Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2022

Musterlösung zu Übungsblatt 1

Eike Petersen, Julia Sauer, Carlotta Hennigs[1]

Aufgabe 1

Berechnen Sie jeweils die Spannung über der Induktivität in Abbildung 1 in Abhängigkeit von der Zeit. Verwenden Sie dazu die entsprechende Bauteilgleichung. Der zeitabhängige Eingangsstrom $i(t)$ sei dabei gegeben mit

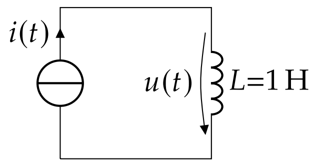


Abbildung 1

i) $i(t) = 10\,\frac{\text{mA}}{\text{s}} t + 2\,\text{mA}$.

ii) $i(t) = 1\,\text{A} \sin(2\pi\,\frac{1}{\text{s}} t)$.

Lösung

Für die Spannung über der Induktivität gilt

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Wir setzen den gegebenen Stromverlauf und den Bauteilparameter in die Bauteilgleichung ein und erhalten

i)

$$u(t) = 1\,\text{H} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(10\,\frac{\text{mA}}{\text{s}} t + 2\,\text{mA}\right) \tag{2}$$

$$= 1\,\text{H} \cdot 10\,\frac{\text{mA}}{\text{s}} = 10\,\text{mV} \tag{3}$$

ii) und

$$u(t) = 1\,\text{H} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1\,\text{A} \cdot \sin\left(2\pi\,\text{Hz} \cdot t\right)\right) \tag{4}$$

$$= 1\,\text{H} \cdot 1\,\text{A} \cdot \cos\left(2\pi\,\text{Hz} \cdot t\right) \cdot 2\pi\,\text{Hz} \tag{5}$$

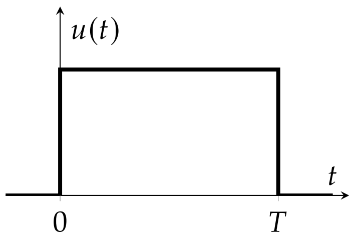
$$= 2\pi\,\text{V} \cdot \cos\left(2\pi\,\text{Hz} \cdot t\right). \tag{6}$$

Im ersten Fall ändert sich der Strom linear, weshalb die resultierende Spannung konstant ist. Für einen sinusförmigen Eingangsstrom ist das Ausgangssignal eine Kosinusschwingung und damit um ein Viertel der Periodendauer verschoben.

[1] Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits“.

Aufgabe 2

Abbildung 2 zeigt zwei einfache Schaltkreise. Der Verlauf der zeitabhängigen Eingangsspannung $u(t)$ sei jeweils gegeben mit



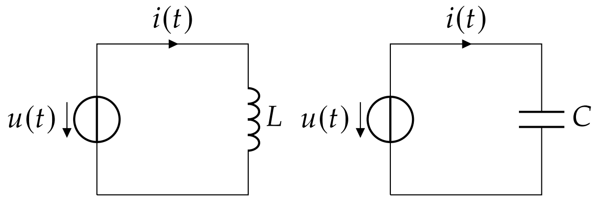


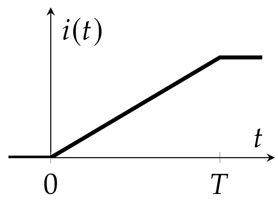
Abbildung 2

i) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf des Stroms durch die Induktivität. Erläutern Sie diesen Verlauf physikalisch.

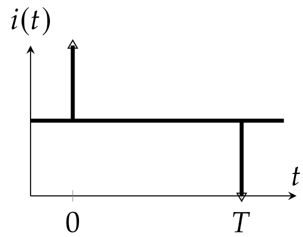
ii) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf des Stroms durch den Kondensator. Erläutern Sie diesen Verlauf physikalisch.

