Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2022

Musterlösung zu Übungsblatt 2

Eike Petersen, Julia Sauer, Carlotta Hennigs[1]

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 1. Die zeitabhängige Eingangsspannung sei gegeben mit

$$u_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 0\,\text{V} & \text{für } t < 0, \\ 4\,\text{V} & \text{sonst,} \end{cases}$$

und der Anfangsbedingung $u_{AB}(t = 0) = 1\,\text{V}$ für die Spannung zwischen den Klemmen A und B. Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf dieser Spannung für $t \geq 0\,\text{s}$.

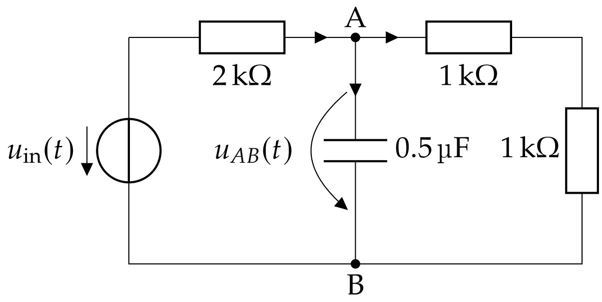


Abbildung 1

[1] Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits".

Lösung

Wir stellen zunächst mittels Anwendung der Knotenregel und der verschiedenen Bauteilgleichungen die inhomogene Differentialgleichung der Schaltung auf,

$$\frac{u_{\mathrm{in}}(t) - u_{AB}(t)}{2\,\mathrm{k\Omega}} = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_{AB}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_{AB}(t)}{2\,\mathrm{k\Omega}} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_{\mathrm{in}}(t) = 2\,\mathrm{k\Omega} \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}u_{AB}(t)}{\mathrm{d}t} + 2u_{AB}(t). \tag{2}$$

Wir lösen die homogene Gleichung

$$0\,\mathrm{V} = 2\,\mathrm{k\Omega} \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}u_{AB,h}(t)}{\mathrm{d}t} + 2u_{AB,h}(t) \tag{3}$$

mittels des Ansatzes $u_{AB,h}(t) = A\mathrm{e}^{st}$ und erhalten

$$s = -\frac{1}{1\,\mathrm{k\Omega} \cdot C}. \tag{4}$$

Anschließend bestimmen wir unter Annahme einer konstanten Lösung die partikuläre Lösung

$$4\,\mathrm{V} = 2\,\mathrm{k\Omega} \cdot \mathrm{C} \cdot 0 + 2u_{AB,p}(t) \quad \Rightarrow \quad u_{AB,p}(t) = 2\,\mathrm{V} \tag{5}$$

und erhalten schließlich die Lösungsschar

$$u_{AB}(t) = u_{AB,h}(t) + u_{AB,p}(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{1\,\mathrm{k\Omega} \cdot C}} + 2\,\mathrm{V}. \tag{6}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$u_{AB}(t) = 1\,\mathrm{V} + 1\,\mathrm{V}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{1\,\mathrm{k\Omega} \cdot C}}). \tag{7}$$

Auf dieselbe Lösung kommt man mittels der aus Vorlesung und Übung bekannten Standardformeln für Ladevorgänge an RC-Gliedern,

$$u_C(t) = \text{Startwert} + (\text{Endwert} - \text{Startwert}) \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{8}$$

mit $\tau = RC$, wenn man feststellt, dass sich die Schaltung auf ein RC-Glied mit dem Widerstand $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ vereinfachen lässt.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Schaltung in Abbildung 2a. Für die verwendete, ideale Diode gelte $i_D = 0\,\text{A}$ für $u_D < 0\,\text{V}$, und $u_D = 0\,\text{V}$ für $i_D > 0\,\text{A}$.

