Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2022

Musterlösung zu Übungsblatt 4

Eike Petersen, Julia Sauer, Carlotta Hennigs[1]

Aufgabe 1)

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 1.

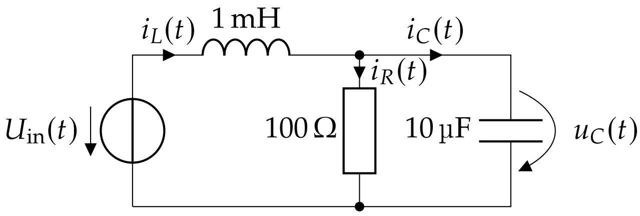


Abbildung 1

i) Stellen Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Variablen u_C auf. Verwenden Sie hierfür die Kirchhoff'schen Regeln sowie die Bauteilgleichungen der auftretenden Bauelemente, und bringen Sie diese in die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C(t) = \frac{1}{LC} U_{\text{in}}(t). \tag{1}$$

ii) Zeigen Sie, dass das System unterkritisch gedämpft ist und bestimmen Sie $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Hinweis: Nehmen Sie unabhängig von Ihrer Lösung aus i) an, dass $\alpha = \frac{1}{2RC}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Verwenden Sie diese Parameter auch für die folgenden Aufgaben.

iii) Nun soll die Zero-Input-Response (ZIR) bestimmt werden. Das bedeutet, dass alle Quellen auf 0 gesetzt werden und es gilt die homogene Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C(t) = 0. \tag{2}$$

Bestimmen Sie zunächst die charakteristische Gleichung für die Differentialgleichung (2). Machen Sie dafür den allgemeinen Ansatz $u_C(t) = A\mathrm{e}^{st}$.

iv) Bestimmen Sie alle Lösungen für die charakteristische Gleichung in Abhängigkeit von ω_d.

v) Gehen Sie für die Lösung der Differentialgleichung (2) von einer äquivalenten Darstellung

$$u_C(t) = K_1 \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) + K_2 \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) \tag{3}$$

aus und verwenden Sie die Anfangsbedingungen $i_L(0) = 0\,\mathrm{A}$ und $u_C(0) = 1\,\mathrm{V}$, um die beiden freien Parameter K_1 und K_2 zu bestimmen.

[1] Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits".

vi) **Zusatzaufgabe**
Skizzieren Sie die ZIR der Spannung $u_C(t)$ für die Schalung in Abbildung 1.

Lösung

1. Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Schaltung in Abbildung 1 aufzustellen, beginnen wir mit der Knotenregel

$$i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) \tag{4}$$

und setzen die Bauteilgleichungen der Kapazität und des Ohm'schen Widerstands ein

$$i_L(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{R}. \tag{5}$$

Um die Bauteilgleichung der Induktivität

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

in Gleichung (5) einsetzten zu können, leiten wir diese ab und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} &= C\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} && (7)\\ \frac{1}{L}u_L(t) &= C\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} && (8)\\ \frac{1}{L}(U_{\mathrm{in}}(t) - u_C(t)) &= C\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}, && (9) \end{aligned}$$

wobei wir in Gleichung (9) die Maschenregel verwendet haben. Schließlich formen wir das Ergebnis in die durch Gleichung (1) vorgegeben Form und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{1}{LC}U_{\mathrm{in}}(t) \tag{10}$$

eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Hierbei gilt $2\alpha = \frac{1}{RC}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

2. Für die Dämpfungskonstante gilt

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\cdot 100\,\Omega\cdot 10\,\mu\mathrm{F}} = 500\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{11}$$

und für die natürliche Frequenz gilt

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1\,\mathrm{mH}\cdot 10\,\mu\mathrm{F}}} = 10^4\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}. \tag{12}$$

Für unterkritisch gedämpfte Systeme zweiter Ordnung gilt

$$\begin{aligned} \alpha &< \omega_0 && (13)\\ 500\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} &< 10^4\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, && (14) \end{aligned}$$

was hiermit gezeigt ist. Als nächstes bestimmen wir die ungedämpfte natürliche Frequenz

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx 9987.5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, \tag{15}$$

die etwas kleiner ist als ω_0.

