UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis I
Übungsblatt 13

Abgabe bis Di., 28.01.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte) Gegeben sei die Menge $\mathbb{R}^2$ mit dem euklidischen Abstand. Bestimmen Sie (i) alle inneren Punkte, (ii) alle Randpunkte, (iii) alle Häufungspunkte und (iv) alle Berührungspunkte der folgenden Mengen

a) $M_1 = (2,3] \times [1,4)$,

b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } y = 1/n \text{ und } |x| \leq 1/n\}$,

c) $M_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q}\}$.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Es sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. Betrachten Sie die Funktion

$$f: D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{(x+2)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}, \quad (x,y) \in D.$$

a) Geben Sie die Niveaumengen N_z für $z < 0$, $z = 0$ und $z = 1$ an.

b) Zeigen Sie, dass die Niveaumengen N_z für $z > 0$ und $z \neq 1$ Kreise sind und bestimmen Sie jeweils den Mittelpunkt und den Radius (in Abhängigkeit von z).

Aufgabe 3. (5 Punkte) Geben Sie jeweils alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ an, in denen die folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $j = 1,2,3$, stetig sind:

a) $$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 4x - x^2y^2 - 4y}{x-y}, & \text{falls } x \neq y, \\ 2x^3 + 4, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

b) $$f_2(x,y) = \begin{cases} x/y, & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0, \end{cases}$$

c) $$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2xy}}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}, & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$