



Analysis II, Übungsblatt 9

Abgabe bis Donnerstag, 4. Juni 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle.
Beachten Sie auch das Begleitvideo im Moodle.

Aufgabe 1. (2+2+2 Punkte) Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $k_n : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2},$

b) $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k^3}$

c) $g_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{(nx)^2}{1 + (nx)^3},$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 2. (5×2 Punkte, d) und e) Zusatzpunkte bei „ohne Ergänzung“)

Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihen und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten am Intervallrand:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (x - 3)^k, \quad b) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k kx^k, \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k3^k} x^k,$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{\sqrt{(3k-2)2^k}} x^k, \quad e) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 1} x^{5k+1}.$

Aufgabe 3. (3 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

Zeigen Sie, dass der Umfang U der Ellipse mit der Parameterdarstellung $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, wobei $a \geq b > 0$ gegeben ist durch

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (\varepsilon \sin t)^2} dt, \quad \varepsilon^2 := \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \varepsilon \in [0, 1).$$

Aufgabe 4. (3+2 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

a) Bestimmen Sie für das auf ganz \mathbb{R}^2 definierte Vektorfeld

$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy}, x^4 e^{xy})$ eine Potentialfunktion.

b) Betrachten Sie für $j \in \{1, 2\}$ die parametrisierten Kurven $\gamma_j : [j-1, j] \rightarrow \mathbb{R}^2$, die komponentenweise von der Gestalt $t \mapsto mt + n$ sind und dadurch bestimmt, dass $\gamma_1(0) = (1, 0), \gamma_1(1) = (0, 1) = \gamma_2(1), \gamma_2(2) = (-1, 0)$.

Bestimmen Sie für die durch $\gamma(t) = \gamma_j(t), t \in [j-1, j], j = 1, 2$ bestimmte stückweise stetig differenzierbare parametrisierte Kurve $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ das Kurvenintegral (2. Art)

$$\int_{\gamma} ((3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy}) dx + x^4 e^{xy} dy).$$