Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2022

Musterlösung zu Übungsblatt 7

Eike Petersen, Julia Sauer, Carlotta Hennigs[1]

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Schaltungen in Abbildung 1. Die Übertragungsfunktion für die Schaltung in Abbildung 1a sei gegeben mit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega L}{(j\omega)^2 LCR + j\omega L + R} \tag{1}$$

und für die Schaltung in Abbildung 1b mit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_1 + j\omega L_1}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)}. \tag{2}$$

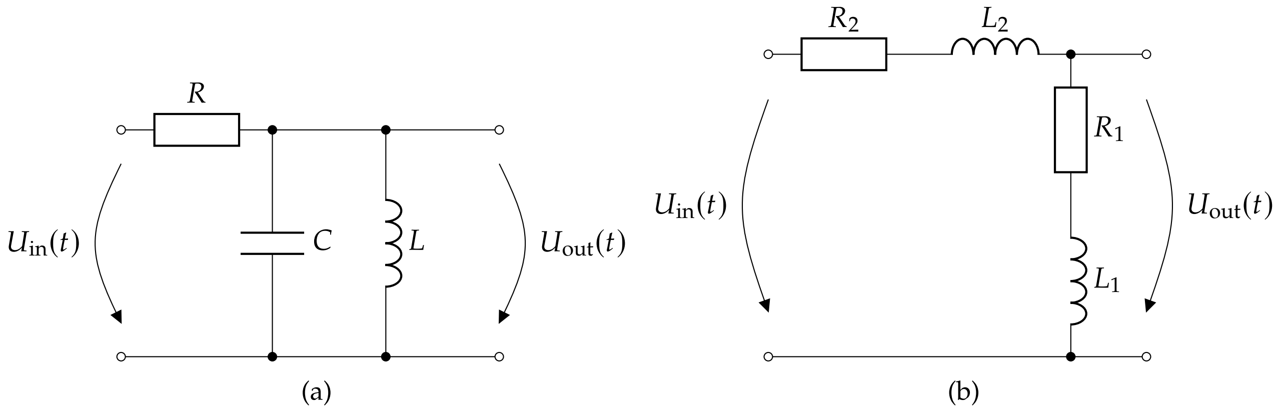


Abbildung 1

Weiterhin sind die Bode-Diagramme der beiden Schaltungen in Abbildung 2 und Abbildung 3 dargestellt.

i) Für die Schaltung in Abbildung 1a sei $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ und $L = 40\,\mu\mathrm{H}$. Bestimmen Sie anhand des zugehörigen Bode-Diagramms näherungsweise die Kapazität C.

   Hinweis: Lesen Sie hierzu **einen** markanten Punkt im Betragsdiagramm ab.

ii) Für die Schaltung in Abbildung 1b sei $L_1 = 10\,\mathrm{mH}$ und $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$. Bestimmen Sie anhand des zugehörigen Bode-Diagramms näherungsweise die Bauteilparameter L_2 und R_2.

   Hinweis: Betrachten Sie jeweils das Amplitudenverhalten für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.

[1] Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits“.

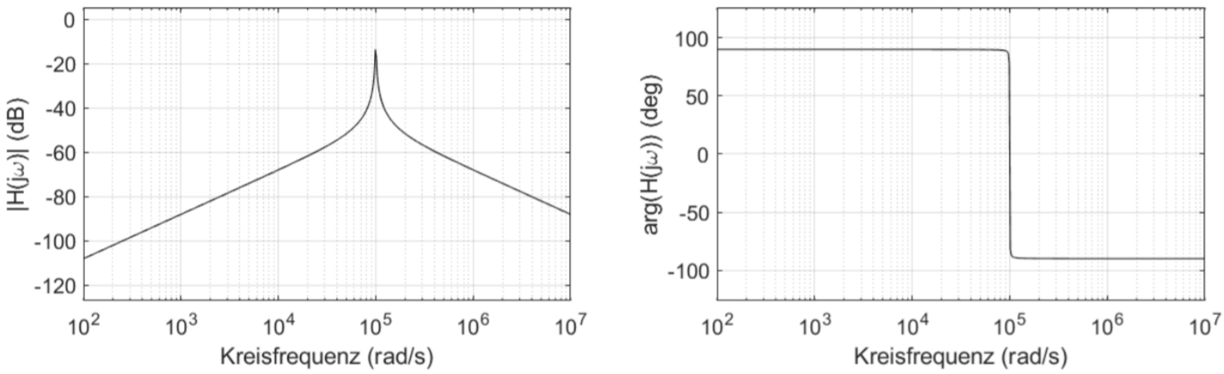


Abbildung 2: Amplituden- und Phasengang für die Übertragungsfunktion (1)

