Willkommen zur Übung :)

Um 12.15 geht’s los!

martje.buhr@student.uni-luebeck.de

Meldet euch gerne bei Fragen!

Auch bei Anmerkungen oder Kritik

Fragen zur Korrektur? → Maike Herting

Fragen zu der Lösung von Blatt 1?

Fragen zu Blatt 2?

Wiederholung

spann

Die Menge aller Linearkombinationen von $(v_1, \ldots, v_r)$

$$\operatorname{spann}(v_1, \ldots, v_r) := \sum_{j=1}^{r} \mathbb{K} v_j := \left\{ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j : \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K} \right\} \subset V$$

heißt **lineare Hülle von** $(v_1, \ldots, v_r)$ oder **der von den** v_j, $j = 1, \ldots, r$ **aufgespannte Raum.**

Falls $r = 0$, vereinbaren wir $\operatorname{spann}(\emptyset) := \{0\}$.

Lineare Unabhängigkeit

Das Tupel $(v_1, \ldots, v_r)$ heißt linear unabhängig, wenn gilt

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j = 0 \iff \forall\, j \in \{1, \ldots, r\}: \quad \alpha_j = 0.$$

Skalarprodukt

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt *Skalarprodukt in* V, falls gilt:

SP1) *Linearität:* $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x, y, z \in V: \quad \langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$

SP2) *Symmetrie/Hermitisch:* $\forall\ x, y \in V: \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}.$

SP3) *Definitheit:* $\forall\ x \in V: \quad \langle x, x\rangle \geq 0\ \land\ (\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0).$

Norm

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm in V**, falls gilt:

(N1) **Homogenität:** $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}\ \forall\, x \in V: \quad \| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|.$

(N2) **Definitheit:** $\forall\, x \in V: \quad \| x \| \geq 0 \ \wedge\ (\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0).$

(N3) **Dreiecksungleichung:** $\forall\, x, y \in V: \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$

Basis

Das Tupel $(v_1, \ldots, v_r)$ heißt eine Basis von V, falls:

(B1) $(v_1, \ldots, v_r)$ ist linear unabhängig,

(B2) $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r) = V$.

Übungen

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{39}{2} \end{pmatrix}$$

a) Sind x, y, z linear unabhängig? Wenn nein, bestimme alle linear unabhängigen Tupel.

b) Bestimme $\langle x, y \rangle$ und $\langle x, z \rangle$.

c) Berechne $\|x\|_1$, $\|y\|_2$ und $\|z\|_\infty$.

d) Bestimme eine möglich Basis von $spann(x, y, z)$.

Lösungen

a) (x,y), (y,z), (x,z)
b) <x,y> = 26
   <x,z> = 87
c) $\|x\|_1 = 10$
   $\|y\|_2 = \mathrm{sqrt}(58)$
   $\|z\|_{\infty} = 39/2$
d) (x,y),…