Grundlagen der Elektrotechnik 2, SS 2022

Musterlösung zu Übungsblatt 5

Eike Petersen, Julia Sauer, Carlotta Hennigs[1]

Aufgabe 1

a) Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild der Schaltung in Abbildung 1, indem Sie jedes passive Bauteil durch seine komplexe Impedanz ersetzen, und zeitabhängige Größen durch die dazugehörigen Zeiger.

b) Bestimmen Sie die (frequenzabhängige) Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_L / \underline{I}_{\text{in}}$ der Schaltung.

Hinweis: Bestimmen Sie hierzu die Gesamtimpedanz der Schaltung. Die bekannten Regeln für parallel oder in Reihe geschaltete Widerstände gelten genauso für Impedanzen!

c) Wie lautet die Antwort $u_L(t)$ des Systems auf ein Eingangssignal $I_{\text{in}}(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t)$?

Hinweis: Beachten Sie hierfür die grundlegenden Zeigereigenschaften. Der zu einer Schwingung der Form $x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega t + \varphi_X)$ gehörige Zeiger ist $\underline{X} = \hat{X} e^{j\varphi_X}$. Umgekehrt gilt, dass $x(t) = \text{Re}\left\{\underline{X} \cdot e^{j\omega t}\right\}$ ist.

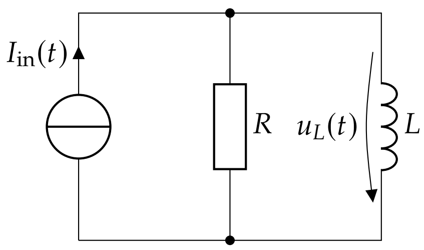
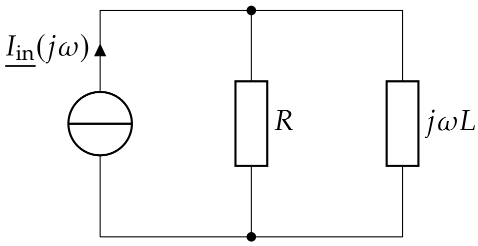


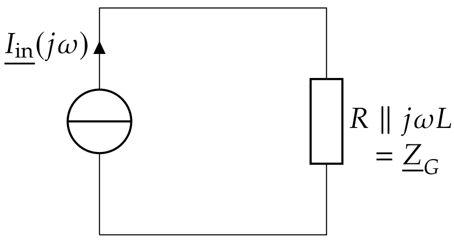
Abbildung 1

[1] Institut für Medizinische Elektrotechnik, Universität zu Lübeck. Aufgaben teilweise modifiziert übernommen aus Agarwal, Lang (2005): „Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits“.

Lösung



(a)



(b)

Abbildung 2

a) Siehe Abbildung 2a.

b) Um die Übertragungsfunktion zu bestimmen, werden zunächst Spule und Widerstand durch ihre Impedanzen ersetzt (Abbildung 2a) und danach der Gesamtwiderstand aus den beiden parallelen Impedanzen bestimmt (Abbildung 2b):

$$\underline{Z}_G = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{R \cdot j\omega L \cdot (R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R\omega^2 L^2 + jR^2\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{1}$$

$$= \frac{\sqrt{R^2\omega^4 L^4 + R^4\omega^2 L^2}}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot \mathrm{e}^{j \arctan\left(\frac{R^2\omega L}{R\omega^2 L^2}\right)} \quad \text{| Umrechnung in Polarkoordinaten} \tag{2}$$

$$= \frac{R\omega L\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot \mathrm{e}^{j \arctan\frac{R}{\omega L}} = \underbrace{\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{\hat{Z}_G} \cdot \mathrm{e}^{j\overbrace{\arctan\frac{R}{\omega L}}^{\varphi_Z}} \tag{3}$$

$$= \underline{U}_L / \underline{I}_{\text{in}} = \underline{H}(j\omega). \tag{4}$$

