LADS Übung

Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 13

MIC

Universität zu Lübeck

29.06.-03.07.

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Blatt 13

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

b) Sei

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Eigenwerte von J inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheit an.

Blatt 13

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

Blatt 13

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

- Bestimme gemäß Satz 8.38 eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{3,3}$, sowie Jordan-Blöcke $J_1, \dots, J_m$, sodass

$$J = X^{-1} A X = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

eine Jordan-Matrix ist.

Blatt 13

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

- Bestimme gemäß Satz 8.38 eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{3,3}$, sowie Jordan-Blöcke $J_1, \ldots, J_m$, sodass

$$J = X^{-1} A X = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

eine Jordan-Matrix ist.

- m: Anzahl der Eigenwerte $\rightarrow$ Ein Block pro Eigenwert!

Blatt 13

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.

- Bestimme gemäß Satz 8.38 eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{3,3}$, sowie Jordan-Blöcke $J_1, \dots, J_m$, sodass

$$J = X^{-1} A X = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

  eine Jordan-Matrix ist.
- m: Anzahl der Eigenwerte $\rightarrow$ Ein Block pro Eigenwert!
- Der Block J_k ist eine $(aV(\lambda_k) \times aV(\lambda_k))$ - Matrix und besteht aus $gV(\lambda_k)$ Jordan-Kästchen.

Blatt 13

- Der Block J_k ist eine $(aV(\lambda_k) \times aV(\lambda_k))$ - Matrix und besteht aus $gV(\lambda_k)$ Jordan-Kästchen.
- Ein Jordan-Kästchen hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Blatt 13

- Der Block J_k ist eine $(aV(\lambda_k) \times aV(\lambda_k))$ - Matrix und besteht aus $gV(\lambda_k)$ Jordan-Kästchen.
- Ein Jordan-Kästchen hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Bsp 8.39: $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Blatt 13

- Der Block J_k ist eine $(aV(\lambda_k) \times aV(\lambda_k))$ - Matrix und besteht aus $gV(\lambda_k)$ Jordan-Kästchen.
- Ein Jordan-Kästchen hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Bsp 8.39: $\quad A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

Blatt 13

- Der Block J_k ist eine $(aV(\lambda_k) \times aV(\lambda_k))$ - Matrix und besteht aus $gV(\lambda_k)$ Jordan-Kästchen.
- Ein Jordan-Kästchen hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Bsp 8.39: $\quad A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1,\ aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

Blatt 13

Bsp 8.39: $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

Blatt 13

Bsp 8.39: $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

2. Berechne die Blöcke J_1, J_2:

Blatt 13

Bsp 8.39: $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

2. Berechne die Blöcke J_1, J_2:
   - J_1 ist eine 1×1 - Matrix mit einem Jordan-Kästchen.

$$\Rightarrow J_1 = (\lambda_1) = (0)$$

Blatt 13

Bsp 8.39: $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

2. Berechne die Blöcke J_1, J_2:
   - J_1 ist eine 1×1 - Matrix mit einem Jordan-Kästchen.

$$\Rightarrow J_1 = (\lambda_1) = (0)$$

   - J_2 ist eine 2×2 - Matrix mit einem Jordan-Kästchen.

$$\Rightarrow J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Blatt 13

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

2. Berechne die Blöcke J_1, J_2:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Berechne die Matrix $X = (X_1 \mid X_2) \in \mathbb{C}^{3,3}$:

Blatt 13

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

2. Berechne die Blöcke J_1, J_2:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Berechne die Matrix $X = (X_1 \mid X_2) \in \mathbb{C}^{3,3}$:
   - X_1 ist eine 3×1 - Matrix $\Rightarrow \quad X_1 = (0, -1, 2)^\top$.

Blatt 13

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

2. Berechne die Blöcke J_1, J_2:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Berechne die Matrix $X = (X_1 \mid X_2) \in \mathbb{C}^{3,3}$:
   - X_1 ist eine 3×1 - Matrix $\Rightarrow$ $X_1 = (0, -1, 2)^\top$.
   - X_2 ist eine 3×2 - Matrix und enthält damit zusätzlich zum Eigenvektor noch einen **Hauptvektor**.

