Sommersemester 2020
Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis II, Übungsblatt 6

Abgabe bis Donnerstag, 14. Mai 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle. Beachten Sie auch das Begleitvideo im Moodle.

Aufgabe 1. (1+2+1 Punkte) Gegeben sei die reelle Zahl $\alpha > 0$. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

$$\text{a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c)} \int_{-\infty}^\infty x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2. (4+4 Punkte) Gegeben sei $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Entscheiden Sie für die folgenden beiden Integrale jeweils in Abhängigkeit von γ, ob es sich um ein (gewöhnliches) Riemann-Integral, um ein konvergentes uneigentliches Riemann-Integral oder um ein divergentes uneigentliches Riemann-Integral handelt.

Geben Sie in den ersten beiden Fällen den Wert des Integrals an.

$$\text{a)} \int_1^\infty |2x+5|^\gamma\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \int_{-3}^1 |2x+5|^\gamma\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3. (2 Zusatzpunkte) Existiert für die unbeschränkte Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{für} \quad x \in [n - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2n^3}] \text{ und } n = 1,2,3,\dots, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$?

Aufgabe 4. (6 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)
Beweisen Sie, dass die stetige Kurve $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2) : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t\sin\frac{1}{t}$ nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)
Gegeben sei die Neilsche Parabel $\boldsymbol{f} :\ [0, \sqrt{5}/3] \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [0, \sqrt{5}/3]$. Bestimmen Sie die Bogenlänge dieser Kurve.