

$$\mathcal{V} = \left(\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right), \quad \mathcal{W} = \left(\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right), \quad \varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -6x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}} = \underline{B_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}} \cancel{A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}} \underline{B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}}$$

$$a) A_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2} = \left(\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) B_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{V}} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}} \quad B_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{W}} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{E}_2} = (B_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{W}})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} &= \underline{B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{E}_2}} \cancel{A_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}} \underline{B_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{V}}} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Basiswechselmatrix $B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$

Stelle \mathcal{V} mit \mathcal{W} dar

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & z_1 \\ -3 & 2 & 5 & z_2 \\ \hline 1 & -1 & 3 & z_1 \\ 0 & -1 & 14 & z_2 + 3z_1 \end{array}$$

RWE:

$$-x_2 = 14 \Rightarrow x_2 = -14$$

$$x_1 - (-14) = 3 \Rightarrow x_1 = -11$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = -5$$

$$\Rightarrow B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} -11 & -4 \\ -14 & -5 \end{pmatrix}$$

d) Ist φ Isomorphismus? Nein

Gegenbeispiel:

Nicht surjektiv, da $\dim(\text{spann}(\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix})) = 1 + 2 \neq \dim(\mathbb{R}^2)$

- nicht injektiv

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right), \text{ aber } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oder:

$(\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right))$ ist keine Basis des \mathbb{R}^2 .

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

nicht l.u.

$\leadsto \varphi$ kein Isomorphismus