



LADS Übung

Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 6

MIC

Universität zu Lübeck

11.05.-15.05.

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$. Dann heißt die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Vandermonde Matrix (zu den Zahlen t_1, \dots, t_{n+1}) und $\det(V)$ heißt *Vandermonde Determinante*. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Vandermonde Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i).$$

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$. Dann heißt die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Vandermonde Matrix (zu den Zahlen t_1, \dots, t_{n+1}) und $\det(V)$ heißt *Vandermonde Determinante*. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Vandermonde Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i).$$

- IA: auf richtigen Anfang achten
- IV: Beh. allgemein aufschreiben (z.B. für ein bel. k)
- IS: von k auf $k+1$ schließen

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$. Dann heißt die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Vandermonde Matrix (zu den Zahlen t_1, \dots, t_{n+1}) und $\det(V)$ heißt *Vandermonde Determinante*. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Vandermonde Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i).$$

- IA: auf richtigen Anfang achten
IV: Beh. allgemein aufschreiben (z.B. für ein bel. k)
IS: von k auf $k+1$ schließen
- $\det(A) = \det(A^T)$

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$. Dann heißt die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Vandermonde Matrix (zu den Zahlen t_1, \dots, t_{n+1}) und $\det(V)$ heißt *Vandermonde Determinante*. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Vandermonde Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i).$$

- IA: auf richtigen Anfang achten
IV: Beh. allgemein aufschreiben (z.B. für ein bel. k)
IS: von k auf $k+1$ schließen
- $\det(A) = \det(A^T)$
- Erzeugen einer Nullspalte hilfreich \rightarrow Laplacescher Entwicklungssatz

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$, $C \in \mathbb{C}^{2,2}$ und $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} d & -4 & 3 \\ 2 & 1 & d^2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$ und $\det(3 \cdot C^2)$.
- Berechnen Sie $\det(D)$ in Abhängigkeit von d . Für welche d hat D vollen Rang?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$, $C \in \mathbb{C}^{2,2}$ und $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} d & -4 & 3 \\ 2 & 1 & d^2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$ und $\det(3 \cdot C^2)$.
- Berechnen Sie $\det(D)$ in Abhängigkeit von d . Für welche d hat D vollen Rang?

a) Berechnung der Determinanten mit Laplace und Sarrus

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$, $C \in \mathbb{C}^{2,2}$ und $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} d & -4 & 3 \\ 2 & 1 & d^2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$ und $\det(3 \cdot C^2)$.
- b) Berechnen Sie $\det(D)$ in Abhängigkeit von d . Für welche d hat D vollen Rang?

- a) Berechnung der Determinanten mit Laplace und Sarrus
(eventuell teilweise schnellerer Lösungsweg bei besonderer Bauart der Matrizen)

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$, $C \in \mathbb{C}^{2,2}$ und $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} d & -4 & 3 \\ 2 & 1 & d^2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$ und $\det(3 \cdot C^2)$.
- b) Berechnen Sie $\det(D)$ in Abhängigkeit von d . Für welche d hat D vollen Rang?

- a) Berechnung der Determinanten mit Laplace und Sarrus
(eventuell teilweise schnellerer Lösungsweg bei besonderer Bauart der Matrizen)
- b) Zusammenhang zwischen vollem Rang und Determinante

Wiederholung

Lemma 5.3. Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine Matrix und $E_{n,*} \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine Elementarmatrix. Es gilt:

1. $\det(E_{n,[z^j \rightarrow \lambda z^j]} A) = \lambda \det A$,
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$,
3. $\det(E_{n,[z^j \rightarrow z^j + \lambda z^p]} A) = \det A$, falls $p \neq j$,
4. $\det(E_{n,[z^j \leftrightarrow z^p]} A) = -\det A$, falls $p \neq j$.