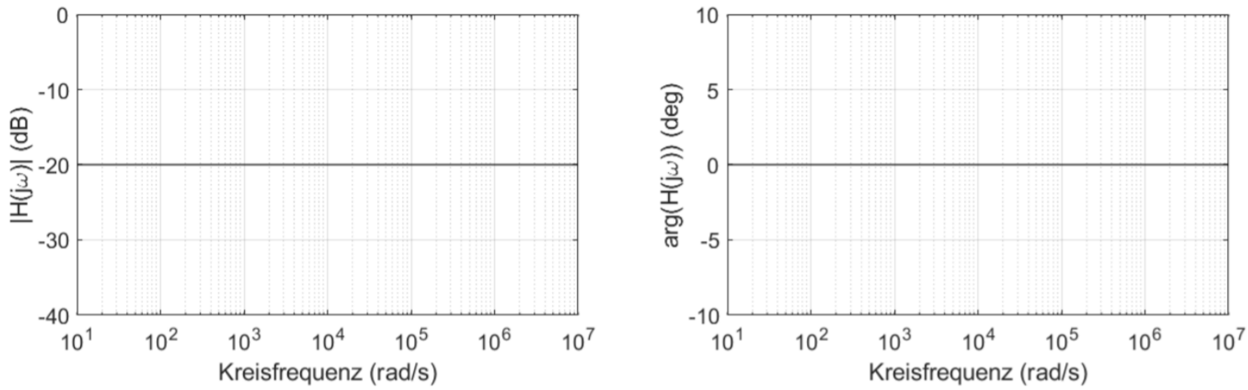


Abbildung 3: Amplituden- und Phasengang für die Übertragungsfunktion (2)

Lösung

i) Wir lesen den Resonanzpeak bei $\omega = 10^5$ rad/s und ungefähr -15 dB ab. Durch Einsetzen in den Betrag Übertragungsfunktion (1) und umstellen erhalten wir

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{(R - \omega^2 LCR)^2 + (\omega L)^2}} \tag{3}$$

$$10^{-15/20} = \frac{10^5\ \text{rad/s} \cdot 40\,\mu\text{H}}{\sqrt{(1\,\text{k}\Omega - (10^5\ \text{rad/s})^2 \cdot 40\,\mu\text{H} \cdot 1\,\text{k}\Omega \cdot C)^2 + (10^5\ \text{rad/s} \cdot 40\,\mu\text{H})^2}} \tag{4}$$

$$C \approx 2.5 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 2.5\,\mu\text{F}. \tag{5}$$

ii) Obwohl die Schaltung in Abbildung 1b zwei Induktivitäten, also mehrere dynamische Bauteile besitzt, ist sowohl der Betrag als auch die Phase für alle Frequenzen konstant. Dieses Verhalten kennen wir sonst nur für rein resistive Schaltungen. Allerdings ist es dafür erforderlich die Bauteilparameter exakt zu wählen, wie wir im Folgenden sehen werden.

Sowohl für $\omega \to 0$ als auch $\omega \to \infty$ beträgt die Verstärkung -20 dB bzw. 10^{-1}. Einsetzen von $\omega = 0$ rad/s in die Gleichung (2) ergibt

$$\underline{H}(j\omega = 0) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{10}. \tag{6}$$

Mit $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$ und durch Umstellen zu R_2 folgt, dass $R_2 = 9\,\text{k}\Omega$.

Bei hohen Frequenzen ($\omega \to \infty$) soll die Verstärkung den gleichen Wert haben. Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{\omega\to\infty} \underline{H}(j\omega) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{10}. \tag{7}$$

Mit $L_1 = 10$ mH und Umstellen zu L_2 folgt, dass $L_2 = 90$ mH.