3. Da wir die ZIR des System suchen setzten wir alle Quellen auf 0. Dadurch wird aus Gleichung (10) die homogene Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0 \tag{16}$$

Mit dem Ansatz $u_C(t) = A \cdot \mathrm{e}^{st}$ erhalten wir

$$\Rightarrow \quad As^2\mathrm{e}^{st} + \frac{1}{RC} \cdot As\mathrm{e}^{st} + \frac{1}{LC} \cdot A\mathrm{e}^{st} = 0 \tag{17}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{18}$$

die charakteristische Gleichung des Systems.

4. Die Lösung der charakteristischen Gleichung (18) lautet

$$s_{1/2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega_d. \tag{19}$$

5. Zunächst: Warum ergibt die angegebene Lösungsdarstellung überhaupt Sinn? Es gilt:

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= A_1 \cdot \mathrm{e}^{s_1 t} + A_2 \cdot \mathrm{e}^{s_2 t} = A_1\mathrm{e}^{(-\alpha + j\omega_d)t} + A_2\mathrm{e}^{(-\alpha - j\omega_d)t} && (20)\\
&= A_1\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{j\omega_d t} + A_2\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-j\omega_d t} \qquad \text{| Euler'sche Identität} && (21)\\
&= A_1\mathrm{e}^{-\alpha t}(\cos w_d t + j\sin\omega_d t) + A_2\mathrm{e}^{-\alpha t}(\cos w_d t - j\sin\omega_d t) && (22)\\
&= \underbrace{(A_1 + A_2)}_{K_1}\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_d t + \underbrace{j(A_1 - A_2)}_{K_2}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega_d t && (23)\\
&= K_1\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_d t + K_2\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega_d t, && (24)
\end{aligned}$$

und somit sind die beiden Lösungsdarstellungen exakt äquivalent. Die in Gleichung (24) angegebene Darstellung verdeutlich dabei sehr anschaulich den Einfluss der Parameter α und ω_d: Ersterer repräsentiert die Zeitkonstante, mit der die Schwingung exponentiell abfällt, und letzterer die Oszillationsfrequenz.

Wir bestimmen nun die unbekannten Konstanten K_1 und K_2 durch Einsetzen in die Anfangsbedingungen. Zunächst gilt

$$u_C(t=0) = K_1 \overset{!}{=} 1\,\mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad K_1 = 1\,\mathrm{V}. \tag{25}$$

Die zweite Anfangsbedingung $i_L(t=0) = 0\,\mathrm{A}$ erfordert etwas mehr Arbeit. Aus der Knotenregel folgt

$$i_L(t) = \frac{u_C(t)}{R} + C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{26}$$

Ableiten der Gleichung (24) ergibt

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha K_1 \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega_d t - K_1 \omega_d \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega_d t - \alpha K_2 \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega_d t + K_2 \omega_d \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega_d t \tag{27}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = K_2 \omega_d - \alpha K_1, \tag{28}$$

und Einsetzen der Gleichungen (25) und (28) in Gleichung (26) führt schließlich auf

$$i_L(t=0) = \frac{1\,\mathrm{V}}{R} + C(K_2\omega_d - \alpha K_1) \overset{!}{=} 0\,\mathrm{A} \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow \quad K_2 = -\frac{1\,\mathrm{V}}{RC\omega_d} + \frac{\alpha \cdot 1\,\mathrm{V}}{\omega_d} = -\frac{1\,\mathrm{V}}{2RC\omega_d} \approx -0.0501\,\mathrm{V}. \tag{30}$$

Die ZIR lautet somit

$$u_C(t) = 1\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-500t \cdot \frac{1}{\mathrm{s}}} \cdot \cos\left(9987.5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} t\right) - 0.0501\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-500t \cdot \frac{1}{\mathrm{s}}} \cdot \sin\left(9987.5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} t\right). \tag{31}$$

6. Abbildung 2 stellt den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung für den unterkritisch gedämpften Fall dar.

