LADS Übung

Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 7

MIC

Universität zu Lübeck

18.05.-22.05.

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Fragen zu der Lösung von Blatt 6 ?

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Bonuspunkte)

Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $M(t) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ wie folgt definiert:

$$M(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -t & 2+t & -1 \\ -t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben ist nun die lineare Abbildung $\varphi_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi_t(x) := M(t)x$.

a) Bestimmen Sie Basen des Kerns und des Bildes von φ_t.

b) Prüfen Sie, für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung φ_t ein Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus oder ein Automorphismus ist.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Bonuspunkte)
Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $M(t) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ wie folgt definiert:

$$M(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -t & 2+t & -1 \\ -t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben ist nun die lineare Abbildung $\varphi_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi_t(x) := M(t)x$.

a) Bestimmen Sie Basen des Kerns und des Bildes von φ_t.

b) Prüfen Sie, für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung φ_t ein Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus oder ein Automorphismus ist.

- Basis des Kerns: ZSF, LGS mit 0 lösen (in Abhängigkeit von t)

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Bonuspunkte)
Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $M(t) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ wie folgt definiert:

$$M(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -t & 2+t & -1 \\ -t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben ist nun die lineare Abbildung $\varphi_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi_t(x) := M(t)x$.

a) Bestimmen Sie Basen des Kerns und des Bildes von φ_t.

b) Prüfen Sie, für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung φ_t ein Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus oder ein Automorphismus ist.

- Basis des Kerns: ZSF, LGS mit 0 lösen (in Abhängigkeit von t)
- Basis des Bildes: Matrix transponieren, ZSF, Zeilen als Spaltenvektoren sind Basis (in Abhängigkeit von t)

Wiederholung

Definition 6.1:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung oder Homomorphismus, falls

Wiederholung

Definition 6.1:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung oder Homomorphismus, falls

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Wiederholung

Definition 6.1:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung oder Homomorphismus, falls

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Aus Satz 6.8:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Wiederholung

Definition 6.1:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung oder Homomorphismus, falls

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Aus Satz 6.8:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

- f injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(f) = 0$

Wiederholung

Definition 6.1:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung oder Homomorphismus, falls

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Aus Satz 6.8:
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

- f injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(f) = 0$
- Dimensionsformel: $\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V)$

Wiederholung

Seien V and W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt f

Wiederholung

Seien V and W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt f

- Monomorphismus, wenn f injektiv ist,

Wiederholung

Seien V and W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt f

- Monomorphismus, wenn f injektiv ist,
- Epimorphismus, wenn f surjektiv ist,

Wiederholung

Seien V and W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt f

- Monomorphismus, wenn f injektiv ist,
- Epimorphismus, wenn f surjektiv ist,
- Isomorphismus, wenn f bijektiv ist,

Wiederholung

Seien V and W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt f

- Monomorphismus, wenn f injektiv ist,
- Epimorphismus, wenn f surjektiv ist,
- Isomorphismus, wenn f bijektiv ist,
- Endomorphismus, wenn $V = W$ (Definitionsbereich = Wertebereich) und

Wiederholung

Seien V and W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt f

- Monomorphismus, wenn f injektiv ist,
- Epimorphismus, wenn f surjektiv ist,
- Isomorphismus, wenn f bijektiv ist,
- Endomorphismus, wenn $V = W$ (Definitionsbereich = Wertebereich) und
- Automorphismus, wenn f bijektiv ist und $V = W$.

Aufgabe 2a

Aufgabe 2 (20 Bonuspunkte)
Gegeben sind die Abbildungen

i) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top := (-5x_1 + 3x_4,\ 7x_1 - x_2 - 4x_3)^\top$,

ii) $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R}),\ p \mapsto D(p) := -3p''$,

iii) $\delta\colon V \to V,\ x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, V ein unitärer Vektorraum, $w \neq 0$.

a) Zeigen Sie: Die obigen Abbildungen in i)-iii) sind linear und bestimmen Sie deren Kern

Aufgabe 2a

Aufgabe 2 (20 Bonuspunkte)
Gegeben sind die Abbildungen

i) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top := (-5x_1 + 3x_4,\ 7x_1 - x_2 - 4x_3)^\top$,

ii) $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R}),\ p \mapsto D(p) := -3p''$,

iii) $\delta\colon V \to V,\ x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, V ein unitärer Vektorraum, $w \neq 0$.

a) Zeigen Sie: Die obigen Abbildungen in i)-iii) sind linear und bestimmen Sie deren Kern

- Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn gilt:
  $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

