Blatt 7

1 a)

| i | Beobachtungspaare $x_i$ | Zielklasse $s_i$ |
|---|---|---|
| 1 | $(-1, 0)$ | $1$ |
| 2 | $(0, -1)$ | $-1$ |
| 3 | $(0, 1)$ | $1$ |
| 4 | $(1, 0)$ | $-1$ |

b) $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \eta = 0{,}5$

$i=1$: $\omega^T x_1 = 0 \Rightarrow f(x_1) = y_1 = 1 \Rightarrow d_1 = 0$

$i=2$: $\omega^T x_2 = 1 \Rightarrow f(x_2) = y_2 = 1 \Rightarrow d_2 = -2$

$\rightsquigarrow \omega$ aktualisieren: $\omega \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$i=3$: $\omega^T x_3 = 0 \Rightarrow f(x_3) = y_3 = 1 \Rightarrow d_3 = 0$

$i=4$: $\omega^T x_4 = 0 \Rightarrow f(x_4) = y_4 = 1 \Rightarrow d_4 = -2$

$\rightsquigarrow \omega$ aktualisieren: $\omega \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

wieder zu 2. springen:

$i=1$: $\omega^T x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = y_1 = 1 \Rightarrow d_1 = 0$

$i=2$: $\omega^T x_2 = 0 \Rightarrow f(x_2) = y_2 = 1 \Rightarrow d_2 = -2$

$\rightsquigarrow \omega$ aktualisieren: $\omega \leftarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5\,(-2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$i=3$: $\omega^T x_3 = 1 \Rightarrow f(x_3) = y_3 = 1 \Rightarrow d_3 = 0$

$i=4$: $\omega^T x_4 = -1 \Rightarrow f(x_4) = y_4 = -1 \Rightarrow d_4 = 0$

wieder zu 2. springen:

$i=1$: $\omega^T x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow d_1 = 0$

$i=2$: $\omega^T x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -1 \Rightarrow d_2 = 0$

$i=3$: $\omega^T x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 1 \Rightarrow d_3 = 0$

$i=4$: $\omega^T x_4 = -1 \Rightarrow y_4 = -1 \Rightarrow d_4 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

c) $w = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ $\eta = 2$

| $i$ | $w^T x_i$ | $f(x_i) = y_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | -2 |
| 3 | -1 | -1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | -2 |

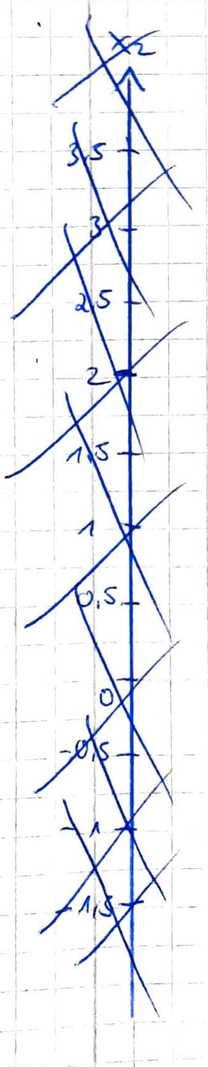
neues w:

$$w = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \frac{2}{4}\left(-2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

wieder in d. Spinyle:

| $i$ | $w^T x_i$ | $f(x_i) = y_i$ | $d_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | -1 | -1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | -1 | -1 | 0 |

