LADS Übung

Vorbereitung auf Übungsblatt 12

MIC

Universität zu Lübeck

20.04.-24.04.

Wiederholung

Fragen, Anmerkungen, Feedback?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung, ...)

Hinweise

Lernwochenende

Die Fachschaft MaIn plant für den **11. und 12. Juli** ein Wiederholungswochenende unter anderem für LADS. Es soll einen Pool von Wiederholungsaufgaben geben. Das Lernwochenende findet in diesem Semester zum ersten Mal online statt.

Anzahl Übungsblätter

Caterina: „*vermutlich wird es 14 Übungszettel und ein Sonderübungsblatt geben*"

Hinweise

Anmeldung zur Klausur - Sonderfälle

Caterina: „*Sowohl die Aufsicht als auch die Korrektur werden natürlich unter besonderen Hygienemaßnahmen stattfinden. Für Studierende, die zur Risikogruppe gehören und die trotzdem an der Klausur teilnehmen wollen gilt folgendes:*
1. Wenn Ihnen das Hygienekonzept der Uni trotzdem ausreicht, dann müssen Sie sich nicht extra melden. Wir werden Sie dann aber auch nicht anders behandeln als alle anderen Studierenden auch.
2. Wenn Sie einen eigenen Raum oder mehr Abstand benötigen, melden Sie sich bitte möglichst früh - spätestens zum Ende der Anmeldephase bei uns und stimmen sich mit uns ab. Dann werden wir je nachdem welche Maßnahmen erforderlich sind, dafür Lösungen finden. Natürlich sollten sich auch alle anderen Sonderfälle, die aus anderen Gründen möglicherweise einen Anspruch auf einen eigenen Raum haben, möglichst früh bei uns melden.“

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) = 1 \right\}.$$

a) Geben Sie die symmetrische Matrixdarstellung der Quadrik an.

b) Ist der quadratische Anteil der Quadrik positiv definit?

c) Bringen Sie die Quadrik auf Normalform und geben Sie eine Basis an, bezüglich der die Quadrik Normalform besitzt.

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) = 1 \right\}.$$

a) Geben Sie die symmetrische Matrixdarstellung der Quadrik an.

b) Ist der quadratische Anteil der Quadrik positiv definit?

c) Bringen Sie die Quadrik auf Normalform und geben Sie eine Basis an, bezüglich der die Quadrik Normalform besitzt.

1 a) gesucht: Matrix A, sodass sich die Gleichung $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) = 1$ als $x^TAx = 1$ darstellen lässt

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) = 1 \right\}.$$

a) Geben Sie die symmetrische Matrixdarstellung der Quadrik an.

b) Ist der quadratische Anteil der Quadrik positiv definit?

c) Bringen Sie die Quadrik auf Normalform und geben Sie eine Basis an, bezüglich der die Quadrik Normalform besitzt.

1 a) gesucht: Matrix A, sodass sich die Gleichung $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) = 1$ als $x^TAx = 1$ darstellen lässt

1 b) sind die Eigenwerte der symmetrischen reellen Matrix A alle positiv, so ist der quadratische Anteil der Quadrik positiv definit

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) = 1\right\}.$$

a) Geben Sie die symmetrische Matrixdarstellung der Quadrik an.

b) Ist der quadratische Anteil der Quadrik positiv definit?

c) Bringen Sie die Quadrik auf Normalform und geben Sie eine Basis an, bezüglich der die Quadrik Normalform besitzt.