Lösung

i) Eine konstante positive Spannung führt zu einem stetigen Anstieg des Stroms mit gleichzeitigem Aufbau eines Magnetfelds. Für eine Spannung von Null bleibt das Magnetfeld bestehen und so fließt der Strom konstant weiter. Eine ideale Spule entlädt sich also nicht.



ii) Durch die Kapazität fließt nur ein Strom, wenn sich die Spannung bzw. die Ladungsverteilung ändert. Bleibt die Verteilung der Ladung konstant, so ist der Strom Null. Um einen Sprung in der Spannung hervorzurufen, müsste der Strom unendlich groß werden, da sich die Ladungsverteilung unendlich schnell ändern muss. Bei dem ebenso schnellen Abfall der Spannung zum Zeitpunkt T ist der Strom ebenfalls unendlich groß und fließt lediglich in die entgegengesetzte Richtung.



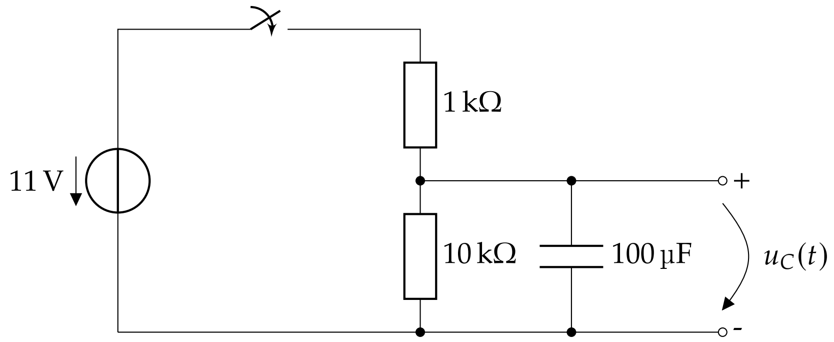


Abbildung 3

Aufgabe 3

In der in Abbildung 3 dargestellten Schaltung wird der Schalter zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen und zum Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{s}$ wieder geöffnet. Nehmen Sie an, es sei $u_C(t = 0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{V}$.

a) Geben Sie sowohl für den Fall des geöffneten Schalters als auch für den Fall des geschlossenen Schalters jeweils ein einfaches Ersatzschaltbild (ohne den Schalter) an. Bestimmen Sie die Zeitkonstanten ($\tau = RC$) für beide Fälle.

   Hinweis: Es kann hierfür gegebenenfalls nützlich sein, eine Ersatzspannungsquelle zu bestimmen.

b) Verwenden Sie den aus der Vorlesung bekannten Ausdruck für Lade- und Entladevorgänge an RC-Gliedern, um den Zeitverlauf der Spannung am Kondensator grob zu skizzieren.

c) Stellen Sie die Differentialgleichung für den Fall des geöffneten Schalters auf, und bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

   Hinweis: Machen Sie hierzu den Ansatz $u_C(t) = A\mathrm{e}^{st}$.

d) Stellen Sie die Differentialgleichung für den Fall des geschlossenen Schalters auf, und bestimmen Sie die Lösung der Gleichung.

   Hinweis: Bestimmen Sie hierzu die homogene und eine inhomogene Lösung der Gleichung.

e) Setzen Sie Ihre beiden Teillösungen aus den Aufgabenteilen c) und d) zu einem Gesamt-Zeitverlauf für $u_C(t)$ zusammen, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Ihrer Skizze aus Aufgabenteil b).

