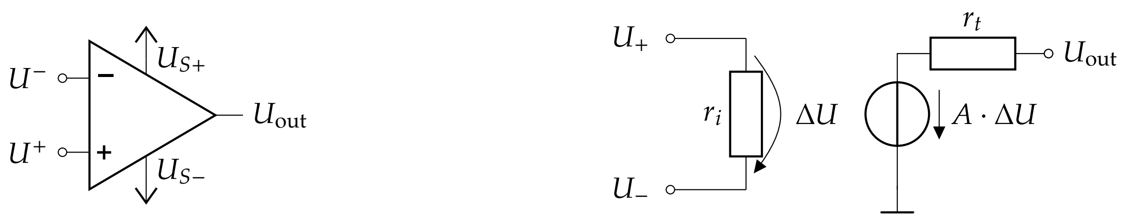
Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2022

Musterlösung zu Übungsblatt 10

Eike Petersen, Julia Sauer, Carlotta Hennigs[1]

Grundlagen: Operationsverstärker

In Abbildung 1b ist das Ersatzschaltbild eines Operationsverstärkers dargestellt. Bei einem *idealen Operationsverstärker* nehmen wir an, dass $r_i \to \infty$, $A \to \infty$ und $r_t = 0\,\Omega$ ist. Das dargestellte Ersatzschaltbild gilt (auch bei einem idealen Operationsverstärker) nur, wenn der Operationsverstärker nicht in Sättigung betrieben wird, wenn also $U_{S-} < U_{\text{out}} < U_{S+}$ gilt.



(a) Schaltsymbol des Operationsverstärkers

(b) Ersatzschaltbild eines Operationsverstärkers

Abbildung 1

Wenn ein idealer Operationsverstärker mit negativem Feedback (das heißt einer Leiterverbindung zwischen U_{out} und U^-) und nicht in Sättigung betrieben wird, so gilt näherungsweise $U^- \approx U^+$.

[1] Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits“.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 2. Wenn nicht anders angegeben, nehmen Sie in dieser Aufgabe an der Operationsverstärker sei ideal und wird nicht in Sättigung betrieben.

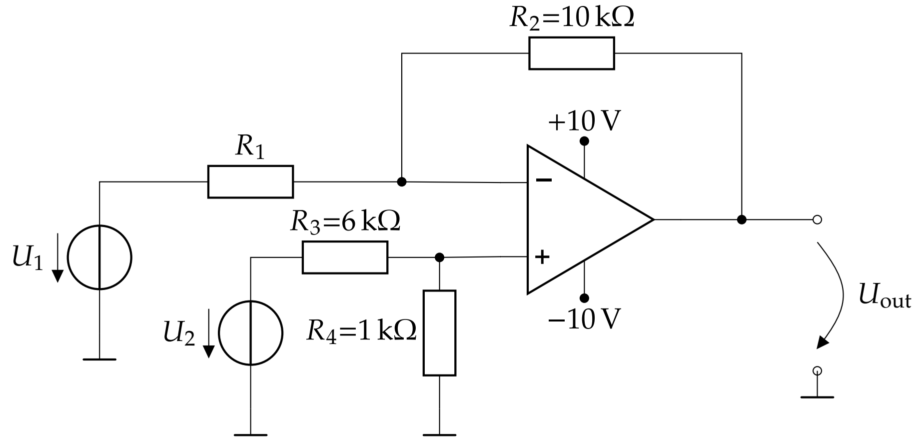


Abbildung 2

i) In der Vorlesung haben Sie verschiedene Operationsverstärkerschaltungen kennengelernt. Welche dieser Schaltungen ist in Abbildung 2 dargestellt. Nennen Sie den Namen und bestimmen Sie einen Ausdruck für U_{out} in Abhängigkeit von U_1, U_2 und R_1.

ii) Ändert sich an dem von Ihnen bestimmten Ausdruck für U_{out}, wenn an die Ausgangsklemmen der Schaltung (zwischen U_{out} und Masse) ein Lastwiderstand R_L angeschlossen wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

iii) Es sei nun $U_1 = U_2$. Bestimmen Sie einen Zahlenwert für R_1, sodass

a) $U_{\text{out}} = 0\,\text{V}$ und

b) $U_{\text{out}} = -U_1 = -U_2$.

iv) Bestimmen Sie unter Verwendung der in Abbildung 2 angegebenen Widerstandswerte einen Zahlenwert für die Ausgangsspannung U_{out} mit

a) $U_1 = 2\,\text{V}$, $U_2 = 4\,\text{V}$ und

b) $U_1 = -4\,\text{V}$, $U_2 = 2\,\text{V}$.

