LADS 2 - Übung

Organisatorisches
Wiederholungen
Vorbereitung auf Übungsblatt 4

27. April bis 1. Mai 2020

Organisatorisches

- Videos mit den Lösung der Übungsblätter werden immer am Freitag um 10 Uhr veröffentlicht
- Links zu den Erklärvideos im moodle im Abschnitt „Übungsmaterial“

Für euch nicht relevant :)

Organisatorisches

- Die Übungsgruppe BPH wird mit MIW1 zusammengeführt: Mittwochs um 8:15 Uhr im Webex-Raum von Rolf Meyer
- INF3 mit INF2: Zur gewohnten Zeit im Webex-Raum von Andrea Büter
- ITS2 mit MML: Dienstags um 10:15 Uhr im Webex-Raum von Mareike Burmester statt.

(einige Gruppen erhalten neue Korrekteure)

Wiederholungen

- Fragen zum alten Übungsblatt 3 ?
- Fragen zur Vorlesung ?

Blatt 4 – Aufgabe 1

a) Seien $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $C \in \mathbb{K}^{n \times l}$ beliebig. Die k-te Spalte von C sei mit $c_k \in \mathbb{K}^n$ bezeichnet. Beweisen Sie, dass BC die Form $BC = (Bc_1| \dots |Bc_l)$ besitzt.

- Beachte: das Produkt BC ergibt eine Matrix und die rechte Matrix besteht aus l Spaltenvektoren
- Zum Beispiel: das Produkt Bc_1 ist ein Spaltenvektor

Blatt 4 – Aufgabe 1

b) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$. Nutzen Sie den Zusammenhang aus Aufgabenteil a) um die Matrix A^{-1} zu bestimmen, für die $A \cdot A^{-1} = E_3$ gilt.

- Es werden drei Gleichungssysteme gelöst
- Das Lösen dieser drei LGS kann simultan stattfinden (vgl. nachfolgendes Beispiel)

Blatt 4 – Aufgabe 1

- Beispiel zu Aufgabe 1b.) :
  Berechnung der Inversen einer 3x3-Matrix

Deine Matrix

	A_1	A_2	A_3
1	4	0	1
2	2	1	0
3	0	1	1

Gauß-Jordan-Algorithmus

Schreibe die erweiterte Matrix

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
1	4	0	1	1	0	0
2	2	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	1

Erstelle das Schlüsselelement in der 1. Spalte, indem du die 1. Zeile mit 4 dividierst

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
1	1	0	1/4	1/4	0	0
2	2	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	1

Eliminiere die 2. Spalte

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
1	1	0	1/4	1/4	0	0
2	0	1	-1/2	-1/2	1	0
3	0	0	3/2	1/2	-1	1

Erstelle das Schlüsselelement in der 3. Spalte, indem du die 3. Zeile mit 3/2 dividierst

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
1	1	0	1/4	1/4	0	0
2	0	1	-1/2	-1/2	1	0
3	0	0	1	1/3	-2/3	2/3

Eliminiere die 3. Spalte

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
1	1	0	0	1/6	1/6	-1/6
2	0	1	0	-1/3	2/3	1/3
3	0	0	1	1/3	-2/3	2/3

Hier ist die inverse Matrix auf der rechten Seite

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
1	1	0	0	1/6	1/6	-1/6
2	0	1	0	-1/3	2/3	1/3
3	0	0	1	1/3	-2/3	2/3

Deine Matrix

	A_1	A_2	A_3
1	4	0	1
2	2	1	0
3	0	1	1

	B_1	B_2	B_3
1	1/6	1/6	-1/6
2	-1/3	2/3	1/3
3	1/3	-2/3	2/3

Ausgangsmatrix und Inverse

Blatt 4 – Aufgabe 1

c) Zeigen Sie für $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $1 + v^\top B^{-1} u \neq 0$ die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel

$$\left(B + uv^\top\right)^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1} u v^\top B^{-1}}{1 + v^\top B^{-1} u}.$$

- Beachte die Dimensionen der einzelnen Matrizen und Vektoren!
- Die Dimension *n* kann größer als 1 sein!

Zeilenvektor * Spaltenvektor = "Zahl" (1x1)
Spaltenvektor * Zeilenvektor = Matrix (nxn)

Blatt 4 – Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmengen $L_k \subseteq \mathbb{K}^n$, $k \in \{1, \dots, 4\}$ der folgenden Gleichungssysteme:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

c) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 & -4 \\ 11 & -13 & 6 & 12 \\ 7 & -8 & 4 & 8 \\ 18 & -21 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

d) $\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{4}} & e^{i2\frac{2\pi}{4}} & e^{i3\frac{2\pi}{4}} & e^{i4\frac{2\pi}{4}} \\ e^{i2\frac{2\pi}{4}} & e^{i4\frac{2\pi}{4}} & e^{i6\frac{2\pi}{4}} & e^{i8\frac{2\pi}{4}} \\ e^{i3\frac{2\pi}{4}} & e^{i6\frac{2\pi}{4}} & e^{i9\frac{2\pi}{4}} & e^{i12\frac{2\pi}{4}} \\ e^{i4\frac{2\pi}{4}} & e^{i8\frac{2\pi}{4}} & e^{i12\frac{2\pi}{4}} & e^{i16\frac{2\pi}{4}} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Blatt 4 – Aufgabe 2

