



Aufgabe 1 (6 Punkte)

Die Grundmenge ist $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G := \{A^k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie: (G, \odot) ist eine abelsche Gruppe, wobei \odot die Matrix-Multiplikation beschreibt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei (G, \diamond) eine Gruppe, $a \in G$ fest gewählt und

$$\phi : G \rightarrow G ; x \mapsto a^{-1} \diamond x \diamond a.$$

- a) Zeigen Sie, dass gilt: $\forall x, y \in G : \phi(x \diamond y) = \phi(x) \diamond \phi(y)$.
- b) Untersuchen Sie, ob die Abbildung ϕ bijektiv ist und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Abbildung ϕ^{-1} .

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Seien (G, \circ, e_G) und (H, \diamond, e_H) zwei Gruppen und sei $\varphi : G \rightarrow H$ eine Abbildung mit der Eigenschaft:

$$\forall g, h \in G : \varphi(g \circ h) = \varphi(g) \diamond \varphi(h). \quad (1)$$

Weiter definieren wir den *Kern* der Abbildung φ wie folgt:

$$\text{Kern}(\varphi) := \{g \in G : \varphi(g) = e_H\}.$$

- a) Zeigen Sie: $e_G \in \text{Kern}(\varphi)$.
Hinweis: Schreiben Sie $e_G = e_G \circ e_G$ und nutzen Sie (1) um $\varphi(e_G) = e_H$ zu zeigen.
- b) Zeigen Sie: Für beliebiges $g \in G$ gilt: $(\varphi(g) = e_H) \Rightarrow (\varphi(g') = e_H)$, wobei g' das inverse Element von g bezeichnet.
Hinweis: Schreiben Sie $e_G = g \circ g'$ und nutzen Sie abermals (1). Sie dürfen Teil a) benutzen.
- c) Zeigen Sie, dass $\text{Kern}(\varphi)$ eine Untergruppe von G ist.