



# LADS Übung

## Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 6

MIC

Universität zu Lübeck

11.05.-15.05.



Fragen, Anmerkungen, Feedback ?  
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)



# Aufgabe 1

## Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$ . Dann heißt die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

*Vandermonde Matrix* (zu den Zahlen  $t_1, \dots, t_{n+1}$ ) und  $\det(V)$  heißt *Vandermonde Determinante*. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Vandermonde Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i).$$

## Aufgabe 1

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$ . Dann heißt die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

*Vandermonde Matrix* (zu den Zahlen  $t_1, \dots, t_{n+1}$ ) und  $\det(V)$  heißt *Vandermonde Determinante*. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Vandermonde Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i).$$

- IA: auf richtigen Anfang achten
- IV: Beh. allgemein aufschreiben (z.B. für ein bel.  $k$ )
- IS: von  $k$  auf  $k+1$  schließen



# Aufgabe 1

## Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$ . Dann heißt die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

*Vandermonde Matrix* (zu den Zahlen  $t_1, \dots, t_{n+1}$ ) und  $\det(V)$  heißt *Vandermonde Determinante*. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Vandermonde Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i).$$

- IA: auf richtigen Anfang achten  
IV: Beh. allgemein aufschreiben (z.B. für ein bel.  $k$ )  
IS: von  $k$  auf  $k+1$  schließen
- $\det(A) = \det(A^T)$

# Aufgabe 1

## Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{K}$ . Dann heißt die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

*Vandermonde Matrix* (zu den Zahlen  $t_1, \dots, t_{n+1}$ ) und  $\det(V)$  heißt *Vandermonde Determinante*. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Vandermonde Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i).$$

- IA: auf richtigen Anfang achten  
IV: Beh. allgemein aufschreiben (z.B. für ein bel.  $k$ )  
IS: von  $k$  auf  $k+1$  schließen
- $\det(A) = \det(A^T)$
- Erzeugen einer Nullspalte hilfreich  $\rightarrow$  Laplacescher Entwicklungssatz

## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{2,2}$  und  $D \in \mathbb{R}^{3,3}$  durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} d & -4 & 3 \\ 2 & 1 & d^2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ ,  $\det(C)$  und  $\det(3 \cdot C^2)$ .
- Berechnen Sie  $\det(D)$  in Abhängigkeit von  $d$ . Für welche  $d$  hat  $D$  vollen Rang?



## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{2,2}$  und  $D \in \mathbb{R}^{3,3}$  durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} d & -4 & 3 \\ 2 & 1 & d^2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ ,  $\det(C)$  und  $\det(3 \cdot C^2)$ .
  - Berechnen Sie  $\det(D)$  in Abhängigkeit von  $d$ . Für welche  $d$  hat  $D$  vollen Rang?
- a) Berechnung der Determinanten mit Laplace und Sarrus

## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{2,2}$  und  $D \in \mathbb{R}^{3,3}$  durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} d & -4 & 3 \\ 2 & 1 & d^2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ ,  $\det(C)$  und  $\det(3 \cdot C^2)$ .
  - Berechnen Sie  $\det(D)$  in Abhängigkeit von  $d$ . Für welche  $d$  hat  $D$  vollen Rang?
- 
- Berechnung der Determinanten mit Laplace und Sarrus  
(eventuell teilweise schnellerer Lösungsweg bei besonderer Bauart der Matrizen)

## Aufgabe 2

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{4,4}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{2,2}$  und  $D \in \mathbb{R}^{3,3}$  durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 13 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3i \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} d & -4 & 3 \\ 2 & 1 & d^2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie  $\det(A)$ ,  $\det(B)$ ,  $\det(C)$  und  $\det(3 \cdot C^2)$ .
  - Berechnen Sie  $\det(D)$  in Abhängigkeit von  $d$ . Für welche  $d$  hat  $D$  vollen Rang?
- 
- Berechnung der Determinanten mit Laplace und Sarrus  
(eventuell teilweise schnellerer Lösungsweg bei besonderer Bauart der Matrizen)
  - Zusammenhang zwischen vollem Rang und Determinante



## Wiederholung

**Lemma 5.3.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$  eine Matrix und  $E_{n,*} \in \mathbb{K}^{n,n}$  eine Elementarmatrix. Es gilt:

1.  $\det(E_{n,[z^j \rightarrow \lambda z^j]} A) = \lambda \det A,$
2.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A,$
3.  $\det(E_{n,[z^j \rightarrow z^j + \lambda z^p]} A) = \det A, \text{ falls } p \neq j,$
4.  $\det(E_{n,[z^j \leftrightarrow z^p]} A) = -\det A, \text{ falls } p \neq j.$

## Wiederholung

**Satz 5.5.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ .

1. Es gibt genau eine Determinante (für festes  $n$ ).
2. Für  $n = 1$  gilt:  $\det(A) = a_{1,1}$ .
3. Für  $n \geq 2$  und bel.  $s \in I_n$  gilt der **Laplacesche-Entwicklungssatz**:

$$\det A = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+s} a_{r,s} \det \widehat{A}_{r,s}$$

(Entwicklung nach der der  $s$ -ten Spalte, **Spaltenentwicklung**).

