Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2021

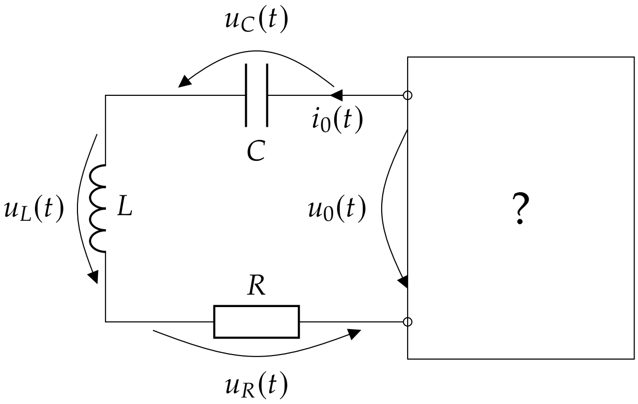
Musterlösung zu Übungsblatt 8

Eike Petersen, Carlotta Hennigs[1]

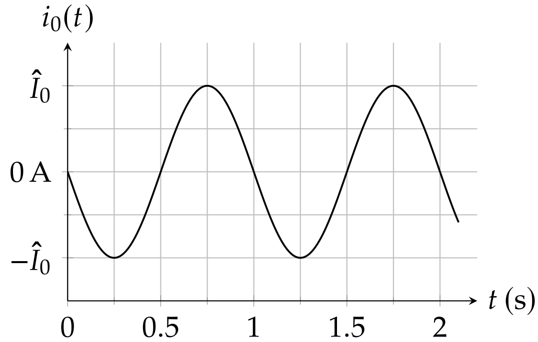
Besprechung am 18. Juni 2021

Aufgabe 1 (Klausuraufgabe SS 2018 – Verständnis)

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 1a, in welcher eine RLC-Reihenschaltung an ein unbekanntes Netzwerk angeschlossen ist. Abbildung 1b zeigt den Zeitverlauf des Stroms $i_0(t)$.



(a)



(b)

Abbildung 1

a) Bestimmen Sie den Zeiger $\underline{I}_0$ und zeichnen Sie diesen in ein Zeigerdiagramm ein.

b) Zeichnen Sie die Richtungen der Zeiger für die drei Spannungen $\underline{U}_R$, $\underline{U}_C$ und $\underline{U}_L$ ebenfalls ins Diagramm ein.

c) Welche Aussage können Sie über die Beziehung zwischen den Zeigern $\underline{U}_R$, $\underline{U}_C$, $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_0$ treffen, unabhängig von den Bauteilwerten R, L und C?

d) Welche möglichen Werte kann der Phasenwinkel der Gesamtspannung $\underline{U}_0$ an der Reihenschaltung annehmen? Markieren Sie den Bereich in Abbildung 1b, in welchem die Spannung $u_0(t)$ ihren Maximalwert erreichen kann.

[1] Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits“.

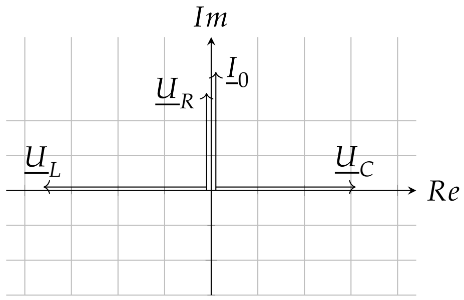


Abbildung 2: Zeigerdiagramm. Alle Zeiger gehen vom Nullpunkt aus und sind nur zu Darstellungszwecken mit kleinem Abstand gezeichnet. Alle Zeigerlängen sind willkürlich gewählt, da keine Bauteilwerte gegeben sind.

Lösung

a) Wir lesen im Zeitverlauf ab, dass die Amplitude der Schwingung $\hat{I}_0$ ist und die Cosinus-Schwingung um $+\pi/2$ verschoben ist. Der Zeiger lautet somit

$$\underline{I}_0 = \hat{I}_0 \cdot e^{j\pi/2}. \tag{1}$$

b) An ohm'schen Widerständen sind Ströme und Spannungen in Phase:

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R. \tag{2}$$

Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Zeigern beträgt somit 0 deg und beide zeigen in dieselbe Richtung.

