# LADS Übung

## Wiederholung und Vorbereitung auf Blatt 8

MIC

Universität zu Lübeck

26.05.-28.05.

Fragen, Anmerkungen, Feedback?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Fragen zu der Lösung von Blatt 7?

# Wiederholung

# Wiederholung

- Lineare Abbildung:

# Wiederholung

- Lineare Abbildung:
  $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

# Aufgabe 1a

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

a) $\text{Kern}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V,

# Aufgabe 1a

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

a) $\mathrm{Kern}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V,

- Untervektorraumkriterium:

# Aufgabe 1a

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

a) $\mathrm{Kern}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V,

- Untervektorraumkriterium:

  1. Zeige $\mathrm{Kern}(f) \neq \emptyset$

# Aufgabe 1a

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

a) $\text{Kern}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V,

- Untervektorraumkriterium:
  1. Zeige $\text{Kern}(f) \neq \emptyset$
  2. Zeige für $v_1, v_2 \in \text{Kern}(f)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dass auch $\alpha v_1 + v_2 \in \text{Kern}(f)$

# Aufgabe 1a

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

a) $\text{Kern}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V,

- Untervektorraumkriterium:
  1. Zeige $\text{Kern}(f) \neq \emptyset$
  2. Zeige für $v_1, v_2 \in \text{Kern}(f)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dass auch $\alpha v_1 + v_2 \in \text{Kern}(f)$

  $\Rightarrow$ Linearität ausnutzen

# Aufgabe 1b

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

b) $f$ injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\}$,

# Aufgabe 1b

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

b) $f$ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$,

- Zeige Hin- und Rückrichtung

# Aufgabe 1b

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

b) $f$ injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\}$,

- Zeige Hin- und Rückrichtung
- " $\Rightarrow$ " : Was gilt für injektive Abbildungen, was für lineare Abblindungen?

# Aufgabe 1b

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

b) $f$ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$,

- Zeige Hin- und Rückrichtung
- " $\Rightarrow$ " : Was gilt für injektive Abbildungen, was für lineare Abblindungen?

$f$ injektiv $\quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

# Aufgabe 1b

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

b) $f$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0\}$,

- Zeige Hin- und Rückrichtung
- " $\Rightarrow$ " : Was gilt für injektive Abbildungen, was für lineare Abblindungen?

  $f$ injektiv $\quad\Leftrightarrow\quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- " $\Leftarrow$ " : Was gilt für $v$ und $w$, wenn $f(v) = f(w)$ gilt und $\operatorname{Kern}(f) = \{0\}$ ist?

# Aufgabe 1c

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

c) $f$ bijektiv $\Leftrightarrow m = n$ und $\mathrm{Rang}(A) = m$.

# Aufgabe 1c

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

c) $f$ bijektiv $\Leftrightarrow m = n$ und $\mathrm{Rang}(A) = m$.

- Zeige Hin- und Rückrichtung

# Aufgabe 1c

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

c) $f$ bijektiv $\Leftrightarrow m = n$ und $\operatorname{Rang}(A) = m$.

- Zeige Hin- und Rückrichtung
- Dimensionsformel: $\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(V)$

# Aufgabe 1c

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

c) $f$ bijektiv $\Leftrightarrow m = n$ und $\mathrm{Rang}(A) = m$.

- Zeige Hin- und Rückrichtung
- Dimensionsformel: $\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V)$
- " $\Rightarrow$ " : $f$ bijektiv, also surjektiv und injektiv

# Aufgabe 1c

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

c) $f$ bijektiv $\Leftrightarrow m = n$ und $\mathrm{Rang}(A) = m$.

- Zeige Hin- und Rückrichtung
- Dimensionsformel: $\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V)$
- " $\Rightarrow$ " : $f$ bijektiv, also surjektiv und injektiv

  Zusammenhang von Surjektivität und Bild($f$)?

# Aufgabe 1c

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

c) $f$ bijektiv $\Leftrightarrow m = n$ und $\operatorname{Rang}(A) = m$.

- Zeige Hin- und Rückrichtung
- Dimensionsformel: $\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V)$
- " $\Rightarrow$ " : $f$ bijektiv, also surjektiv und injektiv

  Zusammenhang von Surjektivität und Bild($f$)?
- " $\Leftarrow$ " : $\mathrm{Rang}(A) = m = \dim(W)$

# Aufgabe 1c

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Seien $V, W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und $f: V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ bzgl. gegebener Basen von $V$ und $W$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

c) $f$ bijektiv $\Leftrightarrow m = n$ und $\mathrm{Rang}(A) = m$.