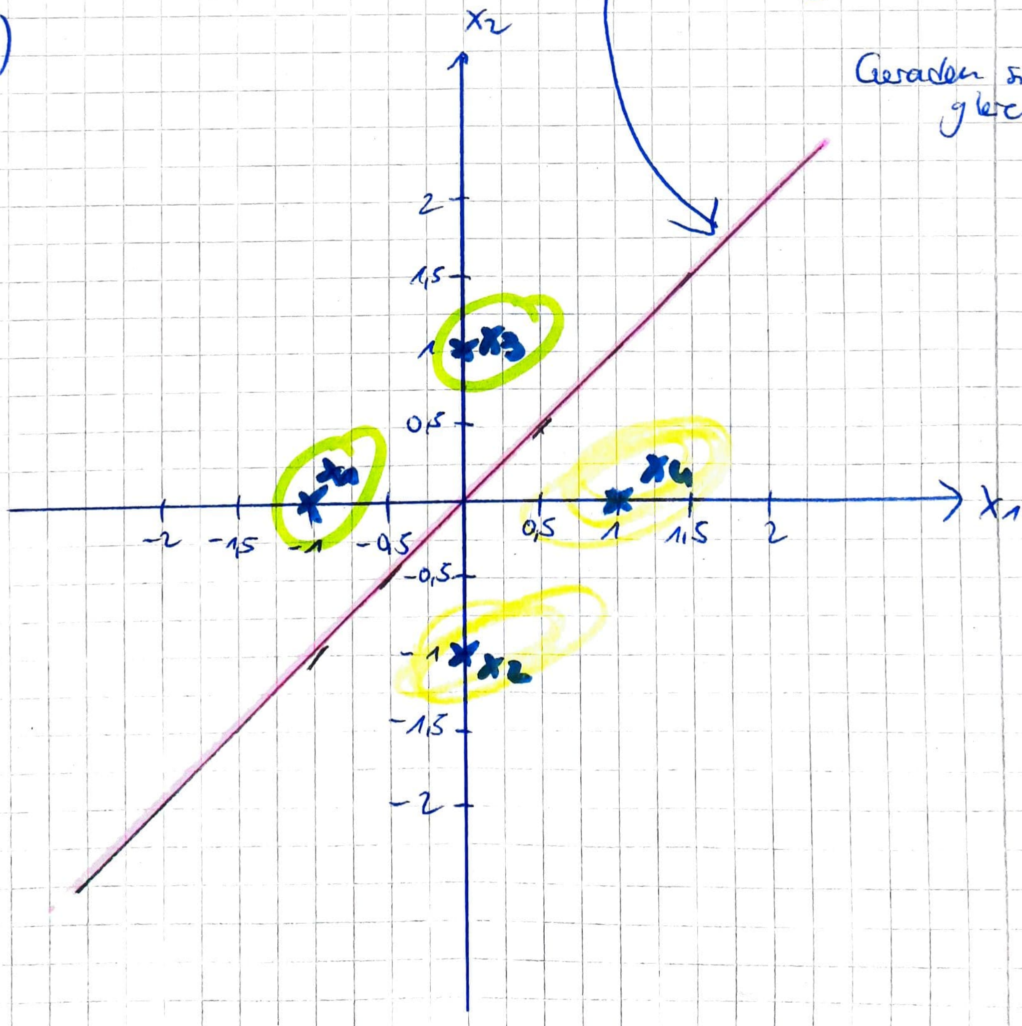
$$\Rightarrow \boxed{w = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$$




Klassifikationsgerade für a,b,c)

$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 = -\frac{-1}{1} \cdot x_1 = x_1$$

d)




Geraden sind gleich

## Aufg. 3

| i | $x_i$ |
|---|---|
| 1 | -5 |
| 2 | -4 |
| 3 | -3 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1,5 |
| 6 | 7 |
| 7 | 7,25 |
| 8 | 7,5 |
| 9 | 7,75 |
| 10 | 8 |

| j | $c_j$ |
|---|---|
| 1 | -7 |
| 2 | 0,5 |
| 3 | 2 |

~~j = 1~~ ~~$c_1 = -7$~~

~~$S_1$ gesucht:~~

| i | $\lvert c_1 - x_i\rvert$ | $\lvert c_2 - x_i\rvert$ | $\lvert c_3 - x_i\rvert$ | $\in S_1$? | $\in S_2$? | $\in S_3$? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5,5 | 7 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 2 | ~~5,5~~ 3 | 4,5 | 6 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 3 | 4 | 3,5 | 5 | ✗ | ✓ | ✗ |
| 4 | 8 | 0,5 | 1 | ✗ | ✓ | ✗ |
| 5 | 8,5 | 1 | 0,5 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 6 | 14 | 6,5 | 5 [illegible] | ✗ | ✗ | ✓ |
| 7 | 14,25 | 6,75 | 5,25 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 8 | 14,5 | 7 | 5,5 [illegible] | ✗ | ✗ | ✓ |
| 9 | 14,75 | 7,25 | 5,75 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 10 | 15 | 7,5 | 6 | ✗ | ✗ | ✓ |

