

Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2022

Musterlösung zu Übungsblatt 3

Eike Petersen, Julia Sauer, Carlotta Hennigs¹

Besprechung am 13. Mai 2021

Aufgabe 1 (Klausuraufgabe SS 2017 - Anwendung)

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 1a.

- i) Stellen Sie eine Differentialgleichung für den Strom $i(t)$ in Abhängigkeit von der Eingangsspannung $u_{\text{in}}(t)$, sowie den Bauteilparametern R und L auf.
- ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung für $i(t = 0) = 0 \text{ A}$ und

$$u_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 0 \text{ V}, & t < 0, \\ 1 \text{ V}, & t \geq 0. \end{cases}$$

- iii) Skizzieren Sie den Zeitverlauf des Stroms $i(t)$ im leeren Diagramm in Abbildung 1b.

Erläutern Sie Ihren Lösungsweg für jeden der Aufgabenteile.

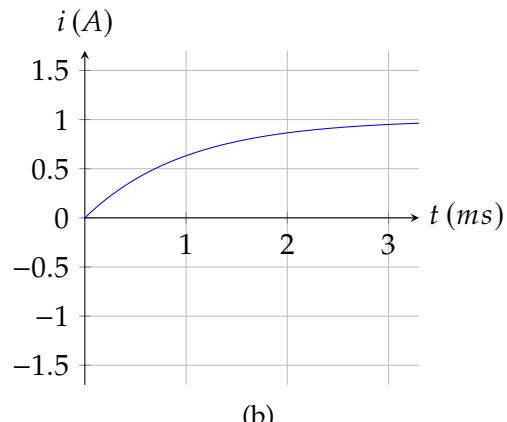
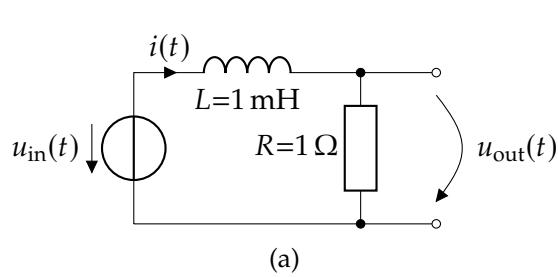


Abbildung 1

Lösung

- i) Es gelten

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{Bauteilgleichung der Induktivität}) \quad (1)$$

sowie

$$u_L(t) = u_{\text{in}}(t) - u_{\text{out}}(t) = u_{\text{in}}(t) - R \cdot i(t). \quad (\text{Maschengleichung und Ohm'sches Gesetz}) \quad (2)$$

¹Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits“.

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $u_L(t)$ ergibt

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} = u_{\text{in}}(t) - R \cdot i(t) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot u_{\text{in}}(t). \quad (4)$$

- ii) Da es eine aktive Quelle im Schaltkreis gibt – resultierend in der Inhomogenität $u_{\text{in}}(t)$ in der DGL (4) – setzt sich die allgemeine Lösung $i(t)$ aus einer homogenen Lösung $i_h(t)$, sowie einer partikulären Lösung $i_p(t)$ zusammen.

Für die Bestimmung der homogenen Lösung $i_h(t)$ nehmen wir zunächst an, die Inhomogenität $u_{\text{in}}(t)$ sei konstant gleich Null, es gelte also die homogenisierte DGL

$$\frac{di_h(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i_h(t) = 0 \text{ A/s.} \quad (5)$$

Mit dem Ansatz $i_h(t) = A \cdot e^{st}$ ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{R}{L}, \quad (6)$$

somit lautet die homogene Lösung

$$i_h(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (7)$$

Für die partikuläre Lösung machen wir die Annahme einer zeitlich konstanten Lösung und erhalten (für den Fall einer konstanten Eingangsspannung $U_{\text{in}} \equiv u_{\text{in}}(t)$)

$$\frac{di_p(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i_p(t) = \frac{R}{L} \cdot i_p(t) = \frac{1}{L} \cdot U_{\text{in}} \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow i_p(t) = \frac{1}{R} \cdot U_{\text{in}}. \quad (9)$$