1 a) gesucht: Matrix A, sodass sich die Gleichung $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3) = 1$ als $x^TAx = 1$ darstellen lässt

1 b) sind die Eigenwerte der symmetrischen reellen Matrix A alle positiv, so ist der quadratische Anteil der Quadrik positiv definit

(allgemein: eine symmetrische Matrix M ist positiv definit, wenn $x^TMx > 0$ für alle $x \in R^n$)

Übungsblatt 12

1 c)
die Quadrik auf Normalform bringen:

Übungsblatt 12

1 c)

die Quadrik auf Normalform bringen:

- bestimme die Eigenvektoren von A,

Übungsblatt 12

1 c)
die Quadrik auf Normalform bringen:

- bestimme die Eigenvektoren von A,
- orthonormiere die Eigenvektoren (Gram-Schmidt),

Übungsblatt 12

1 c)

die Quadrik auf Normalform bringen:

- bestimme die Eigenvektoren von A,
- orthonormiere die Eigenvektoren (Gram-Schmidt),
- die Spalten der Matrix U sind die orthonormierten Eigenvektoren

Übungsblatt 12

1 c)

die Quadrik auf Normalform bringen:

- bestimme die Eigenvektoren von A,
- orthonormiere die Eigenvektoren (Gram-Schmidt),
- die Spalten der Matrix U sind die orthonormierten Eigenvektoren
- $U^H A U = D$ mit D ist Diagonalmatrix

Übungsblatt 12

1 c)

die Quadrik auf Normalform bringen:

- bestimme die Eigenvektoren von A,
- orthonormiere die Eigenvektoren (Gram-Schmidt),
- die Spalten der Matrix U sind die orthonormierten Eigenvektoren
- $U^H A U = D$ mit D ist Diagonalmatrix
- Mit $y = U^T x$ und $d = U^T b$ ist die Normalform $y^T D y = 1$

Übungsblatt 12

1 c)

die Quadrik auf Normalform bringen:

- bestimme die Eigenvektoren von A,
- orthonormiere die Eigenvektoren (Gram-Schmidt),
- die Spalten der Matrix U sind die orthonormierten Eigenvektoren
- $U^H A U = D$ mit D ist Diagonalmatrix
- Mit $y = U^T x$ und $d = U^T b$ ist die Normalform $y^T D y = 1$

eine Basis angeben, bezüglich der die Quadrik Normalform besitzt:

Übungsblatt 12

1 c)

die Quadrik auf Normalform bringen:

- bestimme die Eigenvektoren von A,
- orthonormiere die Eigenvektoren (Gram-Schmidt),
- die Spalten der Matrix U sind die orthonormierten Eigenvektoren
- $U^H AU = D$ mit D ist Diagonalmatrix
- Mit $y = U^T x$ und $d = U^T b$ ist die Normalform $y^T Dy = 1$

eine Basis angeben, bezüglich der die Quadrik Normalform besitzt:

- die Basis sind die orthonormierten Eigenvektoren

Übungsblatt 12

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 + 22x_1 + 4x_2 + 7 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Welche Form hat die Quadrik?

2 a)

- Bestimme die Matrix A, den Vektor b und die Zahl c, so dass sich die Quadrik Q umschreiben lässt:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A x + b^\top x + c = 0\}$$

2 a)

- Bestimme die Matrix A, den Vektor b und die Zahl c, so dass sich die Quadrik Q umschreiben lässt:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A x + b^\top x + c = 0\}$$

- Bestimme die Matrix T mit $T^H A T = D$ mit D diagonal (vergleiche Aufgabe 1c) Die Quadrik hat nun die Darstellung

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top T D T^\top x + b^\top T T^\top x + c = 0\}$$

2 a)

- Bestimme die Matrix A, den Vektor b und die Zahl c, so dass sich die Quadrik Q umschreiben lässt:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A x + b^\top x + c = 0\}$$

- Bestimme die Matrix T mit $T^H A T = D$ mit D diagonal (vergleiche Aufgabe 1c) Die Quadrik hat nun die Darstellung

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top T D T^\top x + b^\top T T^\top x + c = 0\}$$

- Substituiere $y = T^T x$

2 a)

- Bestimme die Matrix A, den Vektor b und die Zahl c, so dass sich die Quadrik Q umschreiben lässt:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A x + b^\top x + c = 0\}$$

- Bestimme die Matrix T mit $T^H A T = D$ mit D diagonal (vergleiche Aufgabe 1c) Die Quadrik hat nun die Darstellung

