LADS Übung

Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 5

MIC

Universität zu Lübeck

04.05.-08.05.

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{R}^d$ mit $d = 3, n \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : \; n^\top x = c\}.$$

a) Bestimmen Sie $\text{Lös}(n^\top, c)$, $\text{Kern}(n^\top)$ sowie $\dim(\text{Kern}(n^\top))$.

b) Geben Sie eine kurze, geometrische Beschreibung von $\text{Lös}(n^\top, c)$ an.

c) Wie verändern sich diese Mengen, wenn die Bedingung $n \neq 0$ aufgegeben wird?

d) Wie verändern sich diese Mengen, wenn d beliebig ist?

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Für $n \in \mathbb{R}^d$ mit $d = 3, n \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : \; n^\top x = c\}.$$

a) Bestimmen Sie $\text{Lös}(n^\top, c)$, $\text{Kern}(n^\top)$ sowie $\dim(\text{Kern}(n^\top))$.

b) Geben Sie eine kurze, geometrische Beschreibung von $\text{Lös}(n^\top, c)$ an.

c) Wie verändern sich diese Mengen, wenn die Bedingung $n \neq 0$ aufgegeben wird?

d) Wie verändern sich diese Mengen, wenn d beliebig ist?

$$\text{Lös}(n^\top, c) = H, \quad \text{Kern}(n^\top) = \{x \in \mathbb{R}^d : n^\top x = 0\}$$

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Für $n \in \mathbb{R}^d$ mit $d = 3, n \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : \; n^\top x = c\}.$$

a) Bestimmen Sie $\text{Lös}(n^\top, c)$, $\text{Kern}(n^\top)$ sowie $\dim(\text{Kern}(n^\top))$.

b) Geben Sie eine kurze, geometrische Beschreibung von $\text{Lös}(n^\top, c)$ an.

c) Wie verändern sich diese Mengen, wenn die Bedingung $n \neq 0$ aufgegeben wird?

d) Wie verändern sich diese Mengen, wenn d beliebig ist?

$$\text{Lös}(n^\top, c) = H, \quad \text{Kern}(n^\top) = \{x \in \mathbb{R}^d : n^\top x = 0\}$$

- $\dim(\text{Kern}(n^\top))$?

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{R}^d$ mit $d = 3, n \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : \ n^\top x = c\}.$$

a) Bestimmen Sie $\text{Lös}(n^\top, c)$, $\text{Kern}(n^\top)$ sowie $\dim(\text{Kern}(n^\top))$.

b) Geben Sie eine kurze, geometrische Beschreibung von $\text{Lös}(n^\top, c)$ an.

c) Wie verändern sich diese Mengen, wenn die Bedingung $n \neq 0$ aufgegeben wird?

d) Wie verändern sich diese Mengen, wenn d beliebig ist?

$$\text{Lös}(n^\top, c) = H, \quad \text{Kern}(n^\top) = \{x \in \mathbb{R}^d : n^\top x = 0\}$$

- $\dim(\text{Kern}(n^\top))$?
- Dimension: Anzahl der Basiselemente des entsprechenden Vektorraums

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Für $n \in \mathbb{R}^d$ mit $d = 3, n \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : \; n^\top x = c\}.$$

a) Bestimmen Sie $\text{Lös}(n^\top, c)$, $\text{Kern}(n^\top)$ sowie $\dim(\text{Kern}(n^\top))$.

b) Geben Sie eine kurze, geometrische Beschreibung von $\text{Lös}(n^\top, c)$ an.

c) Wie verändern sich diese Mengen, wenn die Bedingung $n \neq 0$ aufgegeben wird?

d) Wie verändern sich diese Mengen, wenn d beliebig ist?

$$\text{Lös}(n^\top, c) = H, \quad \text{Kern}(n^\top) = \{x \in \mathbb{R}^d : n^\top x = 0\}$$