Die allgemeine Lösung ist somit durch

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{R} \cdot U_{\text{in}} \quad (10)$$

gegeben. Einsetzen der Anfangsbedingung $i(t = 0) = 0 \text{ A}$ ergibt

$$i(t = 0) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} + \frac{1}{R} \cdot U_{\text{in}}|_{t \geq 0} = A + \frac{1}{R} \cdot 1 \text{ V} = 0 \text{ A} \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow A = -1 \text{ A} \quad (12)$$

und somit

$$i(t) = 1 \text{ A} \left(1 - e^{-1000t} \right) \quad (13)$$

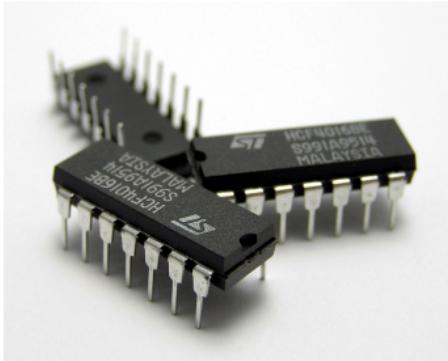
für $t \geq 0$. Für $t < 0$ ergibt sich

$$i(t = 0) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} + \frac{1}{R} \cdot U_{\text{in}}|_{t < 0} = A + \frac{1}{R} \cdot 0 \text{ V} = 0 \text{ A} \quad (14)$$

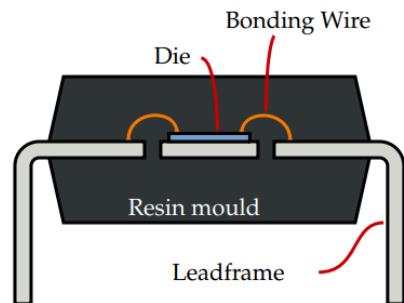
$$\Leftrightarrow A = 0 \text{ A}, \quad (15)$$

also $i(t) \equiv 0 \text{ A}$ für $t < 0$.

- iii) Siehe Abbildung 1b.



(a) Integrated circuits (ICs) in 14-pin dual in-line packages (DIP). Ein IC kann beispielsweise mehrere Logik-Gatter, Flip-flops oder Operationsverstärker enthalten.



(b) Schematische Darstellung eines dual in-line packages (DIP). Die tatsächliche Schaltung befindet sich auf dem „Die“, welcher oft nur einen Bruchteil des Package-Volumens einnimmt.

Abbildung 2

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe werden Sie den Einfluss parasitärer Induktivitäten in VLSI (Very Large-Scale Integrated) Packages untersuchen. Ein VLSI-Package bezeichnet einen in einem Kunststoff- oder Keramik-Gehäuse verpackten IC-Chip (Integrated Circuit Chip), siehe Abbildung 2a. Bei diesen Bauteilen ist es erforderlich, einige Anschlüsse des internen Schaltkreises durch das Gehäuse nach außen zu verbinden - Masse, Spannungsversorgung, sowie Eingangs- und Ausgangs-Knoten. Diese Verbindung erfolgt üblicherweise, indem die internen Knoten zunächst mit einem metallischen Pad auf dem VLSI-Chip verbunden werden. Dieses Pad wiederum wird durch einen Draht („Bonding Wire“) mit einem Package-Pin verbunden, siehe Abbildung 2b. Dieser Pin, welcher durch das Gehäuse hindurch reicht, stellt dann die Verbindung zu anderen Bauteilen her. Weitere Informationen über die Herstellung von Packages finden Sie z.B. in der Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Integrated_circuit_packaging.

Die Verbindung des Package-Pins, des Verbindungsdrähtes zwischen Pin und Pad, sowie der internen Chip-Verbindung stellt insgesamt eine nicht vernachlässigbare, parasitäre (=unerwünschte) Induktivität dar. In dieser Aufgabe untersuchen wir den Einfluss dieser parasitären Induktivität im Zusammenhang mit der Spannungsversorgung einer MOSFET-Schaltung. Abbildung 3a zeigt ein Modell des Beispielproblems. Zwei Invertierer mit Lastwiderständen R_1 und R_2 und MOSFET's mit ON-Widerständen R_{ON1} und R_{ON2} sind mit demselben Spannungsversorgungsknoten u_p auf dem internen Chip verknüpft. Idealerweise würde dieser Knoten mit einem idealen Drahtstück an die Package-externe Spannungsversorgung U_S angebunden werden. Praktisch tritt zwischen dem Chip-Knoten u_p und der externen Spannungsversorgung U_S aber die oben erwähnte, parasitäre Induktivität auf, wie auch in Abbildung 3a dargestellt.