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top T D T^\top x + b^\top T T^\top x + c = 0\}$$

- Substituiere $y = T^T x$
- Die ausmultiplizierte Gleichung $y^T D y + b^T T y + c = 0$ hat die Form $a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_1 + a_4 y_2 + c = 0$ mit den reellen Faktoren a_1 bis a_4

2 a)

- Bestimme die Matrix A, den Vektor b und die Zahl c, so dass sich die Quadrik Q umschreiben lässt:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A x + b^\top x + c = 0\}$$

- Bestimme die Matrix T mit $T^H A T = D$ mit D diagonal (vergleiche Aufgabe 1c) Die Quadrik hat nun die Darstellung

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top T D T^\top x + b^\top T T^\top x + c = 0\}$$

- Substituiere $y = T^T x$
- Die ausmultiplizierte Gleichung $y^T D y + b^T T y + c = 0$ hat die Form $a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_1 + a_4 y_2 + c = 0$ mit den reellen Faktoren a_1 bis a_4
- Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung wird die Gleichung umgeformt zu $-(y_1 + k_1)^2 + (y_2 + k_2)^2 + k_3 = 0$ mit den reellen Zahlen k_1, k_2, k_3

2 a)

- Bestimme die Matrix A, den Vektor b und die Zahl c, so dass sich die Quadrik Q umschreiben lässt:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + b^\top x + c = 0\}$$

- Bestimme die Matrix T mit $T^H AT = D$ mit D diagonal (vergleiche Aufgabe 1c) Die Quadrik hat nun die Darstellung

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top TDT^\top x + b^\top TT^\top x + c = 0\}$$

- Substituiere $y = T^T x$
- Die ausmultiplizierte Gleichung $y^T Dy + b^T Ty + c = 0$ hat die Form $a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_1 + a_4 y_2 + c = 0$ mit den reellen Faktoren a_1 bis a_4
- Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung wird die Gleichung umgeformt zu $-(y_1 + k_1)^2 + (y_2 + k_2)^2 + k_3 = 0$ mit den reellen Zahlen k_1, k_2, k_3
- Substituiere $z_1 = y_1 + k_1$ und $z_2 = y_2 + k_2$

2 a)

- Bestimme die Matrix A, den Vektor b und die Zahl c, so dass sich die Quadrik Q umschreiben lässt:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + b^\top x + c = 0\}$$

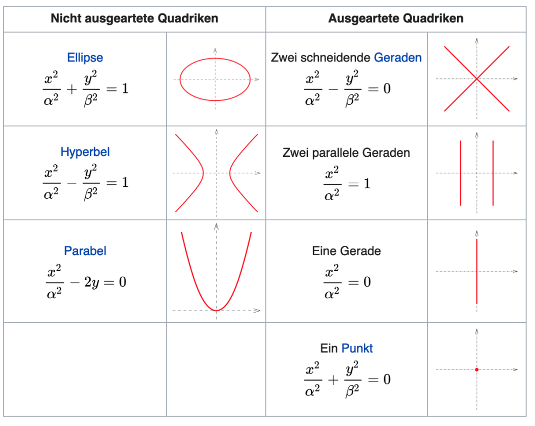
- Bestimme die Matrix T mit $T^H AT = D$ mit D diagonal (vergleiche Aufgabe 1c) Die Quadrik hat nun die Darstellung

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top TDT^\top x + b^\top TT^\top x + c = 0\}$$

- Substituiere $y = T^T x$
- Die ausmultiplizierte Gleichung $y^T Dy + b^T Ty + c = 0$ hat die Form $a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_1 + a_4 y_2 + c = 0$ mit den reellen Faktoren a_1 bis a_4
- Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung wird die Gleichung umgeformt zu $-(y_1 + k_1)^2 + (y_2 + k_2)^2 + k_3 = 0$ mit den reellen Zahlen k_1, k_2, k_3
- Substituiere $z_1 = y_1 + k_1$ und $z_2 = y_2 + k_2$
- Multiplikation mit einem geeigneten Faktor liefert die Normalform: $n_1 z_1^2 \pm n_2 z_2^2 = 1$ oder auch $\dfrac{z_1^2}{\alpha^2} \pm \dfrac{z_2^2}{\beta^2} = 1$ mit den reellen Faktoren n_1, n_2, α, β