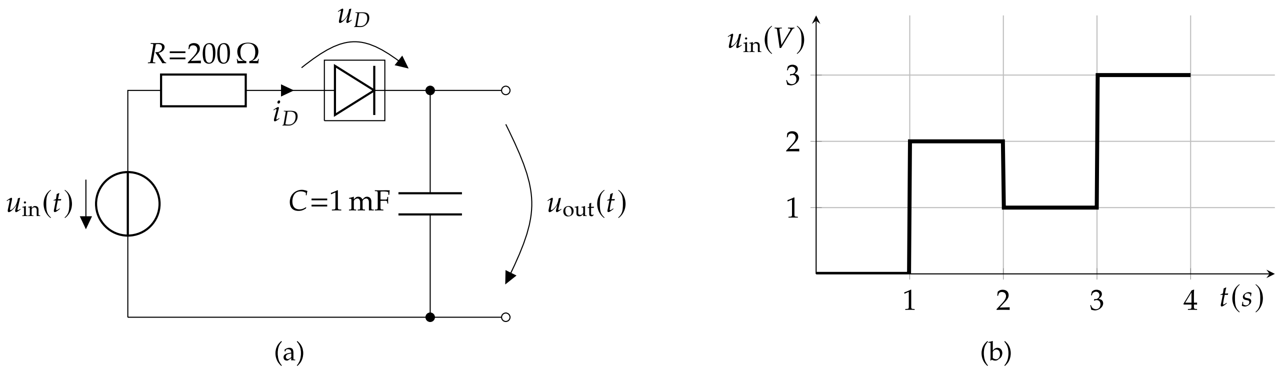


Abbildung 2

i) Geben Sie jeweils ein Ersatzschaltbild der gesamten Schaltung für die zwei möglichen Zustände der Diode an (in Durchlassrichtung bzw. in Sperrrichtung betrieben) und bestimmen Sie deren Gültigkeitsbereich in Abhängigkeit von u_{in} und u_{out}.

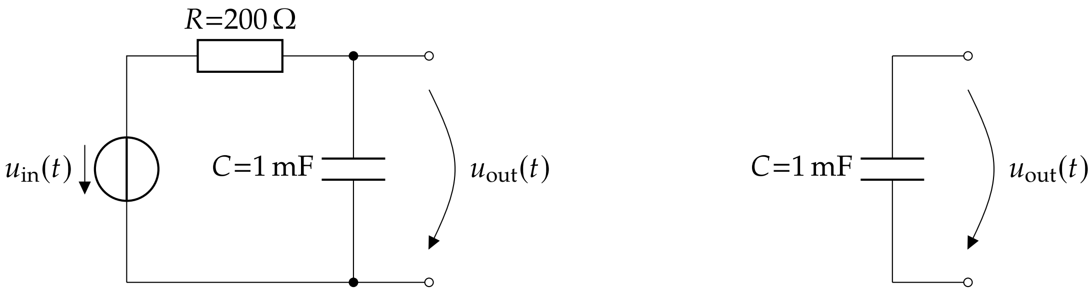
ii) Abbildung 2b stellt den Verlauf der Eingangsspannung $u_{\text{in}}(t)$ dar. Bestimmen Sie *näherungsweise* den Wert der Ausgangsspannung zum Zeitpunkt $t = 4\,\text{s}$.

iii) Skizzieren Sie den Verlauf der Ausgangsspannung für $0\,\text{s} \leq t \leq 4\,\text{s}$.

Lösung

i) Die beiden Ersatzschaltbilder sind in Abbildung 3 dargestellt und ergeben sich direkt durch das Ersetzen der Diode durch einen idealen Leiter (Durchlassrichtung, $u_D = 0\,\mathrm{V}$) bzw. offene Klemmen (Sperrrichtung, $i_D = 0\,\mathrm{A}$). Wird die Diode in Durchlassrichtung betrieben, so ergibt sich eine einfache RC-Schaltung mit Quelle $u_{\mathrm{in}}(t)$. Wird die Diode in Sperrrichtung betrieben, so kann kein Strom aus der Kapazität abfließen; es gilt also

$$i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = 0\,\mathrm{A} \quad \Leftrightarrow \quad u_C(t) = \mathrm{const.} \tag{9}$$