- Zeige Hin- und Rückrichtung
- Dimensionsformel: $\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(V)$
- " $\Rightarrow$ " : $f$ bijektiv, also surjektiv und injektiv

  Zusammenhang von Surjektivität und $\mathrm{Bild}(f)$?
- " $\Leftarrow$ " : $\mathrm{Rang}(A) = m = \dim(W)$

  Zusammenhang von Rang und Bild? Was folgt für den Kern?

# Wiederholung

**Satz 6.24** (Hauptsatz zu linearen Abbildungen)**.** Seien $V$ und $W$ endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}'$ bzw. $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$. Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung mit Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ bzw. $A_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{V}'}$. Seien schließlich $B_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}$ bzw. $B_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{W}}$ Basiswechselmatrizen in $V$ bzw. $W$. Dann gilt

$$A_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{V}'} = B_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{W}} A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} B_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}.$$

Alternative Formulierung: Das folgende **Diagramm ist kommutativ**:

$$\begin{tikzcd}
V, \mathcal{V}' \arrow[r, "f", "A_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{V}'}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_V"', "B_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}"] & W, \mathcal{W}' \\
V, \mathcal{V} \arrow[r, "A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}", "f"'] & W, \mathcal{W} \arrow[u, "B_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{W}}", "\mathrm{id}_W"']
\end{tikzcd}$$

# Aufgabe 2a

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_2$.

# Aufgabe 2a

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_2$.

- Einsetzen der kanonischen Basis (hier $E_3$) in die Abbildung $\varphi$

# Aufgabe 2a

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_2$.

- Einsetzen der kanonischen Basis (hier $E_3$) in die Abbildung $\varphi$
  Ergebnis spaltenweise in Matrix ist $A^{E_3}_{E_2}$

# Aufgabe 2b

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $B^{\mathcal{V}}_{\mathcal{E}_3}$ sowie $B^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{V}}$.

# Aufgabe 2b

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $B^{\mathcal{V}}_{\mathcal{E}_3}$ sowie $B^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{V}}$.

- $B^{V}_{E_3}$: Schreibe Basis von $V$ spaltenweise in Matrix

# Aufgabe 2b

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $B^{\mathcal{V}}_{\mathcal{E}_3}$ sowie $B^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{V}}$.

- $B^{V}_{E_3}$: Schreibe Basis von $V$ spaltenweise in Matrix
- $B^{V}_{E_3} = (B^{E_3}_{V})^{-1}$

# Aufgabe 2b

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $B^{\mathcal{V}}_{\mathcal{E}_3}$ sowie $B^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{V}}$.

- $B^V_{E_3}$: Schreibe Basis von $V$ spaltenweise in Matrix
- $B^V_{E_3} = (B^{E_3}_V)^{-1}$

  invertieren (z.B. mit Gauß-Jordan)

# Aufgabe 2c

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $B^{\mathcal{W}}_{\mathcal{E}_2}$ sowie $B^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{W}}$.

# Aufgabe 2c

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $B^{\mathcal{W}}_{\mathcal{E}_2}$ sowie $B^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{W}}$.

- gleiches Vorgehen wie bei b)

# Aufgabe 2d

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

d) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$.

# Aufgabe 2d

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

d) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$.

- $A_W^V$ mit LGS lösbar

# Aufgabe 2d

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

d) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$.

- $A_W^V$ mit LGS lösbar
- Oder: Nutze den Hauptsatz zu linearen Abbildungen

# Aufgabe 2d

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

d) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$.

- $A_W^V$ mit LGS lösbar
- Oder: Nutze den Hauptsatz zu linearen Abbildungen
- Nimm Umweg über die Basiswechselmatrizen

# Aufgabe 2d

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**
Wir betrachten die bezüglich der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin

$$\mathcal{V} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{W} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

d) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$.

- $A_W^V$ mit LGS lösbar
- Oder: Nutze den Hauptsatz zu linearen Abbildungen
- Nimm Umweg über die Basiswechselmatrizen
  $A_W^V = B_W^{E_2} A_{E_2}^{E_3} B_{E_3}^V$

# Aufgabe 3a

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Für $k = 0, 1, 2$ seien $a_k(t) \coloneqq t^k$ Elemente von $\Pi_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{V} \coloneqq (a_0,\ a_1,\ a_2)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{W} \coloneqq (b_0(t),\ b_1(t),\ b_2(t))$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$ ist, wobei $b_0(t) \coloneqq 2t^2 - t - 1$, $b_1(t) \coloneqq -2t^2 + 3t + 2$ und $b_2(t) \coloneqq -t^2 + t + 1$.

