**Institute of Mathematics and Image Computing**
Jan Modersitzki, Caterina Rust

# MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Sonderübung — Abgabe: Mittwoch, 05.02.2020, 14:00 Uhr

Dieses Blatt soll Sie bei der Klausurvorbereitung unterstützen, indem es auf zentrale Bereiche der Vorlesung Bezug nimmt. Die Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig und wird mit Bonuspunkten bewertet, falls Sie noch nicht die nötige Punktzahl für die Klausurzulassung erreicht haben.
Am Mittwoch, den 05. Februar 2020 um 18 Uhr im AM1 findet eine Globalübung zur Besprechung der Aufgaben und weiterer Fragen statt. Schicken Sie Ihre Fragen gerne vorab an Caterina Rust.
Die Klausuranmeldung ist noch bis Sonntag, den 02.02.2020, möglich.

**Aufgabe 1 (8 Bonuspunkte)**

a) Seien $A, B, C$ drei Mengen. Zeigen Sie, dass $A \cap \overline{(B \cap C)} = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

b) Beweisen Sie die folgende Aussage mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3: \; n^2 - 2n - 1 > 0.$$

c) Sei

$$R = \{(x, y) \mid \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1\}$$

eine Relation in $\mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob $R$ eine Äquivalenzrelation, eine Ordnung bzw. eine Halbordnung in $\mathbb{R}$ ist.

d) Überprüfen Sie, ob die folgende Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist:

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 2 (4 Bonuspunkte)**

Sei

$$G := \left\{ A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) : \; A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(G, \odot)$ eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \odot)$ ist, wobei $\odot$ die übliche Matrixmultiplikation bezeichnet.

**Aufgabe 3 (7 Bonuspunkte)**

a) Gegeben seien die beiden komplexen Zahlen $u = 1 + i$ und $v = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

  i. Berechnen Sie $u \cdot v$, $\overline{u} \cdot v$ und $u \cdot v^{-1}$.

  ii. Geben Sie $u, v$ und alle Ergebnisse aus i. in kartesischen und Polarkoordinaten an und zeichnen Sie sie in die komplexe Ebene ein.

b) Finden Sie eine komplexe Zahl $r \in \mathbb{C}$, die $r + \overline{r} = 6$ und $r - \overline{r} = -4i$ erfüllt.

c) Seien $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Bitte wenden!

**Aufgabe 4 (6 Bonuspunkte)**

a) Nutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler von 83 und 49 zu berechnen.

b) Bestimmen Sie jeweils alle $x_i \in \mathbb{Z}$, für die folgende Kongruenzen gelten:

   i. $3x_1 \equiv 6 \bmod 9$,

   ii. $x_2 \equiv 30003 \cdot 75652 \bmod 3$ und $0 \leq x_2 < 3$,

   iii. $3x_3 + 6 \equiv 9 \bmod 12$ und $-10 \leq x_3 \leq 20$.

c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie: $m \equiv (n+1) \cdot m \bmod n$.

**Aufgabe 5 (5 Bonuspunkte)**

Gegeben seien die Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{spann}(v, w)$.

b) Überprüfen Sie, ob $(v, w, x)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

c) Stellen Sie den Vektor $y$ als Linearkombination von $v, w$ und $x$ dar.