



Analysis I Übungsblatt 14

Abgabe bis Di., 4.02.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (9 Punkte) Bearbeiten Sie diese Aufgabe im Kurs

„Analysis 1, UzL, WiSe 2019/20“

unter <https://lon-capa.oncampus.de>.

(Dies ist kein zu bestehender Test, die Punkte werden als *Übungspunkte* eingetragen. Schriftliche Abgaben sind *nicht* zu erbringen. **Auch diese Aufgabe ist klausurrelevant.**)

Aufgabe 2. (7 Punkte) Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 64\}$ und

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x\sqrt{64 - x^2 - y^2}.$$

- a) Bestimmen Sie für $(x, y) \in D$ den Gradienten $\text{grad } f(x, y)$ und betrachten Sie für alle $(x, y) \in D \setminus \{(-4\sqrt{2}, 0), (4\sqrt{2}, 0)\}$ den normierten Vektor $\mathbf{v}_{\text{grad}}(x, y) := \frac{\text{grad } f(x, y)}{\|\text{grad } f(x, y)\|_2}$.
- b) Zeichnen Sie die Vektoren $\mathbf{v}_{\text{grad}}(x, y)$ als in (x, y) startende Ortsvektoren, wobei $(x, y) \in M := \{(2, -3), (2, 0), (2, 3), (4, -3), (4, 0), (4, 3), (7, -3), (7, 0), (7, 3)\}$, sowie den Rand von D in ein gemeinsames Diagramm.
- c) Geben Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f(x, y)}{\partial \mathbf{v}_{\text{grad}}(x, y)}$ für $(x, y) \in D \setminus \{(-4\sqrt{2}, 0), (4\sqrt{2}, 0)\}$ an.
- d) Berechnen Sie die numerischen Werte der Richtungsableitung in **c)** auf 3 Stellen nach dem Dezimaltrennzeichen an den $(x, y) \in M$, wobei M aus **b)**.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{wenn } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $g_x(x, y)$ und $g_y(x, y)$ für alle $(x, y) \neq (0, 0)$.
- b) Zeigen Sie, dass auch $g_x(0, 0)$ und $g_y(0, 0)$ existieren und geben Sie diese an.
- c) Zeigen Sie nun, dass

$$g_{xy}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) (0, 0) \quad \text{und} \quad g_{yx}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) (0, 0)$$

existieren und geben Sie diese an.