



Analysis II, Übungsblatt 13

Abgabe bis Donnerstag, 2. Juli 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle.
Beachten Sie auch das Begleitvideo im Moodle.

Aufgabe 1. (5+1 Punkte) Gegeben sei die 2π -periodische Funktion f , die auf $[0, 2\pi)$ die Gestalt $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ hat.

- Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f .
- Berechnen Sie mit a) den Wert der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte, 2+2 Zusatzpunkte)

Von einer 2π -periodischen Funktion f mit Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

seien die Fourier-Koeffizienten $a_k(f), k = 0, 1, \dots$ und $b_k(f), k = 1, 2, \dots$ gegeben.

Man bestimme die Fourier-Koeffizienten von

- $f(-\circ)$,
 - $f(\circ + a)$,
 - f' ,
- Zusatz: d) $f \times \cos(n\circ)$, e) $f \times \sin(n\circ)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

Die Bernoulli-Zahlen $B_n, n \in \mathbb{N}_0$, sind durch die Potenzreihe

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad x \in (-2\pi, 2\pi),$$

definiert. Zeigen Sie: Für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 3$ gilt $B_n = 0$.

Aufgabe 4. (1+1+3+3 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

Die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Fibonacci-Zahlen ist rekursiv definiert durch

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

- Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $F_n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Zeigen Sie mittels a), dass die durch $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ definierte Potenzreihe einen positiven

Konvergenzradius $r \geq \frac{1}{2}$ hat. Für diese $x \in (-r, r)$ sei $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$.

- Zeigen Sie mit der rekursiven Definition der Folge (F_n) , dass für $x \in (-r, r)$ gilt

$$g(x) = x + (x + x^2)g(x). \tag{G}$$

- Berechnen Sie nun eine explizite Darstellung für die F_n , indem Sie g an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylor-Reihe entwickeln.

Hinweis: Lösen Sie für alle x aus einer Umgebung von 0 die Gleichung (G) nach $g(x)$ auf und stellen Sie $g(x)$ mittels Partialbruchdarstellung in der Form $g(x) = \frac{A}{x - \varphi} + \frac{B}{x - \psi}$ dar.