Eine äquivalente Lösung ist

$$\underline{Z}_G = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega L}{R}\right)}. \tag{5}$$

c) Hiermit können wir nun die Systemantwort zu

$$u_L(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_L \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underline{H}(j\omega) \cdot \underline{I}_{\mathrm{in}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \tag{6}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cdot \mathrm{e}^{j\arctan\frac{R}{\omega L}} \cdot \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j\overbrace{\varphi_I}^{=0}} \cdot \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \tag{7}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cdot \hat{I} \cdot \mathrm{e}^{j\left(\arctan\frac{R}{\omega L}+\omega t\right)}\right\} \tag{8}$$

$$= \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cdot \hat{I} \cdot \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right)\right) \tag{9}$$

bestimmen, also einer Kosinus-Schwingung mit Amplitude

$$\hat{U}_L = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cdot \hat{I} = \hat{Z}_G \cdot \hat{I} \tag{10}$$

und Phasenverschiebung

$$\varphi_L = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right) = \varphi_Z + \varphi_I. \tag{11}$$

Aufgabe 2

Das lineare Netzwerk mit der Impedanz $\underline{Z}(j\omega)$ in Abbildung 3 wird mit einer sinusförmigen Spannung

$$U_{\text{in}}(t) = 1\,\text{V}\cos(t - 5\pi/8)$$

angeregt. Der resultierende Strom bei dieser Anregung sei $I_{\text{in}}(t) = \sqrt{2}\text{A}\sin(t - \pi/8)$. Bestimmen Sie die Impedanz $\underline{Z}(j\omega_1)$ des Netzwerks bei der Anregungsfrequenz $\omega_1 = 1\,\text{rad/s}$.

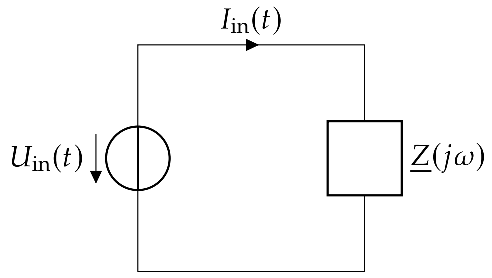


Abbildung 3

Lösung

Für die Impedanz gilt

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_{\text{in}}}{\underline{I}_{\text{in}}} = \frac{\hat{U}_{\text{in}} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_U}}{\hat{I}_{\text{in}} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi_I}} = \hat{Z} \cdot e^{j\varphi_Z} \tag{12}$$

mit Amplitude

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}_{\text{in}}}{\hat{I}_{\text{in}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega \tag{13}$$

und Phasenverschiebung

$$\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I = -\frac{5\pi}{8} - \left(-\frac{5\pi}{8}\right) = 0. \tag{14}$$

Hierzu gilt es zu beachten, dass

$$\sin(t - \pi/8) = \cos(t - \pi/8 - \pi/2) = \cos(t - 5\pi/8) \tag{15}$$

ist. Daraus folgt für den Wert der Impedanz

$$\underline{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (\text{bei } \omega = 1\,\text{rad/s}), \tag{16}$$

die Impedanz des Systems ist *bei dieser Frequenz* also rein reell (es gibt keine Phasenverschiebung) und entspricht der eines Widerstandes $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Omega$. Über das Verhalten des Systems bei anderen Frequenzen können wir allein anhand dieser Untersuchung keine Aussagen tätigen.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Schaltung in Abbildung 4 mit $R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ und $L_1 = 10\,\mathrm{mH}$.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{out}}(j\omega)}{\underline{U}_{\mathrm{in}}(j\omega)}$.

b) Bestimmen Sie den Wert des Widerstandes R_2 so, dass die statische Verstärkung, d.h. die Verstärkung bei konstanter Eingangsspannung, $\underline{H}(j\omega = j0) = 1/10$ beträgt.

c) Bestimmen Sie den Wert von L_2 so, dass die Systemantwort bei hohen Frequenzen gleich der statischen Verstärkung ist.

d) Skizzieren Sie die Amplitude und Phase von $\underline{H}(j\omega)$ gegen ω in einer (doppelt-)logarithmischen Darstellung für die zuvor bestimmten Werte von R_2 und L_2.