(a) Diode in Durchlassrichtung betrieben

(b) Diode in Sperrrichtung betrieben

Abbildung 3

Für die Untersuchung, unter welchen Bedingungen die Diode in Durchlass- bzw. Sperrrichtung betrieben wird, stellen wir zunächst fest, dass (Maschenregel)

$$u_{\mathrm{in}}(t) = R \cdot i_D(t) + u_D(t) + u_{\mathrm{out}}(t) \tag{10}$$

beziehungsweise (Ohm'sches Gesetz)

$$i_D(t) = \frac{u_{\mathrm{in}}(t) - u_D(t) - u_{\mathrm{out}}(t)}{R}. \tag{11}$$

Die Diode wird – entsprechend Ersatzschaltbild (a) – genau dann in Durchlassrichtung betrieben, falls für $u_D = 0\,\mathrm{V}$ gilt, dass $i_D > 0\,\mathrm{A}$ ist. Dies gilt mit Gleichung (11) genau dann, wenn $u_{\mathrm{in}}(t) > u_{\mathrm{out}}(t)$ ist. Umgekehrt wird die Diode genau dann in Sperrrichtung betrieben – entsprechend Ersatzschaltbild (b) – wenn für $i_D = 0\,\mathrm{A}$ gilt, dass $u_D < 0\,\mathrm{V}$ ist. Das gilt mit Gleichung (10) genau dann, wenn $u_{\mathrm{in}}(t) < u_{\mathrm{out}}(t)$ ist.

ii) Wenn $u_{\mathrm{in}} > u_{\mathrm{out}}$ gilt, so wird die Kapazität entsprechend einer normalen RC-Schaltung geladen. Gilt $u_{\mathrm{in}} < u_{\mathrm{out}}$, so wird die Spannung über der Kapazität konstant gehalten. Für den gegebenen Eingangsspannungsverlauf ergibt sich folgendes Verhalten:

- Für $0\,\mathrm{s} \leq t < 1\,\mathrm{s}$ ist das System im Ruhezustand und es gilt $u_{\mathrm{out}}(t) = 0\,\mathrm{V}$.
- Für $1\,\mathrm{s} \leq t < 2\,\mathrm{s}$ gilt $u_{\mathrm{in}}(t) > u_{\mathrm{out}}(t)$, die Diode wird also in Durchlassrichtung betrieben und die Kapazität geladen. Mit der Standardformel für Ladevorgänge an RC-Gliedern gilt

$$u_{\mathrm{out}}(t) = 2\,\mathrm{V} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-(t-1\,\mathrm{s})/\tau}) \qquad \text{für } 1\,\mathrm{s} \leq t < 2\,\mathrm{s}, \tag{12}$$

wobei für die Zeitkonstante τ gilt

$$\tau = R \cdot C = 200\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{mF} = 0.2\,\mathrm{s}. \tag{13}$$

Insbesondere gilt somit

$$u_{\text{out}}(t = 2\,\text{s}) = 2\,\text{V} \cdot (1 - \text{e}^{-5}) \approx 2\,\text{V}. \tag{14}$$

- Für $2\,\text{s} \leq t < 3\,\text{s}$ gilt somit $2\,\text{V} \approx u_{\text{out}}(t) > u_{\text{in}}(t) = 1\,\text{V}$, die Diode wird also in Sperrrichtung betrieben und die Kapazität wird nicht entladen. Die Spannung wird also auf der Kapazität gehalten. Es gilt also

$$u_{\text{out}}(t) = u_{\text{out}}(t = 2\,\text{s}) \approx 2\,\text{V} \qquad \text{für } 2\,\text{s} \leq t < 3\,\text{s}. \tag{15}$$

- Für $3\,\text{s} \leq t < 4\,\text{s}$ gilt erneut $3\,\text{V} = u_{\text{in}}(t) > u_{\text{out}}(t)$, und somit wird die Kapazität weiter geladen. Es gilt (entsprechend Gleichung (8))

$$u_{\text{out}}(t) = u_{\text{out}}(t = 2\,\text{s}) + [3\,\text{V} - u_{\text{out}}(t = 2\,\text{s})] \cdot \left(1 - \text{e}^{-(t-3\,\text{s})/\tau}\right) \qquad \text{für } 3\,\text{s} \leq t < 4\,\text{s} \tag{16}$$

$$\approx 2\,\text{V} + 1\,\text{V} \cdot \left(1 - \text{e}^{-(t-3\,\text{s})/\tau}\right). \tag{17}$$

