Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2022

Musterlösung zu Übungsblatt 6

Eike Petersen, Julia Sauer, Carlotta Hennigs[1]

Aufgabe 1

Ordnen Sie jeder der Schaltungen A bis C in Abbildung 1 das dazugehörige Betragsdiagramm X bis Z der Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{out}}(j\omega)}{\underline{U}_{\text{in}}(j\omega)}$$

zu, und begründen Sie Ihre Wahl...

i) anschaulich-physikalisch, ohne Bestimmung der Übertragungsfunktionen, sowie

ii) indem Sie explizit die Übertragungsfunktion jeder der Schaltungen bestimmen.

iii) **Zusatzaufgabe**
Skizzieren Sie jeweils qualitativ das zugehörige Phasendiagramm.

Lösung

1.
   - **Schaltung A** lässt sich dem **Betragsdiagramm Z** zuordnen. Es handelt sich um einen Allpass. Das Netzwerk besteht lediglich aus Widerständen, welche keine Frequenzabhängigkeit besitzen. Das Betragsdiagramm hat also für alle Frequenzen die gleiche Verstärkung.
   - **Schaltung B** lässt sich dem **Betragsdiagramm X** zuordnen. Es handelt sich bei der Schaltung um einen Tiefpass. Die Kapazität stellt für hohe Frequenzen einen niedrigen Widerstand dar, für hohe Eingangsfrequenzen fällt also keine Spannung an C_1 ab. Für niedrige Frequenzen stellt die Kapazität einen hohen Widerstand dar, es fällt also eine höhere Spannung an C_1 ab.
   - **Schaltung C** lässt sich dem **Betragsdiagramm Y** zuordnen. Es handelt sich bei der Schaltung um einen Hochpass. Bei Eingangsspannungen mit hoher Frequenz stellt die Induktivität L_1 einen hohen Widerstand dar, da in der Induktivität eine induzierte Spannung auftritt, die der Änderung der Spannung entgegengerichtet ist. Für niedrige Frequenzen stellt die Induktivität einen niedrigen Widerstand dar, sodass eine geringe Spannung an L_1 abfällt.

2.
   - **Schaltung A:** Es wird hier die Übertragungsfunktion für den unbelasteten Ausgang aufgestellt:

     $$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_4} \tag{1}$$

     Die Verstärkung ist also gegeben durch einen konstanten Faktor, entsprechend **Betragsdiagramm Z**.

[1] Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits“.

- **Schaltung B:** Es wird hier die Gleichung für den Spannungsteiler R_1, C_1 aufgestellt:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C_1} + R_1} = \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1} \tag{2}$$

  Wir sehen, dass $\lim\limits_{\omega \to \infty} \underline{H}(j\omega) = 0$ und $\underline{H}(j\omega = 0) = 1$. Dies entspricht dem Verlauf von **Betragsdiagramm X**.

- **Schaltung C:** Durch den Spannungsteiler L_1, R_1 erhalten wir:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + R_1} \tag{3}$$

  Wir sehen, dass $\lim\limits_{\omega \to \infty} \underline{H}(j\omega) = 1$ und $\underline{H}(j\omega = 0) = 0$. Dies entspricht dem Verlauf von **Y**.