Lösung

a) Schalter geöffnet:

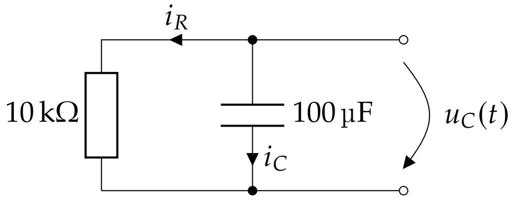


Abbildung 4

Schalter geschlossen (Umwandlung des linken Schaltungsteils in eine äquivalente Ersatzspannungsquelle bezüglich der Klemmen der Kapazität):

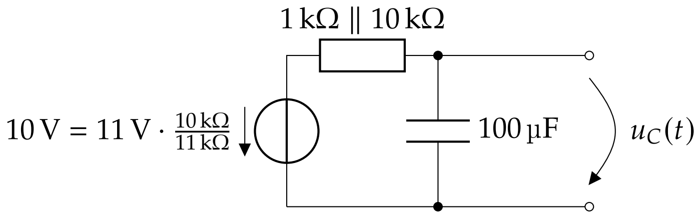


Abbildung 5

Für die gesuchten Zeitkonstanten gilt bei geöffnetem Schalter

$$\tau_1 = R_1 \cdot C = 10\,\mathrm{k\Omega} \cdot 100\,\mathrm{uF} = 1\,\mathrm{s}, \tag{7}$$

und bei geschlossenem Schalter

$$\tau_2 = R_2 \cdot C = (1\,\mathrm{k\Omega} \parallel 10\,\mathrm{k\Omega}) \cdot 100\,\mathrm{\mu F} = 90.9\,\mathrm{ms}. \tag{8}$$

b) Wie aus der Vorlesung bekannt, gilt für *Ladevorgänge* an RC-Gliedern wie in Abbildung 5 abgebildet

$$u_C(t) = U_Q \cdot (1 - \mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}), \tag{9}$$

wobei U_Q die Stärke der Spannungsquelle bezeichnet (hier gilt also $U_Q = 10\,\mathrm{V}$). Für *Entladevorgänge* in RC-Gliedern (wie in Abbildung 4 dargestellt) gilt

$$u_C(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}. \tag{10}$$

mit $u_C(t_0) = U_0$. In beiden Fällen ist die *Zeitkonstante*

$$\tau = R \cdot C \tag{11}$$

und t_0 bezeichnet den Zeitpunkt, zu dem der jeweilige Prozess beginnt. Zusätzlich wurde hier die Annahme getroffen, dass der Ladevorgang bei $u_C(t_0) = 0\,\mathrm{V}$ beginnt, beziehungsweise dass der Entladevorgang auf einen Endzustand von $u_C(t = \infty) = 0\,\mathrm{V}$ entlädt – wir werden in einem späteren Aufgabenteil sehen, wie diese Annahme umgangen werden kann.

Unter Berücksichtigung einiger grundlegender Eigenschaften von Exponentialkurven kann somit der Spannungsverlauf skizziert werden, sobald τ und U_0 bzw. U_Q bekannt sind. Beachten Sie hierzu, dass für $f(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ die folgenden Beziehungen gelten:

- $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -\frac{A}{\tau}$
- $f(t = \tau) = A \cdot \mathrm{e}^{-1} = \frac{A}{e}$
- $f(t \geq 5\tau) \approx 0.$

Abbildung 6 zeigt den Zeitverlauf der Kondensatorspannung.