Nehmen Sie an, die Eingangsspannung u_A betrage anfangs 0 V, bevor sie zum Zeitpunkt $t = t_0$ schließlich einen 5 V-Schritt durchführen. Die Eingangsspannung u_B betrage zu jedem Zeitpunkt 0 V. Skizzieren Sie den Zeitverlauf der internen Spannungsversorgung u_p ! Nehmen Sie dafür weiterhin an, für die MOSFET-Schwellenspannung U_T gelte $U_T < U_S$ und $U_T < 5 \text{ V}$.

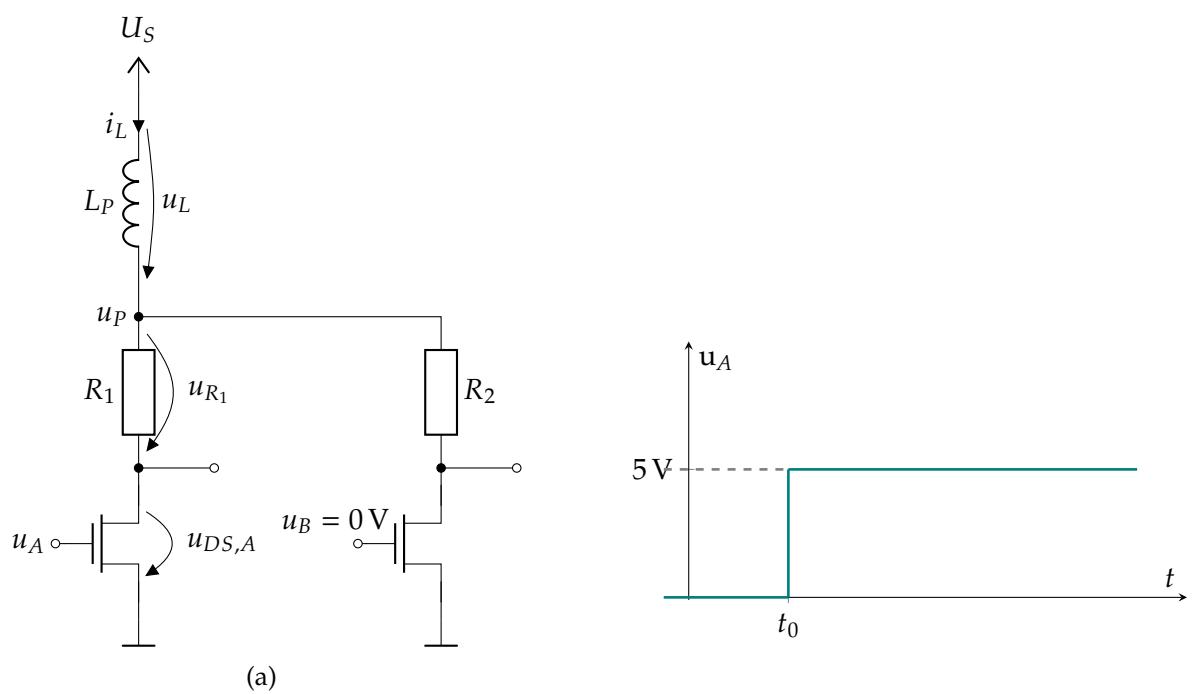


Abbildung 3

Lösung

Um ohne viel Mathematik eine grobe Vorstellung vom Verhalten eines Systems bei Schaltvorgängen zu bekommen, hilft es meist, das Verhalten eines Systems kurz vor, kurz nach, und lange nach dem Schaltvorgang zu betrachten.

Anfangs ($t < t_0$)

- Es fließt kein Strom. $i_L(t_0^+) = 0 \text{ A} \Rightarrow u_{R_1} = u_{R_2} = 0 \text{ V}$
- Das System ist in Ruhe $\rightarrow \frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow u_L = 0 \text{ V}$
- Die gesamte Spannung fällt über den beiden Transistoren ab.
- $u_P = U_S - u_L - u_{R_1} = U_S$

Direkt nach u_A -Sprung ($t = t_0^+$)

- Es fließt noch immer kein Strom (bei endlichen Spannungen, also kein Dirac-Delta, ist der Strom durch eine Spule eine stetige Funktion der Zeit).
- Damit fällt keine Spannung über dem unteren Teil der Schaltung ab.
- Wegen $U_S = u_L + u_{R_1} + u_{DS,A} = u_L$ fällt also die gesamte Spannung U_S an der Spule ab! Daraus folgt $u_P = U_S - U_L = 0 \text{ V}$!

