



Analysis I Übungsblatt 11

Abgabe bis Di., 14.01.2020, vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \exp\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

und die Entwicklungsstelle $x_0 = -2$ die Taylor-Polynome $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$.

- b) Ist f nach unten beschränkt? Sind die T_j , $j = 0, 1, 2, 3$, jeweils nach unten beschränkt?
Ist f nach oben beschränkt? Sind die T_j , $j = 0, 1, 2, 3$, jeweils nach oben beschränkt?

Aufgabe 2. (8 Punkte)

- a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x).$$

- b) Geben Sie für f die an $x_0 = 0$ entwickelten Taylor-Polynome $T_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, an.
c) Zeigen Sie, dass für alle ε mit $0 < \varepsilon < 1$ und für alle $|x| \leq 1 - \varepsilon$ gilt

$$|f(x) - x| < \frac{1}{3} \frac{|x|^3}{\varepsilon^3}.$$

Benutzen Sie dazu die Lagrangesche Darstellung des Restgliedes $R_2 = f - T_2$.

Hinweis: Zur Abschätzung der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes R_2 kann hier das Monotonieverhalten von f''' benutzt werden. Berechnen Sie zur Bestimmung dieses Monotonieverhaltens die Ableitung von f''' .

Aufgabe 3. (5 Punkte)

- a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

über dem Intervall $[-2, 4]$ sowie die die Punkte $(-1, f(-1))$ und $(2, f(2))$ verbindende Sekante in ein gemeinsames Diagramm.

- b) In der Vorlesung wurde auch folgende Definition der Konvexität angegeben:

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex : $\iff \forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $\forall \lambda \in (0, 1)$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Beweisen Sie mit dieser Definition die Konvexität der Funktion f aus a).