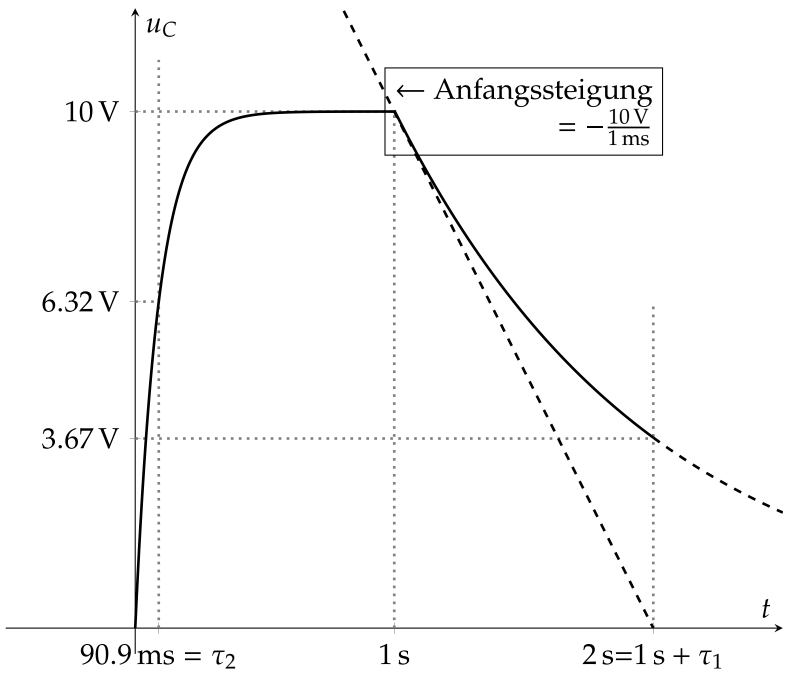


Abbildung 6: Verlauf der Kondensatorspannung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen und der Ladevorgang beginnt, wobei die Kapazität entsprechend Abbildung 6 auf 10 V aufgeladen wird. In diesem Zeitraum gilt die Zeitkonstante $\tau_2 = 90.9\,\mathrm{ms}$. Zum Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{s}$ wird der Schalter wieder geöffnet, und es beginnt der Entladevorgang mit $\tau_1 = 1\,\mathrm{s}$.

c) Im Fall des geöffneten Schalters (*Entladevorgang*) gilt die Differentialgleichung

$$-\frac{u_C}{R} = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, \tag{12}$$

da $i_R = -i_C$ (Knotenregel) und $U_R = U_C$ (Maschenregel). Wir machen den Ansatz

$$u_C(t) = A\mathrm{e}^{st} \tag{13}$$

und erhalten

$$-\frac{A\mathrm{e}^{s}t}{R} = CAs\mathrm{e}^{st}. \tag{14}$$

Division durch $A\mathrm{e}^{st}$ und Umstellen ergibt die charakteristische Gleichung

$$s = -\frac{1}{RC}, \tag{15}$$

und somit die Lösung

$$u_C(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{16}$$

Die verbleibende Konstante A bestimmen wir durch Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$u_C(t=0) = U_0 = A\mathrm{e}^0 \quad \Leftrightarrow \quad A = U_0. \tag{17}$$

d) Im Fall des geschlossenen Schalters (*Ladevorgang*) erhalten wir erneut über die Knotenregel die *inhomogene* Differentialgleichung

$$-\frac{u_C - 10\,\mathrm{V}}{R} = -\frac{u_C}{R} + \frac{10\,\mathrm{V}}{R} = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, \tag{18}$$

welche (aufgrund des inhomogenen Anteils $\frac{10\,\mathrm{V}}{R}$, also eines Summanden, in dem kein u_C auftaucht) nicht direkt wie oben gelöst werden kann (probieren Sie es ruhig einmal!). Stattdessen gehen wir wie folgt vor:

i) Wir bestimmen die Lösungsschar $u_{C,h}(t;A)$ der homogenen Gleichung $-\frac{u_C}{R} = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, welche durch die Konstante A parametrisiert ist. Dies entspricht genau unserer Lösung zu Aufgabenteil c) in Gleichung (16), es gilt

$$u_C(t;A) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}; \tag{19}$$

hier mit $R = \frac{10}{11}\mathrm{k}\Omega$.

