

SVD von A:

1. Möglichkeit:

Eigenwerte von $A^T A \rightarrow EV \rightarrow$ orthogonal? \rightarrow normiert
 \rightarrow in Matrix V schreiben

Σ : \sqrt{EW} Diagonale (Reihenfolge beachten)

Eigenwerte von $AA^T \rightarrow EV \rightarrow \dots \rightarrow$ in Matrix U schreiben

Probe! $A \neq U \Sigma V^T \leftarrow$ möglicherweise nicht " $=$ "

2. Möglichkeit $A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix}$

Eigenwerte von $A^T A \rightarrow EV \rightarrow$ orthogonal? \rightarrow normieren
 \rightarrow in die Matrix V schreiben (2x2)

$\Sigma = \sqrt{EW} \leadsto$ Reihenfolge

$$A = U \Sigma V^T \Leftrightarrow AV = U \Sigma$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1, \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2$$

u_3 muss orthogonal zu u_1, u_2 stehen

$$u_3: \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{pmatrix} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow GV \rightarrow u_3 \text{ normieren}$$

Σ : \sqrt{EW}

Beispiel: Blatt 13, Nr. 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T A: \begin{matrix} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \leadsto \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{pmatrix} u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{bereits in ZSF}} \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{RWE: } u_{33} = 0 \\ \text{Sei } u_{23} = t \in \mathbb{C} \text{ bel} \\ u_{13} = 2t \\ \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = U \Sigma V^H \text{ mit}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SÜ, Aufgabe 6

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 - 1 x_1 x_2 + -\sqrt{18} x_1 + \sqrt{2} x_2 + 2 = 0\}$$

Matrixform:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -\sqrt{18} \\ +\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$c = 2$$

\hookrightarrow reell symmetrisch \Rightarrow diagonalisierbar

Eigenwerte und Eigenräume:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 2, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 1, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{normieren}} T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wissen: } T^T A T = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = T D T^T$$

äquivalente Beschreibung für die Quadrik:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^T T}_{y^T} D \underbrace{T^T x}_y + \underbrace{b^T T}_{\tilde{c}_n} \underbrace{T^T x}_y + c = 0\}$$

Substituiere: $T^T x = y$

$$y^T D y + b^T T y + c = 0$$

Werte einsetzen (mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{18} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{2y_1^2} + \underline{y_2^2} + \underline{4y_1} + \underline{2y_2} + 2 = 0$$

Quadratisch Ergänzen:

$$2(y_1 + 1)^2 + (y_2 + 1)^2 - 3 = 0$$

$$\text{Substituiere: } y_1 + 1 = z_1 \wedge y_2 + 1 = z_2$$

$$2z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$$

\Rightarrow Ellipse

