Besondere Matrizen

1. invertierbar

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) \overset{=n \text{ (voller Rang)}}{\Leftrightarrow} 0$ ist kein EW,

Abb. $x \mapsto Ax$ ist bijektiv

LGS $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$ (eindeutig lösbar)

2. unitäre Matrizen: $A^H A = E_n \Leftrightarrow A^H = A^{-1}$

$\det(A) = \pm 1$, EW betraglich 1 ($\lambda = e^{it}$)

$\|Ax\| = \|x\|$, $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ (in $\mathbb{C}$)

diagonalisierbar

3. orthogonale Matrizen: $A^T A = E_n \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

$\det(A) = \pm 1$

$\|Ax\| = \|x\|$, $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle^{(\mathbb{R})}$, $|\lambda| = 1$, $\lambda = e^{it}$

$\rightsquigarrow$ unitär

4. hermitesche Matrizen: $A = A^H \Leftrightarrow A^H A = A^2 = A A^H$

$EW(A) \in \mathbb{R}$, immer diagonalisierbar, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ($\mathbb{C}$)

5. reell symetrische Matrizen: $A = A^T \Leftrightarrow A^H A = A^T A = A^2 = A A^T = A A^H$.

$\rightsquigarrow$ hermitesch

$EW(A) \in \mathbb{R}$, immer diagonalisierbar, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ ($\mathbb{R}$)

6. ähnlich: $\exists\, S \in GL_n(\mathbb{C})$: $A = S^{-1} B S \Leftrightarrow B = S A S^{-1}$

$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) \Rightarrow$ gleiche EW, gleiche Det, gleicher Rang

7. normale Matrizen: $A^H A = A A^H$

[schließt ein: hermitesch, reell sym., unitär, orthogonal]

$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^H x, A^H x \rangle$, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^H y \rangle$

EV zu verschiedenen EW sind orthogonal

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$
$$(AB)^T = B^T A^T \qquad (A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^H = B^H A^H \qquad (A+B)^H = A^H + B^H$$

$$(A^T)^T = A, \quad A^0 = E, \quad A^{-p} = (A^{-1})^p$$

Kern und Bild

$f: V \to W$, $V = W = \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad f(x) = Ax$$

Kern (A)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

RWE:

Sei $x_3 = t \in \mathbb{R}$ bel.

$-2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 + 3 \cdot 0 + 2t = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2t$

$$\text{Kern}(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

f injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\}$

Bild (A)

1. Transponieren
2. ZSF

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3. Transponieren!
4. Bild: Spalten $\neq 0$

Basis

$$\text{Bild}(A) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \neq \mathbb{R}^3$$

f surjektiv $\Leftrightarrow \text{Bild}(f) = W$

Dimensionsformel:

$$\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(V)$$

hier: $1 + 2 = 3$

$0 \qquad 3$

$\uparrow \mathbb{R}^3$