~~j = 1: $\tilde{c}_1 = c_1 = -7$~~

~~$c_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(-9) = -4,5$~~

~~j = 2: $c_2 = \frac{1}{2}($~~

$c_1 = \frac{1}{2}(-9) = -4,5$

$c_2 = \frac{1}{2}(-2) = -1$

$c_3 = \frac{1}{6}(\underbrace{1,5 + 7 + 7,5}_{16} + \underbrace{7,25 + 7,75}_{15} + 8) = \frac{1}{6}(39) = 6,5$

neue $c_1, c_2, c_3$:

| i | $\lvert c_1 - x_i\rvert$ | $\lvert c_2 - x_i\rvert$ | $\lvert c_3 - x_i\rvert$ | $\in S_1$? | $\in S_2$? | $\in S_3$? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 4 | 11,5 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 2 | 0,5 | 3 | 10,5 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 3 | 1,5 | 2 | 9,5 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 4 | 5,5 | 2 | 5,5 | ✗ | ✓ | ✗ |
| 5 | 6 | 2,5 | 5 | ✗ | ✓ | ✗ |
| 6 | 11,5 | 8 | 0,5 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 7 | 11,75 | 8,25 | 0,75 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 8 | ~~11,5~~ 12 | 8,5 | 1 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 9 | 12,5 | 8,75 | 1,25 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 10 | 12,5 | 9 | 1,5 | ✗ | ✗ | ✓ |

$c_1 = \frac{1}{3}(\underbrace{-5-4-3}) = \frac{1}{3}(-12) = -4$

$c_2 = \frac{1}{2}(1 + 1,5) = 1,25$

$c_3 = \frac{1}{5}(7 + 7,25 + 7,5 + 7,75 + 8) = 7,5$

(3) Seite 2

neue $c_1, c_2, c_3$:

| $i$ | $\lvert c_1 - x_i \rvert$ | $\lvert c_2 - x_i \rvert$ | $\lvert c_3 - x_i \rvert$ | $\in S_1$? | $\in S_2$? | $\in S_3$? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6,25 | 12,5 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 2 | 0 | 5,25 | 11,5 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 3 | 1 | 4,25 | 10,5 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 4 | 5 | 0,25 | 6,5 | ✗ | ✓ | ✗ |
| 5 | 5,5 | 0,25 | 6 | ✗ | ✓ | ✗ |
| 6 | 11 | 5,75 | 0,5 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 7 | 11,25 | 6,00 | 0,25 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 8 | 11,5 | 6,25 | 0 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 9 | 11,75 | 6,5 | 0,25 | ✗ | ✗ | ✓ |
| 10 | 12 | 6,75 | 0,5 | ✗ | ✗ | ✓ |

