Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Übungsblatt 4 Abgabe: Donnerstag, 14.11.2019, 14:15 Uhr

Bitte beachten Sie, dass auf der Plattform Lon-Capa von Montag, den 11.11.2019, 00:00 Uhr, bis Sonntag, den 17.11.2019, 23:59 Uhr, der erste zulassungsrelevante E-Test freigeschaltet ist.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) Überprüfen Sie die folgenden Abbildungen jeweils auf Injektivität und Surjektivität und begründen Sie kurz Ihre Behauptung. Geben Sie außerdem, falls möglich, die Umkehrabbildungen an.

$$f_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1, \quad f_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1, \quad f_3\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, (n,m) \mapsto n+m,$$
$$f_4\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 2n, \quad f_5\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, n \mapsto 2n.$$

b) Geben Sie andere als die in a) genannten Beispiele für Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften an:

i. surjektiv, aber nicht injektiv,
ii. konstant.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Betrachten Sie für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ die Abbildung

$$f\colon \{2,\ldots,n-1\} \to \{1,2,3,\ldots,n\} \ \text{ mit } \ f(x) := \begin{cases} n-x & \text{für } x \geq 5 \\ x & \text{für } x < 5 \end{cases}$$

a) Geben Sie $\mathrm{Bild}(f)$ für $n = 10$ an.

b) Überprüfen Sie f für allgemeines $n \geq 7$ auf Injektivität und Surjektivität.

c) Sei $n \geq 7$, $N := \{2,3,4\}$ und $M := \{n-2, n-1\}$. Bestimmen Sie

$$f(N \cap M),\ f(N \cup M),\ f(N) \cap f(M) \text{ und } f(N) \cup f(M).$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Für $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowie $a \in \mathbb{R}^*$ ist die Abbildung f_a gegeben durch $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) := ax$.

a) Zeigen Sie, dass f_a für alle $a \in \mathbb{R}^*$ bijektiv ist.

b) Es bezeichne $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Weiter sei

$$g\colon \mathbb{R}^* \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$g(a) := f_a.$$

Zeigen Sie, dass g injektiv, aber nicht surjektiv ist.

c) Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}^*$, dass $g(a \cdot b) = g(a) \circ g(b)$.