ii) Wir bestimmen eine konkrete Lösung $u_{C,p}(t)$ der inhomogenen Gleichung; diese heißt die *partikuläre Lösung*. Eine solche ist häufig leicht zu finden, indem man annimmt, die Funktion sei konstant: $u_{C,p}(t) = k$. Aus dieser Annahme folgt $\frac{\mathrm{d}u_{C,p}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$; Einsetzen in Gleichung (18) ergibt

$$-\frac{k}{R} + \frac{10\,\mathrm{V}}{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 10\,\mathrm{V}, \tag{20}$$

und somit ist $u_{C,p}(t) = 10\,\mathrm{V}$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung (18). Beachten Sie, dass dies nur eine von vielen möglichen partikulären Lösungen ist (nämlich die für den Startwert $u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$)!

iii) Die Menge *aller* Lösungen der inhomogenen Gleichungen ist nun durch

$$u_C(t) = u_{C,p}(t) + u_{C,h}(t;A) \tag{21}$$

für beliebige Parameter A gegeben. Beachten Sie hierzu, dass $u_{C,h}(t;A)$ für alle Parameter A die Gleichung

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R} = 0 \tag{22}$$

löst. Wenn $u_{C,p}(t)$ die Gleichung

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R} = \frac{10\,\mathrm{V}}{R} \tag{23}$$

löst, so löst also auch $u_C(t) = u_{C,p}(t) + u_{C,h}(t;A)$ für alle Parameterwerte A die inhomogene Lösung – wir addieren schließlich auf beiden Seiten von Gleichung (23) lediglich die konstante Null-Funktion.

iv) Schließlich bestimmen wir wie im homogenen Fall durch Einsetzen der Anfangsbedingungen den verbleibenden Parameter A:

$$u_C(t=0) = U_0 = 10\,\mathrm{V} + A\mathrm{e}^{-\frac{0}{RC}} \quad \Rightarrow A = U_0 - 10\,\mathrm{V}. \tag{24}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung für Lade- und Entladevorgänge an RC-Gliedern

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_1 - (U_1 - U_0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \\ &= U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + U_1 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}), \end{aligned} \tag{25}$$

wobei $u_C(t = 0) = U_0$ der Startwert des Vorangs ist und U_1 der Endwert (gegeben durch eine Spannungsquelle). Gleichung (25) stellt somit eine Verallgemeinerung der beiden Gleichungen (9) und (10) dar, in welcher auch andere Start-/Zielzustände als 0 V möglich sind.

e) Einsetzen in die im vorherigen Aufgabenteil bestimmten Lösungselemente ergibt

$$u_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10\,\mathrm{V} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) & 0 \leq t < 1\,\mathrm{s} \\ U_C(t = 1\,\mathrm{s}) \cdot e^{-\frac{(t - 1\,\mathrm{s})}{\tau_1}} & 1\,\mathrm{s} \leq t \qquad \text{mit } U_C(t = 1\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{V} \cdot (1 - e^{-\frac{1\,\mathrm{s}}{\tau_2}}) \approx 10\,\mathrm{V}. \end{cases} \tag{26}$$