$c_1 = \frac{1}{3}(-5-4-3) = -4$ = alts $c_1$

$c_2 = \frac{1}{2}(1+1,5) = 1,25$ = alts $c_2$

$c_3 = \frac{1}{5}(7+7,25+7,5+7,75+8) = 7,5$ = alts $c_3$

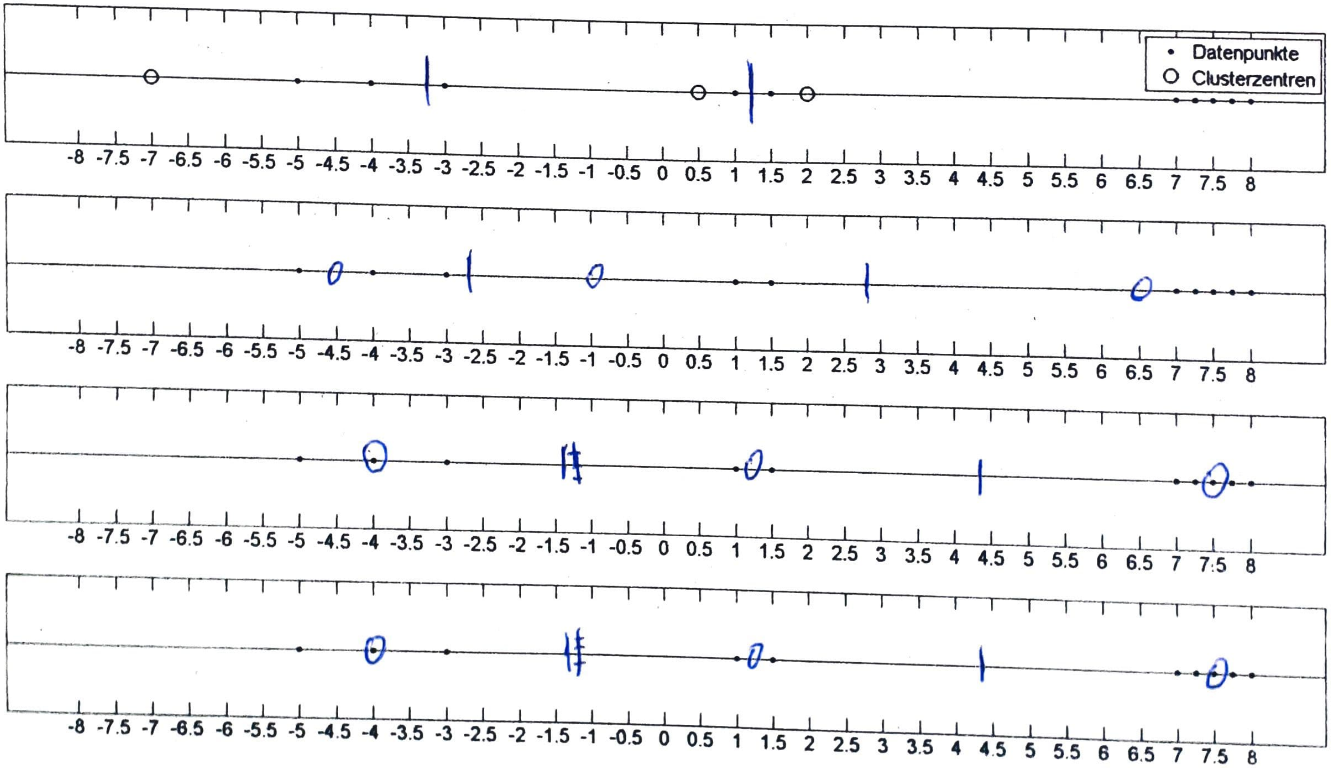
$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} c_1 &= -4 \\ c_2 &= 1,25 \\ c_3 &= 7,5 \end{aligned}}$

UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUT FÜR ROBOTIK
UND KOGNITIVE SYSTEME



## Aufgabe 3: Sesamstraßen-Clustering (10 Punkte)

Die Bewohner der Sesamstraße wollen das *k-means clustering* ausprobieren. Graf Zahl hat dazu ein paar seiner geliebten Zahlen auf dem Zahlenstrahl als Datenpunkte markiert, Ernie hat daraufhin willkürlich ein paar Clusterzentren eingezeichnet und Bert darf jetzt die ganze, restliche Arbeit machen. Und Sie helfen ihm dabei!




Berechnen Sie für jeden Iterationsschritt des *k-means clusterings* die Grenzen zwischen den derzeitigen Clustern sowie die neuen Schwerpunkte der Cluster und zeichnen Sie beides ein. Stoppen Sie, sobald sich die Schwerpunkte der Cluster nicht mehr verändern. (10 Punkte)

**Geben Sie bei allen Iterationsschritten den Rechenweg mit an!**

**Af. 4**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 3 \\ 1 & 2,5 & 1,5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} -1 & -0,5 & 0,5 & 1 \\ -1 & 0,5 & -0,5 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = 4$$

$$\Phi = \frac{1}{M-1} \Psi \cdot \Psi^T$$

$$= \frac{1}{4-1} \begin{pmatrix} 1 + 0,25 + 0,25 + 1 & 1 - 0,25 - 0,25 + 1 \\ 1 - 0,25 + 1 - 0,25 & 1 + 0,25 + 0,25 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2,5 & 1,5 \\ 1,5 & 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\det(\Phi - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \frac{5}{6} - \lambda & \frac{3}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{5}{6} - \lambda \end{pmatrix}$$

$\frac{40}{6}$ $\frac{20}{6}$

$\frac{20}{6}$ $\frac{10}{6}$

$$= \left(\frac{5}{6} - \lambda\right)^2 - \frac{9}{36} = \frac{25}{36} - \frac{5}{3}\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{36}$$

$$= \frac{16}{36} - \frac{5}{3}\lambda + \lambda^2 = \frac{4}{9} - \frac{5}{3}\lambda + \lambda^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\left(\lambda - \frac{4}{3}\right) = 0$$

$\hat{A} = \frac{1}{[illegible]}(-1 \; [illegible])^T = (-1, 1) \cdot \frac{1}{[illegible]}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{4}{3} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3}$ (EW)

