UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Sommersemester 2020

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis II, Übungsblatt 12

Abgabe bis Donnerstag, 25. Juni 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle. Beachten Sie auch das Begleitvideo im Moodle.

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Gegeben sei die 2π-periodische Funktion f, die stückweise in $[-\pi, 0]$ und $[0, \pi]$ ein Polynom ersten Grades ist mit $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ und $f(0) = 1$.
Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

Aufgabe 2. (3+3 Punkte)
a) Wie lautet für $L > 0$ die Fourier–Reihenentwicklung einer L–periodischen Funktion?

b) Gegeben sei die reelle Zahl $L \geq 1$ und die L-periodische Funktion f gegeben durch $f(x) = 1$ für $0 \leq x \leq 1$ und $f(x) = 0$ für $1 < x < L$. Entwickeln Sie f in eine L-periodische Fourier-Reihe.

Aufgabe 3. (3+3 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

a) Berechnen Sie die Integrale $I_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$

b) Geben Sie für das elliptische Integral

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k^2 < 1,$$

eine Lösung in Form einer Potenzreihe in k mit Entwicklungspunkt 0 an.

Aufgabe 4. (3+3 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

a) In Blatt 9 haben Sie den Umfang der Ellipse mit der Parameterdarstellung $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, für $a \geq b > 0$ durch

$$U = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 (\sin t)^2} \, \mathrm{d}t, \qquad \varepsilon^2 := \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \ \varepsilon \in [0, 1)$$

bestimmt. Entwickeln Sie das Integral in eine Potenzreihe bzgl. ε^2 mit Entwicklungspunkt 0.

b) Zeigen Sie, dass für kleine ε eine brauchbare Näherungsformel durch

$$U \approx \pi(\frac{3}{2}(a + b) - \sqrt{ab})$$

gegeben ist.