Insbesondere gilt somit

$$u_{\text{out}}(t = 4\,\text{s}) = 2\,\text{V} + 1\,\text{V} \cdot (1 - \text{e}^{-5}) \approx 3\,\text{V}. \tag{18}$$

iii) Der vollständige Verlauf der Ausgangsspannung ist in Abbildung 4 dargestellt. Insgesamt ver-

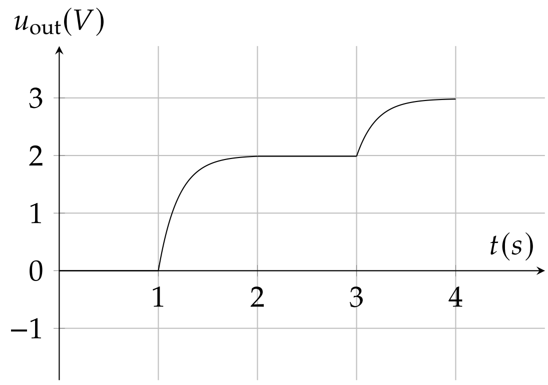


Abbildung 4: Diode in Sperrrichtung betrieben

hält sich die Schaltung also wie eine Art Maximums-Speicher: Sie „merkt sich“ die größte Eingangsspannung, die zuvor aufgetreten ist.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 5 mit

$$u_{\text{in}}(t) = \begin{cases} 0\,\text{V} & \text{für } t < 0, \\ 1\,\text{V} & \text{sonst,} \end{cases}$$

und den Anfangsbedingungen $u_C(t = 0) = 0\,\text{V}$, sowie $i(t = 0) = 0\,\text{A}$. Ordnen Sie die Sprungantworten in Abbildung 6a bis Abbildung 6c den Spannungen u_R, u_C und u_L zu, und begründen Sie Ihre Wahl.

Hinweis: Bedenken Sie, welche Größen in der Schaltung sich sprunghaft ändern können, und welche nicht. Überlegen Sie weiterhin, welche Bedingungen im *Steady State* erfüllt sein müssen, also im Endzustand, wenn alle Ströme und Spannungen eingeschwungen und konstant sind.

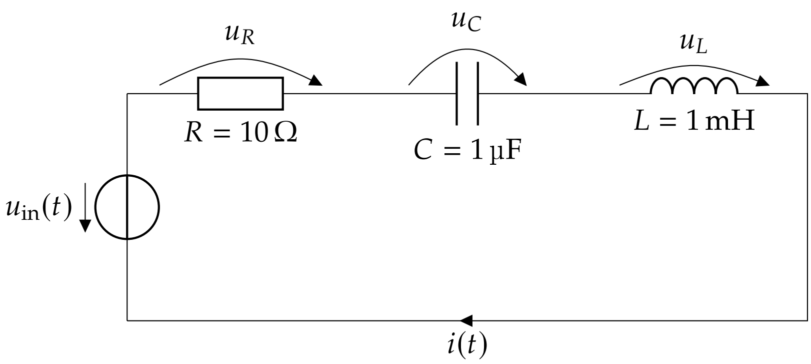
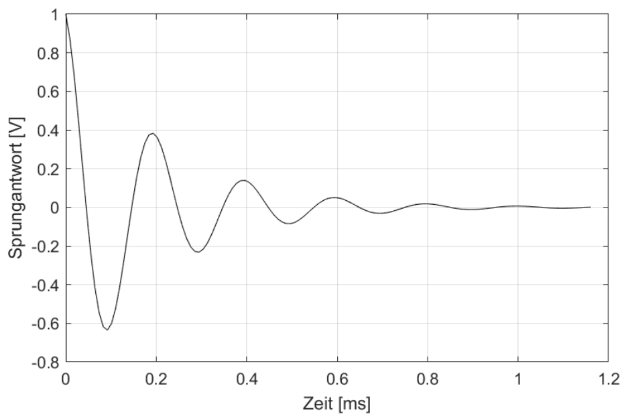
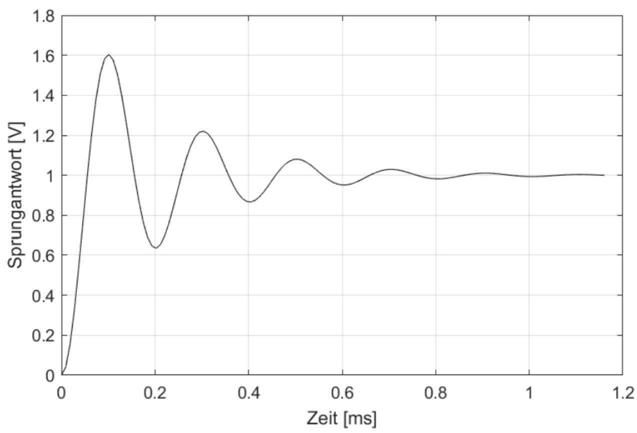