Übungsblatt 12

2 b) Die Form (z.B. Ellipse) der Quadrik wird an der Normalform abgelesen



Nicht ausgeartete Quadriken		Ausgeartete Quadriken	
Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$		Zwei schneidende Geraden $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=0$	
Hyperbel $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$		Zwei parallele Geraden $\frac{x^2}{\alpha^2}=1$	
Parabel $\frac{x^2}{\alpha^2}-2y=0$		Eine Gerade $\frac{x^2}{\alpha^2}=0$	
		Ein Punkt $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=0$	

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Quadrik

Übungsblatt 12

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Seien $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei orthogonale Matrizen. Die Zahl

$$\mu(P,Q) := \sqrt{n} \cdot \max_{1\leq i,j\leq n} |(PQ)_{ij}|$$

bezeichnet man auch als die *Kohärenz* von P und Q. Zeigen Sie: $1 \leq \mu(P,Q) \leq \sqrt{n}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass PQ ebenfalls eine orthogonale Matrix ist. Warum gilt für eine orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dass $1/\sqrt{n} \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |R_{ij}| \leq 1$?

Übungsblatt 12

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Seien $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei orthogonale Matrizen. Die Zahl

$$\mu(P,Q) := \sqrt{n} \cdot \max_{1\leq i,j\leq n} |(PQ)_{ij}|$$

bezeichnet man auch als die *Kohärenz* von P und Q. Zeigen Sie: $1 \leq \mu(P,Q) \leq \sqrt{n}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass PQ ebenfalls eine orthogonale Matrix ist. Warum gilt für eine orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dass $1/\sqrt{n} \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |R_{ij}| \leq 1$?

Zeige zunächst den Hinweis: $PQ(PQ)^T = E_n$ (d.h. PQ ist orthogonal) und die Abschätzungen für die Einträge orthogonaler Matrizen.

Übungsblatt 12

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Seien $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei orthogonale Matrizen. Die Zahl

$$\mu(P,Q) := \sqrt{n} \cdot \max_{1\leq i,j\leq n} |(PQ)_{ij}|$$

bezeichnet man auch als die *Kohärenz* von P und Q. Zeigen Sie: $1 \leq \mu(P,Q) \leq \sqrt{n}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass PQ ebenfalls eine orthogonale Matrix ist. Warum gilt für eine orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dass $1/\sqrt{n} \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |R_{ij}| \leq 1$?

Zeige zunächst den Hinweis: $PQ(PQ)^T = E_n$ (d.h. PQ ist orthogonal) und die Abschätzungen für die Einträge orthogonaler Matrizen.

Die Ungleichungen

$$1 \leq \mu(P,Q) \leq \sqrt{n}$$

sind äquivalent zu

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \max_{1\leq i,j\leq n} |(PQ)_{ij}| \leq 1$$

Übungsblatt 12

Die Ungleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \max_{1 \leq i,j \leq n} |(PQ)_{ij}| \text{ und } \max_{1 \leq i,j \leq n} |(PQ)_{ij}| \leq 1$$

kann man beweisen indem man mit Hilfe des Hinweises die Ungleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \max_{1 \leq i,j \leq n} |(PQ)_{ij}| \text{ und } \max_{1 \leq i,j \leq n} |(PQ)_{ij}| > 1$$

zum Widerspruch führt.

Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix.
Zeige: Alle Eigenwerte von A sind reell.

Tipp: Zeige $\lambda = \bar{\lambda}$

Schluss

Eine schöne Woche!