Durch Einsetzen von $R_1 + R_2 = 10 \cdot R_1$ und $L_1 + L_2 = 10 \cdot L1$ in die Übertragungsfunktion sehen wir, dass

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_1 + j\omega L_1}{10 \cdot (R_1 + j\omega L_1)} = \frac{1}{10} \tag{8}$$

was das konstante Verhalten aus Abbildung 3 bestätigt.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das in Abbildung 4 dargestellte Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{out}}(j\omega)}{\underline{U}_{\mathrm{in}}(j\omega)}$$

einer elektrischen Schaltung. Abbildung 5 zeigt den zeitlichen Verlauf der Eingangsspannung $u_{\mathrm{in}}(t)$ und der Ausgangsspannung $u_{\mathrm{out}}(t)$, welcher sich dabei an dieser Schaltung ergibt. Bestimmen Sie anhand der Signaleigenschaften der Ausgangsspannung die Periodendauer T_{in} und T_{out} der Schwingungen an Ein- und Ausgang. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.
Hinweis: Die Eingangsspannung hat die Form $u_{\mathrm{in}}(t) = A\sin(\omega t)$. Überlegen Sie zunächst, welche Verstärkung und Phasenverschiebung Sie aus $u_{\mathrm{out}}(t)$ ablesen können.

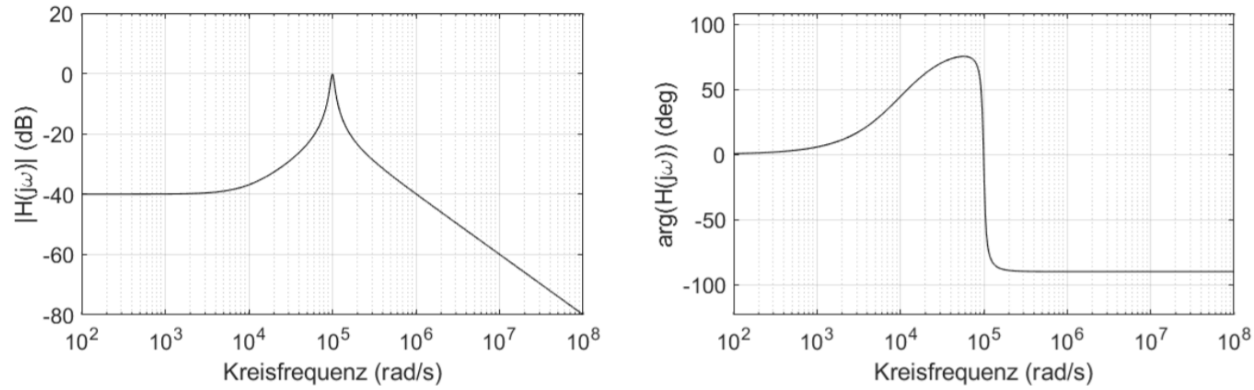


Abbildung 4

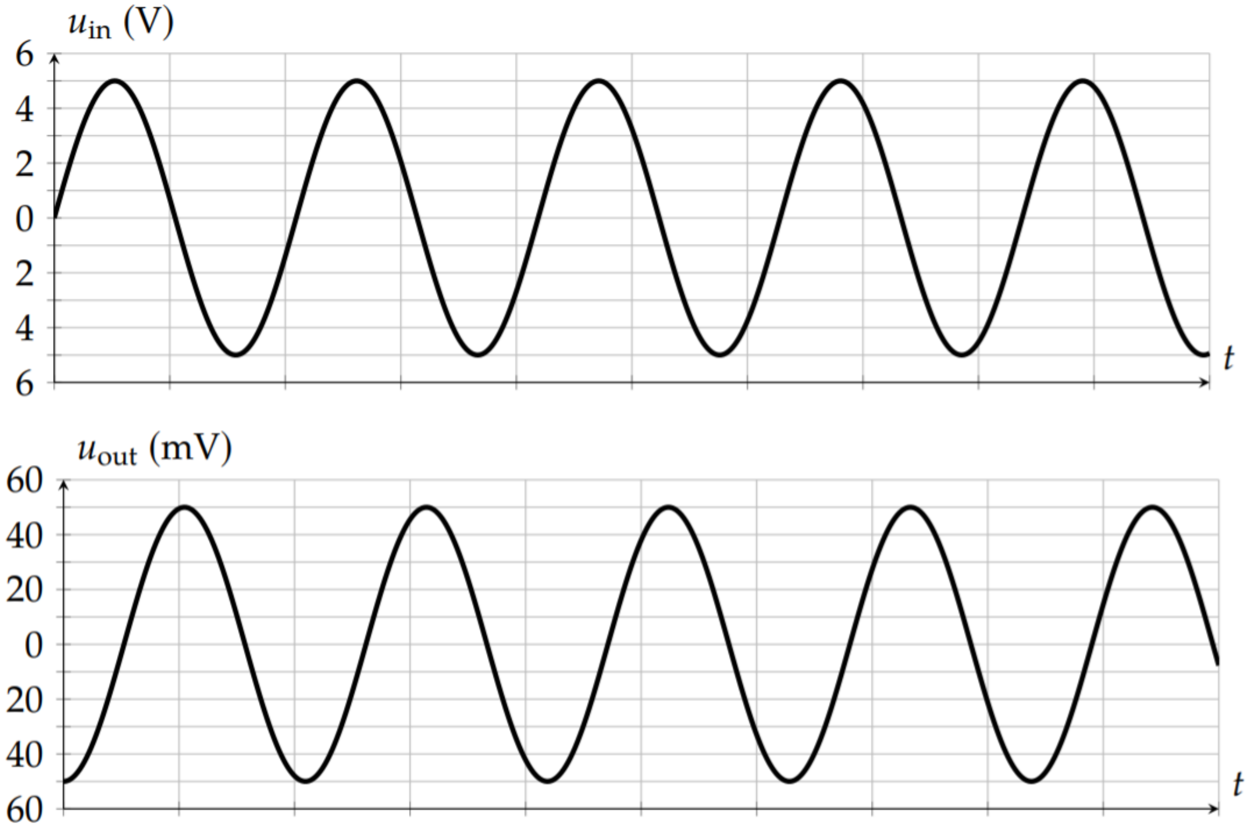


Abbildung 5

Lösung

Da das System eine Übertragungsfunktion hat, muss es linear sein. In linearen Systemen mit sinusförmiger Anregung schwingen alle Ströme und Spannungen mit derselben Frequenz; somit gilt $\omega_{\text{in}} = \omega_{\text{out}}$ und $T_{\text{in}} = T_{\text{out}}$.