Verwenden Sie dazu unabhängig von Ihrer Lösung aus iii) den Widerstandswert $R_1 = 4\,\text{k}\Omega$.

v) Berechnen Sie die Zahlenwerte der zwei Eingangswiderstände für beide Eingangsklemmen der Schaltung. Nehmen Sie dazu weiterhin an, dass $R_1 = 4\,\text{k}\Omega$

Hinweis: Bestimmen Sie den Eingangswiderstand indem Sie die Eingangsquelle durch eine Quelle U_{test} ersetzen und den Strom I_{test} bestimmen. Lassen Sie die Ausgangsklemmen offen. Bestimmen Sie die Eingangswiderstände der beiden Klemmen einzeln indem Sie die jeweils andere Quelle Null setzten.

vi) **Zusatzaufgabe**

Bestimmen Sie einen Zahlenwert für den Ausgangswiderstand der Schaltung. Nehmen Sie zur Bestimmung des Ausgangswiderstand an, der interne Ausgangswiderstand r_t des Operationsverstärkers sei nicht vernachlässigbar. Für den Eingangswiderstand soll weiterhin gelten $r_i \to \infty$. Nehmen Sie für die Berechnung an $r_t \approx 1\,\text{k}\Omega$, $A \approx 10^5$ und weiterhin $R_1 = 4\,\Omega$.

Lösung

i) Die Schaltung in Abbildung 2 ist ein Subtrahierer. Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt

$$U_{\text{out}} = \frac{(R_1 + R_2)}{R_1} \cdot \frac{R_4}{(R_3 + R_4)} \cdot U_2 - \frac{R_2}{R_1} \cdot U_1. \tag{1}$$

Wir setzen die gegeben Bauteilparameter ein

$$U_{\text{out}} = \frac{(R_1 + 10\,\text{k}\Omega)}{R_1} \cdot \frac{1\,\text{k}\Omega}{(6\,\text{k}\Omega + 1\,\text{k}\Omega)} \cdot U_2 - \frac{10\,\text{k}\Omega}{R_1} \cdot U_1 \tag{2}$$

$$= \frac{R_1 + 10\,\text{k}\Omega}{7R_1} \cdot U_2 - \frac{10\,\text{k}\Omega}{R_1} \cdot U_1 \tag{3}$$

und erhalten U_{out} in Abhängigkeit von U_1, U_2 und R_1.

ii) Nein, R_L wäre für die Herleitung der Gleichung (1) komplett irrelevant. Der Grund hierfür liegt in der Annahme eines idealen Operationsverstärkers, welche beinhaltet, dass der Ausgang des Operationsverstärkers von einer idealen Spannungsquelle getrieben wird.

iii) Wir setzen $U^* = U_1 = U_2$ und

a) $U_{\text{out}} = 0\,\text{V}$ in Gleichung (3) ein

$$0\,\text{V} = \left(\frac{R_1 + 10\,\text{k}\Omega}{7R_1} - \frac{10\,\text{k}\Omega}{R_1}\right) \cdot U^* \tag{4}$$

$$0 = \frac{R_1 + 10\,\text{k}\Omega}{7R_1} - \frac{10\,\text{k}\Omega}{R_1} \tag{5}$$

$$0 = R_1 + 10\,\text{k}\Omega - 70\,\text{k}\Omega \tag{6}$$

und erhalten

$$R_1 = 60\,\text{k}\Omega \tag{7}$$

b) bzw. $U_{\text{out}} = -U^*$, woraus folgt

$$-U^* = \left(\frac{R_1 + 10\,\text{k}\Omega}{7R_1} - \frac{10\,\text{k}\Omega}{R_1}\right) \cdot U^* \tag{8}$$

$$-1 = \frac{R_1 + 10\,\text{k}\Omega}{7R_1} - \frac{10\,\text{k}\Omega}{R_1} \tag{9}$$

$$-7R_1 = R_1 + 10\,\text{k}\Omega - 70\,\text{k}\Omega \tag{10}$$

und erhalten

$$R_1 = 7.5\,\text{k}\Omega \tag{11}$$

als Bauteilparameter für den ohm'schen Widerstand.

iv) Mit $R_1 = 4\,\text{k}\Omega$ folgt aus Gleichung (3)

$$U_{\text{out}} = \frac{4\,\text{k}\Omega + 10\,\text{k}\Omega}{7 \cdot 4\,\text{k}\Omega} \cdot U_2 - \frac{10\,\text{k}\Omega}{4\,\text{k}\Omega} \cdot U_1 \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}U_2 - \frac{5}{2}U_1 \tag{13}$$

also eine gewichtete Differenz der beiden Spannungen.

a)

$$U_{\text{out}} = \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{V} - \frac{5}{2} \cdot 2\,\text{V} = -3\,\text{V}. \tag{14}$$

b)

$$U_{\text{out}} = \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{V} + \frac{5}{2} \cdot 4\,\text{V} = 11\,\text{V}. \tag{15}$$

