LADS Übung

Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 9

MIC

Universität zu Lübeck

01.06.-04.06.

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Fragen zu der Lösung von Blatt 8 ?

Wiederholung

Gram-Schmidt-Verfahren

2. Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt ein **Orthogonalsystem (OGS)**, falls gilt:

   2.1 $0 \notin S$,

   2.2 $\forall\, v, w \in S : \ (\langle v, w \rangle \neq 0 \Rightarrow v = w)$.

3. Ein OGS S heißt **Orthonormalsystem (ONS)**, falls $\forall\, v \in S : \ \langle v, v \rangle = 1$.

4. Ist ein OGS bzw. ein ONS eine Basis von V, so sprechen wir auch von einer **Orthogonalbasis** (OGB), bzw. **Orthonormalbasis** (ONB).

$\square$

Wiederholung

Gram-Schmidt-Verfahren

Satz 7.14 (Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt). Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $x_1, \ldots, x_r \in V$ und $W = \operatorname{spann}(x_1, \ldots, x_r)$. Dann ist entweder $W = \{0\}$ oder es existiert ein ONS $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit $W = \operatorname{spann}(v_1, \ldots, v_n)$.
Die Vektoren v_j können sukzessive wie folgt berechnet werden. Wir setzen $n = 0$ und führen für $k = 1, \ldots, r$ folgende Schritte durch:

1. Berechne $\tilde{v}_{n+1} = x_{k+1} - P_{V \to W_n}(x_{k+1}) = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{k+1}, v_j \rangle v_j$.
2. Ist $\tilde{v}_{n+1} \neq 0$, setze $n \leftarrow n+1$, $v_j := \frac{1}{\| \tilde{v}_{j+1} \|} \tilde{v}_{j+1}$

Wiederholung

Beste Approximation

Satz 7.17 (Approximationssatz). Sein V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$ sowie $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Für beliebiges $x \in V$ gibt es genau ein $z \in W$, so dass

$$\forall\, u \in W : \quad \| x - z \| \leq \| x - u \| \quad \wedge \quad z = P_{V \to W}(x).$$

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Bonuspunkte)

Gegeben sei der Polynomraum $V := \Pi_n([-1,1])$, $n \in \mathbb{N}$, mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

a) Sei $n = 2$. Bestimmen Sie ausgehend von der Basis $M := (1, t, t^2)$ eine Orthonormalbasis von V.

b) Es sei nun $n \geq 4$. Bestimmen Sie die beste Approximation von $u\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $u(t) := t^4$ durch ein Polynom aus $\Pi_2([-1,1])$ bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Bonuspunkte)

Gegeben sei der Polynomraum $V := \Pi_n([-1,1])$, $n \in \mathbb{N}$, mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

a) Sei $n = 2$. Bestimmen Sie ausgehend von der Basis $M := (1, t, t^2)$ eine Orthonormalbasis von V.

b) Es sei nun $n \geq 4$. Bestimmen Sie die beste Approximation von $u\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $u(t) := t^4$ durch ein Polynom aus $\Pi_2([-1,1])$ bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm.

a) andere Definition vom Skalarprodukt (hier über Integral)

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Bonuspunkte)
Gegeben sei der Polynomraum $V := \Pi_n([-1,1])$, $n \in \mathbb{N}$, mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

a) Sei $n = 2$. Bestimmen Sie ausgehend von der Basis $M := (1, t, t^2)$ eine Orthonormalbasis von V.

b) Es sei nun $n \geq 4$. Bestimmen Sie die beste Approximation von $u\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $u(t) := t^4$ durch ein Polynom aus $\Pi_2([-1,1])$ bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm.

a) andere Definition vom Skalarprodukt (hier über Integral)
b) Annäherung von t^4 durch ein Polynom vom Grad 2

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Bonuspunkte)

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein endlichdimensionaler, euklidischer Vektorraum und $\mathcal{W}$ ein Orthonormalsystem von V.

Entscheiden Sie jeweils für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.

a) $\mathcal{W}$ ist eine Basis von $V \Rightarrow \mathcal{W}$ ist eine Orthogonalbasis von V.	□ wahr	□ falsch
b) Mit der induzierten Norm $\lVert \cdot \rVert$ gilt für alle Vektoren $x \in V$, dass $\lVert x \rVert^2 = \sum_{w \in \mathcal{W}} \lvert\langle x, w \rangle\rvert^2$.	□ wahr	□ falsch
c) Sei $\lVert \cdot \rVert$ die induzierte Norm. Dann gilt $\lVert x + y \rVert^2 = \lVert x \rVert^2 + \lVert y \rVert^2$ für alle $x, y \in \mathcal{W}$.	□ wahr	□ falsch
d) $\mathcal{W}$ ist eine Orthonormalbasis von $V \Leftrightarrow [x \in V$ und $x \perp \mathcal{W} \Rightarrow x = 0]$.	□ wahr	□ falsch
e) Die Dimension von V ist mindestens so groß wie Anzahl der Vektoren in $\mathcal{W}$.	□ wahr	□ falsch
f) Ist $x \in V$, so ist $x \in \mathcal{W}$.	□ wahr	□ falsch
g) Ist $x \in \mathcal{W}$, so ist $x \in V$.	□ wahr	□ falsch
h) Für alle $x \in V$ gibt es eine Darstellung $x = \sum_{w \in \mathcal{W}} \langle x, w \rangle w$ genau dann, wenn $\mathcal{W}$ eine Orthonormalbasis von V ist.	□ wahr	□ falsch
i) Sei U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für $v \in \mathbb{R}^n$ und $x \in U$, dass $\lVert v - x \rVert_\infty \leq \lVert v - u \rVert_\infty$ genau dann für alle $u \in U$, wenn x die orthogonale Projektion von v auf U ist.	□ wahr	□ falsch
j) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y \rangle = \sum_{w \in \mathcal{W}} \langle x, w \rangle \langle y, w \rangle$ genau dann, wenn $\mathcal{W}$ eine Orthonormalbasis von V ist.	□ wahr	□ falsch