3. Die Phasendiagramme der Schaltungen A bis C sind in Abbildung 2 dargestellt.

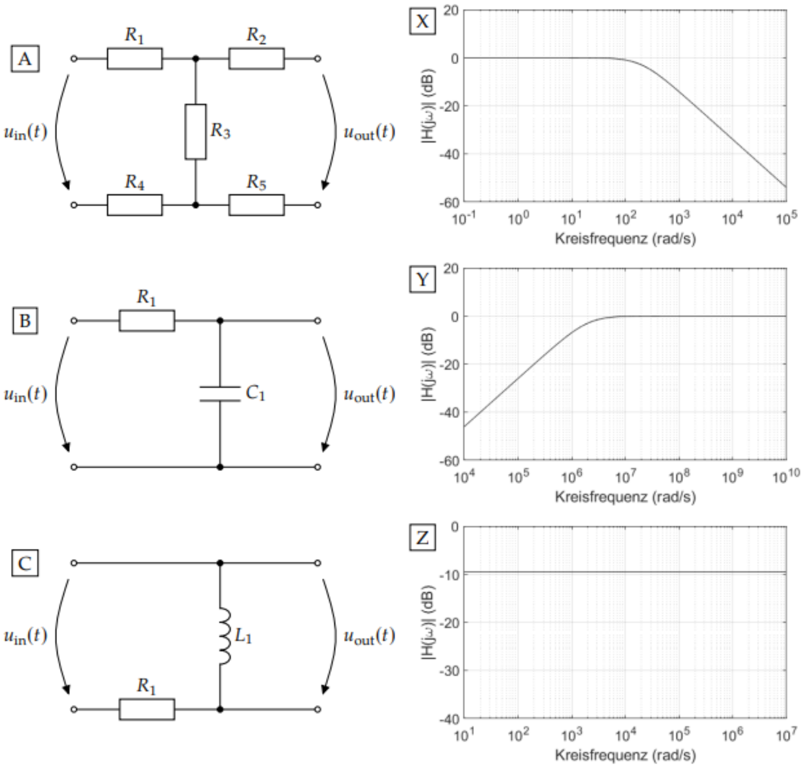

Abbildung 1

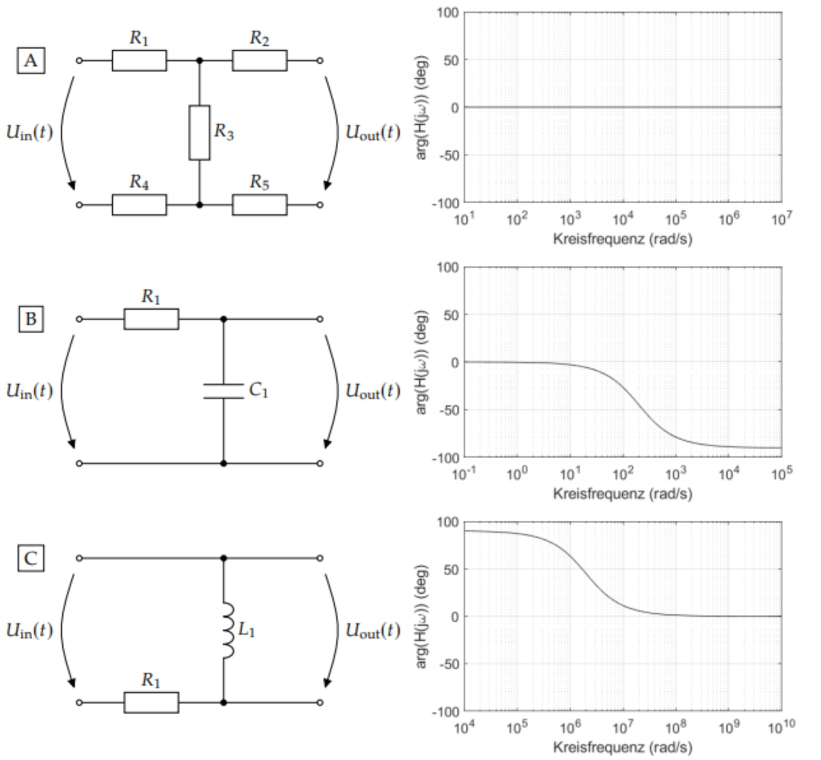

Abbildung 2

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die beiden Schaltungen in Abbildung 3 die Übertragungsfunktionen

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{out}}(j\omega)}{\underline{U}_{\text{in}}(j\omega)}. \tag{4}$$

Zeichnen Sie dazu zunächst die Ersatzschaltbilder, wobei jedes passive Bauteil durch seine komplexe Impedanz und die Ein- und Ausgangsspannungen durch Zeiger ersetzt werden sollen.

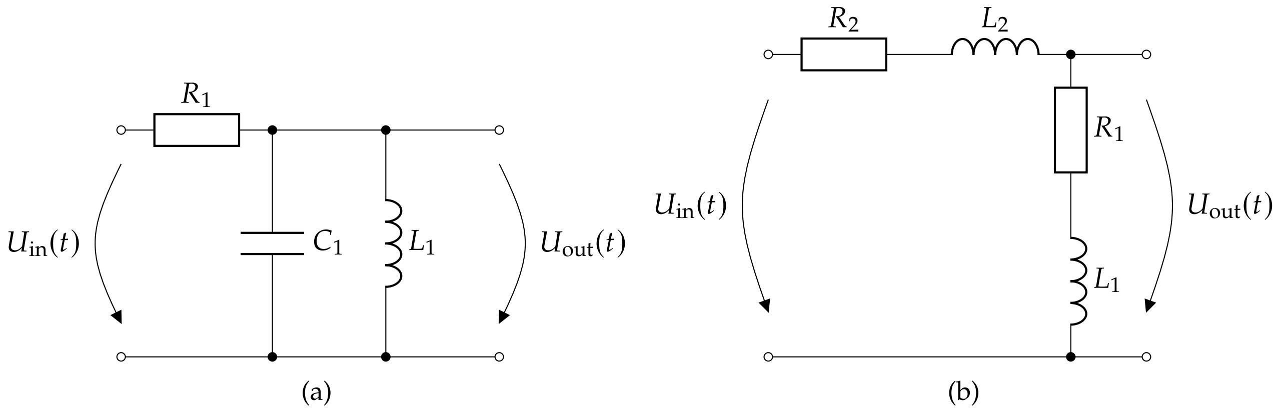

Abbildung 3

Lösung

Wir ersetzen zunächst die alle Kapazität und Induktivitäten mit ihren komplexen Impedanzen sowie die die Spannungen U_{in} und U_{out} durch die entsprechenden Zeiger und erhalten die beiden Ersatzschaltbilder in Abbildung 4.

