LADS Übung

Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 3

MIC

Universität zu Lübeck

20.04.-24.04.

Organisatorisches

- Übungsblatt 1 ist Bonusblatt
- ab jetzt werden alle Aufgaben von uns korrigiert, aber nur die erste ausführlich

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Fragen zu der Lösung von Blatt 2 ?

Anmerkungen zu Blatt 2

Aufgabe 1:

a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Seien $v, w \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $\|w\| = 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\langle v, w\rangle| \neq 1 \Leftrightarrow (v, w) \text{ linear unabhängig.}$$

Anmerkungen zu Blatt 2

Aufgabe 1:

a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Seien $v, w \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $\|w\| = 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\langle v, w\rangle| \neq 1 \Leftrightarrow (v, w) \text{ linear unabhängig.}$$

Beweisansätze:

- Hin- und Rückrichtung
- indirekter Beweis
- über CSU:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

Gleichheit der CSU (Satz aus LADS 1):

$$\forall\, x, y \in V: \quad |\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \Leftrightarrow (x, y) \text{ ist linear abhängig.}$$

Anmerkungen zu Blatt 2

b) Gegeben sind die drei Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

i. Bestimmen Sie ein $u \in \operatorname{spann}(x)$ mit $\|u\|_2 = 1$.

ii. Bestimmen Sie ein $v \in \operatorname{spann}(x, y)$ mit $\|v\|_2 = 1$ und $\langle u, v \rangle = 0$.

iii. Bestimmen Sie ein $w \in \operatorname{spann}(x, y, z)$ mit $\|w\|_2 = 1$ und $\langle u, w \rangle = 0$.

iv. Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen von $\operatorname{spann}(x, y, z)$.

Lösung mithilfe von:

$$\operatorname{spann}(v_1, \dots, v_r) := \sum_{j=1}^{r} \mathbb{K} v_j$$

Basis (l.u. + ES) ist ein Tupel von Vektoren:
$(a \neq b) \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$

$\Rightarrow$ Reihenfolge wichtig !

Anmerkungen zu Blatt 2

Aufgabe 2:

a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Beweisen Sie:

$$\forall x, y \in V: \ \|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\|| \,.$$

b) Gegeben sind die Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1+2i \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 1-2i \\ -2+3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

i. Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle v, v\rangle$ und $\langle v, w\rangle$.

ii. Berechnen Sie $\|v\|_1$, $\|v\|_\infty$ und $\|v\|_2$.

iii. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{spann}(v, w)$.

a) Beweis über Normeigenschaften (N1)-(N3)

a) Beweis über Normeigenschaften (N1)-(N3)
b)
Das Skalarprodukt für $x, y \in \mathbb{C}^n$ ist definiert als:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

und es gilt:

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$$
$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow (x, y) \text{ sind l.u.}$$

Anmerkungen zu Blatt 2

Aufgabe 3:

Für $s \in \mathbb{R}^+$ sei die Abbildung $\| \cdot \|_s \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_s = s|x_1| + |x_2|.$$

Die *Einheitssphäre* ist definiert als

$$B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_s = 1\}.$$

a) Zeigen Sie: Für alle $s \in \mathbb{R}^+$ ist $\| \cdot \|_s$ eine Norm im $\mathbb{R}^2$.

b) Zeichnen Sie für $s_1 = 7, s_2 = 2$ und $s_3 = 0.5$ jeweils die Einheitssphäre.

Anmerkungen zu Blatt 2

Aufgabe 3:

Für $s \in \mathbb{R}^+$ sei die Abbildung $\|\cdot\|_s \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|_s = s|x_1| + |x_2|.$$

Die *Einheitssphäre* ist definiert als

$$B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_s = 1\}.$$

a) Zeigen Sie: Für alle $s \in \mathbb{R}^+$ ist $\|\cdot\|_s$ eine Norm im $\mathbb{R}^2$.

b) Zeichnen Sie für $s_1 = 7, s_2 = 2$ und $s_3 = 0.5$ jeweils die Einheitssphäre.

a) Beweis der drei Normeigenschaften (N1)-(N3)
b) Ansatz:

$$\|x\|_s \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow s|x_1| + |x_2| \stackrel{!}{=} 1$$

Fragen zu der Lösung von Blatt 2 ?

