LADS 2 Übungsblatt 4

Aufgabe 1

a) Z.z.: für die 1-te Spalte $C_1 \in \mathbb{K}^n$

$$BC_1 = a_{i\cdot 1} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} C_{j1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

für die k-te Spalte $C_k \in \mathbb{K}^n$

$$BC_k = a_{i\cdot k} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} C_{j\cdot k} = \begin{pmatrix} a_{1\cdot k} \\ \vdots \\ a_{i\cdot k} \\ \vdots \\ a_{m\cdot k} \end{pmatrix}$$

für die l-te Spalte $C_l \in \mathbb{K}^n$

$$BC_l = a_{i\cdot l} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} C_{j\cdot l} = \begin{pmatrix} a_{1\cdot l} \\ \vdots \\ a_{i\cdot l} \\ \vdots \\ a_{m\cdot l} \end{pmatrix}$$

-2

$$\Rightarrow BC = (BC_1 \cdots BC_k \cdots BC_l)$$

b) $$A \cdot A^{-1} = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3)$$

Sei die j-te Spalte des A^{-1} ist $\begin{pmatrix} a_{1\cdot j} \\ a_{2\cdot j} \\ a_{3\cdot j} \end{pmatrix}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{1\cdot j} - 2a_{2\cdot j} - a_{3\cdot j} = 1 \\ a_{1\cdot j} + 3a_{3\cdot j} = 0 \\ 3a_{1\cdot j} - 4a_{2\cdot j} + 2a_{3\cdot j} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{1\cdot 1} = 6 \\ a_{2\cdot 1} = \frac{7}{2} \\ a_{3\cdot 1} = -2 \end{cases}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{1\cdot j} - 2a_{2\cdot j} - a_{3\cdot j} = 0 \\ a_{1\cdot j} + 3a_{3\cdot j} = 1 \\ 3a_{1\cdot j} - 4a_{2\cdot j} + 2a_{3\cdot j} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{1\cdot 2} = 4 \\ a_{2\cdot 2} = \frac{5}{2} \\ a_{3\cdot 2} = -1 \end{cases}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{1\cdot j} - 2a_{2\cdot j} - a_{3\cdot j} = 0 \\ a_{1\cdot j} + 3a_{3\cdot j} = 0 \\ 3a_{1\cdot j} - 4a_{2\cdot j} + 2a_{3\cdot j} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{1\cdot 3} = -3 \\ a_{2\cdot 3} = -2 \\ a_{3\cdot 3} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

c) Z:

$$(B+uv^T)^{-1}\cdot(B+uv^T)=E_n$$

$$\Rightarrow \left[B^{-1}-\frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1+v^TB^{-1}u}\right]\cdot(B+uv^T)=E_n \quad \text{muss erfüllen}$$

2.1

$$\left[B^{-1}-\frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1+v^TB^{-1}u}\right]\cdot(B+uv^T)=E+B^{-1}uv^T-\left[\frac{Euv^TB^{-1}}{1+v^TB^{-1}u}+\frac{B^{-1}B^{-1}uv^Tuv^T}{1+v^TBu}\right]$$

$$=E+\frac{B^{-1}uv^T(1+v^TB^{-1}u)}{1+v^TB^{-1}u}-\left[\frac{Euv^TB^{-1}}{1+v^TB^{-1}u}+\frac{B^{-1}B^{-1}uv^Tuv^T}{1+v^TB^{-1}u}\right] \quad -1$$

$$=E+\frac{B^{-1}uv^T}{1+v^TB^{-1}u}+\frac{B^{-1}B^{-1}uv^Tuv^T}{1+v^TB^{-1}u}-\frac{B^{-1}uv^T}{1+v^TB^{-1}u}-\frac{B^{-1}B^{-1}uv^Tuv^T}{1+v^TB^{-1}u}$$

$$=E$$

$$\Rightarrow (B+uv^T)^{-1}=B^{-1}-\frac{B^{-1}uv^TB^{-1}}{1+v^TB^{-1}u} \quad \blacksquare$$

Aufgabe 2

a) Sei $x=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2&1&2\\3&2&2\\4&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}2a+b+2c=-1\\3a+2b+2c=1\\4a+3b+2c=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=2\\b+a=3\\c=\end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} L_K=\emptyset \checkmark$$

die Lösungsmengen ist leer. ⇒ Das ist keine Lösung

b) Sei $x=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&2\\7&1&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}$ $\quad -3$

$$\Rightarrow \begin{cases}a-b+2c=1\\3a+b+2c=3\\7a+b+6c=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=1\\a+c=1\\b=c\end{cases}$$