Dies ist ein rein theoretisches Ergebnis: Der Operationsverstärker geht bei 10 V in Sättigung. Eine kleinere Spannung kann am Ausgang nicht erzeugt werden. Die richtige Antwort lautet also $U_{\text{out}} = 10\,\text{V}$.

v) Zur Bestimmung des Eingangswiderstands setzen wir eine Testspannungsquelle U_{test} ein und lassen die Ausgangsklemmen geöffnet. Dann bestimmen wir den Teststrom I_{test} und erhalten den Innenwiderstand mit $R_{in} = \frac{U_{\text{test}}}{I_{\text{test}}}$. In Schaltung Abbildung 2 gibt es zwei Eingangsspannungsquellen, weshalb wir die Eingangswiderstände einzeln bestimmen indem wir die andere Quelle jeweils Null setzen (Kurzschluss).

I Zunächst wollen wir den Eingangswiderstand $R_{in,1}$ von U_1 bestimmen. Dazu setzen wir $U_2 = 0\,\text{V}$ (siehe Abbildung 3).

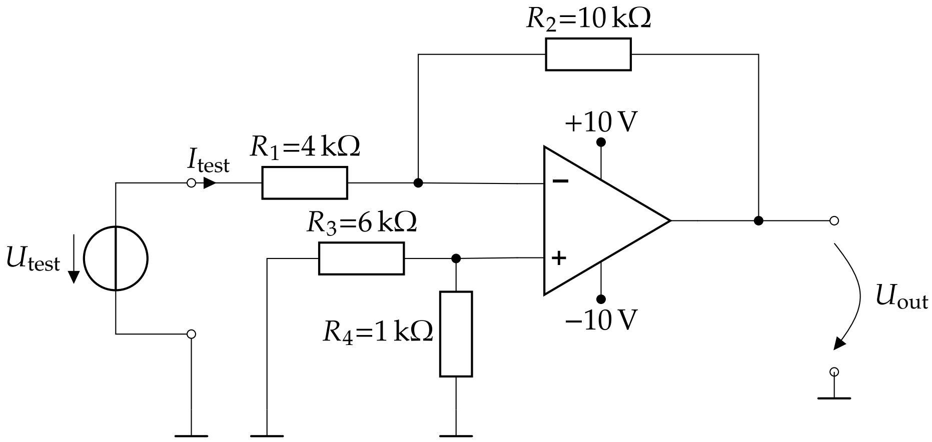


Abbildung 3

Da der Eingangswiderstand des Operationsverstärkers sehr groß ist, können wir $i^+ = 0\,\text{A}$ annehmen. Es folgt, dass der Plus-Eingang auf Masse liegt, also

$$U^+ = 0\,\text{V}. \tag{16}$$

Da wir von einem idealen Verstärker ausgehen, der nicht in Sättigung betrieben wird und mit einer negativen Rückführung geschaltet ist, wissen wir

$$U^+ \approx U^- \tag{17}$$

was bedeutet, dass der Minus-Eingang ebenfalls auf Masse liegt. Um I_{test} zu bestimmen, nutzen wir die Spannung über R_1 und erhalten

$$I_{\text{test}} = \frac{U_{\text{test}} - U^-}{R_1} = \frac{U_{\text{test}} - 0\,\text{V}}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_{in,1} = \frac{U_{\text{test}}}{I_{\text{test}}} = R_1 = 4\,\text{k}\Omega \tag{18}$$

II Um den Eingangswiderstand $R_{in,2}$ von U_2 zu bestimmen setzen wir $U_1 = 0\,\text{V}$ (siehe Abbildung 4).

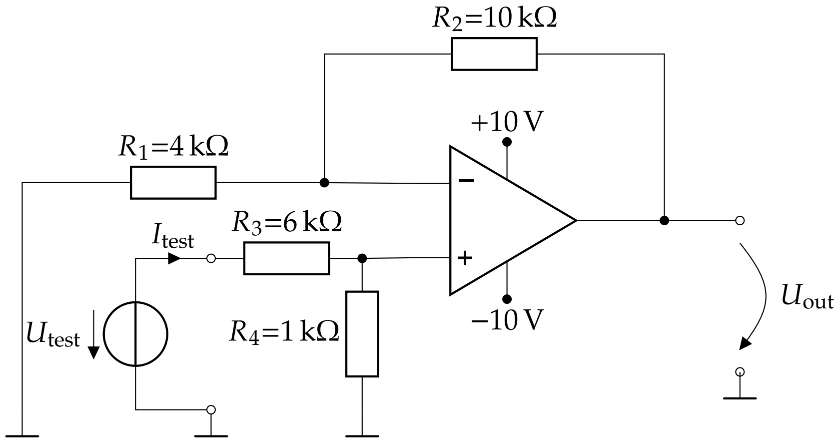


Abbildung 4

Es gilt wieder $i^+ \approx 0$ A. Daraus folgt, dass R_3 und R_4 in Reihe geschaltet sind und

