Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch.
Zeige: Alle EW von A sind reell.

Beweis:

Wir wissen:
$A = A^T$. $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \Leftrightarrow \underbrace{x^T A^T x}_{(Ax)^T x} \overset{A=A^T}{=} x^T A x$

$\boxed{Av = \lambda v}$

Wollen zeigen:
$\lambda = \bar{\lambda}$

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von A, sei $v \in \mathbb{C}^n$ der zugehörige EV.

$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle \overset{Av=\lambda v}{=} \langle Av, v\rangle \overset{A=A^T}{=} \langle v, Av\rangle$
$\overset{\lambda v = Av}{=} \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$

$\Rightarrow \lambda\langle v, v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, da $v \neq 0$

$\Rightarrow$ alle EW von A sind reell. $\blacksquare$