- $\dim(\text{Kern}(n^\top))$?
- Dimension: Anzahl der Basiselemente des entsprechenden Vektorraums
- Satz 4.23: Kern(A) ist (Unter-)Vektorraum für jede Matrix A

Aufgabe 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{R}^d$ mit $d = 3, n \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : \; n^\top x = c\}.$$

a) Bestimmen Sie $\text{Lös}(n^\top, c)$, $\text{Kern}(n^\top)$ sowie $\dim(\text{Kern}(n^\top))$.

b) Geben Sie eine kurze, geometrische Beschreibung von $\text{Lös}(n^\top, c)$ an.

c) Wie verändern sich diese Mengen, wenn die Bedingung $n \neq 0$ aufgegeben wird?

d) Wie verändern sich diese Mengen, wenn d beliebig ist?

$$\text{Lös}(n^\top, c) = H, \quad \text{Kern}(n^\top) = \{x \in \mathbb{R}^d : n^\top x = 0\}$$

- $\dim(\text{Kern}(n^\top))$?
- Dimension: Anzahl der Basiselemente des entsprechenden Vektorraums
- Satz 4.23: Kern(A) ist (Unter-)Vektorraum für jede Matrix A
- Beispiel 4.45 nochmal anschauen!

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$.

b) Bestimmen Sie den Zeilenraum $\mathrm{ZR}(A)$ von A.

c) Bestimmen Sie den Spaltenraum $\mathrm{SR}(A)$ von A.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$.

b) Bestimmen Sie den Zeilenraum $\mathrm{ZR}(A)$ von A.

c) Bestimmen Sie den Spaltenraum $\mathrm{SR}(A)$ von A.

- $\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}(A)$.

b) Bestimmen Sie den Zeilenraum $\operatorname{ZR}(A)$ von A.

c) Bestimmen Sie den Spaltenraum $\operatorname{SR}(A)$ von A.

- $\operatorname{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$
- $\operatorname{ZR}(A) =$ "Spann der Zeilen"

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$.

b) Bestimmen Sie den Zeilenraum $\mathrm{ZR}(A)$ von A.

c) Bestimmen Sie den Spaltenraum $\mathrm{SR}(A)$ von A.

- $\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$
- $\mathrm{ZR}(A) =$ "Spann der Zeilen"
- $\mathrm{SR}(A) =$ "Spann der Spalten"

Aufgabe 2

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern}(A)$.

b) Bestimmen Sie den Zeilenraum $\text{ZR}(A)$ von A.

c) Bestimmen Sie den Spaltenraum $\text{SR}(A)$ von A.

- $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$
- $\text{ZR}(A) =$ "Spann der Zeilen"
- $\text{SR}(A) =$ "Spann der Spalten"
- Wichtig: $\dim(\text{ZR}(A)) = \dim(\text{SR}(A))$ (Satz 4.51)

Wichtig

Dimensionsformel (Satz 4.49):

Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

$$\dim(\mathrm{Kern}(A)) + \mathrm{Rang}(A) = n$$

Wichtig

Satz 4.50. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine quadratische Matrix. Folgende Aussagen sind äquivalent.

1. Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
2. $\operatorname{Rang}(A) = n$.
3. A ist invertierbar, d.h. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
4. Für beliebige $b \in \mathbb{K}^n$ ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar.
5. $\text{Lös}(A, 0) = \operatorname{Kern}(A) = \{0\}$.
6. Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.

Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

- a) Bestimme eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$.
- b) Bestimme den Rang von A.
- c) Bestimme die Dimension des Spaltenraums $\mathrm{SR}(A)$ von A.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist das folgende reelle lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems in Abhängigkeit von α und β.

b) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & a+1 & 2a & 5 \\ 2 & a^2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 4-a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,5}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$

i. Rang(A) und

ii. die Dimension von Kern(A).

- Noch weitere Fragen?

- Noch weitere Fragen?
- Schöne Woche!