

Willkommen zu Übung :)

Um 10.15 geht's los!

[martje.buhr@student.uni-luebeck.de](mailto:martje.buhr@student.uni-luebeck.de)

Meldet euch gerne bei Fragen!

Auch gerne für Kritik und Verbesserungsvorschläge

# Klausurzulassung

- 66% der Übungspunkte
- Einzelabgaben
- Keine E-Tests, kein Vorrechnen

## Aufgabe 1a)

Vergleichen Sie die Definition des Vektorraumes aus der Vorlesung mit der Definition aus dem Buch „Lineare Algebra“ von Gerd Fischer und kommentieren Sie die Unterschiede.

# Skript:

Sei  $(\mathbb{K}, \oplus, 0, \odot, 1)$  Körper und  $V \neq \emptyset$  eine Menge. Das Tripel  $(V, \oplus, \odot)$  heißt ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, falls mit den Abbildungen

$$\begin{aligned}\oplus &: V \times V \rightarrow V, \quad (x, y) \mapsto \oplus(x, y) =: x \oplus y, \\ \odot &: \mathbb{K} \times V \rightarrow V, \quad (\alpha, x) \mapsto \odot(\alpha, x) =: \alpha \odot x =: \alpha x\end{aligned}$$

die fünf Vektorraumaxiome gelten:

- (V1)  $(V, \oplus, 0)$  ist eine abelsche Gruppe,
- (V2)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x),$
- (V3)  $\forall x \in V : 1 \odot x = x,$
- (V4)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x),$
- (V5)  $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y).$

# Fischer: „Lineare Algebra“

**Definition.** Sei  $K$  ein Körper. Eine Menge  $V$  zusammen mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (v, w) \mapsto v + w,$$

(*Addition* genannt) und einer äußeren Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$$

(*Multiplikation mit Skalaren* oder *skalare Multiplikation* genannt) heißt  $K$ -Vektorraum (oder *Vektorraum über  $K$* ), wenn folgendes gilt:

**V1**  $V$  zusammen mit der Addition ist eine abelsche Gruppe (das neutrale Element heißt *Nullvektor*, es wird mit  $0$ , und das *Negative* wird mit  $-v$  bezeichnet).

**V2** Die Multiplikation mit Skalaren muß in folgender Weise mit den anderen Verknüpfungen verträglich sein:

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w,$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v, \quad 1 \cdot v = v,$$

für alle  $\lambda, \mu \in K$  und  $v, w \in V$ .

# Unterschiede:

- $V = \emptyset$  nicht explizit ausgeschlossen bei Fischer
- $V$  muss aber mindestens ein Element besitzen, die 0, um das erste Axiom zu erfüllen (sonst keine abelsche Gruppe!)
- Zusammenfassung der Axiome (V2)-(V5) aus der Vorlesung zu einem

# Aufgabe 1b)

Was ist ein Vektor?

- Ein Element aus einem Vektorraum
- Achtung: Kein Pfeil oder Ähnliches!

## Aufgabe 1c)

Vektorraum: ja oder nein?

$M = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, \ a, b \in \mathbb{R}, \ f \text{ bijektiv}\}$  mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation

Diese Struktur ist kein Vektorraum, da (V1) nicht erfüllt ist. Denn  $(M, \oplus, 0)$  ist nicht abgeschlossen: Sei  $f_1 = x \in M$  und  $f_2 = -x \in M$ . Dann gilt  $f_3 := f_1(x) + f_2(x) = 0$ .  $f_3$  ist jedoch nicht bijektiv und somit nicht in  $M$  enthalten.

$\mathbb{R}^3$  mit der bekannten Addition und der Skalarmultiplikation  $\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\lambda \odot x := 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3$$

Dies ist kein Vektorraum. Denn (V3) ist nicht erfüllt, da  $1 \odot x = 0 \neq x$  für alle  $x \neq 0$  ist.

