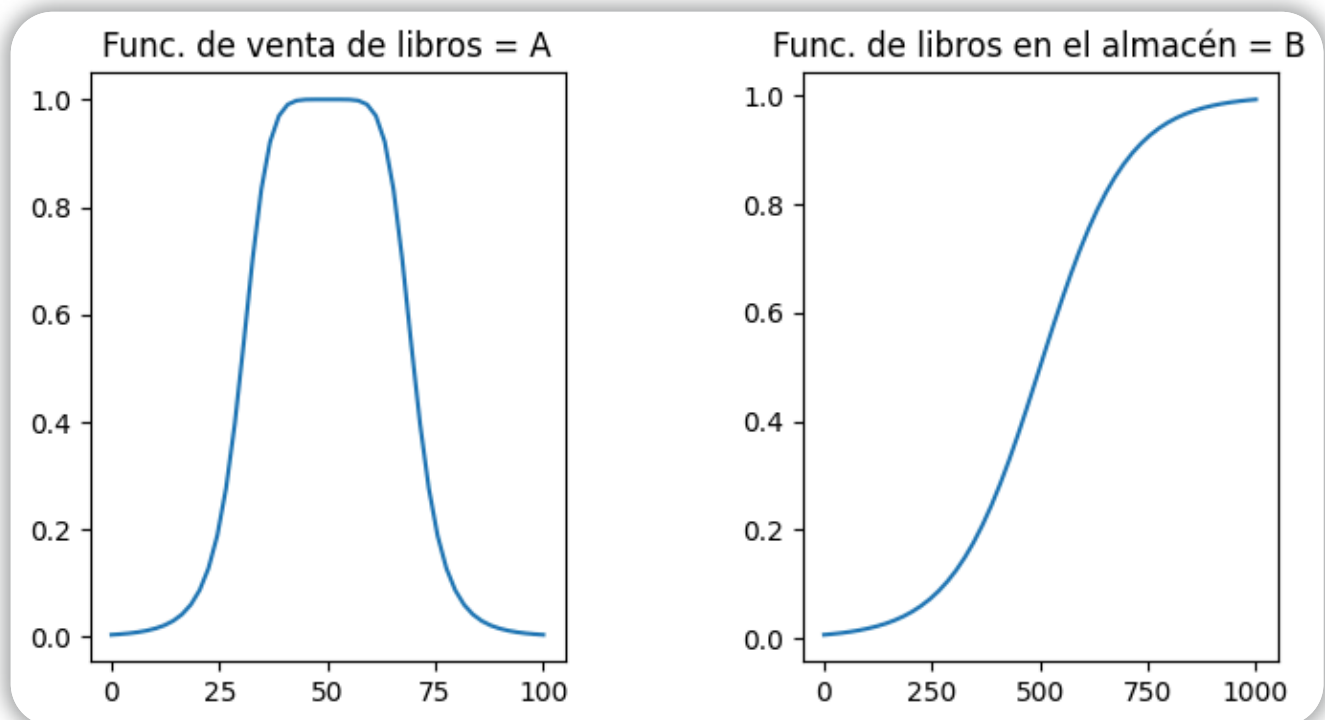
```

```

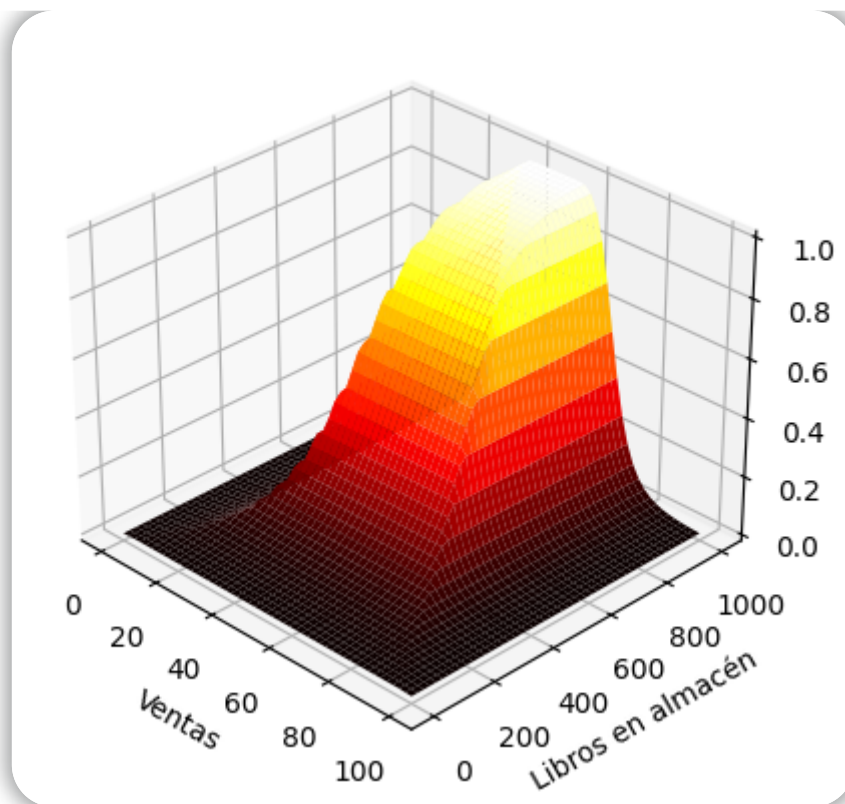
21
22 # Crear los subplots
23 plt.subplot(121)
24 plt.plot(xA, mA)
25 plt.title("Func. de venta de libros = A")
26
27 plt.subplot(122)
28 plt.plot(xB, mB)
29 plt.title("Func. de libros en el almacén = B")
30
31 # Ajustar el espacio entre los subplots
32 plt.subplots_adjust(wspace=0.5)
33
34 # Mostrar la figura
35 plt.show()

```

Representamos estas funciones:



Ahora podemos calcular el producto cartesiano, tal y como lo hemos definido anteriormente mediante $\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ y plotearlo en 3D. Donde uno de los ejes representa las ventas (campana) y en el otro los libros almacenados (sigmoide). De la figura podemos deducir que **el máximo de ventas coincide con la mayor cantidad de libros disponibles en el almacén**. Esta información se deduce de la relación entre ambas funciones.



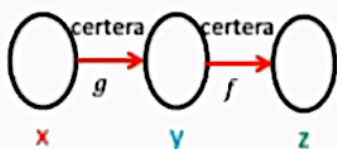
Tarea: Calcular el producto cartesiano $R_{AB} = \text{cartesian}(mA, mB)$ y representar la figura en python.

2.2. Composición de funciones

La composición de relaciones, es similar al producto matricial, pero la operación que se realiza es la siguiente:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)] = \max_y \{ \min [\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)] \}$$

Composición para funciones



$$z = f(y) = f(g(x)) =: f \circ g(x)$$

Composición para relaciones difusas

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)] = \max_y \{ \min [\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)] \}$$

$$R_1 = A \times B = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \quad R_2 = B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0.2 & 1 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 & 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.5 \\ 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Tarea: Basándonos en la función `cartesian()` vamos a realizar en python la función `compose()`, mediante la composición difusa max-min.

```
1  # Función compose(): Composición difusa max-min.
2  # Argumentos:
3  #   mRA: numpy.ndarray, vector o matriz de relación A
4  #   mRB: numpy.ndarray, Matriz de relación B
5  # Retorna:
6  #   AoB: Matriz de composición max-min
7  # Para este cálculo es necesario una matriz auxiliar aux[] donde se
8  # guardarán los mínimos
9
10 x = np.array([[0.4, 1.0, 0.2],
11               [0.1, 0.0, 0.5],
12               [0.9, 0.7, 0.8]])
13
14 y = np.array([[1.0, 0.6, 0.5, 0.4, 0.0],
15               [0.4, 0.8, 0.7, 0.3, 0.3],
16               [0.5, 1.0, 0.5, 0.2, 0.8]])
17
18
```