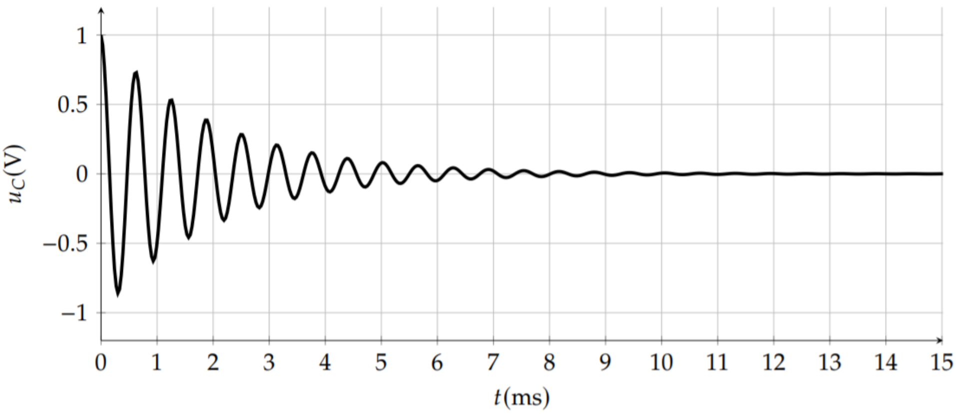


Abbildung 2

Aufgabe 2

Analysieren Sie den in Abbildung 3a dargestellten Schaltkreis.

i) Ist die Zero-Input-Response (ZIR, siehe Aufgabe 1iii)) der Schaltung unterkritisch, kritisch oder überkritisch gedämpft?

   Hinweis: Stellen Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Variablen u_C auf, und bringen Sie diese in die Standardform

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C(t) = 0.$$

   Verwenden Sie hierfür die Kirchhoff'schen Regeln sowie die Bauteilgleichungen der auftretenden Bauelemente.

ii) Skizzieren Sie die ZIR von $u_C(t)$ grob. Bestimmen Sie hierzu zusätzlich zu den Ergebnissen aus Teil a) die gedämpfte Resonanzfrequenz ω_d, sowie den Gütefaktor Q der Schaltung. Nehmen den Anfangszustand $u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$ an.

iii) **Zusatzaufgabe (2 Bonuspunkte)**

   Vergleichen Sie die Einhüllende der ZIR aus den vorherigen Aufgabenteilen mit der ZIR des in Abbildung 3b dargestellten RC-Gliedes.

   Hinweis: Bestimmen Sie dafür die Zeitkonstante des RC-Gliedes und gehen Sie von der gleichen Anfangsbedingung für $u_C(t)$ aus.