2.2

⇒ Das hat mehrere Lösungen. 2.3

c) Sei $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 & -4 \\ 11 & -13 & 6 & 12 \\ 7 & -8 & 4 & 8 \\ 18 & -21 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 5b - 2c - 4d = -4 \\ 11a - 13b + 6c + 12d = 8 \\ 7a - 8b + 4c + 8d = 4 \\ 18a - 21b + 10c + 20d = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 2b = -4 \\ -2a + 4b = 0 \end{cases} \quad ↯$$

-3

die Lösungmenge ist leer. ⇒ Das ist keine Lösung.

d) Sei $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2}i} & e^{\pi i} & e^{\frac{3}{2}\pi i} & e^{2\pi i} \\ e^{\pi i} & e^{2\pi i} & e^{3\pi i} & e^{4\pi i} \\ e^{\frac{3}{2}\pi i} & e^{3\pi i} & e^{\frac{9}{2}\pi i} & e^{6\pi i} \\ e^{2\pi i} & e^{4\pi i} & e^{6\pi i} & e^{8\pi i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{\pi}{2}i} a + e^{\pi i} b + e^{\frac{3}{2}\pi i} c + e^{2\pi i} d = 1 \\ e^{\pi i} a + e^{2\pi i} b + e^{3\pi i} c + e^{4\pi i} d = 3 \\ e^{\frac{3}{2}\pi i} a + e^{3\pi i} b + e^{\frac{9}{2}\pi i} c + e^{6\pi i} d = 1 \\ e^{2\pi i} a + e^{4\pi i} b + e^{6\pi i} c + e^{8\pi i} d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ai - b - ci + d = 1 \\ -a + b - c + d = 3 \\ -ai - b + ci + d = 1 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ c - a = 0 \\ d - b = 1 \\ a + b = 0 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ Das hat genau eine Lösung.

Aufgabe 3

Sei $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 6 \\ \beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 4b + 4d = 0 \\ -3a + 2b + 3c - 2d = -9 \\ -2a - 4b + 2c + 2d = 6 \\ 2a + 2b + 4c + \alpha d = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = a + b \\ -5a - 2b + 5c = -3 \\ -5a + 3c = 9 \\ -2b + 2c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = a + b \\ 8c = 5d - 6 \end{cases}$

-3

a) genau ein Lösung

$2a + 2b + 4c + \alpha d = \beta \Rightarrow 2d + \frac{5}{2}d - 3 + \alpha d = \beta.$

$\Rightarrow (\frac{9}{2} + \alpha) d - 3 = \beta.$ $\quad \alpha \neq -\frac{9}{2}$ $\quad \beta$ ist ein beliebig TR Zahl.

$\Rightarrow \alpha = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq -\frac{9}{2}\}$ $\quad \beta = \{\beta \in \mathbb{R}\}$

b) Keine Lösung

$2a + 2b + 4c + \alpha d = \beta \Rightarrow 2d + \frac{5}{2}d - 3 + \alpha d = \beta$

$\Rightarrow d(\frac{9}{2} + \alpha) - 3 = \beta \quad \Rightarrow \frac{9}{2} + \alpha = 0 \quad \beta + 3 \neq 0.$

-1

$\Rightarrow \alpha = -\frac{9}{2} \quad \beta \neq -3$

$\Rightarrow \alpha = \{\alpha = -\frac{9}{2}\} \quad \beta = \{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta \neq -3\}$

c) unendlich viele Lösung

$2a + 2b + 4c + \alpha d = \beta \Rightarrow 2d + \frac{5}{2}d - 3 + \alpha d = \beta$

$\Rightarrow (\frac{9}{2} + \alpha) d - 3 = \beta \quad \Rightarrow (\frac{9}{2} + \alpha) = 0. \quad \beta + 3 = 0$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{9}{2} \quad \beta = -3$

Index der Kommentare

1.1 Punkte
1: 6
2: 4
3: 6
Summe: 16

1.2 oBdA und dann für k hätte genügt

1.3 genau der Schritt, der diese Aufteilung zeigt fehlt

2.1 Matrizenmulti nicht kommutativ

2.2 Rechenweg fehlt

2.3 du solltest die Menge aller Lösungen angeben

4.1 Rechenweg für Gleichungssystem Auflösen fehlt
dadurch nicht nachvollziehbar, woher Vorzeichenfehler