UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis I
Übungsblatt 12

Abgabe bis Di., 21.01.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (6 Punkte) Betrachten Sie zu beliebigem und festem $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}.$$

a) Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von α – die Intervalle, in denen die Funktion monoton fallend bzw. monoton wachsend ist.

b) Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von α – die Intervalle, in denen die Funktion konkav bzw. konvex ist sowie die Wendestellen der Funktion.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in (1,\infty)$ gilt $\displaystyle \frac{1}{1+\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k^n}.$!

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in (0,1)$ gilt $\displaystyle \frac{1}{1+\prod_{k=1}^n a_k} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k^n}.$!

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x},$$

auf $(0,\infty)$ streng konvex und auf $(-\infty,0)$ streng konkav ist. Betrachten Sie dann die Ungleichung von Jensen (Satz 2.34) für f sowie $\lambda_k = \frac{1}{n}$, $x_k = n \ln a_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Es sei E eine beliebige nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass durch

$$\varrho : E \times E \to \mathbb{R}, \qquad \varrho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } \cancel{x \neq y}. \quad x=y \end{cases}$$

eine Metrik für E definiert wird.

Zusatzaufgabe 4. (5 Punkte) Es sei E eine beliebige nichtleere Menge und ϱ eine beliebige Metrik für E. Zeigen Sie, dass dann auch durch

$$d : E \times E \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)},$$

eine Metrik für E definiert wird.