LADS Übungsblatt 1.

A1

a) Ring ist eine Menge, die 2 Verknüpfungen hat: addition und Multiplikation.
Ring zusammen mit der Multiplikation ist eine Halbgruppe.
Ring zusammen mit der Addition ist eine abelsche Gruppe.
Es erfüllt auch Assoziativität der Addition, Kommutativität der Addition, Assoziativität der Multiplikation und Distributivität.
Aber die Unterschied zwischen Ring und Körper ist, dass Körper mit der Mutiplikation auch eine abelsche Gruppe ist. Das bedeutet: Im Ring gibt es kein Inversive und Neutrales.

b) 至: i

für Addition:

G1: Vollständigkeit,

$\forall f(m), g(m) \in S \quad f(m) \oplus g(m) = (f \oplus g)(m)$

$(f \oplus g)(m) \in S$

G2: Assoziativität

$\forall f(m), g(m), h(m) \in S$

$(f(m) \oplus g(m)) \oplus h(m) = (f \oplus g)(m) \oplus h(m) = (f \oplus g \oplus h)(m)$

$f(m) \oplus (g(m) \oplus h(m)) = f(m) \oplus (g \oplus h)(m) = (f \oplus g \oplus h)(m)$

$\Rightarrow (f(m) \oplus g(m)) \oplus h(m) = f(m) \oplus (g(m) \oplus h(m))$

G3: Neutrales Element:

$\forall f(m) \in S, \exists e \in S \quad f(m) \oplus e = f(m) \Rightarrow e = 0.$

G4: Inversives Element:

$\forall f(m) \in S, \exists f'(m) = -f(m).$

$f(m) \oplus f'(m) = (f \oplus f')(m) = 0.$

G5: Kommutativität

$\forall f(m), g(m) \in S \quad f(m) \oplus g(m) = (f \oplus g)(m)$

$g(m) \oplus f(m) = (g \oplus f)(m) \Rightarrow f(m) \oplus g(m) = g(m) \oplus f(m)$

aus G1, G2, G3, G4, G5 folgt

$(S, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.

für Multiplikation

G1: $\forall f(m), g(m) \in S, \ f(m) \odot g(m) = (f \odot g)(m)$

$(f \odot g)(m) \in S.$

G2: $\forall f(m), g(m), h(m) \in S$

$(f(m) \odot g(m)) \odot h(m) = (f \odot g)(m) \odot h(m) = (f \odot g \odot h)(m)$

$f(m) \odot (g(m) \odot h(m)) = f(m) \odot (g \odot h)(m) = (f \odot g \odot h)(m)$

$\Rightarrow (f(m) \odot g(m)) \odot h(m) = f(m) \odot (g(m) \odot h(m))$

aus G1, G2 folgt $(S, \odot)$ eine Halbgruppe.

für Distributivität

$\forall f(m), g(m), h(m) \in S$

$f(m) \odot (g(m) \oplus h(m)) = f(m) \odot (g \oplus h)(m) = [f \odot (g \oplus h)](m)$

$= (f \odot g \oplus f \odot h)(m) = (f \odot g)m \oplus (f \odot h)(m)$

$= f(m) \odot g(m) \oplus f(m) \odot h(m).$

aus die Zeigen von Addition, Multiplikation und Distributivität

folgt $(S, \oplus, \odot)$ ist eine Ring. ▨

ii: falls $\mathbb{R}$ ein Körper ist, für Multiplikation ergibt:

G1: $\forall f(m), g(m), h(m) \in S \quad f(m) \odot g(m) = (f \odot g)(m)$

$(f \odot g)(m) \in S$

G2: $\forall f(m), g(m), h(m) \in S$

$(f(m) \odot g(m)) \odot h(m) = (f \odot g)(m) \odot h(m) = (f \odot g \odot h)(m)$

$f(m) \odot (g(m) \odot h(m)) = f(m) \odot (g \odot h)(m) = (f \odot g \odot h)(m)$

$\Rightarrow (f(m) \odot g(m)) \odot h(m) = f(m) \odot (g(m) \odot h(m))$

G3: $\forall f(m) \in S, \exists e \in S, f(m) \odot e = f(m) \Rightarrow e = 1$

G4: $\forall f(m) \in S, \exists f'(m) \in S,$

$f(m) \odot f'(m) = 1$

G5: $\forall f(m), g(m) \in S. \quad f(m) \odot g(m) = (f \odot g)(m)$

$g(m) \odot f(m) = (g \odot f)(m) \Rightarrow f(m) \odot g(m) = g(m) \odot f(m)$

aus G1, G2, G3, G4, G5 folgt

$(S, \odot)$ ist eine abelsche Gruppe.