Wir lesen zunächst die Amplituden aus Abbildung 5 ab und erhalten

$$A_{\text{in}} = 5\,\text{V} \quad \text{und} \quad A_{\text{out}} = 50\,\text{mV} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{V},$$

was einer Verstärkung von 10^{-2} bzw. $-40\,\text{dB}$ entspricht.
Da der Sinus periodisch ist, gibt es für die Phasenverschiebung unendlich viele Möglichkeiten; zum Beispiel eine Verschiebung nach rechts um $-90°$ oder $-450°$ bzw. nach links um $270°$ oder $630°$.
Nun vergleichen wir mit der Übertragungsfunktion im Bode-Diagramm. Eine Verstärkung von $-40\,\text{dB}$ finden wir bei Frequenzen kleiner als ungefähr $3 \cdot 10^3$ rad/s und bei 10^6 rad/s. Im ersten Fall liegt die Phasenverschiebung jedoch bei $0°$ to $10°$, was nicht zu den vorher abgelesenen Werten passt. Für $\omega = 10^6$ rad/s ist $\phi = -90°$, was genau zu den Kurven in Abbildung 5 passt.
Für die Periodendauer ergibt sich also

$$T_{\text{in}} = T_{\text{out}} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10^6}\text{s}.$$

Aufgabe 3

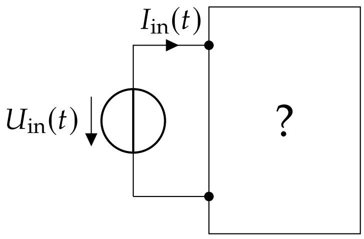
An ein lineares Netzwerk bestehend aus exakt zwei linearen Bauteilen (R, L oder C) werden sinusförmige Testsignale $U_{\text{in}}(t)$=$A \sin(\omega t - \varphi_0)$ unterschiedlicher Frequenzen angelegt, siehe Abbildung 6a. Der gemessene Betrag der Impedanz

