Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1000: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Übungsblatt 8 Abgabe: Donnerstag, 12.12.2019, 14:15 Uhr

Bitte beachten Sie, dass der zweite E-Test von Montag, den 9.12.2019, 00:00 Uhr, bis Sonntag, 15.12.2019, 23:59 Uhr, freigeschaltet ist.
Außerdem wird in der Woche vom 16.12.2019 - 20.12.2019 in den Übungen der Midterm stattfinden. Nähere Information hierzu erhalten Sie in der Vorlesung und in den Übungen sowie im Moodle.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) Gegeben sind die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{0,1\}, \\ M_2 &:= \{1,2\}, \\ M_3 &:= \{n \in \mathbb{N} : n \equiv 1 \bmod 2\}, \\ M_4 &:= \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\}, \\ M_5 &:= \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\}. \end{aligned}$$

Prüfen und begründen Sie in einem Satz, ob die Strukturen $(M_i, +)$ und $(M_i, \cdot)$ abgeschlossen sind.

b) Sei $G = \{a, b\}$ und $\odot$ und $\oplus$ seien durch die folgenden Verknüpfungstafeln auf G definiert:

$\odot$	b	a
b	b	b
a	b	a

$\oplus$	b	a
b	b	a
a	a	b

Untersuchen Sie, ob $(G, \odot)$ oder $(G, \oplus)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $G := \{a, b, c\}$ und $\diamond\colon G \times G \to G$ eine Verknüpfung. Vervollständigen Sie die folgende Verknüpfungstafel so, dass $(G, \diamond)$ eine Gruppe ist und beweisen Sie Ihre Behauptung. Dabei dürfen Sie die Assoziativität voraussetzen. Ist die Gruppe abelsch?

$\diamond$	a	b	c
a			
b			b
c			

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Für $q \in \mathbb{Q}$ sei $q\mathbb{Z} := \{r \in \mathbb{Q} : \exists k \in \mathbb{Z} : r = qk\}$. Zeigen Sie:

a) $(q\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe.

b) Für $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ gilt: $q_1\mathbb{Z} \subset q_2\mathbb{Z} \iff q_1 = kq_2$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.