Wiederholung

Satz 5.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

1. Es gibt genau eine Determinante (für festes n).
2. Für $n = 1$ gilt: $\det(A) = a_{1,1}$.
3. Für $n \geq 2$ und bel. $s \in I_n$ gilt der **Laplacesche-Entwicklungssatz**:

$$\det A = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+s} a_{r,s} \det \hat{A}_{r,s}$$

(Entwicklung nach der der s -ten Spalte, **Spaltenentwicklung**).

Beispiel 5.6.

1. $n = 1$: $\det(A) = a_{1,1}$.

Wiederholung

Da elementare Zeilen Umformungen die Determinante im wesentlichen nicht ändern, empfiehlt sich folgendes Vorgehen:

$$A \rightarrow A' = \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,n} \\ & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a'_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\det A' = a'_{1,1} \begin{vmatrix} a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a'_{n,n} \end{vmatrix} = a'_{1,1} a'_{2,2} \cdots a'_{n,n} = \prod_{j=1}^n a'_{j,j}.$$

Wiederholung

5.3 Eigenschaften der Determinante

Satz 5.7. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$.

1. Ist A eine obere Dreiecksmatrix, gilt: $\det A = \prod_{j=1}^n a_{j,j} = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$.
2. $\det A = 0 \iff \text{Rang}(A) < n$.
3. Es gilt der **Determinantenmultiplikationssatz**:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

4. Im allgemeinen gilt $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.
5. Falls $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ gilt: $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

Aufgabe

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i+2 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$$

- a) Bestimme $\det(B)$.
- b) Bestimme $\det(B^2)$.
- c) Bestimme $\det(B^H B)$.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ und die Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \lambda &\mapsto \det(A - \lambda E_2), \end{aligned}$$

wobei $E_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$ die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

- a) Zeigen Sie: $p \in \Pi_2(\mathbb{R})$.
- b) Finden Sie alle Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ für die gilt: $p(\lambda) = 0$.
- c) Geben Sie für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ an für die gilt: $Av = \lambda v$.
Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda E_2 v \Leftrightarrow (A - \lambda E_2)v = 0$.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ und die Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \lambda &\mapsto \det(A - \lambda E_2), \end{aligned}$$

wobei $E_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$ die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

- a) Zeigen Sie: $p \in \Pi_2(\mathbb{R})$.
- b) Finden Sie alle Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ für die gilt: $p(\lambda) = 0$.
- c) Geben Sie für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ an für die gilt: $Av = \lambda v$.
Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda E_2 v \Leftrightarrow (A - \lambda E_2)v = 0$.

- a) Wie sehen Elemente aus dem Polynomraum 2. Grades aus?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ und die Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \lambda &\mapsto \det(A - \lambda E_2), \end{aligned}$$

wobei $E_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$ die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

- a) Zeigen Sie: $p \in \Pi_2(\mathbb{R})$.
- b) Finden Sie alle Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ für die gilt: $p(\lambda) = 0$.
- c) Geben Sie für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ an für die gilt: $Av = \lambda v$.
Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda E_2 v \Leftrightarrow (A - \lambda E_2)v = 0$.

a) Wie sehen Elemente aus dem Polynomraum 2. Grades aus?

b) $p(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ und die Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \lambda &\mapsto \det(A - \lambda E_2), \end{aligned}$$

wobei $E_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$ die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

- a) Zeigen Sie: $p \in \Pi_2(\mathbb{R})$.
- b) Finden Sie alle Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ für die gilt: $p(\lambda) = 0$.
- c) Geben Sie für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ an für die gilt: $Av = \lambda v$.
Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda E_2 v \Leftrightarrow (A - \lambda E_2)v = 0$.

- a) Wie sehen Elemente aus dem Polynomraum 2. Grades aus?
- b) $p(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$
- c) Sowohl Hinweis als auch Ergebnis aus b) hilfreich

Blatt 6

Fragen zu Blatt 6 ?

Blatt 6

Fragen zu Blatt 6 ?
Sonstige Fragen ?