$$\overline{\vartheta_1}+\overline{\vartheta_3}+\overline{\vartheta_5} = (-3\vartheta\bar{i}+\vartheta\bar{j})+(6\vartheta\bar{i}-4\vartheta\bar{k})+(9\vartheta\bar{i}-3\vartheta\bar{j}-6\vartheta\bar{k})$$

$$= 12\vartheta\bar{i} - \cancel{3\vartheta}\,2\vartheta\bar{j} - 10\vartheta\bar{k}$$

$$\overline{\vartheta_1}-\overline{\vartheta_4} = (-3\vartheta\bar{i}+\vartheta\bar{j})-(-4\vartheta\bar{j}+8\vartheta\bar{k})$$

$$= -3\vartheta\bar{i}+5\vartheta\bar{j}-8\vartheta\bar{k}$$

$$\overline{\vartheta_1}\cdot\overline{\vartheta_4} = (-3\vartheta\bar{i}+\vartheta\bar{j})(-4\vartheta\bar{j}+8\vartheta\bar{k})$$

$$= \vartheta(-4\vartheta)$$

$$= -4\vartheta^2$$

$$\overline{\vartheta_1}\times\overline{\vartheta_4} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3\vartheta & \vartheta & 0 \\ 0 & -4\vartheta & 8\vartheta \end{vmatrix} = 8\vartheta^2\bar{i} + 12\vartheta^2\bar{k} + 24\vartheta^2\vec{j}$$

20.10.21.

LAB2 FIMR Reducerea sistemului de forțe

Expresia analitică: $\vec{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$

$$= F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\bar{k}$$

modulul forței $F = \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$

Forța este un vector alunecător, F poate fi deplasată pe propriul suport fără ca efectul ei asupra rigidului să se modifice (punctul de aplicație se poate deplasa pe direcția forței). Pentru forța $\bar{F}$ momentul în rap. cu O este vectorul

$$\overline{M}_0 = \bar{r}\times\bar{F}$$

având:

punctul de aplicație în O

direcția perpendiculară pe planul format de forță și punctul O

sensul dat de regula burghiului sau mâinii drepte

modulul

$$M_0 = r\cdot F\cdot\sin(\bar{r},\bar{F}) = d\cdot F$$, $d \to$ brațul forței

Dacă se consideră $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ cu punctul de aplicație $A(x,y,z)$ atunci mom. forței în raport cu O se poate scrie:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

$$= M_{0x}\vec{i} + M_{0y}\vec{j} + M_{0z}\vec{k}$$

iar modulul este: $M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}$

Mom. forței față de un alt punct O_1 este diferit:

$$\vec{M}_{O_1} = \overrightarrow{O_1A}\times\vec{F} = (\vec{r} + \overrightarrow{O_1O})\times\vec{F}$$

$$= \vec{r}\times\vec{F} + \overrightarrow{O_1O}\times\vec{F} = \vec{M}_0 + \overrightarrow{O_1O}\times\vec{F} = \vec{M}_0 - \overrightarrow{OO_1}\times\vec{F}$$

A reduce un sist. de forțe într-un pct. presupune a găsi un sistem echivalent de forțe care să producă același efect ca și sistemul de forțe dat

Forța ~~rezultată~~ rezultantă:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

și cuplul ~~rezultat~~ rezultant prin momentul

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

formează sistemul echivalent care se num. torsorul de reducere în punctul O, și se notează

$\tau_0(\vec{R}, \vec{M}_0)$

La schimbarea punctului de reducere forța rezultantă $\vec{R}$ nu se schimbă dar momentul se schimbă - Teorema momentelor

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_0 - \overrightarrow{OO_1}\times\vec{R}$$

unde O_1 este noul punct de reducere

Momentul minimal sau redus

$$M_R = \frac{\vec{R}\cdot\vec{M}_0}{R} = \frac{\vec{R}}{R}\cdot\vec{M}_0$$ reprez. proiecția momentului M_0 pe rezultanta $\vec{R}$

