UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis I
Übungsblatt 9

Abgabe: grundsätzlich in Dreiergruppen (für Studiengang MML gilt Einzelabgabe)
unter Angabe von Matrikel, Name, Vorname, Studiengang und Übungsgruppe
am Di., 17.12.2019, vor der Vorlesung im AM 1.

Aufgabe 1. (5 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 9x & \text{für } x \in [-4, 0), \\ -x + 3 & \text{für } x \in [0, 4]. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie jeweils alle lokalen und globalen Maximalstellen und alle lokalen und globalen Minimalstellen und geben Sie die zugehörigen Extrema an.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen f.

Aufgabe 2. (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen $g_1, g_2, g_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

a) $g_1(x) = x^{\left(x^2\right)}$, **b)** $g_2(x) = (x^x)^{\left(x^2\right)}$, **c)** $g_3(x) = (x^x)^{(x^x)}$.

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Betrachten Sie die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, (*sinus hyperbolicus*) und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, (*cosinus hyperbolicus*)

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten: $\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$ und

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

b) Zeigen Sie, dass sinh streng monoton wachsend ist, stetig ist und dass

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \sinh(x) = \infty.$$

c) Aus dem Resultat in **b)** folgt mit dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, dass $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung auf $\mathbb{R}$ ist und folglich eine Umkehrfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert. Diese wird *areasinus hyperbolicus* genannt und mit arsinh bezeichnet.

Zeigen Sie mittels des Satzes 2.21 aus der Vorlesung, dass arsinh differenzierbar ist, und bestimmen Sie mit der Darstellung aus diesem Satz die Ableitung der Umkehrfunktion arsinh von sinh.

d) Zeigen Sie mit **a)**, dass sich die Ableitung in **c)** darstellen lässt als $\operatorname{arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.