Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Übungsblatt 13 Abgabe: Donnerstag, 30.01.2020, 14:15 Uhr

Bitte beachten Sie, dass der dritte und letzte E-Test am kommenden Montag, den 27. Januar 2020 um 00:00 Uhr für eine Woche freigeschaltet wird. Die Bearbeitungsfrist endet am Sonntag, den 02. Februar 2020 um 23:59 Uhr.
Die Frist für die Klausuranmeldung endet am 02.02.2020.

Aufgabe 1 (unbewertet)
Prüfen Sie, ob Sie zur Zeit die Klausurzulassung besitzen.

Hinweis: Auf `https://moodle.uni-luebeck.de` finden Sie die Zulassungskriterien.
Sollten Sie nicht genügend Übungspunkte erreicht oder nicht vorgerechnet haben, wenden Sie sich bitte bis spätestens zum 31. Januar 2020 an Ihre/n Übungsgruppenleiter/in.
Bitte beachten Sie, dass es keine automatischen Nachforderungen für die E-Tests gibt. Sollten Sie nicht genügend Punkte in den E-Tests erreicht haben, wenden Sie sich bitte bis zum 03. Februar 2020 an elearning@mic.uni-luebeck.de.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Gegeben seien folgende Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Stellen Sie für $\alpha = 1$ den Vektor $v_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 40 \\ 8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 dar.

c) Begründen Sie jeweils kurz (ohne vollständigen Beweis), welche der folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind.

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}, \qquad M_3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\},$$
$$M_4 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \qquad M_5 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \vee x_3 = 0\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Gegeben seien die Vektoren

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 := \begin{pmatrix} 3+2i \\ -1+2i \end{pmatrix}$$

des komplexen Vektorraumes $\mathbb{C}^2$. Untersuchen Sie die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit. Bilden sie eine Basis des $\mathbb{C}^2$?

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Betrachten Sie den Vektorraum $\Pi_2(\mathbb{R})$ der Polynome vom Höchstgrad 2. Gegeben sind die Vektoren

$$p_0(x) = 3, \quad p_1(x) = 3 + 2x \quad \text{und} \quad p_2(x) = 1 + 2x^2.$$

a) Zeigen Sie, dass das Tupel $M := (p_0(x), p_1(x), p_2(x))$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$ ist.

b) Prüfen Sie, ob das Tupel $N := \big(p_0(x), p_1(x), p_1^2(x)\big)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$ ist.

c) Seien die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Betrachten Sie ferner die Menge

$$M := \{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit $w_1 := v_1 \oplus v_2$, $w_2 := v_2 \oplus v_3$ und $w_3 := v_1 \oplus v_3$. Beweisen Sie, dass die Vektoren der Menge M linear unabhängig sind.