$$I_{\text{test}} = \frac{U_{\text{test}}}{R_3 + R_4} \quad \Rightarrow \quad R_{in,2} = \frac{U_{\text{test}}}{I_{\text{test}}} = R_3 + R_4 = 7\,\text{k}\Omega. \tag{19}$$

vi) Zur Bestimmung des Ausgangswiderstands legen wir eine Testspannung U_{test} an den Ausgang der Schaltung an, schließen alle Eingangsquellen kurz und bestimmen dann den Teststrom I_{test} (siehe Abbildung 5).

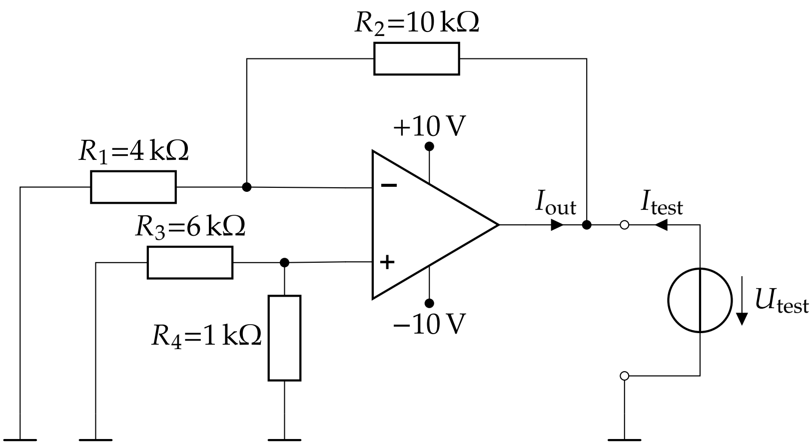


Abbildung 5

Nun setzen wir das Ersatzschaltbild des Operationsverstärkers mit sehr großem Eingangswiderstand $r_i \to \infty$, aber nicht vernachlässigbarem Ausgangswiderstand $r_t > 0$ (siehe Abbildung 6).

Der Ausgangswiderstand r_t des Opamps muss hier berücksichtigt werden, da sonst offensichtlich der Ausgangswiderstand der Schaltung Null wäre (unabhängig von der Spannung U_{test} könnte ein beliebig großer Strom durch die gesteuerte Spannungsquelle im Operationsverstärkers fließen).

Wichtig zu beachten ist, dass für diese Analyse *nicht* die Näherung $U^- \approx U^+$ verwendet werden kann, da der Operationsverstärker wegen der Annahme $r_t > 0$ *nicht* als „ideal" betrachtet werden kann! Es muss also die vollständige, formelle Analyse mit dem üblichen Ersatzschaltbild des Operationsverstärkers durchgeführt werden.

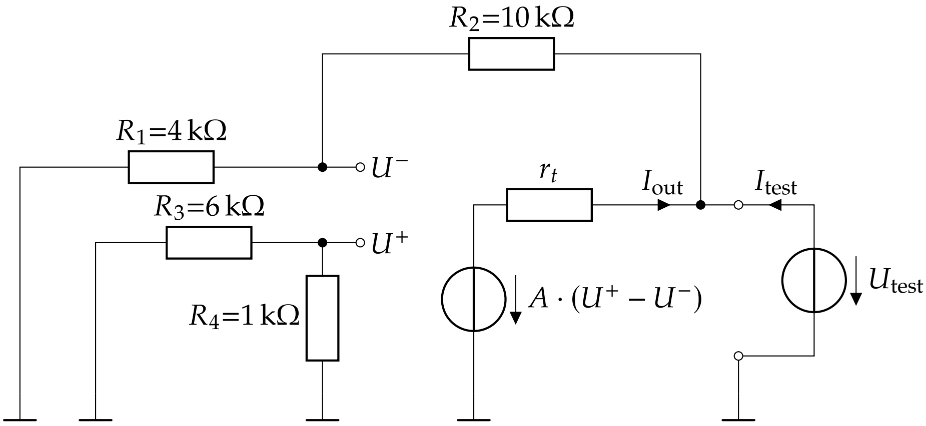


Abbildung 6

Aus $i^- = 0\,\text{A}$ und der Knotenregel am Ausgang des Operationsverstärkers folgt

$$I_{out} + I_{test} = \frac{U_{test}}{R_1 + R_2} \tag{20}$$

Um I_{test} zu bestimmen, brauchen wir also I_{out}. Aus der Maschenregel wissen wir, dass

$$I_{out} = \frac{A \cdot (U^+ - U^-) - U_{test}}{r_t}. \tag{21}$$

Einsetzen von Gleichung (21) in (20) ergibt

$$\frac{A \cdot (U^+ - U^-) - U_{test}}{r_t} + I_{test} = \frac{U_{test}}{R_1 + R_2} \qquad \Big| + \frac{U_{test}}{r_t} \tag{22}$$

$$\frac{A}{r_t} \cdot (U^+ - U^-) + I_{test} = \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{r_t}\right) U_{test} \tag{23}$$

