UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Sommersemester 2020

Prof. Dr. J. Prestin

Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis II, Übungsblatt 4

Abgabe bis Donnerstag, 30. April 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Gegeben sei $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$. Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die durch den Graph von f und die x-Achse begrenzt ist.

Aufgabe 2. Betrachten Sie

a) (4 Punkte)
$I = [0,1]$, $x_{n,k} := k/n$, $k = 0, \dots, n$, und $\xi_{n,k} = x_{n,k} \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}]$, $k = 1, \dots, n$, sowie $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$,

b) (4 Punkte)
$I = [1,2]$, $x_{n,k} = \left(\sqrt[n]{2}\right)^k$, $k = 0, \dots, n$, und $\xi_{n,k} = x_{n,k-1} \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}]$, $k = 1, \dots, n$, sowie $f(x) = 1/x^2$, $x \in [1,2]$,

c) (4 Zusatzpunkte)
$I = [1,2]$, $x_{n,k} = 1 + k/n$, $k = 0, \dots, n$, $\xi_{n,k} = \sqrt{x_{n,k-1} x_{n,k}} \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}]$, $k = 1, \dots, n$, sowie $f(x) = 1/x^2$, $x \in [1,2]$.

i) Zeigen Sie zunächst jeweils

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} |x_{n,k} - x_{n,k-1}| = 0.$$

ii) Berechnen Sie dann für die jeweils angegebene Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ nach direkter Auswertung der Riemannschen Summen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k})(x_{n,k} - x_{n,k-1}).$$

Aufgabe 3. (6 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$. Ist durch $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(1,2,3)$ lokal eine implizite Funktion $z = g(x,y)$ mit $g(1,2) = 3$ gegeben? Berechnen Sie $g_x(1,2), g_y(1,2), g_{xx}(1,2), g_{yy}(1,2)$ und $g_{xy}(1,2)$, indem Sie

a) $f(x,y,g(x,y)) = 0$ geeignet partiell differenzieren,

b) $g(x,y)$ explizit bestimmen und dann ableiten.

c) Stellen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung von g entwickelt in $(1,2)$ auf.

Aufgabe 4. (6 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung) Bestimmen Sie globales Minimum und globales Maximum von $f(x,y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 2 = 0$

a) durch Einsetzen der Nebenbedingung in f und Lösen der Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingung

b) durch Verwendung eines Lagrange-Multiplikators.