Anschließend: exponentieller Anstieg von u_P . (System 1. Ordnung)

Endzustand ($t \gg t_0$)

- Im endgültig eingeschwungenen Zustand ist der Strom wieder konstant $\Rightarrow \frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow u_L = 0 \text{ V}$.
- U_S fällt komplett über $R_1 + R_{ON,1}$ ab. $\Rightarrow u_P = U_S \Rightarrow i_P(t \gg t_0) = \frac{U_S}{R_1 + R_{ON,1}}$

Intuitive Skizze, resultierend aus obigen Überlegungen

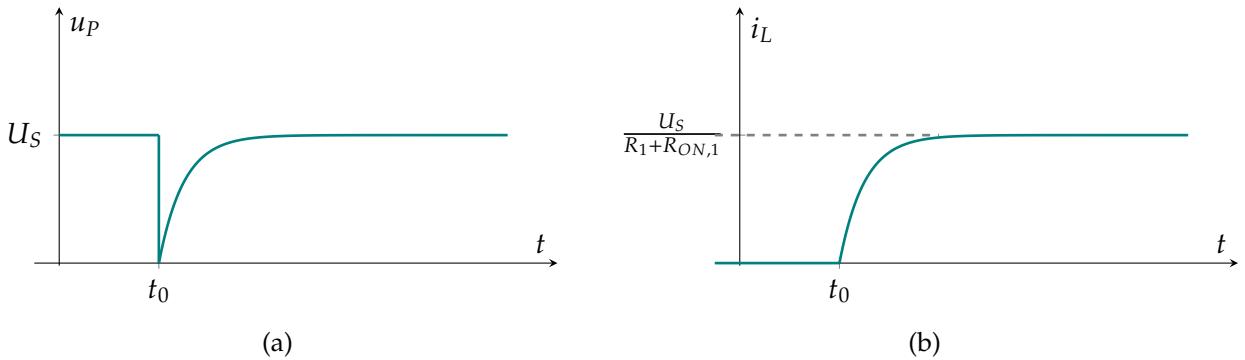


Abbildung 4

Formelle, mathematische Lösung

Wir stellen zunächst die Differentialgleichung des Systems im ON-Zustand des MOSFETs A auf. Es gilt

$$U_S = u_L + u_{R_1} + u_{DS,A} \\ = L_P \cdot \frac{di_L}{dt} + (R_1 + R_{ON,1}) \cdot i_L. \quad | \text{ Gültig im ON-Zustand des MOSFETs} \quad (16)$$

Hierbei handelt es sich um eine inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung. (Sie ist inhomogen aufgrund des Quellterms U_S , welcher nicht von der Zustandsvariable $i_L(t)$ abhängt.) Zur Lösung der inhomogenen Gleichung (16) betrachten wir zunächst die dazugehörige homogene Gleichung,

$$0 \text{ V} = L_P \cdot \frac{di_{L,h}}{dt} + (R_1 + R_{ON,1}) \cdot i_{L,h} \quad | \text{ Ansatz } i_{L,h}(t) = A \cdot e^{st} \quad (17)$$

$$= L_P \cdot A \cdot s \cdot e^{st} + (R_1 + R_{ON,1}) \cdot A \cdot e^{st} \quad | : (A \cdot e^{st}) \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow s = -\frac{R_1 + R_{ON,1}}{L_P} \Rightarrow \tau = \frac{L_P}{R_1 + R_{ON,1}}, \quad (\text{Zeitkonstante}) \quad (19)$$

und erhalten somit

$$i_{L,h}(t) = A \cdot e^{-\frac{(R_1 + R_{ON,1})t}{L_P}} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (20)$$

Als nächstes gilt es, eine (beliebige) partikuläre Lösung der inhomogenen DGL zu bestimmen. Wir machen die Annahme einer konstanten Lösung und erhalten

$$U_S = L_P \cdot 0 + (R_1 + R_{ON,1}) \cdot i_{L,p}(t) \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow i_{L,p}(t) = \frac{U_S}{R_1 + R_{ON,1}}. \quad (22)$$

