UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Sommersemester 2020

Prof. Dr. J. Prestin
Dr. S. Ghanem, Dr. G. Pöplau, Dr. J. Schnieder, K. Schober

Analysis II, Übungsblatt 7

Abgabe bis Freitag, 22. Mai 2020, als Einzelabgabe durch Hochladen im Moodle. Beachten Sie auch das Begleitvideo im Moodle.

Aufgabe 1. (1+2+2 Punkte) Gegeben seien positive reelle Zahlen α, β, γ. Begründen Sie für die folgenden drei Integrale jeweils in Abhängigkeit von α, β, γ, ob es sich um ein konvergentes uneigentliches Riemann-Integral oder um ein divergentes uneigentliches Riemann-Integral handelt. Im Fall der Konvergenz berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals.

$$\text{a)} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{b)} \quad \int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c)} \quad \int_{\mathrm{e}^3}^\infty \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)^\gamma}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2. (1+1+1+2 Punkte) Gegeben seien positive reelle Zahlen α, β, γ. Begründen Sie für die folgenden drei Reihen jeweils in Abhängigkeit von α, β, γ, ob es sich um eine konvergente oder um eine bestimmt divergente unendliche Reihe handelt. Schätzen Sie im Fall der Konvergenz den Wert der Reihe in b) nach unten und oben geeignet ab.

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=3}^\infty \frac{1}{k(\ln k)^\beta}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{k=16}^\infty \frac{1}{k(\ln k)(\ln\ln k)^\gamma}.$$

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Entscheiden Sie für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n(x) = x^{-n}, \quad x \in [1,\infty)$, ob diese punktweise konvergiert, und wenn ja, gegen welche Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)
a) Geben Sie für $a, b > 0$ eine Jordan-Kurve $\boldsymbol{\gamma} : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{\gamma}([0, \frac{\pi}{2}]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ x, y \geq 0\}$$

und $\boldsymbol{\gamma}(0) = (a, 0)$ sowie $\boldsymbol{\gamma}(\frac{\pi}{2}) = (0, b)$ an.
b) Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f gegeben durch $f(x,y) = 1$, falls x eine rationale Zahl ist und $f(x,y) = 0$ sonst. Für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}$ bestimmen Sie die Darboux-schen Obersummen $U_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathcal{Z}, f)$ und Untersummen $L_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathcal{Z}, f)$ sowie das obere und untere Riemann-Integral mit Integrand f über der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$. Existiert das zugehörige Kurvenintegral 1. Art?

Aufgabe 5. (6 Punkte) (Für Hörer der Ergänzungsvorlesung)
Gegeben sei die Kurve $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, \mathrm{e}^t)$, $t \in [0,1]$. Bestimmen Sie das Kurvenintegral 1. Art der durch $f(x,y) = \sqrt{1+y^2}$ auf $\mathbb{R}^2$ definierten reellen Funktion f über der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$.