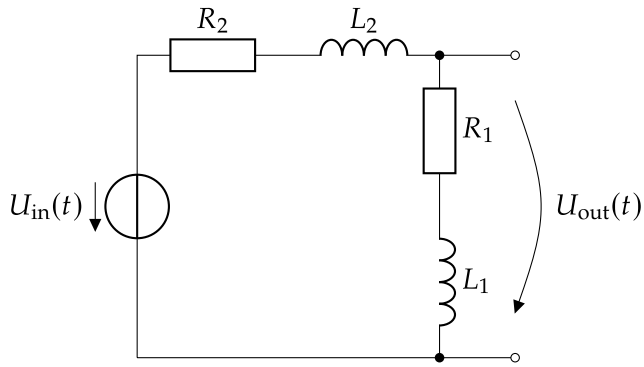


Abbildung 4

Lösung

(a)

Zur Berechnung der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ verwenden wir die Impedanzmethode, ersetzen die Induktivitäten durch ihre Impedanzwerte $Z_L = j\omega L$, und betrachten den Spannungsteiler der Reihenschaltung R_2, L_2 und R_1, L_1. Dann ist

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{out}}(j\omega)}{\underline{U}_{\text{in}}(j\omega)} = \frac{R_1 + j\omega L_1}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)}. \tag{17}$$

(b)

Die statische Verstärkung ($\omega = 0\,\text{rad/s}$) soll 1/10 betragen. Einsetzen von $\omega = 0\,\text{rad/s}$ in die Gleichung oben ergibt

$$\underline{H}(j\omega = 0) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{10}. \tag{18}$$

Mit $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$ und durch Umstellen zu R_2 folgt, dass $R_2 = 9\,\text{k}\Omega$.

(c)

Bei hohen Frequenzen ($\omega \to \infty$) soll die Verstärkung den gleichen Wert haben. Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{\omega\to\infty} \underline{H}(j\omega) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{10}. \tag{19}$$

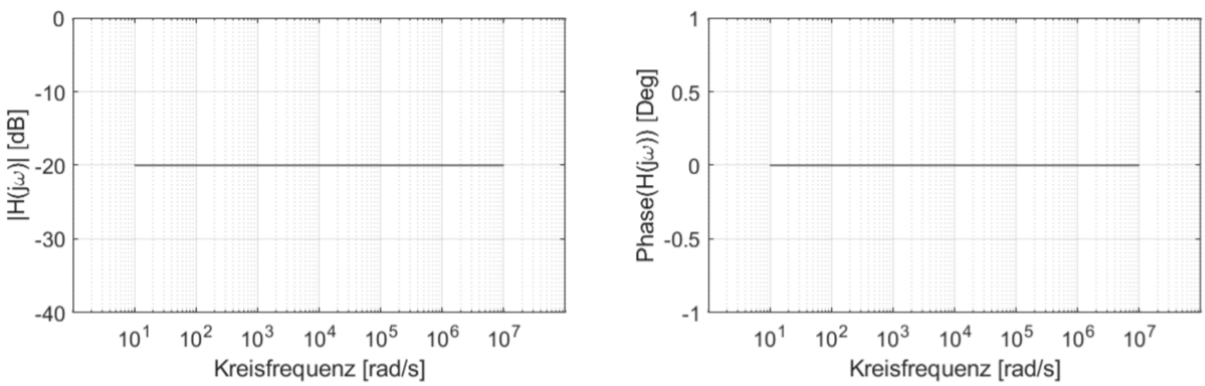
Mit $L_1 = 10\,\text{mH}$ und Umstellen zu L_2 folgt, dass $L_2 = 90\,\text{mH}$.

(d)

Durch Einsetzen von $R_1 + R_2 = 10 \cdot R_1$ und $L_1 + L_2 = 10 \cdot L1$ in die Übertragungsfunktion sehen wir, dass

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_1 + j\omega L_1}{10 \cdot (R_1 + j\omega L_1)} = \frac{1}{10}. \tag{20}$$

Die Verstärkung beträgt also für alle Frequenzen $-20\,\text{dB} = 20 \cdot \log_{10} 0.1$ bei einer Phasenverschiebung von $0°$. Dieses rein resistive Verhalten ist durchaus bemerkenswert, enthält die Schaltung mit den beiden Induktivitäten doch mehrere dynamische Bauelemente!



(i) (ii)

Abbildung 5