- Die Lösungsmengen in dieser Aufgabe können
  - leer sein oder
  - genau ein Element enthalten oder
  - unendlich viele Elemente enthalten
- Bitte um ausführliche Rechenschritte (Gauß)
- Der Gaußsche Algorithmus ist auch mit komplexen Zahlen möglich
- 2d.) lässt sich mit Gauß oder mit Hilfe von Aufgabe 1 von Blatt 3 lösen

Blatt 4 – Aufgabe 2

- Beispiel: LGS ohne Lösung

Gleichungssystem:
$x + 2y + z = 1$
$y - z = 2$
$2x + 4y + 2z = 1$

Stelle die Koeffizientenmatrix auf. Reihenfolge der Variablen: x, y, z, Konstante

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Mit der 1. Zeile werden alle anderen Zeilen in der 1. Spalte auf 0 gebracht.
Zur 3. Zeile wird das -2fache der 1. Zeile addiert:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

In der 3. Zeile sind alle Koeffizienten 0.
Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Blatt 4 – Aufgabe 2

- Das nachfolgende Beispiel hat mehrere Lösungen:

1	2	1	1
0	1	-1	2
3	7	2	5

Mit der 1. Zeile werden alle anderen Zeilen in der 1. Spalte auf 0 gebracht.
Zur 3. Zeile wird das -3fache der 1. Zeile addiert:

1	2	1	1
0	1	-1	2
0	1	-1	2

Mit der 2. Zeile werden alle anderen Zeilen in der 2. Spalte auf 0 gebracht.
Zur 1. Zeile wird das -2fache der 2. Zeile addiert:

1	0	3	-3
0	1	-1	2
0	1	-1	2

Zur 3. Zeile wird das -1fache der 2. Zeile addiert:

1	0	3	-3
0	1	-1	2
0	0	0	0

In der 3. Zeile sind alle Koeffizienten 0.
Das Gleichungssystem hat keine eindeutige Lösung.

Blatt 4 – Aufgabe 2

- Beispiel mit 4 Unbekannten und drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
3\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3 + 1\,x_4 &= 2 \\
1\,x_1 + 2\,x_2 + 1\,x_3 + 0\,x_4 &= 0 \\
2\,x_1 + 0\,x_2 + 4\,x_3 + 0\,x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Blatt 4 – Aufgabe 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right)$$

Blatt 4 – Aufgabe 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right) \times \left(\tfrac{2}{5}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \end{array}\right)$$

Blatt 4 – Aufgabe 2

$$\begin{cases} 3\times x_1 & +x_2 & +2\times x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & \frac{5}{3}\times x_2 & +\frac{1}{3}\times x_3 & -\frac{1}{3}\times x_4 & = & \frac{-2}{3} \\ & & \frac{14}{5}\times x_3 & -\frac{4}{5}\times x_4 & = & \frac{-3}{5} \end{cases} \quad (1)$$

- Aus Gleichung 3 des System (1) finden Sie die Variable x_3:

  $\frac{14}{5}\times x_3 = \frac{-3}{5} + \frac{4}{5}\times x_4$

  $\mathbf{x_3 = \frac{-3}{14} + \frac{2}{7}\times x_4}$

- Aus Gleichung 2 des System (1) finden Sie die Variable x_2:

  $\frac{5}{3}\times x_2 = \frac{-2}{3} - \frac{1}{3}\times x_3 + \frac{1}{3}\times x_4 = \frac{-2}{3} - \frac{1}{3}\times\left(\frac{-3}{14} + \frac{2}{7}\times x_4\right) + \frac{1}{3}\times x_4 = \frac{-25}{42} + \frac{5}{21}\times x_4$

  $\mathbf{x_2 = \frac{-5}{14} + \frac{1}{7}\times x_4}$

- Aus Gleichung 1 des System (1) finden Sie die Variable x_1:

  $3\times x_1 = 2 - x_2 - 2\times x_3 - x_4 = 2 - \left(\frac{-5}{14} + \frac{1}{7}\times x_4\right) - 2\times\left(\frac{-3}{14} + \frac{2}{7}\times x_4\right) - x_4 = \frac{39}{14} - \frac{12}{7}\times x_4$

  $\mathbf{x_1 = \frac{13}{14} - \frac{4}{7}\times x_4}$

Blatt 4 – Aufgabe 2

Ergebnis:

$$x_1 = \frac{13}{14} - \frac{4}{7} \times x_4$$

$$x_2 = \frac{-5}{14} + \frac{1}{7} \times x_4$$

$$x_3 = \frac{-3}{14} + \frac{2}{7} \times x_4$$

$$x_4 = x_4$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{13}{14} - \frac{4}{7} \times x_4 \\ \frac{-5}{14} + \frac{1}{7} \times x_4 \\ \frac{-3}{14} + \frac{2}{7} \times x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Blatt 4 – Aufgabe 3

Gegeben sind die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sowie der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 6 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

a) genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^4$,

b) keine Lösung $x \in \mathbb{R}^4$,

c) unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{R}^4$ besitzt.

Blatt 4 – Aufgabe 3

- Die Lösungsvektoren x brauchen nicht bestimmt werden

Ende

- Weitere Fragen, Anregungen?
- Einen schönen 1. Mai*!*