$u_1 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c \in \mathbb{R}$

$\tilde{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← normierte EV

$n = 2 \qquad k = 1$

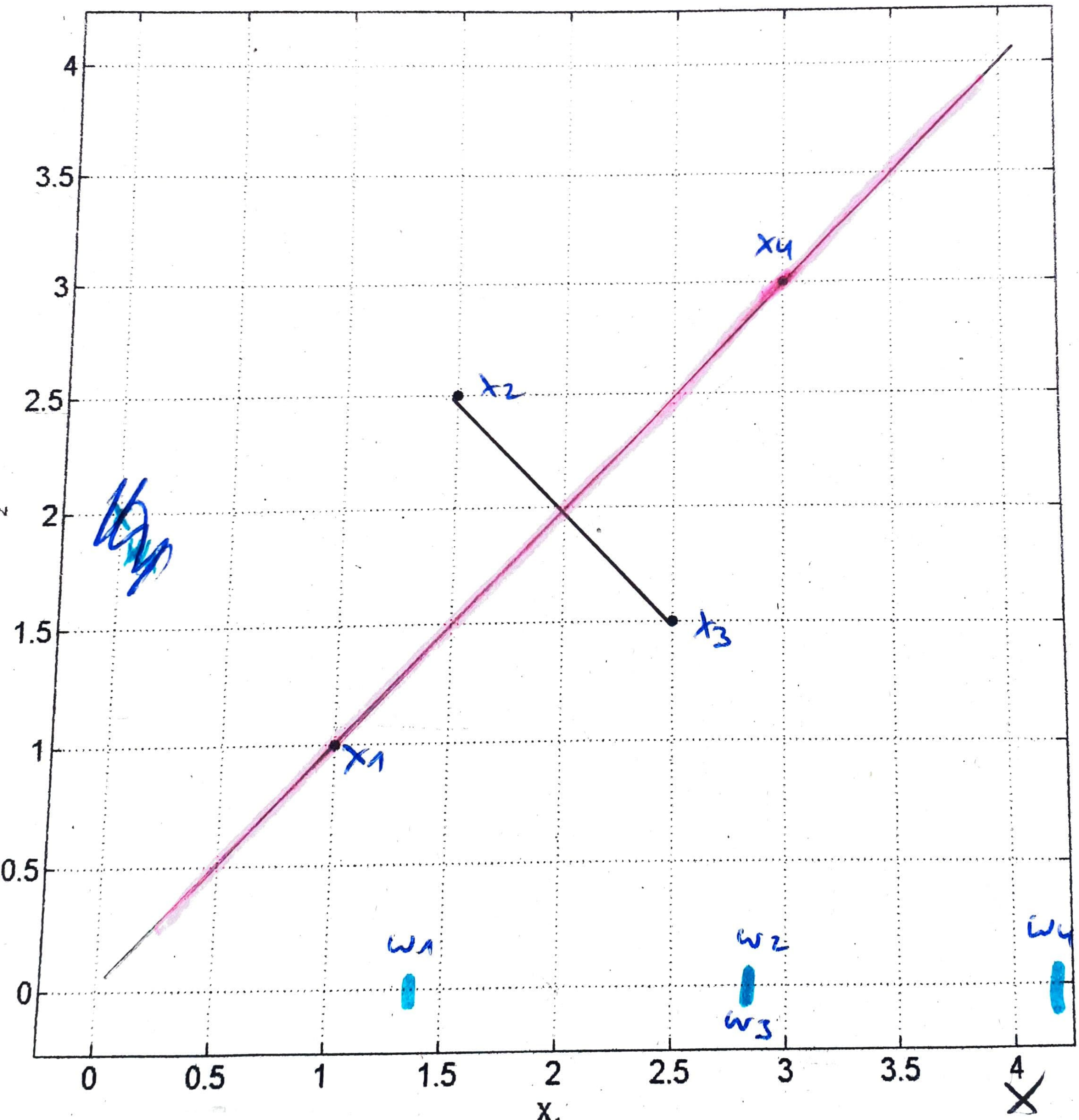
$\Downarrow$

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w = \hat{u}^T X = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 2,5 & 3 \\ 1 & 2,5 & 1,5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (2, 4, 4, 6) = \sqrt{2}\,(1, 2, 2, 3)$$

$$\approx (1,41 \; , \; 2,82 \; , \; 2,82 \; , \; 4,23)$$



4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
x
x4
x2
x3
x1
w1
w2
w3
w4