Ținând cont că momentul minim M_2 este coliniar cu rezultanta $\bar{R}$ se poate scrie vectorial:

$$\bar{M}_2 = \frac{\bar{R}\cdot\bar{M}_0}{R^2}\cdot\bar{R}$$ și se obține torsorul minim $T_0(R, \bar{M}_2)$

Ecuația axei centrale

$$\frac{M_{0x}-(yR_z-zR_y)}{R_x} = \frac{M_{0y}-(zR_x-xR_z)}{R_y} = \frac{M_{0z}-(xR_y-yR_x)}{R_z}$$

În cazul unui sistem de forțe coplanare ecuația axei centrale este:

$$M_{0z}-(xR_y-yR_x)=0$$

Cazul 1 $\bar{R}\cdot\bar{M}_0 \neq 0 \Rightarrow \bar{R}\neq 0$, $\bar{M}_0\neq 0$ se deduce mom. minimal $M_2\neq 0$. În consecință sistemul de forțe se reduce la un torsor minimal situat pe axa centrală care e bine determinată.

Cazul 2 $\bar{R}\cdot\bar{M}_0=0$ dar $\bar{R}\neq 0 \Rightarrow$ sistemul se reduce momentul minimal $M_2=0$. În consecință, torsorul minimal este format numai din rezultantă. Sistemul de forțe se va reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală. Acest caz apare fie dacă:

$\bar{M}_0=0 \rightarrow$ deci punctul de reducere O se află pe axa centrală

$\bar{R}\perp\bar{M}_0 \rightarrow$ punctul de reducere O nu se află pe axa centrală dar momentul din punctul de reducere este egal cu momentul rezultantei pe axa centrală.

Cazul 3. ~~$\bar{R}=\bar{M}_0$~~ $R=0$ și $\bar{M}_0\neq 0$ relația se simplifică și $\bar{R}\cdot\bar{M}_0=0 \rightarrow$ sistem. de forțe se reduce la un cuplu $\bar{M}=\bar{M}_0$

Cazul 4: $\bar{R}=0$ și $\bar{M}_0=0 \rightarrow$ Sistemul de forțe este în echilibru.

Ex: 1)

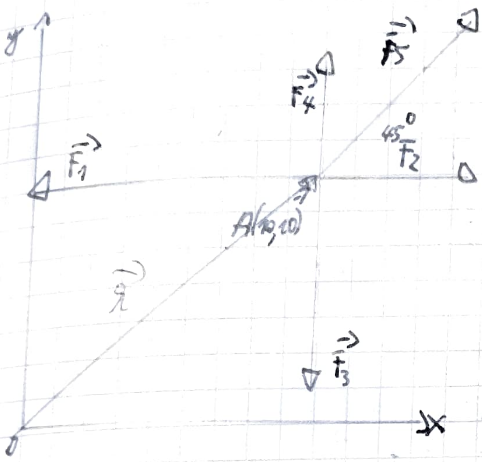
În punctul $A(\alpha, \beta)$ acționează sistemul de 5 forțe având direcțiile ca în figură, iar mărimile sunt:

$F_1 = 6 [N]$ $\quad F_3 = 5 [N]$

$F_2 = 3 [N]$ $\quad F_4 = 2 [N]$

$F_5 = 3\sqrt{2} [N]$ $(4,25)$

Să se găsească elementele torsorului de reducere în raport cu originea sistemului de coordonate.