Blatt 13

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

2. Berechne J.
3. Berechne die Matrix $X = (X_1 \mid X_2) \in \mathbb{C}^{3,3}$:
   - X_1 ist eine 3×1 - Matrix $\Rightarrow$ $X_1 = (0, -1, 2)^\top$.
   - X_2 ist eine 3×2 - Matrix und enthält damit zusätzlich zum Eigenvektor noch einen **Hauptvektor**. Dieser **Hauptvektor** v_H liegt im Kern von $(A - \lambda_2 E_3)^2$, aber nicht im Kern von $A - \lambda_2 E_3$ und erfüllt

$$(A - \lambda_2 E_3)v_H = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Blatt 13

1. Berechne Eigenwerte und Eigenräume

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \quad E_{A,0} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_{A,4} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$aV(0) = 1, \quad aV(4) = 2, \quad gV(0) = gV(4) = 1.$$

2. Berechne J.
3. Berechne die Matrix $X = (X_1 \mid X_2) \in \mathbb{C}^{3,3}$:
   - X_1 ist eine 3×1 - Matrix $\Rightarrow$ $X_1 = (0, -1, 2)^\top$.
   - X_2 ist eine 3×2 - Matrix und enthält damit zusätzlich zum Eigenvektor noch einen **Hauptvektor**. Dieser **Hauptvektor** v_H liegt im Kern von $(A - \lambda_2 E_3)^2$, aber nicht im Kern von $A - \lambda_2 E_3$ und erfüllt

$$(A - \lambda_2 E_3) v_H = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow X_2 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid v_H \right).$$

Blatt 13

b) Sei

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Eigenwerte von J inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheit an.

Blatt 13

b) Sei

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Eigenwerte von J inklusive ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheit an.

Tipp: Wie ist für einen festen Eigenwert λ_k von J der Zusammenhang zwischen $aV(\lambda_k)$, $gV(\lambda_k)$ und "Anzahl der Diagonalelemente die gleich λ_k sind", "Anzahl der Jordankästchen".

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die SVD $A = U\Sigma V^H$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die SVD $A = U\Sigma V^H$.

- Gesucht: $U \in \mathbb{C}^{3,3}$, $V \in \mathbb{C}^{2,2}$ mit $U^H U = E_3$ und $V^H V = E_2$, sowie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(da Rang(A) = 2) mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die SVD $A = U\Sigma V^H$.

- Gesucht: $U \in \mathbb{C}^{3,3}$, $V \in \mathbb{C}^{2,2}$ mit $U^H U = E_3$ und $V^H V = E_2$, sowie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  (da Rang(A) = 2) mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$.
- Die Quadrate der Singulärwerte σ_1, σ_2 sind Eigenwerte von $A^H A$ und AA^H.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die SVD $A = U\Sigma V^H$.

- Gesucht: $U \in \mathbb{C}^{3,3}$, $V \in \mathbb{C}^{2,2}$ mit $U^H U = E_3$ und $V^H V = E_2$, sowie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  (da Rang(A) $= 2$) mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$.
- Die Quadrate der Singulärwerte σ_1, σ_2 sind Eigenwerte von $A^H A$ und AA^H.
- Die Spalten von V bilden ein ONS von Eigenvektoren für $A^H A$.
- Die Spalten von U bilden ein ONS von Eigenvektoren für AA^H.

Blatt 13

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Blatt 13

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. AA^H hat Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$ und die Eigenräume

$$E_{\lambda_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Blatt 13

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. AA^H hat Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$ und die Eigenräume

$$E_{\lambda_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Blatt 13

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. AA^H hat Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$ und die Eigenräume

$$E_{\lambda_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. A^HA hat Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$ und die Eigenräume

$$E_{\lambda_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Blatt 13

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. AA^H hat Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$ und die Eigenräume

$$E_{\lambda_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $A^H A$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$ und die Eigenräume

$$E_{\lambda_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{\lambda_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Blatt 13

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{EW}(A) = \mathrm{EW}(A^\top)$. Geben Sie zusätzlich ein Beispiel an, wo der Eigenraum von A zu einem Eigenwert λ nicht mit dem Eigenraum von $A^\top$ zum Eigenwert λ übereinstimmt (dh. finden Sie eine Matrix A mit passenden Eigenwert λ so, dass $E_{A,\lambda} \neq E_{A^\top,\lambda}$).

b) Seien $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ und

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -c_3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_E(\lambda)$ von E an.

c) Sei $X \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $Y \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zeigen Sie, wenn $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von XY mit zugehörigen Eigenvektor v ist, dann ist λ auch ein Eigenwert von YX.
Hinweis: Suchen Sie nach einen passenden Eigenvektor von λ für die Matrix YX.

Aufgabe

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ beliebige Matrizen.
Zeige: Ist x Eigenvektor von A und B, dann ist x auch Eigenvektor von $A + B$.
Welcher Eigenwert gehört zu $A + B$ und x?

Sei $u \in \mathbb{R}^n$.
Zeige: Ist $A = uu^T$, so ist u Eigenvektor von A.