



Institute of Mathematics and Image Computing

Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Weihnachtsblatt 2019

Abgabe: Donnerstag, 09.01.2020, 14:15 Uhr

Das LADS-Team wünscht allen Studentinnen und Studenten ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr! Als kleines Geschenk von uns erhalten Sie für alle Aufgaben auf diesem Übungsblatt Bonuspunkte.

Aufgabe 1 (5 Bonuspunkte)

An der Tür des Weihnachtsmanns am Nordpol hängt ein Zettel:

An die fünf verspäteten Hilfsweihnachtsmänner!

Sie waren zum vereinbarten Termin nicht anwesend. Daher finden Sie die Geschenke, die Sie verteilen sollen, auf einem großen Haufen links in der Halle. Bitte teilen Sie die Geschenke zu gleichen Teilen unter sich auf!

Grüße, der Hauptweihnachtsmann

Nun geschieht es so, dass der erste verspätete Hilfsweihnachtsmann allein vor der Tür steht und diesen Zettel liest. Er geht hinein, teilt die Geschenke in fünf gleiche Teile auf, wobei ein Geschenk übrig bleibt, nimmt sich seinen Teil, wirft die anderen Geschenke wieder auf einen Haufen und verbrennt das übrig gebliebene Geschenk im Kamin in der Halle. Leider lässt er keine Nachricht zurück, dass er schon hier gewesen ist. Und nun geschieht es so, dass später der zweite, dritte, vierte und fünfte Hilfsweihnachtsmann nacheinander ankommen und genauso verfahren wie ihre jeweiligen Vorgänger. Sie teilen den Haufen in fünf Teile, nehmen sich ihren Teil, werfen alle übrigen Geschenke wieder zusammen und ein Paket, das jedes Mal übrigbleibt, verbrennen sie im Kamin. Wie lautet die Minimalzahl der Geschenke, die vor Eintreffen des ersten Hilfsweihnachtstmannes in der Halle lagen?

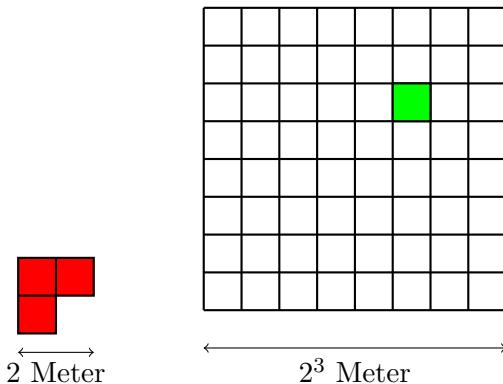
Aufgabe 2 (5 Bonuspunkte)

Nach dem Heiligen Abend hat der Weihnachtsmann am 25.12.2019 endlich Zeit, sein Wohnzimmer neu zu parkettieren. Er fährt spontan zu einem Schreiner und entscheidet sich dort für rote, L-förmige Parkettstücke vom Typ „X-Mas“ mit einer Kantenlänge von 2 Metern (Abb. 1a, die Parkettstücke sind natürlich beliebig drehbar).

Leider erinnert er sich vor Ort nur noch daran, dass sein Wohnzimmer quadratisch mit einer Kantenlänge von 2^n Metern ist. Die genaue Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ihm jedoch unbekannt (Abb. 1b). Da der Weihnachtsmann außerdem eine fest im Boden verankerte Weihnachtsbaumhalterung besitzt, darf ein quadratisches Stück der Größe $1m \times 1m$ nicht parkettiert werden. Wo genau sich dieses Stück befindet, hat der Weihnachtsmann leider ebenfalls im Weihnachtsrummel vergessen.

Würden Sie diesen Auftrag annehmen? Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass es unter den obigen Voraussetzungen möglich ist, das Wohnzimmer zu parkettieren ohne dabei Parkettstücke zu zerschneiden.

Bitte wenden!



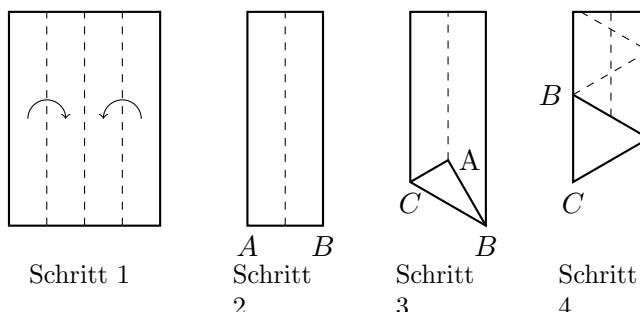
- (a) Parkeettstück vom Typ „X-Mas“.
 (b) Wohnzimmer des Weihnachtsmanns mit Weihnachtsbaumhalterung.

Abbildung 1: Das Wohnzimmer des Weihnachtsmanns

Aufgabe 3 (5 Bonuspunkte)

Nach getaner Arbeit sitzt der Weihnachtsmann in seinem neu parkettierten Wohnzimmer am Nordpol und langweilt sich. Als Beschäftigung bis Silvester nimmt er sich vor, alle Möglichkeiten zu finden, einen Weihnachtsbaum auf sich selbst abzubilden. Können Sie dem Weihnachtsmann helfen? Nehmen Sie an, dass der Weihnachtsbaum des Weihnachtsmanns ein Tetraeder ist und geben Sie die Elemente der zwölfelementigen, nur aus Drehungen bestehenden Untergruppe der Symmetriegruppe eines Tetraeders als Permutationen der Ecken an.

Hinweis: Leichter geht es, wenn Sie einen Tetraeder als Anschauungsobjekt bauen. Sie brauchen keine Verknüpfungstafel aufzustellen.



Schritt 1, 2 Halbieren Sie ein DIN A4 Papier wie auf der Zeichnung dargestellt.

Schritt 3 Falten Sie Ecke A auf die Mitte der Seite.

Schritt 4 Falten Sie Ecke B entlang der Kante \overline{AC} auf die lange linke Seite.

Schritt 5 Falten Sie das Blatt analog zu Schritt 4 entlang der gestrichelt vorgezeichneten Linien, bis Sie ein gleichseitiges Dreieck vor sich liegen haben.

Schritt 6 Entfalten Sie das Dreieck, bis es wieder aussieht wie in Schritt 2. Nun können Sie das Tetraeder entlang der Faltlinien ganz einfach zusammensetzen.