Aufgabe 2a

Aufgabe 2 (20 Bonuspunkte)
Gegeben sind die Abbildungen

i) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top := (-5x_1 + 3x_4,\ 7x_1 - x_2 - 4x_3)^\top$,

ii) $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R}),\ p \mapsto D(p) := -3p''$,

iii) $\delta\colon V \to V,\ x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, V ein unitärer Vektorraum, $w \neq 0$.

a) Zeigen Sie: Die obigen Abbildungen in i)-iii) sind linear und bestimmen Sie deren Kern

- Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn gilt:
  $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$
- Kern bestimmen: $f(x) \stackrel{!}{=} 0$

Aufgabe 2a

Aufgabe 2 (20 Bonuspunkte)
Gegeben sind die Abbildungen

i) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top := (-5x_1 + 3x_4,\ 7x_1 - x_2 - 4x_3)^\top$,

ii) $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R}),\ p \mapsto D(p) := -3p''$,

iii) $\delta\colon V \to V,\ x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, V ein unitärer Vektorraum, $w \neq 0$.

a) Zeigen Sie: Die obigen Abbildungen in i)-iii) sind linear und bestimmen Sie deren Kern

- Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn gilt:
  $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$
- Kern bestimmen: $f(x) \overset{!}{=} 0$
- ii) Zweite Ableitung soll 0 sein. Welche Polynome erfüllen das?

Aufgabe 2b,c

Aufgabe 2 (20 Bonuspunkte)
Gegeben sind die Abbildungen

i) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top := (-5x_1 + 3x_4,\ 7x_1 - x_2 - 4x_3)^\top$,

ii) $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R}),\ p \mapsto D(p) := -3p''$,

iii) $\delta\colon V \to V,\ x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, V ein unitärer Vektorraum, $w \neq 0$.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(D)$.

c) Bestimmen Sie eine Matrix A, sodass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2b,c

Aufgabe 2 (20 Bonuspunkte)
Gegeben sind die Abbildungen

i) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top := (-5x_1 + 3x_4,\ 7x_1 - x_2 - 4x_3)^\top$,

ii) $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R}),\ p \mapsto D(p) := -3p''$,

iii) $\delta\colon V \to V,\ x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, V ein unitärer Vektorraum, $w \neq 0$.

b) Bestimmen Sie Bild(φ) und Bild(D).

c) Bestimmen Sie eine Matrix A, sodass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

- Bild(f) := f(V) := $\{f(v) : v \in V\}$

Aufgabe 2b,c

Aufgabe 2 (20 Bonuspunkte)
Gegeben sind die Abbildungen

i) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top := (-5x_1 + 3x_4,\ 7x_1 - x_2 - 4x_3)^\top$,

ii) $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R}),\ p \mapsto D(p) := -3p''$,

iii) $\delta\colon V \to V,\ x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, V ein unitärer Vektorraum, $w \neq 0$.

b) Bestimmen Sie Bild(φ) und Bild(D).

c) Bestimmen Sie eine Matrix A, sodass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

- Bild(f) := f(V) := $\{f(v) : v \in V\}$
- Finde Basis vom Definitionsbereich und setze diese in Abbildung ein (kanonische Basis). Vielfache vom Ergebnis ergeben das Bild

Aufgabe 2b,c

Aufgabe 2 (20 Bonuspunkte)
Gegeben sind die Abbildungen

i) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top := (-5x_1 + 3x_4,\ 7x_1 - x_2 - 4x_3)^\top$,

ii) $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R}),\ p \mapsto D(p) := -3p''$,

iii) $\delta\colon V \to V,\ x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$, V ein unitärer Vektorraum, $w \neq 0$.

b) Bestimmen Sie Bild(φ) und Bild(D).

c) Bestimmen Sie eine Matrix A, sodass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

- Bild(f) := f(V) := $\{f(v) : v \in V\}$
- Finde Basis vom Definitionsbereich und setze diese in Abbildung ein (kanonische Basis). Vielfache vom Ergebnis ergeben das Bild
- Polynomraum: allgemeine Darstellung von Polynom $\Rightarrow$ allgemeine Darstellung Ableitung

Aufgabe

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Abbildung mit

$$(x_1, x_2, x_3)^\top \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Ist φ linear? Belegen Sie Ihre Aussage.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

c) Ist φ ein Isomorphismus?

d) Gibt es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die für die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die Bedingungen

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Blatt 7

Fragen zu Blatt 7?

Blatt 7

Fragen zu Blatt 7?
Sonstige Fragen?

Blatt 7

Fragen zu Blatt 7?
Sonstige Fragen?
Schöne Feiertage!