Nun wollen wir U^+ und U^- bestimmen. Es gilt wieder $i^+ = 0\,\text{A}$ und folglich $U^+ = 0\,\text{V}$. Für die Spannung am Minus-Eingang stellen wir den Spannungsteiler auf und erhalten

$$U^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_{test}. \tag{24}$$

Einsetzen von U^+ und U^- in Gleichung (23) ergibt

$$\frac{A}{r_t} \cdot \left(0\,\text{V} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_{test}\right) + I_{test} = \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{r_t}\right) U_{test} \qquad \Big| + \frac{A \cdot R_1}{r_t \cdot (R_1 + R_2)} \cdot U_{test} \tag{25}$$

$$I_{test} = \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{r_t} + \frac{A \cdot R_1}{r_t \cdot (R_1 + R_2)}\right) U_{test} \tag{26}$$

$$\Rightarrow r_{out} = \frac{U_{test}}{I_{test}} = \frac{r_t \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + r_t + A \cdot R_1} \tag{27}$$

$$r_{out} = \frac{1\,\text{k}\Omega \cdot (4\,\text{k}\Omega + 10\,\text{k}\Omega)}{4\,\text{k}\Omega + 10\,\text{k}\Omega + 1\,\text{k}\Omega + 10^5 \cdot 4\,\text{k}\Omega} \approx 35\,\text{m}\Omega \tag{28}$$

In diesem Fall liegt der Ausgangswiderstand der Gesamtschaltung bei einem Bruchteil eines Ohms, was vielen praktischen Anwendungen entspricht.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 7. Nehmen Sie an der Operationsverstärker sei ideal und wird nicht in Sättigung betrieben.
Wir wollen nun die Wirkung dieser Schaltung auf sinusförmige Eingangssignale untersuchen. Nehmen Sie dazu an, die Schaltung befinde sich im eingeschwungenen Zustand.

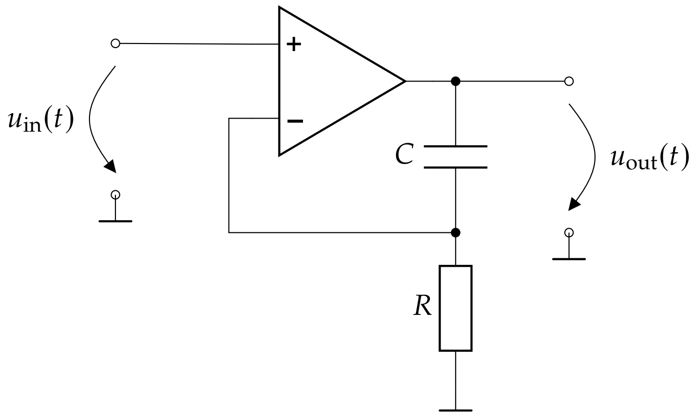


Abbildung 7

i) Ersetzen Sie zunächst alle Bauteile durch ihre komplexen Impedanzen bzw. Zeiger und zeichnen Sie das entsprechende Ersatzschaltbild. Stellen Sie dann die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{out}}}{\underline{U}_{\text{in}}}$ unter Verwendung der Impedanzmethode auf.

ii) Beschreiben Sie das Verhalten der Schaltung für sehr kleine und sehr große Frequenzen.

Lösung

i) In Abbildung 8 wurde die Kapazität durch ihre komplexe Impedanz und die Ein- und Ausgangsspannungen durch ihre komplexen Zeiger ersetzt.

