



Analysis II, Übungsblatt 10

Abgabe bis Donnerstag, 11. Juni 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle.
Beachten Sie auch das Begleitvideo im Moodle.

Aufgabe 1. (4+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch Multiplikation der entsprechenden Reihen die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{2+x}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der gefundenen Reihenentwicklung.

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie Partialbruchzerlegung auf f anwenden und dann die Potenzreihen zusammenfassen.

Aufgabe 2. (4+2 Punkte)

a) Ist die Reihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right)$ für $|x| \leq 1$ gleichmäßig konvergent?

b) Zeigen Sie, dass durch gliedweise Differentiation dieser Reihe eine Reihe entsteht, die für $-1 < x \leq 1$ konvergent ist. Zeigen Sie außerdem, dass die gliedweise differenzierte Reihe nicht mehr überall in $-1 < x \leq 1$ die Ableitung der stetigen Funktion f liefert, die durch die Ausgangsreihe dargestellt wird.

Aufgabe 3. (4+2 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

Gegeben sei die Kurve $\gamma(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t, 2t)$ für $0 \leq t \leq \pi$.

a) Berechnen Sie die Länge der Kurve.

b) Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $\gamma(\pi)$ an.

Aufgabe 4. (3+3 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

a) Untersuchen Sie die Vektorfelder $\mathbf{F}_1(x, y, z) = (1+yz, 1+xz, 1+xy)$ und $\mathbf{F}_2(x, y, z) = ((x+1)yz, (y+1)xz, (z+1)xy)$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit. Handelt es sich um Potenzialfelder? Bestimmen Sie im Fall der Existenz das Potenzial.

b) Berechnen Sie für die beiden Felder das Kurvenintegral (2. Art) von \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 über dem Geradenstück vom Koordinatenursprung zum Punkt $(1, 1, 1)$.

Aufgabe 5. (3 Zusatzpunkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

Betrachten Sie noch einmal die Vektorfelder $\mathbf{F}_1(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$ und $\mathbf{F}_2(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ aus Aufgabe 8.4.

Für welches der beiden Felder existiert eine Potenzialfunktion? Berechnen Sie dann dieses Potenzial.