Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Übungsblatt 7 Abgabe: Donnerstag, 05.12.2019, 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $(a^2 \equiv 0 \bmod 4) \ \vee \ (a^2 \equiv 1 \bmod 4)$.

b) Berechnen Sie die letzten zwei Stellen von 98^{10} mit Papier und Bleistift.
Hinweis: Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so lässt sich deren letzte Stelle $s_1 \in \{0, \dots, 9\}$ als die eindeutige Lösung der Gleichung $(s_1 \equiv n \bmod 10) \ \wedge \ (0 \leq s_1 \leq 9)$ berechnen. Analog findet man die letzten zwei Stellen $s_2 \in \{00, 01, \dots, 99\}$ als die eindeutige Lösung von $(s_2 \equiv n \bmod 100) \ \wedge \ (0 \leq s_2 \leq 99)$.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

i. $x + 2 \equiv 0 \bmod 12$,

ii. $2x \equiv 4 \bmod 12$,

iii. $3x \equiv 2 \bmod 5$.

b) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $M_m := \{0, \dots, m-1\}$.

i. Geben Sie alle Zahlen $x \in M_{12}$ an, für die es ein $y \in M_{12}$ gibt, sodass $x \cdot y \equiv 1 \bmod 12$ gilt.

ii. Seien nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig, $x \in M_m$ und $\mathrm{ggT}(m, x) > 1$. Beweisen Sie, dass es *keine* Zahl $y \in M_m$ gibt, sodass gilt:
$$x \cdot y \equiv 1 \bmod m.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Nutzen Sie die vollständige Induktion, um das sogenannte *Taubenschlagprinzip* zu beweisen:
Seien M, N zwei Mengen und sei $m := |M|$ mit $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Sei weiterhin $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann gilt:
$$|f(M)| \leq m - 1 \Leftrightarrow f \text{ nicht injektiv.}$$

Anschaulich bedeutet dies:
„$\Rightarrow$“: Verteilt man m Tauben auf weniger als $m-1$ Käfige, so ist mindestens ein Käfig mindestens doppelt belegt,
„$\Leftarrow$“: Wenn sich von m Tauben mindestens zwei einen Käfig teilen, belegen alle Tauben zusammen maximal $m-1$ Käfige.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für eine Abbildung $g\colon X \to Y$ und Teilmengen $A, B \subset X$ die Gleichheit $g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$ gilt. Außerdem dürfen Sie benutzen, dass für zwei disjunkte und endliche Mengen C, D gilt: $|C \cup D| = |C| + |D|$.