Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Übungsblatt Lernwochenende 2020 — Aufgaben zur LADS 1

Aufgabe 1

a) Seien A, B, C, D Mengen. Zeigen Sie, dass

$$(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$$

gilt.

b) Seien A, B, C Mengen. Es gelte $A \cup B = A \cup C$. Folgt daraus $B = C$?

c) Seien A, B, C Mengen. Es gelte $A \cap B = A \cap C$. Folgt daraus $B = C$?

Aufgabe 2

a) Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^3$ bijektiv ist.

b) Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto i \cdot z$ bijektiv ist.

c) Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f_3 \colon \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,0)^\top\right\} \to (0, \infty),\ (x,y)^\top \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ bijektiv ist.

Aufgabe 3

a) Gegeben sei die Relation

$$R_1 := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :\ \exists k \in \mathbb{Z} \colon 2k = x + y\}.$$

Untersuchen Sie, ob R_1 eine Äquivalenzrelation ist.

b) Gegeben sei die Relation

$$R_2 := \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :\ (\exists k \in \mathbb{Z} \colon 2k + 1 = x \cdot y) \vee x = y\}.$$

Untersuchen Sie, ob R_2 eine Äquivalenzrelation ist.

c) Gegeben sei die Relation

$$R_3 := \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ (\exists k \in \mathbb{Z} \colon 2k = x \cdot y) \vee x = y\}.$$

Untersuchen Sie, ob R_3 eine Äquivalenzrelation ist.

d) Gegeben sei die Relation

$$R_4 := \left\{((a,b), (c,d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 :\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2\right\}.$$

Zeigen Sie, dass R_4 eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j \cdot (j+1)} = \frac{n}{n+1}$$

gilt.

b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

durch 133 teilbar ist.

c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$

$$2^n > n^2$$

gilt.

Aufgabe 5

a) Sei $(G, \odot)$ eine Gruppe. Sei

$$f\colon G \to G\,,\ x \mapsto x \odot x.$$

Zeigen Sie, dass die Eigenschaft

$$\forall x, y \in G :\ f\,(x \odot y) = f\,(x) \odot f\,(y)$$

genau dann gilt, wenn die Gruppe $(G, \odot)$ abelsch ist.

b) Gegeben sei die Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \ :\ a, b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b \neq 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(M, \odot)$ mit der üblichen Matrix-Multiplikation $\odot$ eine Gruppe bildet.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie $\operatorname{ggT}(362, 22)$.

b) Berechnen Sie $\operatorname{ggT}(4823, 975)$.

c) Gegeben sei die Menge

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) := \left\{a + b \cdot \sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) &:= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \sqrt{2}, \\ \left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \odot \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) &:= (a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), \oplus, \odot\right)$ ein Körper ist.

Aufgabe 7

a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\overline{z}} = z$ gilt.

b) Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ gilt.

c) Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$ gilt.

d) Sei $z \in \mathbb{C}$. Weisen Sie nach, dass $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ gilt.

e) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Im}(z) = \frac{\overline{z} - z}{2} \cdot i$ gilt.

f) Seien $w \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0 + 0 \cdot i\}$. Weisen Sie nach, dass $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \overline{w} \cdot (\overline{z})^{-1}$ gilt.

g) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0 + 0 \cdot i\}$. Weisen Sie nach, dass $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ gilt.