UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Wintersemester 2019/20
Sommersemester 2020

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis I, Übungsblatt 15
Analysis II, Übungsblatt 1

Abgabe bis Mittwoch, 15. April 2020 als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle

Aufgabe 1. (6 Punkte) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{h}}(r,\phi)$ der Verkettung

$$\mathbf{h} := \mathbf{f} \circ \mathbf{g} : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

der durch

$$\mathbf{f}(x,y) = (xy,\ x^2 - y,\ x + y^2) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{g}(r,\phi) = (r\cos\phi,\ r\sin\phi)$$

definierten Funktionen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{g} : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

a) einerseits mittels der Kettenregel $J_{\mathbf{h}}(r,\phi) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(r,\phi))J_{\mathbf{g}}(r,\phi)$ und

b) andererseits durch Ausrechnen von $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}\,(r,\phi)$ sowie anschließendem partiellen Ableiten.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Bestimmen Sie für die durch

$$h(x,y) \;=\; (1-x)(1-y)(1-x-y)$$

definierte Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ den Gradienten und die Hesse-Matrix in allen Punkten (x,y) des Definitionsbereichs $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle stationären Stellen (x_j, y_j), an denen der Gradient $\nabla h(x_j,y_j) = (0,0)$ ist. Entscheiden Sie, ob an diesen Stellen ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 3. (für Hörer der Ergänzungsvorlesung: Biophysik, MIW, MML; 10 Punkte) Bestimmen Sie jeweils das zweite Taylor-Polynom $T_2(x,y)$ zu den Funktionen

a)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \exp(xy^3 - 2),$$

entwickelt im Punkt $(x_0,y_0) = (-2,\,-1)$;

b)

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,-t),\, t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{y-x}{x+y},$$

entwickelt im Punkt $(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.