# LADS Übung

## Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 10

MIC

Universität zu Lübeck

09.06.-11.06.

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Fragen zu der Lösung von Blatt 9 ?

# Wiederholung

# Wiederholung

**Determinanten:**

# Wiederholung

**Determinanten:**

- $A \in \mathbb{K}^{1 \times 1} \Rightarrow \det(A) = A$

# Wiederholung

**Determinanten:**

- $A \in \mathbb{K}^{1\times 1} \Rightarrow \det(A) = A$
- $A \in \mathbb{K}^{2\times 2} \Rightarrow \det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$

# Wiederholung

**Determinanten:**

- $A \in \mathbb{K}^{1\times 1} \Rightarrow \det(A) = A$
- $A \in \mathbb{K}^{2\times 2} \Rightarrow \det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$
- $A \in \mathbb{K}^{3\times 3} \Rightarrow \det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2}$ (Satz von Sarrus)

# Wiederholung

**Determinanten:**

- $A \in \mathbb{K}^{1\times 1} \Rightarrow \det(A) = A$
- $A \in \mathbb{K}^{2\times 2} \Rightarrow \det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$
- $A \in \mathbb{K}^{3\times 3} \Rightarrow \det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2}$ (Satz von Sarrus)
- $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow$ Laplacescher Entwicklungssatz (Satz 5.5, Folie 471)

# Aufgabe 1

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

a) Gegeben seien die Matrizen

$$B = (3) \in \mathbb{R}^{1,1},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $B$, $C$ und $D$.

b) Sei $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und sei $p \in \Pi_m(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $F$, so ist auch $p(\lambda)$ Eigenwert von $p(F)$.

# Aufgabe 1

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

a) Gegeben seien die Matrizen

$$B = (3) \in \mathbb{R}^{1,1},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $B$, $C$ und $D$.

b) Sei $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und sei $p \in \Pi_m(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $F$, so ist auch $p(\lambda)$ Eigenwert von $p(F)$.

- **Eigenwerte:** $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$

# Aufgabe 1

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

a) Gegeben seien die Matrizen

$$B = (3) \in \mathbb{R}^{1,1},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $B$, $C$ und $D$.

b) Sei $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und sei $p \in \Pi_m(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $F$, so ist auch $p(\lambda)$ Eigenwert von $p(F)$.

- **Eigenwerte:** $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$
- Nutze Zusammenhang $Fv = \lambda v$ und allgemeine Polynomdarstellung

# Aufgabe 1

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

a) Gegeben seien die Matrizen

$$B = (3) \in \mathbb{R}^{1,1}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $B$, $C$ und $D$.

b) Sei $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und sei $p \in \Pi_m(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $F$, so ist auch $p(\lambda)$ Eigenwert von $p(F)$.

- **Eigenwerte:** $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$
- Nutze Zusammenhang $Fv = \lambda v$ und allgemeine Polynomdarstellung $p(x) = \Sigma \alpha_j x^j$

# Aufgabe 2

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Gegeben ist die folgende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & -6 \\ 11 & 10 & 11 & -12 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 15 & -17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von $A$ und geben Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an. Berechnen Sie anschließend die zugehörigen Eigenräume. Ist $A$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

# Aufgabe 2

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Gegeben ist die folgende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & -6 \\ 11 & 10 & 11 & -12 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 15 & -17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von $A$ und geben Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an. Berechnen Sie anschließend die zugehörigen Eigenräume. Ist $A$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

- **Algebraische Vielfachheit:** Vielfachheit $q_j$ der Nullstelle $\lambda_j$ des charakteristischen Polynoms $\chi$ (Def. 8.7, Folie 661)

# Aufgabe 2

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Gegeben ist die folgende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & -6 \\ 11 & 10 & 11 & -12 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 15 & -17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von $A$ und geben Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an. Berechnen Sie anschließend die zugehörigen Eigenräume. Ist $A$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

