LADS Übung

Vorbereitung auf Blatt 11

MIC

Universität zu Lübeck

15.06. - 19.06.

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), welche aus Eigenvektoren von A besteht.

b) Finden Sie $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $S^H S = E_3$ und $S^H A S$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), welche aus Eigenvektoren von A besteht.

b) Finden Sie $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $S^H S = E_3$ und $S^H A S$ eine Diagonalmatrix ist.

a)

- Eigenwerte von A: $\chi_A(\lambda) = 0$

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), welche aus Eigenvektoren von A besteht.

b) Finden Sie $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $S^H S = E_3$ und $S^H AS$ eine Diagonalmatrix ist.

a)

- Eigenwerte von A: $\chi_A(\lambda) = 0$
- Eigenvektoren von A: $(A - \lambda E)v = 0$

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), welche aus Eigenvektoren von A besteht.

b) Finden Sie $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $S^H S = E_3$ und $S^H A S$ eine Diagonalmatrix ist.

a)

- Eigenwerte von A: $\chi_A(\lambda) = 0$
- Eigenvektoren von A: $(A - \lambda E)v = 0$
- prüfen, ob Eigenvektoren orthogonal zueinander (Skalarprodukt $= 0$?)

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), welche aus Eigenvektoren von A besteht.

b) Finden Sie $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $S^H S = E_3$ und $S^H A S$ eine Diagonalmatrix ist.

a)

- Eigenwerte von A: $\chi_A(\lambda) = 0$
- Eigenvektoren von A: $(A - \lambda E)v = 0$
- prüfen, ob Eigenvektoren orthogonal zueinander (Skalarprodukt $= 0$?)
  - nein $\Rightarrow$ Gram-Schmidt-Verfahren

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), welche aus Eigenvektoren von A besteht.

b) Finden Sie $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $S^H S = E_3$ und $S^H A S$ eine Diagonalmatrix ist.

a)

- Eigenwerte von A: $\chi_A(\lambda) = 0$
- Eigenvektoren von A: $(A - \lambda E)v = 0$
- prüfen, ob Eigenvektoren orthogonal zueinander (Skalarprodukt $= 0$?)
  - nein $\Rightarrow$ Gram-Schmidt-Verfahren
  - ja $\Rightarrow$ prüfen, ob normalisiert

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), welche aus Eigenvektoren von A besteht.

b) Finden Sie $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $S^H S = E_3$ und $S^H A S$ eine Diagonalmatrix ist.

a)

- Eigenwerte von A: $\chi_A(\lambda) = 0$
- Eigenvektoren von A: $(A - \lambda E)v = 0$
- prüfen, ob Eigenvektoren orthogonal zueinander (Skalarprodukt $= 0$?)
  - nein $\Rightarrow$ Gram-Schmidt-Verfahren
  - ja $\Rightarrow$ prüfen, ob normalisiert

b)

- mithilfe von a)

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung ist.

b) Seien A und $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}(A) = \mathrm{spur}(B)$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$ für $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung ist.

b) Seien A und $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}(A) = \mathrm{spur}(B)$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$ für $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$

Lineare Abbildung:

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung ist.

b) Seien A und $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}(A) = \mathrm{spur}(B)$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$ für $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$

Lineare Abbildung:

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Spur einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$:

$$spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung ist.

b) Seien A und $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass $\text{spur}(A) = \text{spur}(B)$.

c) Zeigen Sie, dass $\text{spur}(AB) = \text{spur}(BA)$ für $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$

Lineare Abbildung:

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Spur einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$:

$$spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ähnlich, falls $\exists S \in GL_n(\mathbb{C})$: $\quad B = S^{-1}AS$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung ist.

b) Seien A und $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}(A) = \mathrm{spur}(B)$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$ für $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$

Lineare Abbildung:

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Spur einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$:

$$spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ähnlich, falls $\exists S \in GL_n(\mathbb{C})$: $\quad B = S^{-1}AS$

Matrizenmultiplikation: $\quad (AB)_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,k}$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Sei die Matrix $A = (a_{k,l}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ gegeben durch

$$a_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{für } k = l, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie

a) $\lambda_1 = -1$ ist $(n-1)$-facher Eigenwert von A,

b) $\lambda_2 = n-1$ ist einfacher Eigenwert von A,

und bestimmen Sie jeweils eine Basis der zugehörigen Eigenräume.
Hinweis: Benutzen Sie die besonders einfache Form von $A + E_n = A - (-1)E_n$, um $E_{A,-1}$ explizit zu berechnen.

Aufgabe 3

- zeigen, dass λ_1 und λ_2 Eigenwerte sind:

Aufgabe 3

- zeigen, dass λ_1 und λ_2 Eigenwerte sind:

$$det(A - \lambda_1 E) = 0 \text{ und } det(A - \lambda_2 E) = 0$$

Aufgabe 3

- zeigen, dass λ_1 und λ_2 Eigenwerte sind:

$$det(A - \lambda_1 E) = 0 \text{ und } det(A - \lambda_2 E) = 0$$

- für geometrische Vielfachheit Eigenraum zum EW λ_1 bestimmen

Aufgabe 3

- zeigen, dass λ_1 und λ_2 Eigenwerte sind:

$$det(A - \lambda_1 E) = 0 \text{ und } det(A - \lambda_2 E) = 0$$

- für geometrische Vielfachheit Eigenraum zum EW λ_1 bestimmen
- Zusammenhang zwischen aV und gV benutzen:

$$1 \leq gV(\lambda) \leq aV(\lambda) \leq n$$

Aufgabe

a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.
Zeige: Ist ν Eigenvektor von A, so ist ν auch Eigenvektor von A^n.

Aufgabe

a) Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.
Zeige: Ist ν Eigenvektor von A, so ist ν auch Eigenvektor von A^n.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.
Zeige: A und A^T haben die gleichen Eigenwerte.

Blatt 11

Fragen zu Blatt 11 ?

Blatt 11

Fragen zu Blatt 11 ?
Sonstige Fragen ?

Blatt 11

Fragen zu Blatt 11 ?
Sonstige Fragen ?
Schöne Woche euch!