Alle Lösungen² der inhomogenen Gleichung (16) sind nun durch die Summe der homogenen sowie der partikulären Lösung gegeben, es gilt also

$$i_L(t) = i_{L,h}(t) + i_{L,p}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_S}{R_1 + R_{ON,1}}. \quad (23)$$

Fürs Einsetzen der Anfangswerte machen wir die Annahme, dass $t_0 = 0$ ist. Andere Umschaltpunkte können durch einfaches zeitliches Verschieben der gewonnenen Lösung betrachtet werden, siehe unten. Einsetzen des Anfangswerts $i_L(t = 0) = 0 \text{ A}$ liefert

$$i_L(t = 0) = A \cdot e^0 + \frac{U_S}{R_1 + R_{ON,1}} \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{U_S}{R_1 + R_{ON,1}} \quad (25)$$

und somit

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R_1 + R_{ON,1}} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (26)$$

²Zur Erinnerung: Es gibt unendlich viele unterschiedliche Funktionen, die eine gegebene DGL erfüllen, diese also *lösen*. Aus dieser Funktionenschar wird erst durch Vorgabe des Wertes der Funktion an einem bestimmten Punkt, z.B. am Anfang oder Ende, eine konkrete Lösung ausgewählt.

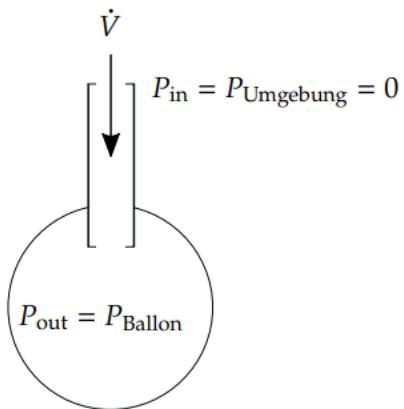
sowie

$$\begin{aligned} u_P(t) &= (R_1 + R_{ON,1}) \cdot i_L(t) \\ &= U_S \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}). \end{aligned} \quad (27)$$

Ist nun $t_0 \neq 0$, so muss lediglich in der Lösung jedes Vorkommen von t durch $(t - t_0)$ ersetzt werden.

Aufgabe 3 (Klausuraufgabe SS 2017 - Synthese)

In diesem Aufgabenteil soll ein elektrisches Ersatzschaltbild für den in Abbildung 5 schematisch dargestellten Versuchsaufbau bestimmt werden. Der Aufbau besteht aus einem elastischen, mit Luft gefüllten Ballon, sowie einem dünnen, in die Öffnung des Ballons gesteckten Rohr. In einem Experiment wurden folgende Beobachtungen gemacht:



- I) Der durch das Rohr fließende Volumenstrom \dot{V} ist proportional zur Differenz $P_{\text{in}} - P_{\text{out}}$ der Luftdrücke an den beiden Enden des Rohrs.
- II) Die zeitliche Änderung $\frac{dP_{\text{Ballon}}}{dt}$ des Luftdrucks im Ballon ist proportional zum in den Ballon fließenden Volumenstrom \dot{V} .
- III) Der Luftdruck P_{Ballon} im Ballon ist proportional zum Volumen V des Ballons (äquivalent zu Beobachtung II).

Abbildung 5

Im Folgenden soll der Luftdruck P durch das elektrische Potential repräsentiert werden, der Volumenstrom \dot{V} durch den elektrischen Strom I , sowie das Volumen V durch die elektrische Ladung Q .

- Welchen elektrischen Standardbauteilen entsprechen unter diesen Annahmen das Rohr sowie der Ballon?
- Geben Sie ein elektrisches Ersatzschaltbild des gesamten, in Abbildung 5 dargestellten Versuchsaufbaus an.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung

- Für das Rohr ist ein elektrisches Standardbauteil gesucht, für das

$$\dot{V}_{\text{Rohr}} = k \cdot (P_{\text{in}} - P_{\text{out}}) \Leftrightarrow I_{\text{Rohr}} = k \cdot (\varphi_{\text{in}} - \varphi_{\text{out}}) = k \cdot U_{\text{Rohr}} \quad (28)$$

gilt, wobei φ das elektrische Potential bezeichnen soll. Diese Gleichung wird (mit $k = \frac{1}{R}$) offenbar von einem Ohm'schen Widerstand erfüllt.

