UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. J. Prestin

Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis I
Übungsblatt 7

Abgabe: grundsätzlich in Dreiergruppen (für Studiengang MML gilt Einzelabgabe)
unter Angabe von Matrikel, Name, Vorname, Studiengang und Übungsgruppe
am Di., 03.12.2019, vor der Vorlesung im AM 1.

Aufgabe 1. (5 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es sei $x_0 = 1$ und die Funktionen $t_0, t_1, t_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie die Zahlen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ seien rekursiv für $j = 0, 1, 2$ folgendermaßen bestimmt:

i) Der Graph von t_j ist die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_j,
ii) die Nullstelle von t_j ist x_{j+1}.

a) Füllen Sie die folgenden Felder (außer den letzten beiden) der Tabelle aus.

j	x_j	$x_j \approx$	$f(x_j)$	$f(x_j) \approx$	$f'(x_j)$	$t_j(x)$
0						
1						
2						
3					/	/

(„$\approx$“ stehe für einen Dezimalbruch mit fünf Stellen nach dem Dezimaltrennzeichen.)

b) Fertigen Sie weiterhin eine Skizze an, die über dem Intervall $[0, 5]$ die Graphen der Funktionen f, t_0, t_1 enthält.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Zeigen Sie direkt mit der **Definition der Differenzierbarkeit**, dass die reellen Funktionen f_1, f_2, f_3 definiert durch

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}\ , \quad f_2(x) = \frac{1}{x^4}\ , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ , \quad x \in (0, \infty),$$

in allen Stellen x_0 ihres Definitionsbereichs differenzierbar sind und bestimmen Sie die entsprechenden Ableitungen direkt mit der **Definition der Ableitung**.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$\forall\, x \in [a, b]\colon\ g(x) \in [a, b]. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass g mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. $\exists\, x_0 \in [a, b]\colon g(x_0) = x_0$.

Nutzen Sie dazu eine Aussage über stetige Funktionen aus der Vorlesung. An welcher Stelle Ihrer Argumentation haben Sie Voraussetzung (1) benutzt?