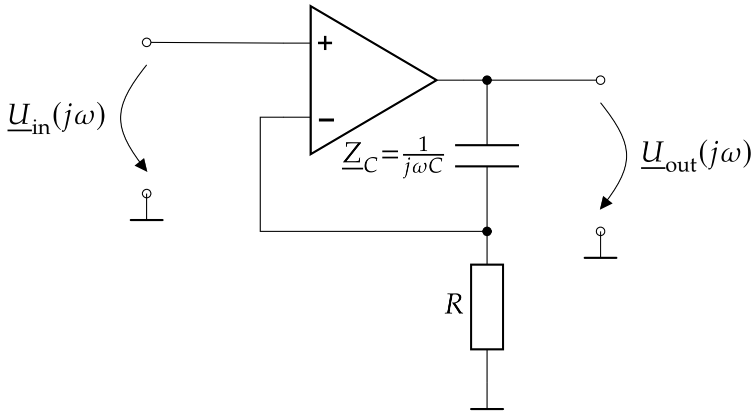


Abbildung 8

Es gilt (idealer Operationsverstärker, negatives Feedback)

$$\underline{U}^+ \approx \underline{U}^- \tag{29}$$

und somit (Maschenregel)

$$\underline{U}_R = \underline{U}_{\text{in}}. \tag{30}$$

Damit (und mit $\underline{I}^- \approx 0$) erhalten wir

$$\underline{I}_R = \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{\text{in}}}{R} \tag{31}$$

und somit

$$\underline{U}_{\text{out}} = (R + \frac{1}{j\omega C}) \cdot \underline{I}_R = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C} \cdot \frac{\underline{U}_{\text{in}}}{R} \tag{32}$$

beziehungsweise

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{out}}}{\underline{U}_{\text{in}}} = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega RC}. \tag{33}$$

Eine alternative Herleitung der Übertragungsfunktion kann mit Hilfe der Übertragungsfunktion des nicht-invertierenden Verstärkers durchgeführt werden. Der nicht-invertierende Verstärker entspricht genau der hier betrachteten Schaltung, lediglich mit einem zweiten Widerstand anstatt der Kapazität C. Das Übertragungsverhalten des nicht invertierenden Verstärkers wurde zu

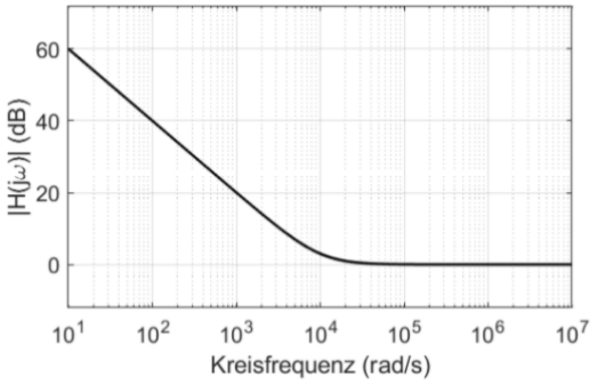
$$\frac{u_{\text{out}}}{u_{\text{in}}} = (1 + \frac{R_1}{R_2}) \tag{34}$$

bestimmt. Einsetzen von $R_1 = \frac{1}{j\omega C}$ und $R_2 = R$ ergibt genau den in Gleichung (33) bestimmten Ausdruck für die Übertragungsfunktion der gegebenen Schaltung.

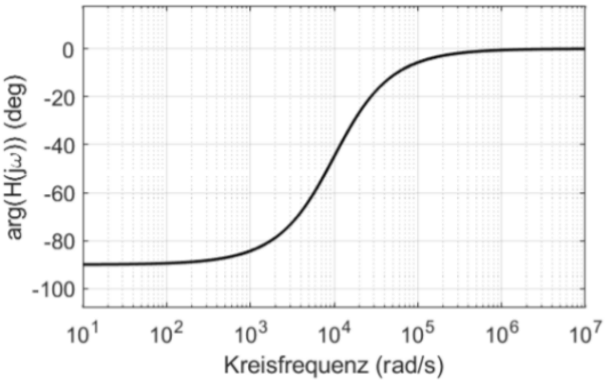
ii) Wir versuchen, das Verhalten der Schaltung rein anhand intuitiver Überlegungen zu verstehen. Für niedrige Frequenzen stellt die Kapazität offene Klemmen dar, durch die kein Strom fließen kann (wegen $\lim_{\omega\to 0} |\frac{1}{j\omega C}| = \infty$). Somit kann hier kein Ausgleichsstrom vom Ausgang des Opamps zur negativen Eingangsklemme fließen; der Opamp wird im Extremfall also ohne Feedback betrieben, und die Ausgangsspannung geht gegen unendlich (da $u^+ \neq u^-$). Niedrige Frequenzen werden also stark verstärkt.

Für hohe Frequenzen hingegen stellt die Kapazität einen Kurzschluss dar (wegen $\lim\limits_{\omega \to \infty} |\frac{1}{j\omega C}| = 0$). Hier gilt also $u_{\text{out}} = u_R = u_{\text{in}}$, und wir können schließen, dass hohe Frequenzen weder verstärkt noch gedämpft, sondern unverändert durchgelassen werden.

Das Bode-Diagramm zu der Übertragungsfunktion (33) ist in Punkt ii) dargestellt. Es entspricht genau des eben beschriebenen Verhaltens.