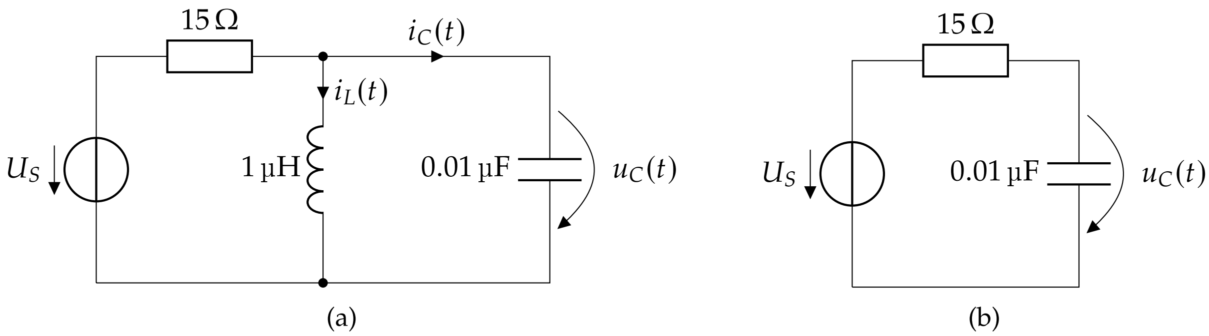


Abbildung 3

Lösung

i) Da wir wieder die ZIR suchen ist die Differentialgleichung identisch zu Gleichung (16) aus der letzten Aufgabe und kann auf gleichem Wege hergeleitet werden, denn für die Betrachtung der ZIR (und nur dafür!) sind die Schaltungen in den beiden Aufgaben gleich: Es handelt sich bei beiden um parallele RLC-Glieder.

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{3} \times 10^7 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^7 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{32}$$

Da $\alpha < \omega_0$, ist die ZIR der Schaltung unterkritisch gedämpft. Sie schwingt also.

ii) Wir bestimmen zunächst die gedämpfte natürliche Frequenz und den Qualitätsfaktor

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx 9.43 \cdot 10^6 \,\mathrm{rad/s}$$
$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 1.5.$$

Nach 1.5 Oszillationen ist die Amplitude auf unter 4% der Anfangsamplitude abgefallen. Abbildung 4 zeigt die ZIR des Systems für den Startzustand $u_C(0) = 10\,\mathrm{V}$, $i_L(0) = 0\,\mathrm{A}$.

iii) Die ZIR des RC-Gliedes fällt mit

$$\tau = R \cdot C = \frac{1}{2\alpha} = 1.5\,\mathrm{s} \times 10^{-7}\,\mathrm{s} \tag{33}$$

ab, also doppelt so schnell wie im obigen Schaltkreis mit Spule. Außerdem kann das RC-Glied nicht schwingen, da es ein System erster Ordnung ist. Siehe ebenfalls Abbildung 4.

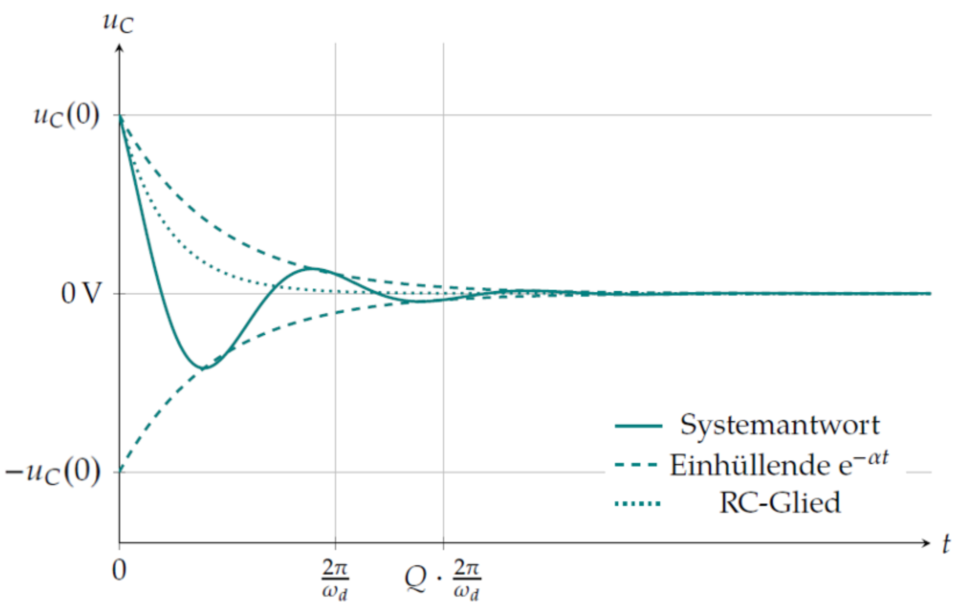


Abbildung 4

Aufgabe 3 (Klausuraufgabe SS 2016 – Synthese)