$\Rightarrow (S, \oplus, \odot)$ ist auch eine Körper.

A2.

a). für Span$\{V_1, V_2, V_3\}$ Sei $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a \cdot V_1 + b \cdot V_2 = V_3 \Rightarrow a\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\\alpha\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ -2b = -4 \\ 4a = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -4 \end{cases}$$

Fall 1. $\alpha = -4$, $V_3 = (4, -4, -4)$.

für span(V_1, V_2) $V_3 \in$ Span(V_1, V_2) Sei $a, b \in \mathbb{R}$

B1: $aV_1 + bV_2 = 0. \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ -2b = 0 \\ 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (V_1, V_2)$ ist l.u.

B_2: Weil $V_3 \in span(V_1, V_2)$, ergibt $span(V_1, V_2) = span(V_1, V_2, V_3)$

$\Rightarrow (V_1, V_2)$ ist ein Basis von $span(V_1, V_2, V_3)$

$\Rightarrow$ Dimension $= 2$.

Fall 2. $\alpha \neq -4$. $V_3 = (4, -4, \alpha)$

für $span(V_1, V_2, V_3)$ Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$

B_1: $aV_1 + bV_2 + cV_3 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 4c = 0. \\ -2b - 4c = 0 \\ 4a + c\alpha = 0 \\ \alpha \neq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow (V_1, V_2, V_3)$ ist l.u.

B_2: $span(V_1, V_2, V_3) = span(V_1, V_2, V_3)$

$\Rightarrow$ aus B_1, B_2 folgt Dimension $= 3$

b). Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ $V_3 = (4, -4, 0)$

$aV_1 + bV_2 + cV_3 = V_4$

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + 3b + 4c = 1 \\ \quad -2b - 4c = 2 \\ 4a \quad = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2. \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

c) $\alpha = -4$. $V_3 = (4, -4, -4)$

für $span(V_1, V_2)$ $span(V_1, V_2) \ni V_3$.

B_1: Sei $a, b \in \mathbb{R}$. $aV_1 + bV_2 = 0 \Rightarrow$

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ -2b = 0 \\ 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (V_1, V_2)$ ist l.u.

B_2: Weil $V_3 \in \mathrm{span}(V_1, V_2)$, ergibt $\mathrm{span}(V_1, V_2) = \mathrm{Span}(V_1, V_2, V_3)$

$\Rightarrow (V_1, V_2)$ ist eine Basis von $\mathrm{span}(V_1, V_2, V_3)$

$V_1 = (2, 0, 4) \quad V_2 = (3, -2, 0)$

10 P * 3 = 30 P
sehr gut :-)

MR

A_3

a) Z: $\forall a, b \in \mathbb{R}$. $(a-b)^2 \geq 0$.

$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. $\quad a^2 \geq 0$. $b^2 \geq 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. $\quad \blacksquare$

b) Z: Sei Eine abbildung $\|\cdot\|_2$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$.

~~SP A~~ N_1: Homogenität.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$\Rightarrow \|\lambda x\|_2 = |\lambda| \, \|x\|_2$

N_2: Definitheit

$\forall x \in \mathbb{R}^2$. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0$. und

$x_1^2 \geq 0$. $x_2^2 \geq 0$. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$. $\Rightarrow x_1 = 0 = x_2$

N_3: Dreiecksungleichung.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$\|x+y\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}$

$\|x\|_2 + \|y\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

$(\|x+y\|_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$

$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^2$

$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

$\Rightarrow (\|x+y\|_2)^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$

$\Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

$\Rightarrow$ aus N_1, N_2, N_3 folgt $\|\cdot\|_2$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ $\quad \blacksquare$