(a)



(b)

Abbildung 9

Aufgabe 3

Gegeben Sei die Schaltung in Abbildung 10. Um welche der in der Vorlesung behandelten Operationsverstärkerschaltungen handelt es sich?
Gegeben sei außerdem der zeitliche Verlauf der Eingangsspannung in Abbildung 11. Skizzieren Sie den Verlauf der Ausgangsspannung $u_{out}(t)$ und begründen Sie Ihre Lösung. Nehmen Sie an der Operationsverstärker sei ideal und $u_{out}(0) = 0\,V$.

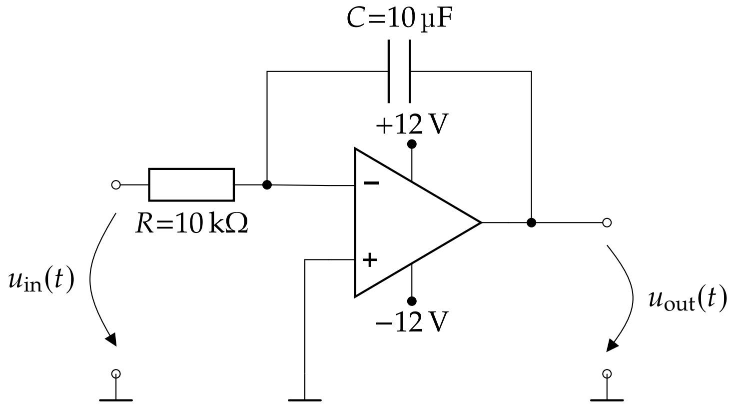


Abbildung 10

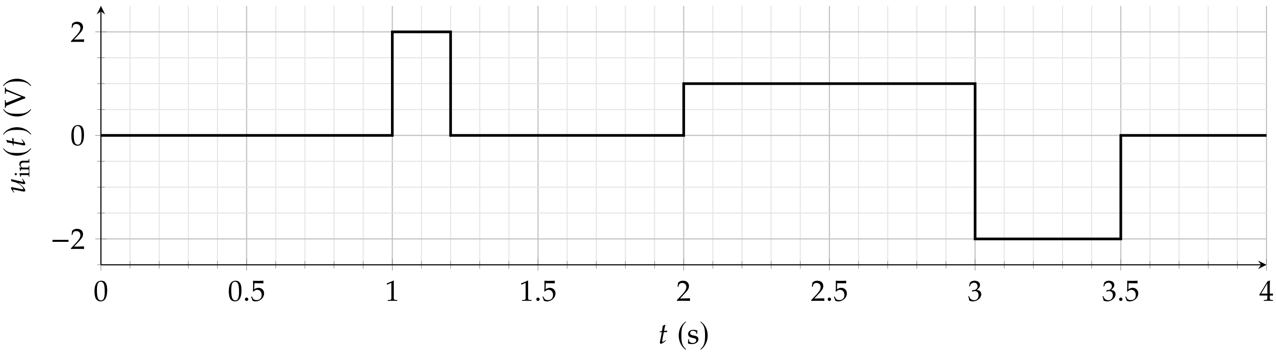


Abbildung 11

Lösung

Es handelt sich hierbei um eine Integrator-Schaltung. Für diese gilt

$$u_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_{\text{in}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + u_{\text{out}}(0) \tag{35}$$

Das Eingangssignal wird also integriert und mit einem konstanten Faktor außerdem invertiert. Eine passende Bezeichnung ist also auch invertierende Integrator-Schaltung. In Abbildung 12 ist der resultierende Ausgangsspannungsverlauf dargestellt.