$\vec{F_1} = F_1(-\vec{i})$

$= -6\vec{i}$

$\vec{F_2} = F_2 \cdot \vec{i}$

$= 3\vec{i}$

$\vec{F_3} = F_3 \cdot (-\vec{j})$

$= -5\vec{j}$

$\vec{F_4} = F_4 \cdot \vec{j}$

$= 2\vec{j}$

$\vec{F_5} = F_5 \cdot \cos 45^0 \vec{i} + F_5 \cdot \sin 45^0 \vec{j}$

$= 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$

$= 3\vec{i} + 3\vec{j}$

Rezultanta:

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{5} \vec{F_i}$

$= \bar{F_1} + \bar{F_2} + \bar{F_3} + \bar{F_4} + \bar{F_5}$

$= -6\bar{i} + 3\vec{i} - 5\bar{j} + 2\bar{j} + 3\bar{i} + 3\bar{j}$

$= 0$

Calculăm momentul

$\vec{M}_O(\vec{F}_1)$

Vect. de poziție este $OA(\vec{r})$

$\Rightarrow \vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{OA} \times \vec{F}_1$

$\cancel{\vec{M}_O(T}$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +60\vec{k}$$

$\vec{M}_O(\vec{F}_2)$

$$= OA \times F_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -30\vec{k}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_3) = OA \times F_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -50\vec{k}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_4) = OA \times F_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +20\vec{k}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_5) = OA \times F_5 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 30\vec{k} - 30\vec{k} = 0$$

Când direcția forței trece prin pct. de reducere momentul e 0.

$\vec{M}_O = (60 - 30 - 50 + 20)\vec{k} = \vec{0}$ (sistemul se află în echilibru)

$$M_O = \sum_{i=1}^{5} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_3) + \vec{M}_O(\vec{F}_4) + \vec{M}_O(\vec{F}_5)$$

Ex 2:

Se consideră sistemul de 4 forțe având direcțiile ca în figură:

$F_1 = 5[N]$ $A_1(2,\alpha)$

$F_2 = 3[N]$ $A_2(18,\beta)$

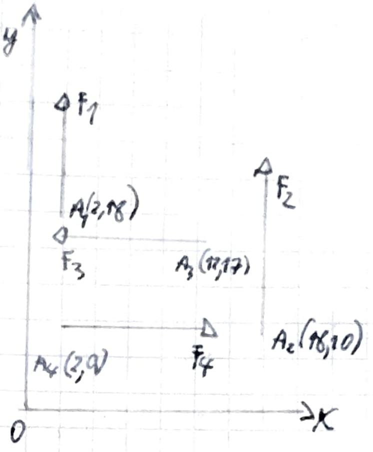
$F_3 = 5[N]$ $A_3(\gamma,17)$

$F_4 = 5[N]$ $A_4(\theta,9)$

Să se găsească elementele torsorului de reducere în rap. cu orig. sist. de coord.

Se impune:

- să se exprime analitic fiecare vector F_i
- să se determ. elem. torsorului de reducere



$\vec{F_1} = 5\vec{j}$

$\vec{F_2} = 3\vec{j}$

$\vec{F_3} = -5\vec{i}$

$\vec{F_4} = 5\vec{i}$

$\Rightarrow R = 8\vec{j} \quad (\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4})$

$$\vec{M_0}(\vec{F_1}) = \overline{OA_1} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 18 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10\vec{k}$$

$$\vec{M_0}(\vec{F_2}) = \overline{OA_2} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 18 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54\vec{k}$$

$$\vec{M_0}(\vec{F_3}) = \overline{OA_3} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 17 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 85\vec{k}$$

$$\vec{M_0}(\vec{F_4}) = \overline{OA_4} \times \vec{F_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -45\vec{k}$$

Momentul rezultant:

$$\vec{M_0} = \sum_{i=1}^{4} \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \vec{M_0}(\vec{F_1}) + \vec{M_0}(\vec{F_2}) + \vec{M_0}(\vec{F_3}) + \vec{M_0}(\vec{F_4}) = 104\vec{k}$$

$$\begin{cases} \bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \bar{F}_i = 8\bar{j} \\ \bar{M}_O = \sum_{i=1}^{4} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 104\bar{k} \end{cases}$$