Für den Ballon soll gelten, dass

$$\frac{dP_{\text{Ballon}}}{dt} = \frac{d(P_{\text{Ballon}} - P_{\text{Umgebung}})}{dt} = k \cdot \dot{V} \quad (29)$$

beziehungsweise

$$\frac{d(\varphi_{\text{Ballon}} - \varphi_{\text{Umgebung}})}{dt} = \frac{dU_{\text{Ballon}}}{dt} = k \cdot I_{\text{Ballon}}, \quad (30)$$

was (mit $k = \frac{1}{C}$) durch eine elektrische Kapazität erfüllt wird.

- ii) Abbildung 6 zeigt ein elektrisches Ersatzschaltbild des Versuchsaufbaus in Abbildung 5, sowie einige Anmerkungen, die darlegen, warum dieses eine korrekte Repräsentation des Versuchs ist.

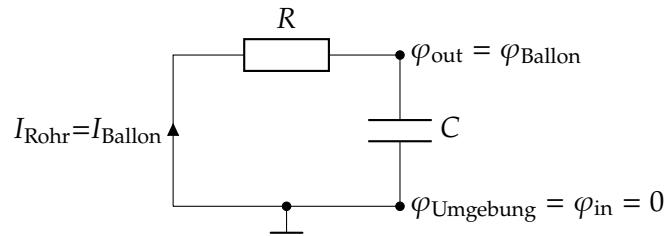


Abbildung 6

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Klausuraufgabe 2017

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 6, in der die Größen L und C bekannt sind, der Widerstandswert R jedoch nicht. Die Differentialgleichung für die gesuchte Ausgangsgröße $i_{\text{out}}(t) = i_R(t)$ in dieser Schaltung lautet

$$CL \frac{d^2 i_R(t)}{dt^2} + CR \frac{di_R(t)}{dt} + i_R(t) = i_{\text{in}}(t).$$

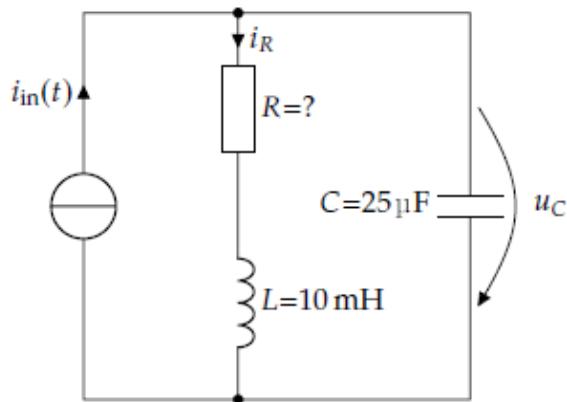
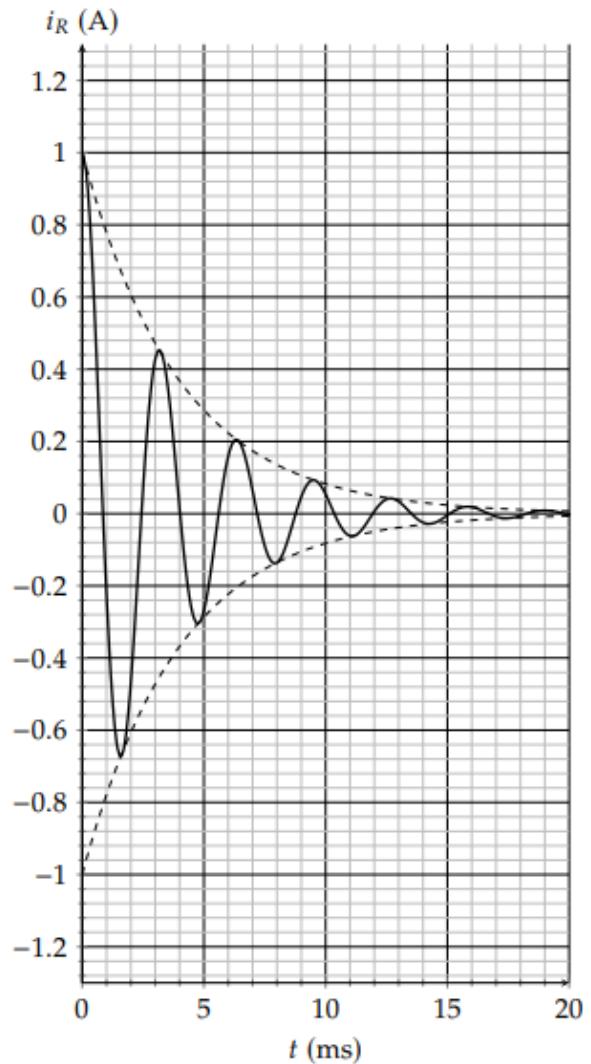


