Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Übungsblatt 6 — Abgabe: Donnerstag, 28.11.2019, 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Nutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um den jeweils größten gemeinsamen Teiler von a_i und b_i zu berechnen:

$$(a_1, b_1) = (93, 72),\ (a_2, b_2) = (12, 31).$$

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

i. $x \equiv 1 \bmod 12$,

ii. $x + 2 \equiv 0 \bmod 12$,

iii. $2x \equiv 4 \bmod 12$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $(a^2 \equiv 0 \bmod 4)\ \vee\ (a^2 \equiv 1 \bmod 4)$.

b) Berechnen Sie die letzten zwei Stellen von 98^{10} mit Papier und Bleistift.
Hinweis: Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so lässt sich deren letzte Stelle $s_1 \in \{0, \dots, 9\}$ als die eindeutige Lösung der Gleichung $(s_1 \equiv n \bmod 10)\ \wedge\ (0 \leq s_1 \leq 9)$ berechnen. Analog findet man die letzten zwei Stellen $s_2 \in \{00, 01, \dots, 99\}$ als die eindeutige Lösung von $(s_2 \equiv n \bmod 100)\ \wedge\ (0 \leq s_2 \leq 99)$.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A(n) :\Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} 1 = n\right].$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Begründen Sie *ausführlich* alle auftretenden Schritte.

b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

c) Zeigen Sie, dass sich jede natürliche Zahl $n > 7$ mit geeigneten $a, b \in \mathbb{N}_0$ in der Form $n = 3a + 5b$ darstellen lässt.