$\mathbb{Z}_3$  mit der bekannten Addition und der Skalarmultiplikation  $\odot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$ ,

$$\lambda \odot [x]_3 = [\lambda x]_3$$

$\mathbb{Z}$  ist kein Körper. Daher ist diese Struktur kein Vektorraum.

## Aufgabe 2a)

Wie ist ein Erzeugendensystem definiert?

Gilt  $V = \text{span } v_1, \dots, v_r$ , so heißt  $(v_1, \dots, v_r)$  ein Erzeugendensystem von  $V$ .

Was bildet ein Erzeugendensystem von ...?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

KEIN Erzeugendensystem bilden die einzelnen Vektoren, sowie die beiden Tupel:

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Alle anderen Tupel mit mindestens zwei Vektoren bilden ein Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^2$ .

Was bildet ein Erzeugendensystem von ...?

1,  $i$  und  $1 + i$

Jedes mögliche Tupel bildet ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{C}$ .

Im Raum der komplexen Zahlen kann das Skalar eine beliebige komplexe sein. Deshalb spannt bereits einer der Vektoren den ganzen Raum auf (Dimension 1!)

## Aufgabe 2b)

Wie ist Lineare Unabhängigkeit definiert?

Das Tupel  $(v_1, \dots, v_r)$  heißt linear unabhängig, wenn gilt

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j v_j = 0 \iff \forall j \in \{1, \dots, r\} : \alpha_j = 0.$$

Was sind die linear unabhängigen Erzeugendensysteme von ...?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Linear unabhängige Erzeugendensysteme des  $\mathbb{R}^2$  sind

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Was sind die linear unabhängigen Erzeugendensysteme von ...?

1,  $i$  und  $1 + i$

Die linear unabhängigen Erzeugendensysteme sind 1,  $i$  und  $1 + i$ .

## Aufgabe 2c)

Wie ist die Basis eines Vektorraums definiert?

Das Tupel  $(v_1, \dots, v_r)$  heißt eine Basis von  $V$ , falls:

(B1)  $(v_1, \dots, v_r)$  ist linear unabhängig,

(B2)  $\text{span}(v_1, \dots, v_r) = V$ .

## Aufgabe 2d)

Was ist ein Skalarprodukt?

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *Skalarprodukt in  $V$* , falls gilt:

- [SP1) *Linearität*:  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall x, y, z \in V : \quad \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .
- [SP2) *Symmetrie/Hermitisch*:  $\forall x, y \in V : \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .
- [SP3) *Definitheit*:  $\forall x \in V : \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \ \wedge \ (\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0)$ .

## Wie hängen Skalarprodukte mit Normen zusammen?

Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm durch  $\|x\|_S := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Andererseits ist allerdings nicht jede Norm durch ein Skalarprodukt induziert (Gegenbeispiel ist z.B. die Maximumsnorm. Diese erfüllt die Parallelogrammungleichung nicht, die für alle induzierten Normen gilt).

## Aufgabe 2e)

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt?

Nein, denn (SP3) ist nicht erfüllt:

Sei  $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\langle x, x \rangle = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 4 - 8 + 2 = -2 < 0$ .

Für die Symmetrie lässt sich auch schnell ein Gegenbeispiel finden

## Aufgabe 2f)

Wie kann man Orthogonalität und allgemein Winkel in euklidischen bzw. unitären Vektorräumen definieren?

Zwei Vektoren  $x, y \in V$  heißen *orthogonal*, wenn  $\langle x, y \rangle = 0$  gilt. Da auf Grund der Cauchy-Schwarzen Ungleichung immer gilt:  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ , weiß man, dass es  $\lambda \in [-1, 1]$  gegen muss mit:

$$\langle x, y \rangle = \lambda \|x\| \|y\|.$$

Auf Grund des (ebenfalls definierten) Orthogonalitätszusammenhangs  $\langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$  ist es nun naheliegend den Winkel  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$  wie folgt zu definieren:  $\lambda =: \cos(\alpha)$ .

Dazu Fragen?