

$$\mathcal{G} = \left\{ \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right\}, \quad \mathcal{W} = \left\{ \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right\}, \quad \varphi(x_1, x_2) = \left( \begin{smallmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -6x_1 + 3x_2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$A_{\mathcal{G}}^{\mathcal{V}} = B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$$

$$a) A_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2} = (\varphi(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}), \varphi(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix})) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) B_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{E}_2} = (B_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{W}})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{E}_2} A_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{V}} B_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{W}}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \text{ Basiswechselmatrix } B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$$

Stelle  $\mathcal{V}$  mit  $\mathcal{W}$  dar

$$\left( \begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix} \right) = x_1 \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix} \right) + x_2 \left( \begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & z_1 \\ -3 & 2 & 5 & z_2 \\ \hline 1 & -1 & 3 & z_1 \\ 0 & -1 & 14 & z_2 + 3z_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{RWE:} \\ -x_2 = 14 \Rightarrow x_2 = -14 \\ x_1 - (-14) = 3 \Rightarrow x_1 = -11 \end{array}$$

$$\left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) = x_1 \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix} \right) + x_2 \left( \begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = -5$$

$$\Rightarrow B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} -11 & -4 \\ -14 & -5 \end{pmatrix}$$

d) Ist  $\varphi$  Isomorphismus? Nein

Gegenbeispiel:  
nicht surjektiv, da  $\dim(\text{span}(\left( \begin{smallmatrix} 2 \\ -6 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right))) = 1 + 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

- nicht injektiv  
 $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ , aber  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

oder:

$(\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right))$  ist keine Basis des  $\mathbb{R}^2$ .

$$= \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

nicht l.u.

$\rightsquigarrow \varphi$  kein Isomorphismus