Sumatorios, Productorios y Propiedades de los Logaritmos

Prof. Carlos M. Abrisqueta Valcárcel

Curso 2024/2025
Curso de Especialización en Big Data e Inteligencia Artificial
Programación IA

1. Sumatorios

- $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
- $\sum_{i=1}^{r} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$
- $\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = n \cdot c$
- $\sum_{i=1}^{r} cx_i = c(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) = c \sum_{i=1}^{r} x_i$
- $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$
- $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i - z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} z_i$
- $\sum_{i=1}^{n} (x_i + c) = \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot c$
- $\sum_{i=1}^{n} (x_i - c) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot c$
- $\sum_{i=1}^{n} (kx_i + c) = k \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot c$

2. Productorios

- $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$
- $\prod_{i=1}^{n} c = c \cdot c \cdot \cdots \cdot c = c^n$
- $\prod_{i=1}^{n} cx_i = c^n \prod_{i=1}^{n} x_i$
- $\prod_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \cdots + \ln(x_n)$
- $\prod_{i=1}^{p} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_p$

Leyenda Sumatorios:

- $\sum$ (Sumatorio): Indica una suma de una secuencia de términos. Los términos se especifican dentro de la expresión.

- $\prod$ (Productorio): Indica una multiplicación repetida. Es como un sumatorio pero con productos.

- i (Índice): Es un contador que recorre los términos que se están sumando. Va desde un valor inicial (generalmente 1) hasta un valor final n, que indica el número de términos a sumar.

- x_i (Término): El valor de la secuencia que se suma en el sumatorio. x_i es el valor de x cuando el índice i toma el valor i-*ésimo* (por ejemplo, x_1 es el primer valor, x_2 el segundo, etc.).

- *n, r ó p* (Límite superior): Es el número total de términos que sumas. El sumatorio se ejecuta desde i = 1 (p ó r = 1) hasta $i = n$ *(p ó i = r).*

- c (Constante): Un valor fijo que no cambia, se suma o multiplica igual en cada término del sumatorio

- k (Constante multiplicativa): Multiplica cada uno de los términos x_i dentro del sumatorio. Como es constante, se puede sacar fuera del sumatorio para simplificar. (k * x_i)

- y_i, z_i (Términos adicionales): Representan otras secuencias de valores que se suman o restan en paralelo con x_i. Se aplican de la misma manera que x_i, siguiendo el índice i.

- n * c (Multiplicación por constante): Si sumas una constante c dentro de un sumatorio n veces, es lo mismo que multiplicar esa constante por el número total de términos n.

- $x^2{}_i$, $x^3{}_i$ (Potencias de los términos): Significa que cada término x_i es elevado a una potencia (por ejemplo, $x^2{}_i$ es x_i al cuadrado, $x^3{}_i$ es x_i al cubo) antes de realizar la suma.

3. Propiedades de las Potencias

- $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, n veces
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Leyenda Potencias:

- a^n: Es la notación de potencia.

- a: Es la base.

- n o m: Es el exponente.

- $-n$: Exponente negativo. Indica el inverso de la base elevada al exponente positivo. Se convierte en 1 / a^n

- 1 / n: Fracción como exponente. Significa que estás tomando la raíz n-ésima de la base. Ejemplo: $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$

- m / n: Exponente fraccionario. Significa que primero elevas la base a m y luego tomas la raíz n-ésima del resultado.

- $\sqrt{a}$: Raíz cuadrada. Equivale a elevar la base a a la potencia 1 / 2.

- $\sqrt[n]{a}$: Raíz n-ésima. Representa la raíz n-ésima de la base a, que es lo mismo que $a^{1/n}$. Ejemplo:

3√27 = 3

- a^{m+n}: Suma de exponentes. Cuando multiplicas dos potencias con la misma base, sumas sus exponentes. Ejemplo:

$a^3 * a^2 = a^{3+2} = a^5$

- $(a * b)^n$: Multiplicación de bases. Cuando tienes dos bases diferentes multiplicadas, y ambas están elevadas al mismo exponente, puedes multiplicar las bases y luego elevar el resultado al exponente. Ejemplo:
$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$.

- $a^{-1} = 1 / a$: Inverso. Elevar una base a la potencia −1 es tomar el inverso de la base. Ejemplo:
$a^{-1} = 1 / a$

4. Propiedades de los logaritmos

- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$
- $e^{\ln(x)} = x$
- $\ln e^x = x$
- $log_a a^x = x$
- $a^{ln_a x} = x$

5. Ejemplos

Ejemplo 1

Dada la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3
4	6	7

Calcule:

a) $\sum_{i=1}^{3} x_i$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{3}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i^2$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2$

Ejemplo 2

Dada la siguiente tabla:

x_i	n_i
4	3
6	2
7	5

Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i n_i$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i^2 n_i$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i^2 n_i - \left(\sum_{i=1}^{3} x_i n_i\right)^2$

Leyenda Logaritmos:

- ln(*x*): Logaritmo natural. Es el logaritmo en base *e*, donde *e* ≈ 2.718. Representa el exponente al que debes elevar *e* para obtener *x*. Ejemplo:

ln(2) ≈ 0.693, porque $e^{0.693} \approx 2$.

- $\log_a(x)$: Logaritmo en base *a*. Representa el exponente al que debes elevar la base *a* para obtener *x* (Si no se especifica, se usa la base 10). Ejemplo:

$\log_2(8) = 3$, porque $2^3 = 8$.

- ln(*x* * *y*) = ln(*x*) + ln(*y*): Propiedad del producto. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Ejemplo:

ln(2 · 3) = ln(2) + ln(3).

- ln(*x* / *y*) = ln(*x*) - ln(*y*): Propiedad del cociente. El logaritmo de un cociente es igual a la resta de los logaritmos del numerador y el denominador. Ejemplo:

ln(8 / 2) = ln(8) − ln(2).

- $\ln(x^y) = y * \ln(x)$: Propiedad de la potencia. El logaritmo de una potencia es igual al exponente y multiplicado por el logaritmo de la base *x*. Ejemplo:

$\ln(2^3) = 3 \cdot \ln(2)$.

- $e^{\ln(x)} = x$: Propiedad inversa. La exponencial de un logaritmo natural se cancela, devolviendo simplemente *x*. Ejemplo:

$e^{\ln(5)} = 5$.

- $\ln(e^x) = x$: Propiedad inversa de e^x. El logaritmo natural de una exponencial con base *e* es el exponente *x*. Ejemplo:

$\ln(e^3) = 3$.

- $\log_a(a^x) = x$: Propiedad de la base. El logaritmo en base *a* de a^x es simplemente *x*. Las funciones logarítmica y exponencial con la misma base se cancelan. Ejemplo:

$\log_2(2^5) = 5$.

- $a^{\ln a(x)}$: Propiedad inversa. Elevar la base *a* al logaritmo en base *a* de *x* devuelve *x*. Ejemplo:

$2^{\ln 2(10)} = 10$.

- $\log_a(1) = 0$: El logaritmo de 1 en cualquier base siempre es 0, porque cualquier número elevado a 0 es 1. Ejemplo:

$\log 5(1) = 0$, porque $5^0 = 1$