



## Analysis I Übungsblatt 11

**Abgabe** bis Di., 14.01.2020, vor der Vorlesung

### Aufgabe 1. (5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie für die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \exp\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)$$

und die Entwicklungsstelle  $x_0 = -2$  die Taylor-Polynome  $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ .

- b) Ist  $f$  nach unten beschränkt? Sind die  $T_j, j = 0, 1, 2, 3$ , jeweils nach unten beschränkt?  
Ist  $f$  nach oben beschränkt? Sind die  $T_j, j = 0, 1, 2, 3$ , jeweils nach oben beschränkt?

### Aufgabe 2. (8 Punkte)

- a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x).$$

- b) Geben Sie für  $f$  die an  $x_0 = 0$  entwickelten Taylor-Polynome  $T_j(x), j = 0, 1, 2, 3$ , an.

- c) Zeigen Sie, dass für alle  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < 1$  und für alle  $|x| \leq 1 - \varepsilon$  gilt

$$|f(x) - x| < \frac{1}{3} \frac{|x|^3}{\varepsilon^3}.$$

Benutzen Sie dazu die Lagrangesche Darstellung des Restgliedes  $R_2 = f - T_2$ .

*Hinweis:* Zur Abschätzung der Lagrangeschen Darstellung des Restgliedes  $R_2$  kann hier das Monotonieverhalten von  $f'''$  benutzt werden. Berechnen Sie zur Bestimmung dieses Monotonieverhaltens die Ableitung von  $f'''$ .

### Aufgabe 3. (5 Punkte)

- a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

über dem Intervall  $[-2, 4]$  sowie die die Punkte  $(-1, f(-1))$  und  $(2, f(2))$  verbindende Sekante in ein gemeinsames Diagramm.

- b) In der Vorlesung wurde auch folgende Definition der Konvexität angegeben:

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvex : $\iff \forall x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$  und  $\forall \lambda \in (0, 1)$  gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Beweisen Sie mit dieser Definition die Konvexität der Funktion  $f$  aus a).