An Kapazitäten gilt

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = \frac{-j}{\omega C} \cdot \underline{I} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j\pi/2} \cdot \underline{I}, \tag{3}$$

dort gilt also $\phi_U = \phi_I - \pi/2$.

An Induktivitäten gilt

$$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I} = \omega L \cdot e^{j\pi/2} \cdot \underline{I}, \tag{4}$$

dort gilt also $\phi_U = \phi_I + \pi/2$.

Abbildung 2 zeigt die relativen Richtungen aller besprochenen Zeiger. Die Längen sind willkürlich gewählt, da ja keine Bauteilparameter gegeben sind.

c) Es gilt (Maschenregel)

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_R + \underline{U}_C + \underline{U}_L, \tag{5}$$

der Zeiger $\underline{U}_0$ ergibt sich also durch Vektoraddition der drei anderen Spannungszeiger.

d) Da keiner der drei Zeiger „nach unten zeigt", muss gelten, dass $0 \leq \arg(\underline{U}_0) \leq \pi$. Je nach relativer Größe der Bauteilparameter R, L und C kann die Summe der drei Zeiger irgendwo in der oberen Halbebene liegen. Das Maximum der Schwingung $u_0(t)$ liegt damit in Abbildung 1b irgendwo zwischen den Zeitpunkten 0.5 s und 1 s.

Aufgabe 2

Abbildung 3 zeigt die in Aufgabe 3 auf Übungsblatt 6 untersuchte Schaltung. Dort war das Ergebnis, dass die Spannung $u_C(t)$ bei der Frequenz $\omega = 200\,\mathrm{rad/s}$ eine doppelt so hohe Amplitude (nämlich 2 V) wie die Eingangsspannung $u_{\text{in}}(t)$ hat.

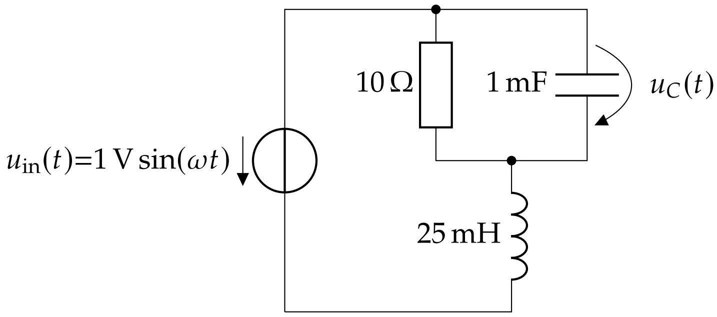


Abbildung 3

a) Wie ist es physikalisch möglich, dass eine Spannung in einer Schaltung eine höhere Amplitude aufweist als die Eingangsspannung?

b) Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_C(j\omega)}{\underline{U}_{\text{in}}(j\omega)}. \tag{6}$$

Untersuchen Sie hierzu das Verhalten für große und kleine Frequenzen und bestimmen Sie die Resonanzfrequenz ω_0, die Mittenfrequenz ω_c, sowie die Bandbreite 2α. Was können Sie über die gewählte Frequenz $\omega = 200\,\mathrm{rad/s}$ beobachten?

Lösung

a) Der beobachtete Effekt nennt sich *Resonanz* und tritt auf, wenn ein dynamisches System bei einer Frequenz angeregt wird, bei der es von alleine schwingt: in diesem Fall überlagert sich die Eigenschwingung des Systems mit der zusätzlichen Anregung von außen, und es kann zu größeren Schwingungsamplituden kommen als am Eingang anliegen.

b) Die Übertragungsfunktion lautet (siehe Blatt 6)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_{\text{in}}} = \frac{R}{(j\omega)^2 RLC + j\omega L + R}. \tag{7}$$

Für kleine Frequenzen erhalten wir die Asymptote

$$\lim_{\omega\to 0} \underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R} = 1 = 0\,\mathrm{dB}. \tag{8}$$

Für große Frequenzen lautet die Asymptote

$$\lim_{\omega\to\infty} \underline{H}(j\omega) = \frac{R}{(j\omega)^2 RLC} = \frac{-1}{LC} \cdot \omega^{-2} = K \cdot \omega^{-2}. \tag{9}$$