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 5. Die Differentialgleichung für die gesuchte Ausgangsgröße $i_{\text{out}}(t) = i_R(t)$ in dieser Schaltung lautet

$$CL\frac{\mathrm{d}^2 i_R(t)}{\mathrm{d}t^2} + CR\frac{\mathrm{d}i_R(t)}{\mathrm{d}t} + i_R(t) = i_{\text{in}}(t).$$

Modifizieren Sie diese Schaltung durch das Einbringen einer weiteren Induktivität oder einer weiteren Kapazität an einer beliebigen Stelle, sodass das resultierende System überkritisch gedämpft ist. Das neue Bauelement kann in Reihe oder parallel zu einem der bestehenden Bauelemente eingefügt werden. Geben Sie den Parameterwert des zusätzlichen Bauteils an.

Hinweis: Es sind mehrere Lösungswege möglich.

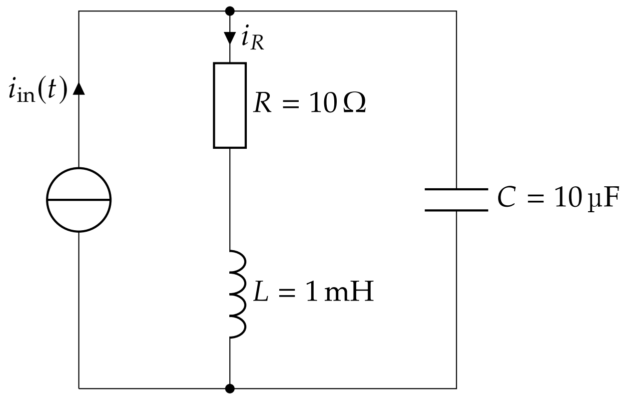


Abbildung 5

Lösung

Die charakteristische Gleichung für die gegebene Differentialgleichung lautet

$$CL \cdot (s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}) = 0. \tag{34}$$

Die Kreisfrequenz des Oszillators ergibt sich somit (wie in Aufgabe 1) zu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{35}$$

und die Dämpfungskonstante ist

$$\alpha = \frac{R}{2L}. \tag{36}$$

Durch Einsetzen der Werte sehen wir, dass

$$\alpha = \frac{10\,\Omega}{2 \cdot 1\,\text{mH}} = 5 \cdot 10^3\,1/\text{s} < \sqrt{\frac{1}{1\,\text{mH} \cdot 10\,\mu\text{F}}} = 10^4\,1/\text{s} = \omega_0. \tag{37}$$

Das System besitzt also eine unterkritisch gedämpfte Dynamik. Die Parameter müssen jetzt so verändert werden, dass das System überkritisch gedämpft ist, also $\alpha > \omega_0$ ist. Ein leichter Ansatz ist es, den Wert für L durch eine zusätzliche parallel oder in Reihe geschaltete Induktivität bzw. den Wert für C durch eine zusätzliche parallel oder in Reihe geschaltete Kapazität anzupassen. Im Folgenden wird der Ansatz bezüglich der Kapazität vorgestellt, da diese nur die Kreisfrequenz, nicht aber die Dämpfungskonstante verändert.

Lösungsweg 1: Damit $\alpha > \omega_0$ gilt, muss (bei gleichem α) der Wert von ω_0 offenbar mehr als halbiert werden. Da die Kreisfrequenz proportional zu $\sqrt{1/C}$ ist, muss hierfür der Wert der Kapazität mehr als vervierfacht werden. Dies kann durch Parallelschaltung einer zweiten Kapazität der Größe $C_2 > 30\,\text{uF}$ erzielt werden. (Addition der Einzelkapazitäten bei Parallelschaltung, siehe Vorlesung.)