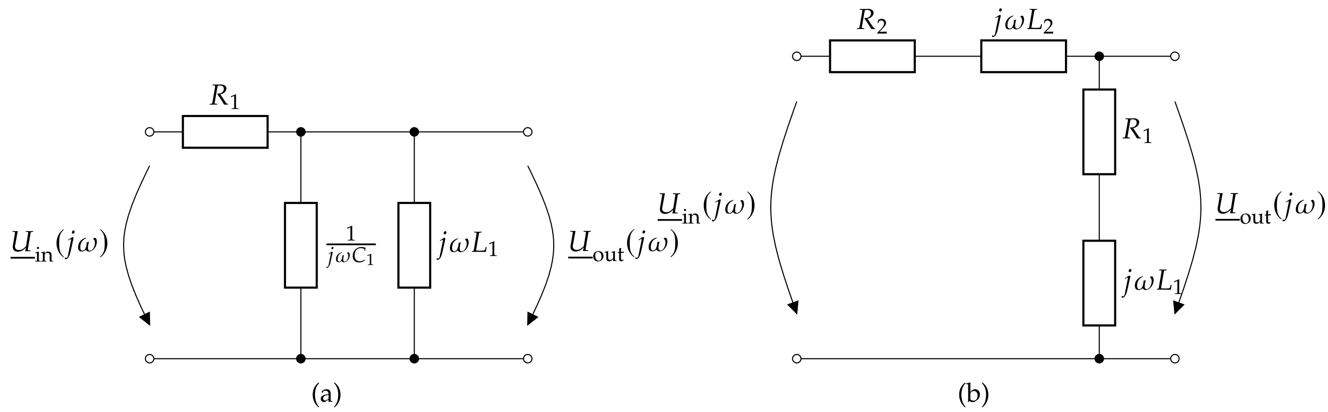

Abbildung 4

Um die Übertragungsfunktion der Schaltung in Abbildung 4a zu berechnen, bestimmen wir zuerst die Impedanz von $\underline{C}_1 \| \underline{L}_1$:

$$\underline{C}_1 \| \underline{L}_1 = \frac{\underline{L}_1 \cdot \underline{C}_1}{\underline{L}_1 + \underline{C}_1} = \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega L_1}{(j\omega)^2 L_1 C_1 + 1} \tag{5}$$

Mit dem Spannungsteiler R_1, $C_1 \| L_1$ wird die Übertragungsfunktion berechnet:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{C}_1 \| \underline{L}_1}{\underline{R}_1 + \underline{C}_1 \| \underline{L}_1} = \frac{j\omega L_1}{(j\omega)^2 L_1 C_1 R_1 + j\omega L_1 + R_1}. \tag{6}$$

Zur Berechnung der Übertragungsfunktion der Schaltung in Abbildung 4b betrachten wir den Spannungsteiler der Reihenschaltung R_2, L_2 und R_1, L_1. Dann gilt

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{out}}(j\omega)}{\underline{U}_{\text{in}}(j\omega)} = \frac{R_1 + j\omega L_1}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)}. \tag{7}$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 5. Da alle Bauteile linear und die Eingangsspannung sinusförmig sein soll, verwenden wir die Impedanzmethode zur Analyse der Schaltung.

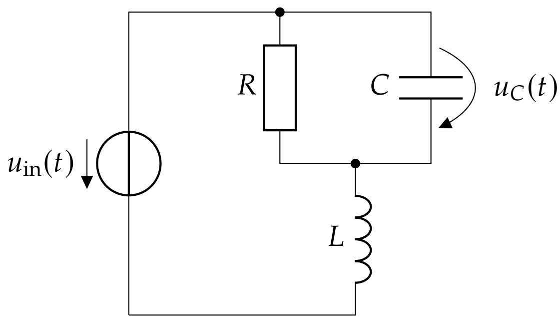

Abbildung 5

i) Ersetzen Sie zunächst alle passiven Bauteile durch komplexe Impedanzen sowie alle Ströme und Spannungen durch die entsprechenden Zeiger. Zeichnen Sie das resultierende Ersatzschaltbild.