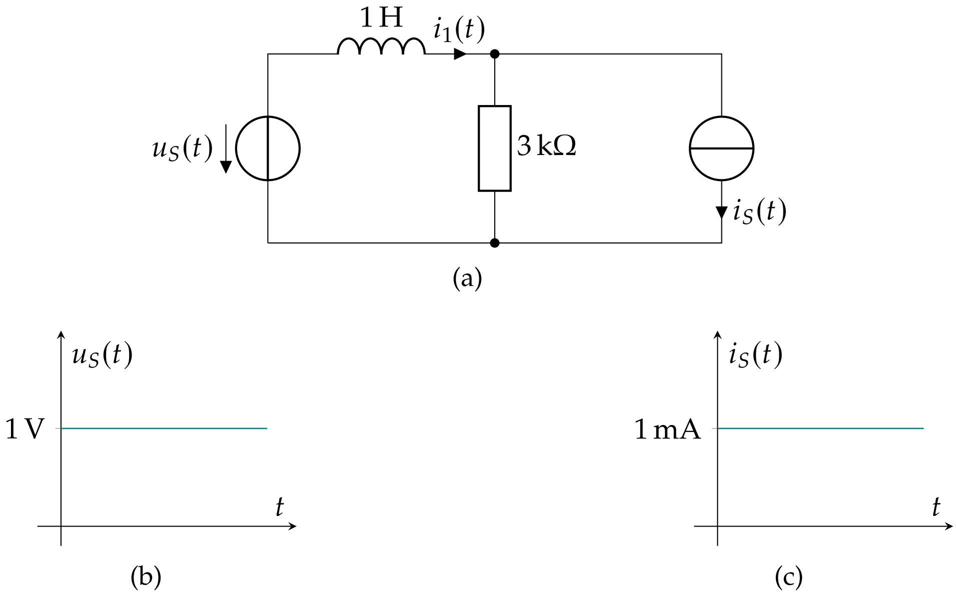


Abbildung 7

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie per Superpositionsprinzip den Strom $i_1(t)$ im in Abbildung 7 abgebildeten Schaltkreis. Das Netzwerk ist für $t < 0$ im *Ruhezustand*, das heißt, alle auftretenden Ströme und Spannungen sind null.

b) Begründen Sie, warum das Superpositionsprinzip in Schaltungen mit Kondensatoren und Induktivitäten generell anwendbar ist.

   Hinweis: Zeigen Sie hierzu, dass Ableitung und Integration lineare Operationen sind!

Lösung

a) (i) Betrachtung der Spannungsquelle

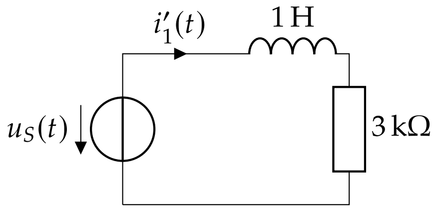


Abbildung 8

DGL: $U_S(t) = 1\,\mathrm{H} \cdot \frac{\mathrm{d}i_1'(t)}{\mathrm{d}t} + 3\,\mathrm{k\Omega} \cdot i_1'(t)$
Homogene Lösung, Ansatz $i_{1,H}'(t) = A \cdot e^{st}$:

$$\begin{aligned} 0 &= 1\,\mathrm{H} \cdot A \cdot s \cdot e^{st} + 3\,\mathrm{k\Omega} \cdot A \cdot e^{st} \\ \Leftrightarrow & 1\,\mathrm{H} \cdot A \cdot s + 3\,\mathrm{k\Omega} \cdot A = 0 \\ \overset{A\neq 0}{\Leftrightarrow} & s = -\frac{3\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{H}} \qquad \text{(Charakteristische Gleichung)} \end{aligned}$$

Inhomogene Lösung, Ansatz $i_{1,P}'(t) = k$:

$$1\,\mathrm{V} = 0 + 3\,\mathrm{k\Omega} \cdot k \Leftrightarrow i_{1,P}'(t) = \frac{1\,\mathrm{V}}{3\,\mathrm{k\Omega}}$$

$\Rightarrow i_1'(t) = i_{1,H}'(t) + i_{1,P}'(t) = A \cdot e^{-\frac{3\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{H}} \cdot t} + \frac{1\,\mathrm{V}}{3\,\mathrm{k\Omega}}$
Anfangsbedingung: $i_1'(t=0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow A = -\frac{1\,\mathrm{V}}{3\,\mathrm{k\Omega}}$

(ii) Betrachtung der Stromquelle

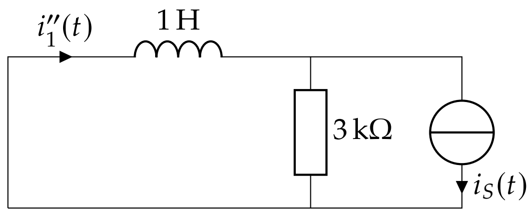


Abbildung 9

DGL: $i_S(t) = i_1''(t) + \frac{1\,\mathrm{H}}{3\,\mathrm{k\Omega}} \cdot \frac{\mathrm{d}i_1''(t)}{\mathrm{d}t}$
Homogene Lösung, Ansatz $i_{1,H}'(t) = A \cdot e^{st}$:

