Institute of Mathematics and Image Computing

Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Übungsblatt 12 - Musterlösung Abgabe: Donnerstag, 23.01.2020, 14:15 Uhr

Bitte beachten Sie, dass die Klausuranmeldung im Zeitraum von Montag, den 20.01.2020, bis Sonntag, den 02.02.2020, im Moodle freigeschaltet ist.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

a) Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen $w_1, \dots, w_4 \in \mathbb{C}$:

$$w_1 = 1 - i, \qquad w_2 = 2 + 3i, \qquad w_3 = -1 - 3i, \qquad w_4 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Bestimmen Sie die folgenden komplexen Zahlen und geben Sie diese wahlweise in kartesischen oder Polarkoordinaten an:

$$w_1 + w_2, \qquad w_2 \cdot w_3, \qquad \overline{w_1 \cdot w_4}, \qquad \frac{w_1}{w_2}, \qquad w_4^{63}, \qquad |w_2|.$$

b) Bestimmen Sie zu den folgenden komplexen Zahlen jeweils die Darstellungen in Polarkoordinaten:

$$z_1 = -2 - 2i, \qquad z_2 = i, \qquad z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$z_5 = z_1 z_2, \qquad z_6 = z_1 z_4, \qquad z_7 = (z_4)^{31}, \qquad z_8 = (z_3)^{25}.$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Lösung

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) Gegeben sind die folgenden Abbildungen $f_k \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

i. $f_1(z) = 3z + 2,\ f_2(z) = (3 + 2i)z + (3 - 3i)$,
ii. $f_3(z) = 2z^2 + 2,\ f_4(z) = z^2 - 4z + 5,\ f_5(z) = e^{z\bar{z}i}$.

Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die jeweils gilt: $f_k(z) = 0$. Skizzieren Sie außerdem die Graphen der Funktionen $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ g_k(x) := f_k(x + i0)$ für $k \in \{3, 4, 5\}$.

b) Skizzieren sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \arg(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}, \quad N := \{ z \in \mathbb{C} :\ \arg(z) \in [0, \pi] \}.$$

Geben Sie anschließend eine Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an für die gilt: $T(M) = N$.

Lösung

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\cdot$ die übliche Multiplikation auf $\mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass $(\sqrt[n]{1}, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

Lösung