UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. Ch. Bey, Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis I
Übungsblatt 3

Abgabe: grundsätzlich in Dreiergruppen (für Studiengang MML gilt Einzelabgabe)
unter Angabe von Matrikel, Name, Vorname, Studiengang und Übungsgruppe
am Di., 5.11.2019, vor der Vorlesung im AM 1.

Aufgabe 1. (8 Punkte) Betrachten Sie die durch

$$a_n = n - 1\,, \quad b_n = (-1)^n - \frac{4}{n}\,, \quad c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,, \qquad d_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar,} \\ n^{-1} & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Geben Sie jeweils alle reellen Häufungswerte an. Begründen Sie Ihre Ergebnisse auch für den Fall, dass keine reellen Häufungswerte vorkommen. Entscheiden Sie weiterhin, ob die Folge konvergent, bestimmt divergent gegen $-\infty$, bestimmt divergent gegen ∞ oder unbestimmt divergent ist.

b) Geben Sie jeweils das Supremum, das Infimum, den Limes superior und den Limes inferior der Folgen an sowie, im Falle der Existenz, Minimum, Maximum und Grenzwert der Folgen, indem Sie die Tabelle

	$\max\limits_{n\in\mathbb{N}}$	$\min\limits_{n\in\mathbb{N}}$	$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}$	$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}$	$\limsup\limits_{n\to\infty}$	$\liminf\limits_{n\to\infty}$	$\lim\limits_{n\to\infty}$
(a_n)							
(b_n)							
(c_n)							
(d_n)							

abschreiben und ausfüllen. Tragen Sie im Fall der Nichtexistenz „ex. nicht“ ein.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv durch

$$x_1 = 42 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{5}{7}\,x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

definiert ist. Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz oder Divergenz. Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert der Folge an.

Aufgabe 3. (6 Punkte) Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für ein beliebiges aber festes x_1 mit $x_1 \geq 0$ rekursiv definiert ist durch

$$x_{n+1} = x_n \cdot (\cos(\pi x_n))^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie mit dem Monotoniekriterium, dass die Folge (x_n) konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert dieser Folge eine nichtnegative *ganze* Zahl ist.

Hinweis. Ohne Beweis dürfen Sie bei der Lösung von **b)** folgende Aussage benutzen:

Für alle konvergenten reellen Zahlenfolgen (a_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \cos a_n = \cos\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.