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{in}}(j\omega)}{\underline{I}_{\text{in}}(j\omega)}$$

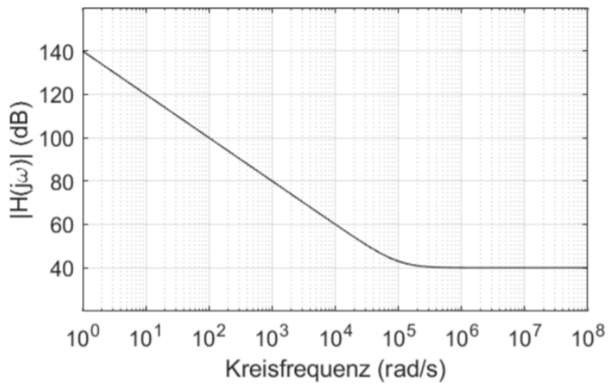
als Funktion der Frequenz ω ist in Abbildung 6b dargestellt.

i) Bestimmen Sie das Netzwerk und die dazugehörigen Bauteilparameter. Begründen Sie Ihre Lösung.

ii) Skizzieren Sie das zugehörige Phasendiagramm.



(a)



(b)

Abbildung 6

Lösung

i) Beim Betrachten des Impedanzdiagramms sehen wir, dass der Betrag der Impedanz für niedrige Frequenzen sehr groß ist und dann mit $\frac{20\,\mathrm{dB}}{\mathrm{dec}}$ abfällt, bis er ab $\omega = 10^5$ rad/s konstant mit 40 dB verläuft.

Bei niedrigen Frequenzen fällt der Betrag, wenn die ω steigt. Die Beziehung ist antiproportional, weshalb der Betrag durch einen in $\frac{1}{\omega}$ linearen Term bestimmt wird; beispielsweise die Impedanz einer Kapazität $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$. Um C zu bestimmen, lesen wir einen Punkt ab z. B. 140 dB bei 10^0 rad/s. Daraus folgt, dass $C = 10^{-7}\mathrm{F} = 100\,\mathrm{nF}$.

Bei hohen Frequenzen ist das Verhalten offenbar durch einen Widerstand R bestimmt. Wir lesen 40 dB ab, was $R = 100\,\Omega$ entspricht.

Das Verhalten in Abbildung 6b ist also genau das einer RC-Reihenschaltung (Abbildung 7) mit $\underline{Z}_{RC} = R + \frac{1}{j\omega C}$.

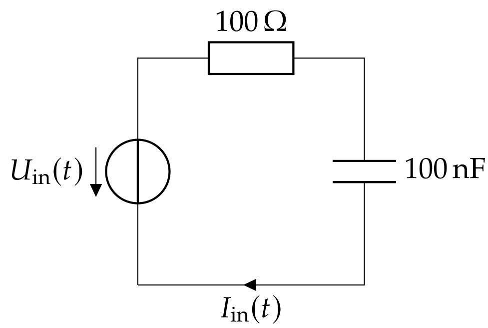


Abbildung 7

ii) Die Abbildung 8 zeigt den Phasengang der berechneten Impedanz.

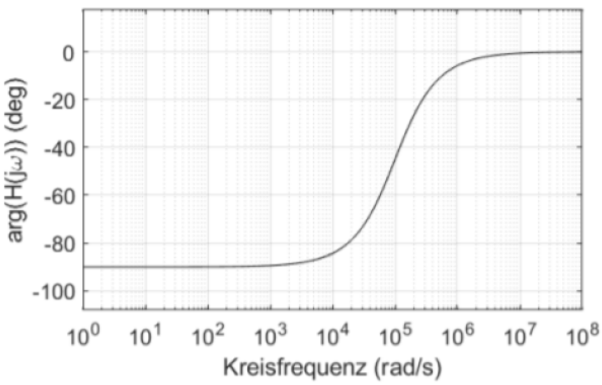


Abbildung 8