**Beispiel 5.6.**

1.  $n = 1$ :  $\det(A) = a_{1,1}$ .

## Wiederholung

Da elementare Zeilen Umformungen die Determinante im wesentlichen nicht ändern, empfiehlt sich folgendes Vorgehen:

$$A \rightarrow A' = \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,n} \\ a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \ddots & & \vdots \\ 0 & & a'_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\det A' = a'_{1,1} \left| \begin{array}{ccc} a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \ddots & & \vdots \\ 0 & & a'_{n,n} \end{array} \right| = a'_{1,1} a'_{2,2} \cdots a'_{n,n} = \prod_{j=1}^n a'_{j,j}.$$

## Wiederholung

### 5.3 Eigenschaften der Determinante

**Satz 5.7.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ .

1. Ist  $A$  eine obere Dreiecksmatrix, gilt:  $\det A = \prod_{j=1}^n a_{j,j} = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$ .
2.  $\det A = 0 \iff \text{Rang}(A) < n$ .
3. Es gilt der **Determinantenmultiplikationssatz**:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

4. Im allgemeinen gilt  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ .
5. Falls  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  gilt:  $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$ .



## Aufgabe

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i+2 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$$

- a) Bestimme  $\det(B)$ .
- b) Bestimme  $\det(B^2)$ .
- c) Bestimme  $\det(B^H B)$ .



## Aufgabe 3

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die folgende Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  und die Abbildung  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \det(A - \lambda E_2),$$

wobei  $E_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$  die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

a) Zeigen Sie:  $p \in \Pi_2(\mathbb{R})$ .

b) Finden Sie alle Werte  $\lambda \in \mathbb{R}$  für die gilt:  $p(\lambda) = 0$ .

c) Geben Sie für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$  an für die gilt:  $Av = \lambda v$ .

**Hinweis:** Beachten Sie den Zusammenhang  $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda E_2 v \Leftrightarrow (A - \lambda E_2)v = 0$ .



## Aufgabe 3

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die folgende Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  und die Abbildung  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \det(A - \lambda E_2),$$

wobei  $E_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$  die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

- Zeigen Sie:  $p \in \Pi_2(\mathbb{R})$ .
  - Finden Sie alle Werte  $\lambda \in \mathbb{R}$  für die gilt:  $p(\lambda) = 0$ .
  - Geben Sie für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$  an für die gilt:  $Av = \lambda v$ .  
**Hinweis:** Beachten Sie den Zusammenhang  $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda E_2 v \Leftrightarrow (A - \lambda E_2)v = 0$ .
- a) Wie sehen Elemente aus dem Polynomraum 2. Grades aus?



## Aufgabe 3

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die folgende Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  und die Abbildung  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \det(A - \lambda E_2),$$

wobei  $E_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$  die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

- Zeigen Sie:  $p \in \Pi_2(\mathbb{R})$ .
- Finden Sie alle Werte  $\lambda \in \mathbb{R}$  für die gilt:  $p(\lambda) = 0$ .
- Geben Sie für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$  an für die gilt:  $Av = \lambda v$ .

**Hinweis:** Beachten Sie den Zusammenhang  $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda E_2 v \Leftrightarrow (A - \lambda E_2)v = 0$ .

- Wie sehen Elemente aus dem Polynomraum 2. Grades aus?
- $p(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$



## Aufgabe 3

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sind die folgende Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  und die Abbildung  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \det(A - \lambda E_2),$$

wobei  $E_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$  die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

- Zeigen Sie:  $p \in \Pi_2(\mathbb{R})$ .
  - Finden Sie alle Werte  $\lambda \in \mathbb{R}$  für die gilt:  $p(\lambda) = 0$ .
  - Geben Sie für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^2$  an für die gilt:  $Av = \lambda v$ .  
**Hinweis:** Beachten Sie den Zusammenhang  $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda E_2 v \Leftrightarrow (A - \lambda E_2)v = 0$ .
- 
- Wie sehen Elemente aus dem Polynomraum 2. Grades aus?
  - $p(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$
  - Sowohl Hinweis als auch Ergebnis aus b) hilfreich



## Blatt 6

Fragen zu Blatt 6 ?



## Blatt 6

Fragen zu Blatt 6 ?  
Sonstige Fragen ?