Să se det. Mom. minimal (redus)

$$M_R = \frac{\vec{R} \cdot \bar{M}_O}{R}$$

$$= \frac{(8\vec{j}) \cdot (104\vec{k})}{\sqrt{8^2}}$$

$$= 0$$

Deci avem cazul 2: $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$, dar $\vec{R} \neq 0$ se deduce momentul minim $M_R = 0$.
În consecință, torsorul minimal este format numai din rezultantă - Sist. de forțe se va reduce la rezultanta unică situată pe axa centrală

Se deter. ec. axei centrale:

$$M_{Oz} = xR_y - yR_x$$

$$104 = x \cdot 8 - y \cdot 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{104}{8} = 13$$

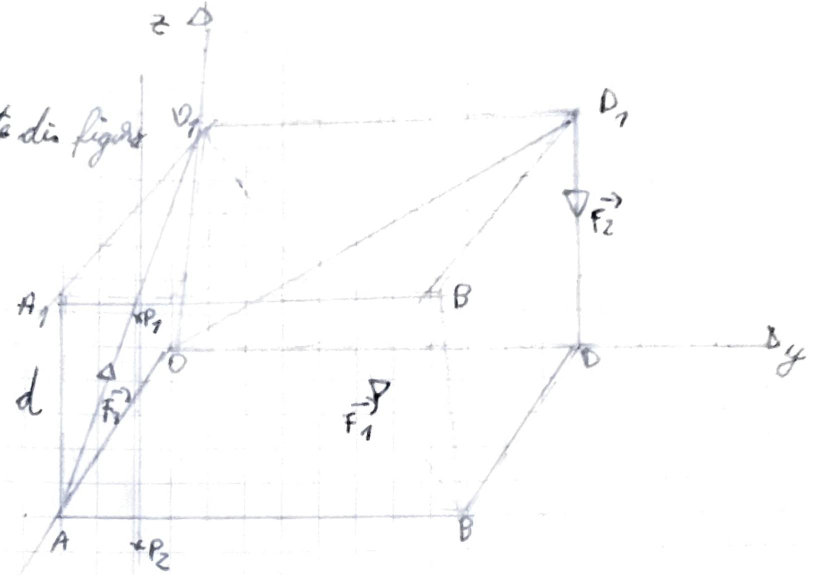
Se obs. că axa centrală nu trece prin c.G. al plăcii $C(10,10)$
deci având $\bar{R} = 8\vec{j}$ rezultă că sub acțiunea sistem. de forțe apare o mișcare de translație după axa y și în același sens.

$\bar{M}_O = 104\vec{k}$ rezultă că sub acțiunea sistemului de forțe apare o mișcare de rotație în jurul axei z

Pentru echilibrarea sist. de forțe, pe axa centrală se aplică o forță egală cu $\bar{R}$ dar în sens opus.

Ex 3:

Asupra unui cub acțion. sist. de forțe din figură



$F_1 = 2\sqrt{3}F$ (direcția BO_1)

$F_2 = 2F$ (direcția D_1D)

$F_3 = 2\sqrt{2}F$ (direcția AO_1)

$$\bar{F_1} = F_1 \cdot \frac{\overline{BO_1}}{BO_1}$$

$$\bar{F_1} = F_1 \cdot \frac{\overline{BA}+\overline{AO}+\overline{OO_1}}{BO_1}$$

$$= 2\sqrt{3}F \frac{-d\bar{i}-d\bar{j}+d\bar{k}}{d\sqrt{3}} = 2\cdot d(-\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})$$

$$= -2F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}$$

$$\bar{F_2} = F_2 \frac{\overline{D_1D}}{D_1D}$$

$$= 2F \cdot \frac{-d\bar{k}}{d}$$

$$= -2F\bar{k}$$

$$\bar{F_3} = F_3 \frac{\overline{AO_1}}{AO_1}$$

$$= F_3 \frac{\overline{AO}+\overline{OO_1}}{AO_1}$$

$$= 2\sqrt{2}F_3 \cdot \frac{-d\vec{i}+d\vec{k}}{d\sqrt{2}}$$

$$= -2F\bar{i} + 2F\bar{k}$$

Rezultanta:

$$R = \sum_{i=1}^{3} \vec{F_i} = -2F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k} - 2F\bar{k} - 2F\bar{i} + 2F\bar{k}$$

$$= -4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}$$

Momentul

$$\bar{M_O}(\bar{F_1}) = \overline{OB} \times \bar{F_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & d & 0 \\ -2F & -2F & 2F \end{vmatrix} = 2dF\bar{i} - 2dF\bar{j}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F_2}) = \vec{OD_1} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & d & d \\ 0 & 0 & -2F \end{vmatrix}$$

$$= -2dF\vec{i}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F_3}) = \vec{OA} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d & 0 & 0 \\ -2F & 0 & 2F \end{vmatrix}$$

$$= -2dF\vec{j}$$

Momentul rezultant

$$\vec{M_O} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \vec{M}_O(\vec{F_1}) + \vec{M}_O(\vec{F_2}) + \vec{M}_O(\vec{F_3})$$

$$= 2dF\vec{i} - 2dF\vec{j} - 2dF\vec{i} - 2dF\vec{j}$$

$$= -4dF\vec{j}$$

I-am det. rez. torsorului

$$\tau_O \begin{cases} \vec{R} = -4F\vec{i} - 2F\vec{j} + 2F\vec{k} \\ \vec{M_O} = -4dF\vec{j} \end{cases}$$

Elem. torsorului în pct. B sunt

Același $\vec{R} = -4F\vec{i} - 2F\vec{j} + 2F\vec{k}$

Mom. în rap. cu punctul B diferit $\vec{M_B} = \vec{M_O} - \vec{OB} \times \vec{R}$

$$= -4dF\vec{j} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d & d & 0 \\ -4F & -2F & 2F \end{vmatrix}$$

$$= -2dF\vec{i} - 2dF\vec{j} - 2dF\vec{k}$$

$$\tau_B \begin{cases} \vec{R} = -4F\vec{i} - 2F\vec{j} + 2F\vec{k} \\ \vec{M_B} = -2dF\vec{i} - 2dF\vec{j} - 2dF\vec{k} \end{cases}$$

Mom. minim (redus) este (∥ τ_0):

$$M_R = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_0}{R}$$

$$= \frac{(-4F\vec{i} - 2F\vec{j} + 2F\vec{k}) \cdot (-4dF\vec{j})}{\sqrt{(4F)^2 + (2F)^2 + (2F)^2}} = \frac{8dF^2}{F\sqrt{24}}$$

$$= \frac{8dF}{\sqrt{24}}$$

Cazul 1: $\bar{R} \cdot \bar{M}_0 \neq 0 \Rightarrow \bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$ se deduce momentul minim $M_R \neq 0$

În consecință, sist. de forțe se reduce la un torsor minimal situat pe axa centrală care este bine determinată

Axa centrală

$$\frac{M_{0x} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{0y} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{0z} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

$$\frac{0 - (y(2F) - z(-2F))}{4} = \frac{-4dF - (z(-4F) - x(2F))}{-2F} = \frac{0 - (x(-2F) - y(-4F))}{2F}$$

$$\begin{cases} 16d - 20z - 8x - 4y = 0 \\ -4d + 4x + 4z - 4y = 0 \end{cases}$$

dacă $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{3} \\ z = \frac{2d}{3} \end{cases}$ deci $\exists\ P_1\left(\frac{d}{3}, 0, \frac{2d}{3}\right)$

dacă $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5d}{3} \\ y = \frac{2d}{3} \end{cases}$ deci $\exists\ P_2\left(\frac{5d}{3}, \frac{2d}{3}, 0\right)$