Abbildung 6

Die Abbildung 7 zeigt das Abklingverhalten des Systems (Zero-Input-Response, ZIR) für die Startwerte $i_R(t=0) = 1 \text{ A}$ und $u_C(t=0) = 5 \text{ V}$.

Bestimmen Sie einen Schätzwert für den unbekannten Widerstandswert R , und erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Hinweis: Bringen Sie die inhomogene Differentialgleichung zunächst in die Standardform und bestimmen Sie die Parameter α und ω_0 in Abhängigkeit der Bauteilparameter.



Lösung

Es gibt viele verschiedene Lösungswege zu dieser Aufgabe; die meisten erfordern die Identifikation (mindestens eines) der Parameter α und ω_0 . Zu diesem Zweck teilen wir die gesamte DGL durch CL und erhalten

$$\underbrace{\frac{d^2i_R(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_R(t)}{dt}}_{2\alpha} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i_R(t) = \frac{1}{LC} i_{in}(t), \quad (31)$$

also

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \text{sowie} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (32)$$

Ausgehend von der ZIR können nun die Werte verschiedener Parameter abgeschätzt werden, woraus dann im Umkehrschluss der Bauteilparameter R berechnet werden kann.

1. Bekanntermaßen folgt die Einhüllende $i_R^*(t)$ der ZIR (in ?? gestrichelt gezeichnet) der Funktion „Startwert $\cdot e^{-\alpha t}$ = Startwert $\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ “ mit der Zeitkonstanten $\tau = \frac{1}{\alpha}$. Somit kann aus dem Verlauf der Einhüllenden der ZIR eine Schätzung für den Parameter α bestimmt werden. Hierzu können verschiedene Punkte der Einhüllenden verwendet werden. Gut ablesen lässt sich zum Beispiel $i_R^*(t = 5 \text{ ms}) \approx 0.28 \text{ A}$. Mit

$$1 \text{ A} e^{-\alpha \cdot 5 \text{ ms}} \approx 0.28 \text{ A} \quad (33)$$

folgt $\alpha \approx 258 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ und

$$R = 2\alpha L \approx 5 \Omega \quad (34)$$

2. Die ZIR eines Systems ist nach Q (vollständigen) Oszillationen auf etwa 4% der Anfangsamplitude abgefallen. Ein grober Schätzwert für den Qualitätsfaktor könnte hier $Q \approx 4$ sein. Daraus (und aus der Definition von Q) ergibt sich

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{R} \approx 4 \quad \Leftrightarrow \quad R \approx 5.2 \Omega. \quad (35)$$

3. Ein weiterer Lösungsansatz ist, die gegebenen Startwerte zu verwenden. Dafür können wir ausnutzen, dass

$$u_L(t) = u_C(t) - u_R(t) = u_C(t) - R \cdot i_R(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot \frac{di_R(t)}{dt} \quad (36)$$

und somit

$$\left. \frac{di_R(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_C(t=0) - R \cdot i_R(t=0)}{L} = \frac{5 \text{ V} - R \cdot 1 \text{ A}}{10 \text{ mH}}. \quad (37)$$

Grobes Abschätzen der Steigung des Stromverlaufs zum Zeitpunkt $t = 0$ liefert (je nach Sehstärke) z.B.

$$\frac{di_R(t=0)}{dt} = \frac{5 \text{ V} - R \cdot 1 \text{ A}}{10 \text{ mH}} \approx 0 \text{ A/s} \quad \Leftrightarrow \quad R \approx 5 \Omega. \quad (38)$$

4. Ein weiterer Lösungsansatz basiert auf dem Abschätzen der gedämpften Resonanzfrequenz ω_d . Wir lesen eine Periodendauer von ca. 3.2 ms ab. Damit können wir

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} \approx 1964 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (39)$$

Aus

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{R}{2L} \quad (40)$$

folgt

$$R = 2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \omega_d^2} \approx 7.6 \Omega. \quad (41)$$