UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Sommersemester 2020
Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis II, Übungsblatt 8

Abgabe bis Donnerstag, 28. Mai 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle. Beachten Sie auch das Begleitvideo im Moodle.

Aufgabe 1. (2+2+2 Punkte) Betrachten Sie die Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Funktionen $s_n : I \to \mathbb{R}$ mit

a) $s_n(x) = x^n(1-x)^n,\ x \in I = [0,1]$,

b) $s_n(x) = x^n(1-x^n),\ x \in I = [0,1]$,

c) $s_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ x \in I = \mathbb{R}$.

Entscheiden Sie jeweils, ob die Folgen punktweise konvergent sind und ob sie auf I gleichmäßig konvergent sind. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte) Die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ stetiger Funktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch $f_0(x) = 2(1-x)$, $x \in [0,1]$, und für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$f_k(x) = (k+2)(k+1)x^k(1-x) - (k+1)kx^{k-1}(1-x), \quad x \in [0,1],$$

definiert. Ferner sei $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ für alle $x \in [0,1]$.

a) Konvergiert die Partialsummenfolge $s_n(x)$ für $x \in [0,1]$ punktweise gegen eine Grenzfunktion $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$?

b) Falls in a) punktweise Konvergenz vorliegt, ist diese auch gleichmäßig?

c) Bestimmen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right) \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3. (2+2+2 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)
Für die folgenden Vektorfelder $\mathbf{F}(x,y,z) = (u(x,y,z),\ v(x,y,z),\ w(x,y,z))$ berechne man jeweils Quelldichte $\operatorname{div}\mathbf{F}$ und Wirbelstärke $\operatorname{rot}\mathbf{F}$:

a) $u(x,y,z) = \sin(x+y+z),\ v(x,y,z) = \cos(x+y+z),\ w(x,y,z) = 0$,

b) $u(x,y,z) = y^2 + z^2,\ v(x,y,z) = x^2 + z^2,\ w(x,y,z) = x^2 + y^2$,

c) $u(x,y,z) = \frac{1}{x},\ v(x,y,z) = \frac{1}{y},\ w(x,y,z) = \frac{1}{z}$.

Aufgabe 4. (3+3 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)
Betrachten Sie für $j \in 1,2,3,4$ die parametrisierten Kurven $\boldsymbol{\gamma}_j : [j-1, j] \to \mathbb{R}^2$, die komponentenweise von der affinen Gestalt $t \mapsto mt + n$ sind und dadurch bestimmt, dass $\boldsymbol{\gamma}_1(1) = (0,1) = \boldsymbol{\gamma}_2(1)$, $\boldsymbol{\gamma}_2(2) = (-1,0) = \boldsymbol{\gamma}_3(2)$, $\boldsymbol{\gamma}_3(3) = (0,-1) = \boldsymbol{\gamma}_4(3)$,

$\boldsymbol{\gamma}_4(4) = (1,0) = \boldsymbol{\gamma}_1(0)$.

a) Skizzieren Sie die Kurven $\boldsymbol{\gamma}_j$.

b) Bestimmen Sie für die durch $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}_j(t)$, $t \in [j-1, j]$, $j = 1,2,3,4$, bestimmte stückweise stetig differenzierbare parametrisierte Kurve $\boldsymbol{\gamma} : [0,4] \to \mathbb{R}$ die Kurvenintegrale 2. Art

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \big((x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y\big)\,, \quad \int_{\boldsymbol{\gamma}} \big((x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y\big)\,.$$