ii) Bestimmen Sie als nächstes die Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_C(j\omega)}{\underline{U}_{\text{in}}(j\omega)}. \tag{8}$$

iii) Setzten Sie die Bauteilparameter $R = 10\,\Omega$, $L = 25\,\text{mH}$ und $C = 1\,\text{mF}$ sowie eine Kreisfrequenz von $200\,\text{rad/s}$ in ihre Lösung aus ii) ein und schreiben Sie das komplexe Ergebnis in Polarkoordinaten.

iv) Bestimmen Sie nun den zeitlichen Verlauf der Spannung $u_C(t)$, wenn $u_{\text{in}}(t) = 1\,\text{V} \cdot \sin(\omega t)$ und $\omega = 200\,\text{rad/s}$ beträgt. Betrachten Sie hierfür lediglich den eingeschwungenen (End-) Zustand und ignorieren Sie also Anfangszustände und das Einschwingverhalten. Nehmen Sie unabhängig von ihrer Lösung aus iii) an, dass

$$\underline{H}(j\omega = j \cdot 200\,\text{rad/s}) = 2\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}. \tag{9}$$

Lösung

i) Abbildung 6 zeigt das resultierende Ersatzschaltbild.

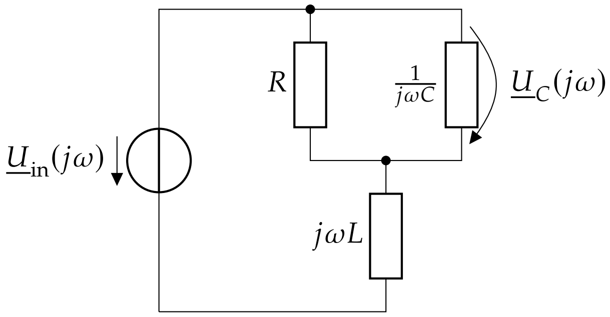

Abbildung 6

ii) Wir fassen die Impedanz von Widerstand und Kapazität entsprechend ihrer Parallelschaltung zusammen und erhalten

$$\underline{Z}_{RC} = \underline{Z}_R || \underline{Z}_C = R || \frac{1}{j\omega C} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{j\omega RC + 1}. \tag{10}$$

Die Spannung über beiden Bauteilen ergibt sich dann per einfachem Spannungsteiler zu

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_{\text{in}}} = \frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_{RC} + \underline{Z}_L} \tag{11}$$

$$= \frac{R/(j\omega RC + 1)}{R/(j\omega RC + 1) + j\omega L} \tag{12}$$

$$= \frac{R}{R + j\omega L \cdot (j\omega RC + 1)} \tag{13}$$

$$= \frac{R}{(j\omega)^2 RLC + j\omega L + R} \tag{14}$$

iii) Wir setzten die gegeben Bauteilparameter in (14) ein und erhalten

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_{\text{in}}} = \frac{10\,\Omega}{-10\,\Omega + j5\,\Omega + 10\,\Omega} \tag{15}$$

$$= \frac{10\,\Omega}{j5\,\Omega} = \frac{2}{j} = 2\mathrm{e}^{-j\pi/2}. \tag{16}$$

iv) Es gilt

$$\underline{U}_{\text{in}} = 1\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-j\pi/2}, \tag{17}$$

da

$$u_{\text{in}}(t) = 1\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t) = 1\,\mathrm{V} \cdot \cos(\omega t - \pi/2). \tag{18}$$

Also folgt für den komplexen Zeiger der Ausgangsspannung

$$\underline{U}_C = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{U}_{\text{in}} = \underline{U}_{\text{in}} \cdot 2\mathrm{e}^{-j\pi/2} = 2\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-j\pi}. \tag{19}$$

Für den Zeitverlauf der Spannung am Kondensator gilt somit

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_C(j\omega)\cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} && (20)\\ &= \mathrm{Re}\left\{2\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{e}^{j(\omega t-\pi)}\right\} && (21)\\ &= 2\,\mathrm{V}\cdot \mathrm{Re}\left\{\cos(\omega t-\pi)+j\sin(\omega t-\pi)\right\} && (22)\\ &= 2\,\mathrm{V}\cos(\omega t-\pi). && (23) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann auch direkt in Gleichung (14) abgelesen werden: Die Kondensatorspannung hat die doppelte Amplitude wie die Eingangsspannung, und eilt dieser gegenüber um eine Viertelperiode ($\pi/2$) voraus.

Beachten Sie, dass diese Lösung lediglich das Verhalten im eingeschwungenen Zustand beschreibt, also der partikulären Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichung entspricht. Sollte zusätzlich das Einschwingverhalten untersucht werden, so müsste – wie aus Vorlesung und Übung bekannt – die homogene Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichung bestimmt, die Überlagerung von homogener und partikulärer Lösung betrachtet und die unbekannten Konstanten aus den (hier nicht gegebenen) Anfangsbedingungen bestimmt werden.