Diese Asymptote hat (siehe Musterlösung 7) die Steigung $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Um die entsprechende Gerade zeichnen zu können, benötigen wir noch einen Punkt, der auf der Geraden liegt. Wir bestimmen dazu den Schnittpunkt mit der 0 dB-Linie (andere Punkte gingen aber ebenso gut):

$$0\,\mathrm{dB} = |\frac{-1}{LC} \cdot \omega^{-2}| \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{10}$$

der Schnittpunkt liegt also bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 200\,\mathrm{rad/s}$. Einzeichnen der beiden Asymptoten ins Bode-Diagramm liefert bereits eine grobe Skizze des Verlaufs. Was geschieht aber in dem Bereich, in dem sich die beiden Asymptoten schneiden? Um das näher zu untersuchen, betrachten wir den Wert bei $\omega_0 = 200\,\mathrm{rad/s}$. Wir erhalten

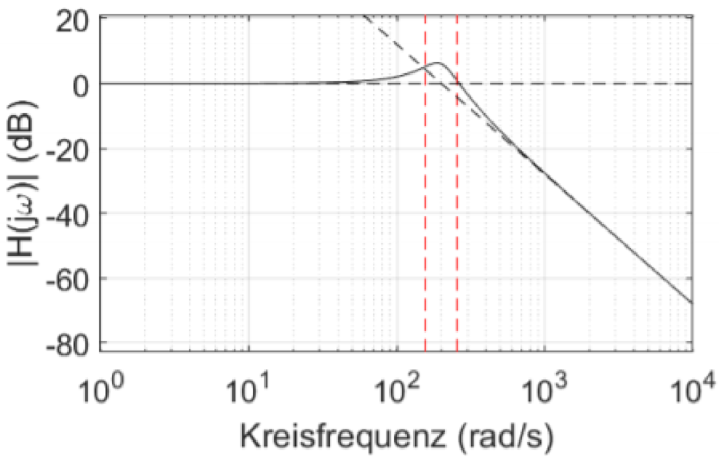
$$|\underline{H}(j\frac{1}{\sqrt{LC}})| = \left|\frac{R}{-R + j\sqrt{L/C} + R}\right| = 2 \approx 6\,\mathrm{dB}, \tag{11}$$

womit wir die Höhe des Kurvenverlaufs im Übergangsbereich zwischen den beiden Asymptoten ebenfalls skizzieren können.

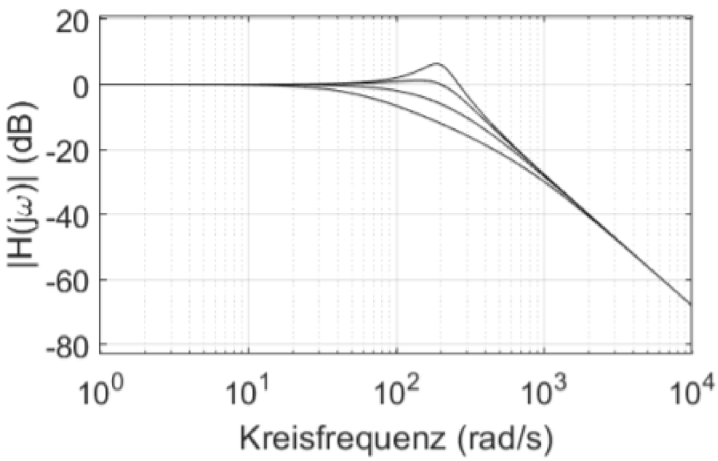
Einige für das Zeichnen des Bode-Diagramms nützliche Kennzahlen sind:

- Die Bandbreite $2\alpha = 100\,1/\mathrm{s}$, welche die Breite des Resonanzpeaks beschreibt. Beim Bandpass-Filter wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $\omega_{0.707}^{(1)} - \omega_{0.707}^{(2)} = 2\alpha$ ist; dort hat die Bandbreite also eine sehr einfache Interpretation: sie definiert die Punkte, bei denen der Betrag der Übertragungsfunktion um 3 dB gegenüber dem Maximum abgefallen ist. Beim Hoch- oder Tiefpassfilter (wie hier) ist die Bandbreite leider nicht so leicht interpretierbar, gibt jedoch ebenfalls ein Maß für die Peak-Breite an.
- Der Qualitätsfaktor $Q = \omega_0/(2\alpha) = 2$, welcher die „Steilheit“ der Resonanzüberhöhung beschreibt. Für $Q > 0.5$ ist das System unterkritisch gedämpft und es gibt ein lokales Maximum.
- *Nur bei Bandpass- und Bandstopp-Filter:* Die Mittenfrequenz („center frequency“) $\omega_c = \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$, bei welcher das Maximum des Resonanzpeaks liegt. Diese liegt meist sehr nah bei der Resonanzfrequenz ω_0, weshalb die Amplitude bei dieser ebenfalls eine gute Näherung für die Peak-Höhe darstellt. Die obige Berechnungsvorschrift gilt allerdings nicht für Hoch- und Tiefpassfilter.