# Aufgabe 3a

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**
Für $k = 0, 1, 2$ seien $a_k(t) := t^k$ Elemente von $\Pi_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{V} := (a_0,\ a_1,\ a_2)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{W} := (b_0(t),\ b_1(t),\ b_2(t))$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$ ist, wobei $b_0(t) := 2t^2 - t - 1$, $b_1(t) := -2t^2 + 3t + 2$ und $b_2(t) := -t^2 + t + 1$.

- Schreibe reelle Faktoren in Vektoren

# Aufgabe 3a

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**
Für $k = 0, 1, 2$ seien $a_k(t) := t^k$ Elemente von $\Pi_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{V} := (a_0,\ a_1,\ a_2)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{W} := (b_0(t),\ b_1(t),\ b_2(t))$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$ ist, wobei $b_0(t) := 2t^2 - t - 1$, $b_1(t) := -2t^2 + 3t + 2$ und $b_2(t) := -t^2 + t + 1$.

- Schreibe reelle Faktoren in Vektoren
- Prüfe, ob die Vektoren eine Basis bilden

# Aufgabe 3b

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Für $k = 0, 1, 2$ seien $a_k(t) \coloneqq t^k$ Elemente von $\Pi_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{V} \coloneqq (a_0,\ a_1,\ a_2)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$.

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $B^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ und $B^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$.

# Aufgabe 3b

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Für $k = 0, 1, 2$ seien $a_k(t) := t^k$ Elemente von $\Pi_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{V} := (a_0,\ a_1,\ a_2)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$.

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $B^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ und $B^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$.

- Gleiches Vorgehen wie bei Aufgabe 2

# Aufgabe 3c

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**
Für $k = 0, 1, 2$ seien $a_k(t) := t^k$ Elemente von $\Pi_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{V} := (a_0,\ a_1,\ a_2)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$.

c) Die lineare Abbildung $d : \Pi_2(\mathbb{R}) \to \Pi_2(\mathbb{R})$ sei über $d(p) = p'$ definiert. Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ und $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$ von $d$.

# Aufgabe 3c

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**
Für $k = 0, 1, 2$ seien $a_k(t) := t^k$ Elemente von $\Pi_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{V} := (a_0,\ a_1,\ a_2)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$.

c) Die lineare Abbildung $d : \Pi_2(\mathbb{R}) \to \Pi_2(\mathbb{R})$ sei über $d(p) = p'$ definiert. Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}$ und $A^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}}$ von $d$.

- Berechne zuerst $A_V^V$

# Aufgabe 3c

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**
Für $k = 0, 1, 2$ seien $a_k(t) := t^k$ Elemente von $\Pi_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{V} := (a_0,\ a_1,\ a_2)$ eine Basis von $\Pi_2(\mathbb{R})$.

c) Die lineare Abbildung $d : \Pi_2(\mathbb{R}) \to \Pi_2(\mathbb{R})$ sei über $d(p) = p'$ definiert. Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ und $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$ von $d$.

- Berechne zuerst $A_V^V$
- Verwende nun die in b) berechneten Basiswechselmatrizen

# Aufgabe

Gegeben sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -6x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

a) Gib die Matrixdarstellung $A_{E_2}^{E_2}$ von $\varphi$ an.

b) Gib die Matrixdarstellung $A_W^V$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $V = (\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ und $(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$ an.

c) Bestimme die Basiswechselmatrix $B_W^V$.

d) Ist $\varphi$ ein Isomorphismus?

# Lösung

a)

$$A_{E_2}^{E_2} = \left( \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

# Lösung

b)

$$B_{E_2}^{V} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_{E_2}^{W} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{W}^{E_2} = (B_{E_2}^{W})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{W}^{V} &= B_{E_2}^{W} A_{E_2}^{E_2} B_{E_2}^{V} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Lösung

c)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit Gauß folgt: $x_1 = -4, x_2 = -5$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit Gauß folgt: $x_1 = -11, x_2 = -14$

$$B_w^V = \begin{pmatrix} -4 & -11 \\ -5 & -14 \end{pmatrix}$$

## Lösung

d) Ist $\varphi$ ein Isomorphismus?

Nein, denn nicht surjektiv

$$\dim(\mathrm{spann}(\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix})) = 1 \neq 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

Auch nicht injektiv:

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}), \text{aber} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oder: $\left(\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^2$, da nicht l.u.

# Blatt 8

Fragen zu Blatt 8?

# Blatt 8

Fragen zu Blatt 8?

Sonstige Fragen?

# Blatt 8

Fragen zu Blatt 8?

Sonstige Fragen?

Schöne Woche!