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Bonuspunkte)

Gegeben sei der $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und $U := \operatorname{spann}\{x_1, x_2, x_3\}$ mit den Vektoren $x_1 = (1, -1, 0, 0)^\top$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)^\top$, $x_3 = (0, 0, 1, -1)^\top$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

b) Gegeben sind $y_1 = (5, 4, 3, 2)^\top$ und $y_2 = (12, 25, 36, 1)^\top$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ y_1 liegt in U.
- ☐ y_2 liegt in U.
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = (5, 4, 3, 2)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{102}}(1, 6, 8, -1)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = (4, 3, 4, 3)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = (12, 25, 36, 1)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = (-13, 74, 96, -35)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-13, 74, 96, -35)^\top$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Bonuspunkte)
Gegeben sei der $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und $U := \operatorname{spann}\{x_1, x_2, x_3\}$ mit den Vektoren $x_1 = (1, -1, 0, 0)^\top$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)^\top$, $x_3 = (0, 0, 1, -1)^\top$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

b) Gegeben sind $y_1 = (5, 4, 3, 2)^\top$ und $y_2 = (12, 25, 36, 1)^\top$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ y_1 liegt in U.
- ☐ y_2 liegt in U.
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = (5, 4, 3, 2)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{102}}(1, 6, 8, -1)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = (4, 3, 4, 3)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = (12, 25, 36, 1)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = (-13, 74, 96, -35)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-13, 74, 96, -35)^\top$

a) Gram-Schmidt-Verfahren anwenden

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Bonuspunkte)
Gegeben sei der $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und $U := \operatorname{spann}\{x_1, x_2, x_3\}$ mit den Vektoren $x_1 = (1, -1, 0, 0)^\top$, $x_2 = (0, 1, 1, 0)^\top$, $x_3 = (0, 0, 1, -1)^\top$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

b) Gegeben sind $y_1 = (5, 4, 3, 2)^\top$ und $y_2 = (12, 25, 36, 1)^\top$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ y_1 liegt in U.
- ☐ y_2 liegt in U.
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = (5, 4, 3, 2)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{102}}(1, 6, 8, -1)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_1) = (4, 3, 4, 3)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = (12, 25, 36, 1)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = (-13, 74, 96, -35)^\top$
- ☐ $P_{\mathbb{R}^4 \to U}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-13, 74, 96, -35)^\top$

a) Gram-Schmidt-Verfahren anwenden

b) Approximationssatz hilft

Blatt 9

Fragen zu Blatt 9 ?

Blatt 9

Fragen zu Blatt 9 ?
Sonstige Fragen ?

Aufgabe

Gegeben sind die Vektoren $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^4$ sowie der von (x_1, x_2, x_3) aufgespannte Unterraum $W := \text{spann}(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbb{R}^4$:

$$x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Nutzen Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt, um eine orthonormale Basis von W zu bestimmen.

b) Sei $y \in \mathbb{R}^4$ definiert als $y := (1, 1, 1, 1)^\top$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $P_{\mathbb{R}^4 \to W}(y)$ von y auf W.

zu a)

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_1 \neq 0$$

zu a)

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_1 \neq 0 \quad \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\|\tilde{v_1}\|} \cdot \tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu a)

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_1 \neq 0 \quad \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\|\tilde{v_1}\|} \cdot \tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu a)

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_1 \neq 0 \quad \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\|\tilde{v}_1\|} \cdot \tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{v}_2 \neq 0$

zu a)

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_1 \neq 0 \quad \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\|\tilde{v_1}\|} \cdot \tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 \neq 0 \quad \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \cdot \tilde{v}_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+2^2+2^2}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu a) Fortsetzung

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tfrac{1}{2}$$

$$-\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cdot \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

zu a) Fortsetzung

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tfrac{1}{2}$$

$$-\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cdot \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$\tilde{v}_3 \neq 0$

zu a) Fortsetzung

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tfrac{1}{2}$$

$$-\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cdot \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\tilde{v}_3 \neq 0 \quad \Rightarrow v_3 = \tfrac{1}{\|\tilde{v}_3\|} \cdot \tilde{v}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu a) Fortsetzung

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tfrac{1}{2}$$

$$- \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cdot \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\tilde{v}_3 \neq 0 \quad \Rightarrow v_3 = \tfrac{1}{\|\tilde{v}_3\|} \cdot \tilde{v}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ ONB } = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

zu b)

$P_{y \to w}(y)$

zu b)

$$
\begin{aligned}
P_{y\to w}(y) &= \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\
&+ \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix} \\
&+ \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

zu b)

$$
\begin{aligned}
P_{y\to w}(y) &= \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\
&\quad + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{10} \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix} \\
&\quad + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$