- **Algebraische Vielfachheit:** Vielfachheit $q_j$ der Nullstelle $\lambda_j$ des charakteristischen Polynoms $\chi$ (Def. 8.7, Folie 661)
- **Geometrische Vielfachheit:** $\mathrm{gV}(\lambda_j) := \dim(E_{A,\lambda_j})$ (Def. 8.7, Folie 661)

# Aufgabe 2

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Gegeben ist die folgende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & -6 \\ 11 & 10 & 11 & -12 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 15 & -17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von $A$ und geben Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an. Berechnen Sie anschließend die zugehörigen Eigenräume. Ist $A$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

- **Algebraische Vielfachheit:** Vielfachheit $q_j$ der Nullstelle $\lambda_j$ des charakteristischen Polynoms $\chi$ (Def. 8.7, Folie 661)
- **Geometrische Vielfachheit:** $\mathrm{gV}(\lambda_j) := \dim(E_{A,\lambda_j})$ (Def. 8.7, Folie 661)
- **Eigenraum:** Der zu einem Eigenwert $\lambda_j$ gehörige Eigenraum ist $\mathrm{Kern}(A - \lambda_j E)$

# Aufgabe 2

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Gegeben ist die folgende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & -6 \\ 11 & 10 & 11 & -12 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 15 & -17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von $A$ und geben Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an. Berechnen Sie anschließend die zugehörigen Eigenräume. Ist $A$ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

- **Algebraische Vielfachheit:** Vielfachheit $q_j$ der Nullstelle $\lambda_j$ des charakteristischen Polynoms $\chi$ (Def. 8.7, Folie 661)
- **Geometrische Vielfachheit:** $\mathrm{gV}(\lambda_j) := \dim(E_{A,\lambda_j})$ (Def. 8.7, Folie 661)
- **Eigenraum:** Der zu einem Eigenwert $\lambda_j$ gehörige Eigenraum ist $\mathrm{Kern}(A - \lambda_j E)$
- **Diagonalisierbarkeit:** $\mathrm{aV}(\lambda_i) = \mathrm{gV}(\lambda_i)\ \forall i$
(Folien 663 bis 666, Definition 8.9 bis Korollar 8.12)

# Aufgabe 3

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Sei $H = E_n - 2ww^\top \in \mathbb{R}^{n,n}$, wobei $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\|_2 = 1$ ist. Zeigen sie, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a) $H$ ist symmetrisch,

b) $H$ ist invertierbar und $H^{-1} = H$,

c) $H$ ist orthogonal,

d) $Hw = -w$,

e) $H^n = E$, falls $n$ gerade, und $H^n = H$, falls $n$ ungerade ist.

# Aufgabe 3

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**
Sei $H = E_n - 2ww^\top \in \mathbb{R}^{n,n}$, wobei $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\|_2 = 1$ ist. Zeigen sie, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a) $H$ ist symmetrisch,

b) $H$ ist invertierbar und $H^{-1} = H$,

c) $H$ ist orthogonal,

d) $Hw = -w$,

e) $H^n = E$, falls $n$ gerade, und $H^n = H$, falls $n$ ungerade ist.

- Symmetrie: $A = A^\top$

# Aufgabe 3

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**
Sei $H = E_n - 2ww^\top \in \mathbb{R}^{n,n}$, wobei $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\|_2 = 1$ ist. Zeigen sie, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a) $H$ ist symmetrisch,

b) $H$ ist invertierbar und $H^{-1} = H$,

c) $H$ ist orthogonal,

d) $Hw = -w$,

e) $H^n = E$, falls $n$ gerade, und $H^n = H$, falls $n$ ungerade ist.

- **Symmetrie:** $A = A^\top$
- **Orthogonalität:** $A^\top \cdot A = E$, d. h. $A^\top = A^{-1}$

# Aufgabe

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**
Gegeben ist die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $C$.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von $C$.

c) Geben Sie die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von $C$ an.

d) Begründen Sie, ob $C$ diagonalisierbar ist oder nicht.

Sonstige Fragen?

Sonstige Fragen?
Schöne Woche noch!