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot e^{st} + \frac{1\,\mathrm{H}}{3\,\mathrm{k\Omega}} \cdot A \cdot s \cdot e^{st} \\ \overset{A\neq 0}{\Leftrightarrow} & 1 + \frac{1\,\mathrm{H}}{3\,\mathrm{k\Omega}} \cdot s = 0 \\ \Leftrightarrow & s = -\frac{3\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{H}} \qquad \text{(wie oben! Gleiche Zeitkonstante, da gleiches System.)} \end{aligned}$$

Inhomogene Lösung (wie oben): $1\,\mathrm{mA} = i_{1,P}''(t)$

$\Rightarrow i_1''(t) = i_{1,H}''(t) + i_{1,P}''(t) = 1\,\text{mA} + A \cdot e^{-\frac{3\,\text{k}\Omega}{1\,\text{H}} \cdot t}$

Anfangsbedingung: $i_1'(t = 0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow A = -1\,\text{mA}$

Daraus folgt:

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t) = \frac{4}{3}\,\text{mA} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),\ \tau = \frac{L}{R} = \frac{1\,\text{H}}{3\,\text{k}\Omega} = \frac{1}{3}\,\text{ms} \tag{27}$$

„Intuitiv“: $i_1(t) = (\text{Endwert}) + (\text{Startwert} - \text{Endwert}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Startwert: $i_1(t) = 0$

Endwert: Induktivität $\hat{=}$ Leitung $\Rightarrow i_1(t) = \frac{U_S(t)}{3\,\text{k}\Omega} + i_S(t) = \frac{4}{3}\,\text{mA}$

b) Das Superpositionsprinzip ist in einer elektrischen Schaltung genau dann anwendbar, wenn Strom und Spannung an jedem Bauteil lineare Funktionen voneinander sind. Für ohm'sche Widerstände gilt dies trivialer Weise, aber auch für Induktivitäten und Kapazitäten kann man dies zeigen. Dafür ist lediglich zu überprüfen, ob Differenzierung und Integration lineare Operatoren sind, ob diese also die beiden Bedingungen

- $f(\alpha \cdot g) = \alpha \cdot f(g)$ für jede Konstante α, sowie
- $f(g + h) = f(g) + f(h)$

erfüllen.

Für den Ableitungsoperator $f(g) = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$ ist dies leicht zu zeigen:

- $f(\alpha \cdot g) = \frac{\mathrm{d}\alpha \cdot g(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha f(g)$, und
- $f(g + h) = \frac{\mathrm{d}g(t)+h(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = f(g) + f(h)$.

Analog kann man dies auch für die Integration zeigen, und somit stehen Strom und Spannung auch an Induktivitäten und Kapazitäten in einem linearen Zusammenhang. Das Superpositionsprinzip kann somit in Schaltungen mit solchen dynamischen (aber linearen) Bauteilen angewandt werden, wie in Aufgabenteil a) geschehen.

Eine andere Begründung könnte wie folgt aussehen: Systeme bestehend aus ausschließlich linearen Bauteilen (Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten) werden stets durch ein System linearer Differentialgleichungen beschrieben. Falls die Schaltung Quellen enthält, so führen diese jeweils zu inhomogenen Gleichungen. Die homogene Gleichung (mit deaktivierten Quellen) ist jedoch in allen Fällen gleich. Die Betrachtung der Schaltung mit einzelnen aktivierten Quellen entspricht der Bestimmung von partikulären Lösungen für die einzelnen Inhomogenitäten; die Addition dieser Lösungen führt dann zu einer Gesamtlösung, die alle Inhomogenitäten gleichzeitig erfüllt.