Lösungsweg 2: Die Gleichung

$$\frac{10\,\Omega}{2 \cdot 1\,\text{mH}} > \sqrt{\frac{1}{1\,\text{mH} \cdot C}} \tag{38}$$

wird nach C umgestellt. Dies ergibt

$$C > \frac{1}{1\,\text{mH} \cdot \frac{100\,\Omega^2}{4\,\mu\text{H}^2}} = 40\,\mu\text{F}. \tag{39}$$

Die Kapazität C muss also so verändert werden, dass sie größer als $40\,\mu\text{F}$ wird. Dies kann erreicht werden, indem eine Kapazität $C_2 > 30\,\mu\text{F}$ zu C parallel geschaltet wird (Addition der Einzelkapazitäten bei Parallelschaltung, siehe Vorlesung.)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die (frequenzabhängige) Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_L/\underline{I}_{\text{in}}$ der Schaltung in Abbildung 6. Wie lautet die Antwort $u_L(t)$ des Systems auf ein Eingangssignal $i_{\text{in}}(t) = \hat{I}\cos(\omega t)$?

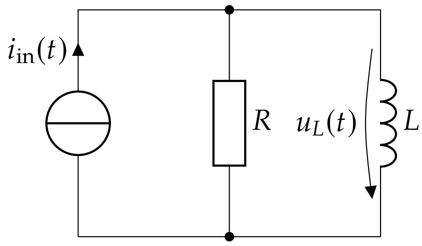
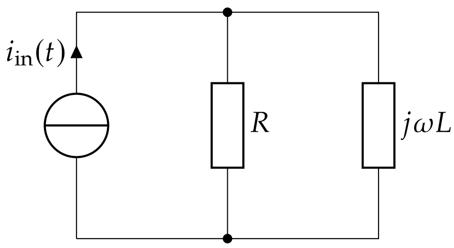
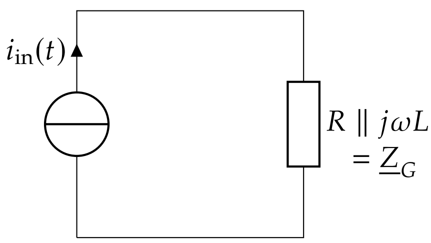


Abbildung 6

Lösung



(a)



(b)

Abbildung 7

Um die Impulsantwort zu bestimmen, werden zunächst Spule und Widerstand durch ihre Impedanzen ersetzt (Abbildung 7a) und danach der Gesamtwiderstand aus den beiden parallelen Impedanzen bestimmt (Abbildung 7b):

$$\underline{Z}_G = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L \cdot (R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R\omega^2 L^2 + jR^2\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{40}$$

$$= \frac{\sqrt{R^2\omega^4 L^4 + R^4\omega^2 L^2}}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot \mathrm{e}^{j \arctan\left(\frac{R^2\omega L}{R\omega^2 L^2}\right)} \quad | \text{Umrechnung in Polarkoordinaten} \tag{41}$$

$$= \frac{R\omega L\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot \mathrm{e}^{j \arctan \frac{R}{\omega L}} = \underbrace{\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{\hat{Z}_G} \cdot \mathrm{e}^{j \overbrace{\arctan \frac{R}{\omega L}}^{\varphi_Z}} \tag{42}$$

$$= \underline{U}_L / \underline{I}_{\text{in}} = \underline{H}(j\omega). \tag{43}$$

Hiermit können wir nun die Systemantwort zu

$$u_L(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_L \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underline{H}(j\omega) \cdot \underline{I}_{\text{in}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \tag{44}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \mathrm{e}^{j \arctan \frac{R}{\omega L}} \cdot \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j \overbrace{\varphi_I}^{=0}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \tag{45}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j\left(\arctan \frac{R}{\omega L} + \omega t\right)}\right\} \tag{46}$$

$$= \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right)\right) \tag{47}$$

bestimmen, also einer Kosinus-Schwingung mit Amplitude

$$\hat{U}_L = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \hat{I} = \hat{Z}_G \cdot \hat{I} \tag{48}$$

und Phasenverschiebung

$$\varphi_L = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right) = \varphi_Z + \varphi_I. \tag{49}$$