UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Sommersemester 2020

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis II, Übungsblatt 11

Abgabe bis Donnerstag, 18. Juni 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle. Beachten Sie auch das Begleitvideo im Moodle.

Aufgabe 1. (6 Punkte) Die folgenden Funktionen f sind im jeweils angegebenen x_0 unendlich oft differenzierbar. Berechnen Sie alle $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie dann die jeweils zugehörige Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt x_0 an, und berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Taylor-Reihe.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3+2x}$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = \dfrac{1}{3+2x}$, $x_0 = -2$; c) $f(x) = \dfrac{x}{3+2x}$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{(3+2x)^4}$, $x_0 = -2$; e) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, $x_0 = -1$; f) $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-2x}$, $x_0 = 0$.

Aufgabe 2. (1+4+1 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+3k+1}{k+1} x^k$ den Konvergenzradius 1 besitzt.

b) $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle $x \in (-1,1)$ als der Grenzwert der Potenzreihe für $x \in (-1,1)$ definiert. Geben Sie eine geschlossene Darstellung in $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ von $f(x)$ an, die nur die Logarithmus-Funktion sowie rationale Operationen benutzt.

c) Zeigen Sie mit der Regel von L'Hospital direkt, dass der Grenzwert dieses geschlossenen Ausdrucks für $x \to 0$ tatsächlich $f(0)$ ist.

Aufgabe 3. (4+2 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)
Die Funktion h sei durch

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

definiert und $f(x) = \mathrm{e}^{h(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, in eine Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ entwickelt.

Berechnen Sie a_0, a_1, a_2, a_3.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. (3+1+2 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Ableitungen der Funktion $f(x) = x^3 \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f^{(n)}(a) = \mathrm{e}^a \left(a^3 + 3na^2 + 3n(n-1)a + n(n-1)(n-2)\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a \in \mathbb{R}$.

In in b) und c) sei jetzt $a \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest.

b) Betrachten Sie die Taylor-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

von f im Entwicklungspunkt a. Zeigen Sie, dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass die Taylor-Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen den Wert $f(x)$ konvergiert, indem Sie für das durch $f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_N(x)$ definierte Restglied $R_N(x)$ nachweisen, dass $\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0$.