UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis I
Übungsblatt 10

Abgabe bis Di., 07.01.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (10 Punkte)
Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren. Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(3x-2)}{x^2-6x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^3+x^2-x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{m\to\infty} \cos^m\left(\dfrac{1}{m}\right)$

e) $\lim\limits_{m\to\infty} \cos^m\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$

Aufgabe 2. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} (1-\cos(2x))/x^2 & \text{wenn } \; x \neq 0, \\ 2 & \text{wenn } \; x = 0, \end{cases}$$

an der Stelle 0 zweimal differenzierbar ist und bestimmen Sie $g'(0)$ sowie $g''(0)$.

Hinweis: Die Regel von de l'Hospital kann helfen, benötigte Grenzwerte zu berechnen.

Zusatzaufgabe 3. (5 Zusatzpunkte)
Betrachten Sie die Voraussetzungen:

i) Die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

ii) Es gilt $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$.

iii) Die Ableitung $f' : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.

Zeigen Sie: *Unter den obigen Voraussetzungen* i), ii), iii) *ist die Funktion*

$$h : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \frac{f(x)}{x},$$

monoton wachsend. Markieren Sie in Ihrem Beweis die Stellen, an denen Sie jeweils die Voraussetzungen i), ii) bzw. iii) benutzt haben.

Hinweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Das Analysis-Team wünscht Frohe Weihnachten
und alles Gute für 2020.