

SVD von A:

1. Möglichkeit:  
Eigenwerte von  $A^T A \rightarrow EV \rightarrow$  orthogonal?  $\rightarrow$  normiert  
 $\rightarrow$  in Matrix V schreiben

$\Sigma$ :  $\sqrt{EW}$  Diagonale (Reihenfolge beachten)

Eigenwerte von  $AA^T \rightarrow EV \rightarrow \dots \rightarrow$  in Matrix U schreiben  
Probe!  $A = U\Sigma V^T \leftarrow$  möglicherweise nicht " $=$ "

2. Möglichkeit  $A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix}$

Eigenwerte von  $A^T A \rightarrow EV \rightarrow$  orthogonal?  $\rightarrow$  normieren  
 $\rightarrow$  in die Matrix V schreiben (2x2)

$\Sigma = \sqrt{EW} \sim$  Reihenfolge

$$A = U\Sigma V^T \Leftrightarrow AV = U\Sigma$$

$$U_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1, \quad U_2 = \frac{1}{\sigma_2} Av_2$$

$U_3$  muss orthogonal zu  $U_1, U_2$  stehen

$$U_3: \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow GV \rightarrow U_3 \text{ normieren}$$

$\Sigma: \sqrt{EW}$

Beispiel: Blatt 13, Nr. 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T A: \begin{array}{l} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 6 \end{array} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma_2} Av_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{pmatrix} U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{bereits in ZSF}} \begin{pmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{RWE: } U_{33} = 0 \\ \text{Sei } U_{23} = t \in \mathbb{C} \text{ und} \\ U_{13} = 2t \\ \Rightarrow U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = U \Sigma V^H$  mit

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SÜ, Aufgabe 6

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 1x_1x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0\}$$

Matrixform:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\sqrt{18} \\ +\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad c=2$$

$\hookrightarrow$  reell symmetrisch  $\Rightarrow$  diagonalisierbar

Eigenwerte und Eigenräume:

$$\lambda_1 = 2, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{normieren} \rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wissen: } T^T A T = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = T D T^{-1}$$

äquivalente Beschreibung für die Quadrik:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^T T}_{y^T} \underbrace{D T^{-1} x}_{y} + b^T \underbrace{T^{-1} x}_{\tilde{x}_n} + c = 0\}$$

Substituiere:  $T^{-1} x = y$

$$y^T D y + b^T T y + c = 0$$

Werte einsetzen (mit  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ )

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \left( \frac{-\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \right)^T \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{2y_1^2} + \underline{y_2^2} + \underline{4y_1} + \underline{2y_2} + 2 = 0$$

Quadratisch ergänzen:

$$2(y_1 + 1)^2 + (y_2 + 1)^2 \underbrace{+ 2 - 3}_{-1} = 0 \quad \text{Elipse}$$

$$\text{Substituiere: } y_1 + 1 = z_1 \wedge y_2 + 1 = z_2$$

$$2z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$  Elipse