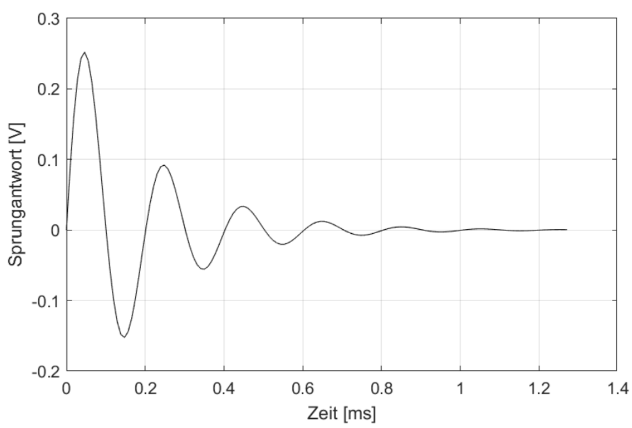
Abbildung 5



(a)



(b)



(c)

Abbildung 6

Lösung

Wir argumentieren über den Start- und Endzustand. Anfangs gilt (Stetigkeit von Strömen an Induktivitäten)

$$i(t=0^+) = 0\,\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad u_R(t=0^+) = 0\,\mathrm{V} \tag{19}$$

sowie (Stetigkeit von Spannungen an Kapazitäten)

$$u_C(t=0^+) = 0\,\mathrm{V}. \tag{20}$$

Daraus folgt

$$u_L(t=0^+) = u_{\mathrm{in}}(0^+) - u_C(0^+) - u_R(0^+) = u_{\mathrm{in}}(0^+) = 1\,\mathrm{V}, \tag{21}$$

anfangs fällt also die gesamte Eingangsspannung über der Induktivität ab, da diese jeglicher Stromänderung entgegenarbeitet. Die Spannung $u_L(t)$ ist damit eindeutig in Abbildung 6a dargestellt.
Im Endzustand des Systems gilt, dass alle auftretenden Ströme und Spannungen konstant sind[2], und somit gilt insbesondere auch

$$u_C(t \gg 0) = \mathrm{konst} \quad \Leftrightarrow \quad i(t \gg 0) = 0\,\mathrm{A} = \mathrm{konst}, \tag{22}$$

woraus

$$u_R(t \gg 0) = 0\,\mathrm{V} \tag{23}$$

sowie

$$u_L(t \gg 0) = 0\,\mathrm{V} \tag{24}$$

folgen. Somit gilt

$$u_C(t \gg 0) = u_{\mathrm{in}}(t \gg 0) - u_R(t \gg 0) - u_L(t \gg 0) = 1\,\mathrm{V}, \tag{25}$$

und wir können $u_C(t)$ eindeutig Abbildung 6b und $u_R(t)$ Abbildung 6c zuordnen.

[2] Dies gilt für jedes System, in dem a) mindestens ein Widerstand vorhanden ist, an dem mit der Zeit elektrische Energie in Wärme umgesetzt wird, und das b) nicht permanent durch Änderungen der Quellspannungen oder -Ströme neu angeregt wird.