Abbildung 4a zeigt das Bode-Diagramm mit den eingezeichneten Asymptoten sowie die Bandbreite. Abbildung 4b zeigt das Bode-Diagramm für unterschiedliche Qualitätsfaktoren (erhalten durch Änderung von R). Wir erkennen, dass die Frequenz $\omega = 200\,\mathrm{rad/s}$, bei welcher die Schaltung in dieser Aufgabe betrieben wird, genau der Resonanzfrequenz ω_0 des Systems entspricht, bei welcher das System von alleine schwingungsfähig ist. Die Überlagerung der Eigenschwingungen des Systems sowie der externen Anregung führt dazu, dass die Amplitude der Kondensatorspannung bei dieser Frequenz größer als die der Eingangsspannung ist.



(a) Betragsverlauf mit eingezeichneten Asymptoten für große und kleine Frequenzen und Bandbreite (rot)



(b) Betragsverlauf für unterschiedliche Qualitätsfaktoren (von oben nach unten): $Q = 2$ (unterkritisch), $Q = 1$ (unterkritisch), $Q = 0.5$ (kritisch), $Q = 0.25$ (überkritisch).

Aufgabe 3

Im Folgenden sind fünf Aussagen über das in Abbildung 5 dargestellte, dynamische System zweiter Ordnung gegeben. Das System besteht ausschließlich aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten. Welche der fünf Aussagen sind konsistent untereinander (treffen also für dasselbe System zu), und welche nicht?

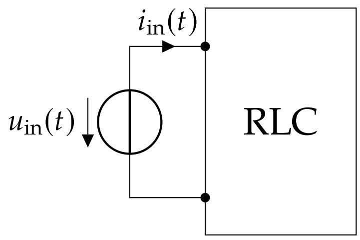


Abbildung 5

a) Die Lösungen der charakteristischen Gleichung des Systems lauten $s_{1/2} = -5 \pm j12$.

b) Der Qualitätsfaktor des Systems beträgt $Q = 1.2$.

c) Für die Admittanz des Systems gilt

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{\underline{I}_{\text{in}}}{\underline{U}_{\text{in}}} = \frac{2j\omega}{(169 - \omega^2) + 10j\omega}. \tag{12}$$

d) Die Sprungantwort des Systems ist von der Form

$$i_{\text{in}}(t) = A\mathrm{e}^{-5t}\cos(12t + \varphi). \tag{13}$$

e) Die Steady-State-Antwort des Systems auf eine Eingangsschwingung $u_{\text{in}}(t) = B\cos(25t)$ ist von der Form

$$i_{\text{in}}(t) = C\cos(25t + \theta). \tag{14}$$

Lösung

a) Es gilt somit $\alpha = 5$ und $\omega_d = 12$, woraus folgt:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \alpha^2} = 13. \tag{15}$$

b) In Teil a) galt $Q = \omega_0/(2\alpha) = 1.3 \neq 1.2$, diese beiden Aussagen sind also nicht kompatibel.

c) Wir bringen den Ausdruck auf Normalform

$$\underline{Y}(j\omega) = \frac{\underline{I}_{\text{in}}}{\underline{U}_{\text{in}}} = \frac{2j\omega}{(169 - \omega^2) + 10j\omega} = \frac{2j\omega}{(j\omega)^2 + 10j\omega + 169} \tag{16}$$

und lesen ab, dass $\alpha = 10/2 = 5$ und $\omega_0 = \sqrt{169} = 13$ ist, was sich mit Aussage a) deckt.

d) Aus der Standardform der Sprungantwort lesen wir ab, dass offenbar $\alpha = 5$ und $\omega_d = 12$ ist, was sich mit Aussagen a) und c) deckt.

e) Das gilt für jedes lineare System!