UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis I
Übungsblatt 5

Abgabe: grundsätzlich in Dreiergruppen (für Studiengang MML gilt Einzelabgabe)
unter Angabe von Matrikel, Name, Vorname, Studiengang und Übungsgruppe
am Di., 19.11.2019, vor der Vorlesung im AM 1.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

a) Zeigen Sie mit dem Wurzelkriterium, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)^n}{2^n n^2} x^n$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert und für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergiert.

b) Entscheiden Sie, ob die Reihe für $x = -1$ bzw. für $x = 1$ konvergiert.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen **a)** auf Konvergenz und **b)** auf absolute Konvergenz:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}}$, **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)\cdot 2n}}$.

Aufgabe 3. (3+3 Punkte)

a) Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

und zeigen Sie auf diese Weise, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$.

Folgern Sie eine geschlossene Darstellung der Summe von $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ für $x \in (-1, 1)$.

b) Zeigen Sie durch Nutzung analoger Methoden wie in **a)**, dass für $|x| < 1$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$$

konvergiert und geben Sie einen geschlossenen Ausdruck in $x \in (-1, 1)$ für die Summe an.