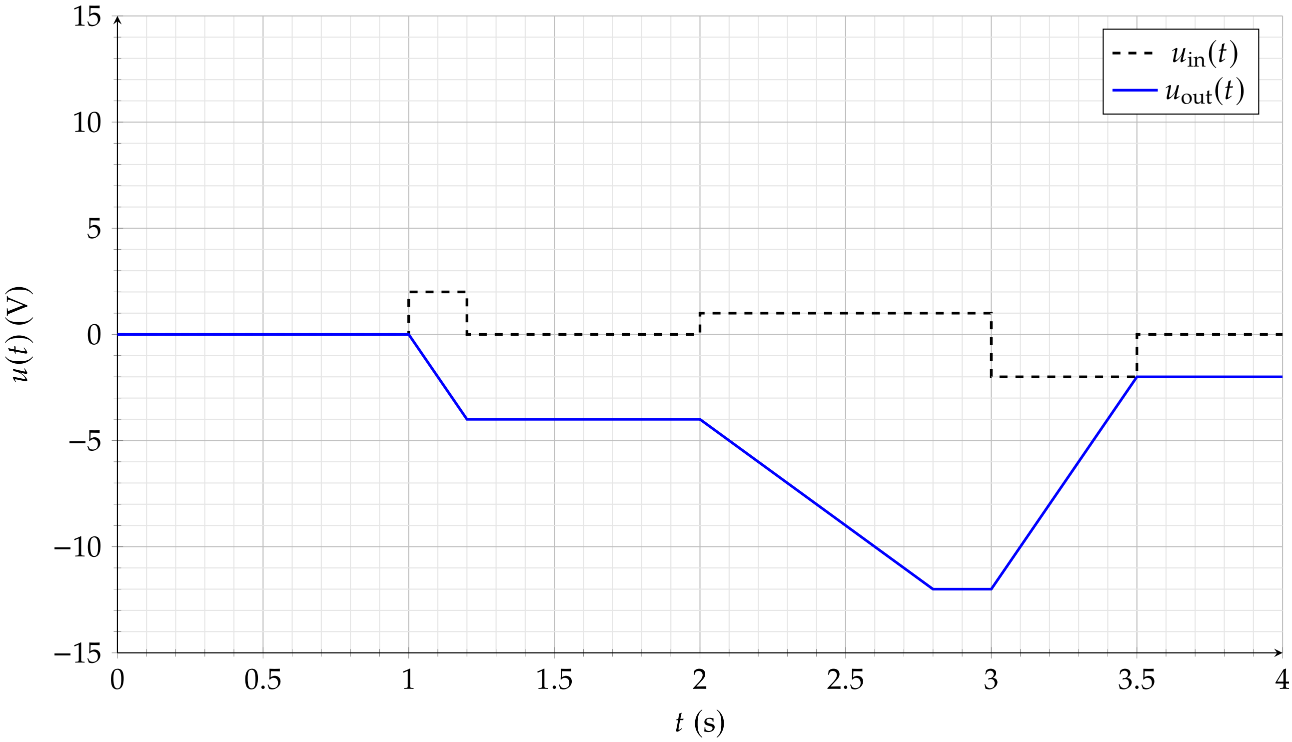


Abbildung 12

Während er ersten Sekunde ist die Eingangsspannung Null und da $u_{\text{out}}(0) = 0\,\text{V}$, ändert sich auch die Ausgangsspannung nicht.
Von 1 s to 1.2 s beträgt $u_{\text{in}} = 2\,\text{V}$. Dies resultiert in einem Abfall der Ausgangsspannung mit

$$u_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{10\,\text{k}\Omega \cdot 10\,\mu\text{F}} \int 2\,\text{V}\,\mathrm{d}t = -20\,\frac{\text{V}}{\text{s}} t \quad \text{für } 1\,\text{s} \leq t < 1.2\,\text{s} \tag{36}$$

auf $u_{\text{out}}(1.2\,\text{s}) = -4\,\text{V}$. Dann ist der Eingang wieder Null und die Ausgangsspannung ändert sich nicht mehr bis $t = 2\,\text{s}$. Dann gilt analog

$$u_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{10\,\text{k}\Omega \cdot 10\,\mu\text{F}} \int 1\,\text{V}\,\mathrm{d}t - 4\,\text{V} = -10\,\frac{\text{V}}{\text{s}} t - 4\,\text{V}. \tag{37}$$

Allerdings sinkt die Ausgangsspannung nur bis −12 V ab, da der Operationsverstärker dann in Sättigung betrieben wird. Dieser Punkt ist bei $t = 2.8\,\text{s}$ erreicht. Die Ausgangsspannung bleibt konstant bei $-12\,\mathrm{V}$ und die Kapazität wird nicht weiter aufgeladen. Es gilt also

$$u_{\mathrm{out}}(t) = \begin{cases} -10\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}t - 4\,\mathrm{V} & \text{für } 2\,\mathrm{s} \leq t < 2.8\,\mathrm{s} \\ -12\,\mathrm{V} & \text{für } 2.8\,\mathrm{s} \leq t < 3\,\mathrm{s} \end{cases} \tag{38}$$

Ab $t = 3\,\mathrm{s}$ ist die Eingangsspannung negativ und die Ausgangsspannung steigt bei $-12\,\mathrm{V}$ beginnend wieder an. Es gilt

$$u_{\mathrm{out}}(t) = -\frac{1}{10\,\mathrm{k\Omega} \cdot 10\,\mathrm{\mu F}} \int -2\,\mathrm{V}\,\mathrm{d}t - 12\,\mathrm{V} = 20\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}t - 12\,\mathrm{V} \quad \text{für } 3\,\mathrm{s} \leq t < 3.5\,\mathrm{s}. \tag{39}$$

Ab $t = 3.5\,\mathrm{s}$ bleibt die Ausgangsspannung konstant auf $-2\,\mathrm{V}$, da die Eingangsspannung wieder Null ist.