Blatt 3

Aufgabe 1:

a) Es sei

$$B = \begin{pmatrix} i & 1 & 4 \\ 2 & 2+3i & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,3}.$$

Bestimmen Sie B^H und berechnen Sie $B^H B$.

Für die n-te komplexe Einheitswurzel $\omega_n := e^{i2\pi/n} \in \mathbb{C}$ definieren wir die Matrix

$$F_n := \left(\omega_n^{jk}\right)_{j,k\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{C}^{n,n}.$$

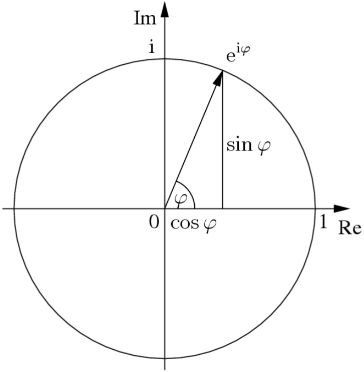
b) Geben Sie die Matrizen F_4 sowie F_4^H explizit an. Berechnen Sie anschließend die Matrix $F_4^H F_4$.

c) Berechnen Sie allgemein die Matrix $F_n^H F_n$.

Wiederholung komplexe Zahlen

$$z = x + \mathrm{i}y = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi)) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C}$$

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$



Blatt 3

Aufgabe 2:

a) Es seien $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,p}$ und $C \in \mathbb{K}^{p,q}$. Zeigen Sie, dass die Matrixmultiplikation assoziativ ist:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

b) Seien $A_1, B_1 \in \mathbb{K}^{m,m}$, $A_2, B_2 \in \mathbb{K}^{m,n}$, $A_3, B_3 \in \mathbb{K}^{n,m}$ und $A_4, B_4 \in \mathbb{K}^{n,n}$. Gegeben sind die $(m+n) \times (m+n)$ Blockmatrizen:

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}.$$

Wiederholung Matrizen

Matrix A mit Elementen $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ für $i \in \{1, ..., m\}$ und $j \in \{1, ..., n\}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,k} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Matrizen-Multiplikation:

$$AB := A \cdot B := C = (c_{\mu,\nu}) \in \mathbb{K}^{m,q}, \quad c_{\mu,\nu} := \sum_{k=1}^{n} a_{\mu,k} b_{k,\nu}.$$

Blatt 3

Aufgabe 3:

Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zeigen Sie:

a) Sei $B \in K^{m \times m}$ die Elementarmatrix $E_{m,[z_p \to \lambda z_p]}$. Zeigen Sie, dass die Multiplikation BA der Multiplikation von Zeile p mit $\lambda \in \mathbb{R}$ entspricht.

b) $\left(E_{m,[z_p \to \lambda z_p]}\right)^{-1} = E_{m,[z_p \to \lambda^{-1} z_p]}$ für $\lambda \neq 0$.

c) Sei $B \in K^{m \times m}$ die Elementarmatrix $E_{m,[z_p \leftrightarrow z_q]}$. Zeigen Sie, dass die Multiplikation BA dem Tausch der Zeilen p und q entspricht.

$$\begin{aligned}
E_{n,[z_p \to \lambda z_p]} &: \quad e_{p,p} = 1 \text{ wird durch } \lambda \in \mathbb{K} \text{ ersetzt,} \\
E_{n,[z_q \to z_q + \lambda z_p]} &: \quad e_{q,p} \text{ wird durch } \lambda \in \mathbb{K} \text{ ersetzt,} \\
E_{n,[z_p \leftrightarrow z_q]} &: \quad e_{p,p} = 1 \text{ und } e_{q,q} = 1 \text{ werden durch } 0 \text{ ersetzt und} \\
& e_{p,q} = 0 \text{ und } e_{q,p} = 0 \text{ werden durch } 1 \text{ ersetzt.}
\end{aligned}$$

Blatt 3

Fragen zu Blatt 3 ?

Blatt 3

Fragen zu Blatt 3 ?
Sonstige Fragen ?