LADS Übung

Wiederholung und Vorbereitung auf das Sonderübungsblatt

MIC

Universität zu Lübeck

06.07.-10.07.

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)

Fragen, Anmerkungen, Feedback ?
(Vorlesung, Lösungsvideo, letzte Übung,...)
Das Sonderübungsblatt ist ein reines Bonusblatt.
Insgesamt benötigt ihr mindestens 198 Punkte als Nicht-MMLer und mindestens 225 Punkte als MMLer.

Fragen zu der Lösung von Blatt 13?

Sonderübungsblatt

Aufgabe 1 (Normen und Skalarprodukte, 4 Bonuspunkte)

a) Sei $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{C}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[0,1]$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{C})$ definiert wird.

b) Betrachten Sie nun für $x \in \mathbb{R}^2$ die beiden Normen

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

sowie

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

und skizzieren Sie die Einheitskugeln $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \leq 1\}$, $\tilde{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$. Zeigen Sie außerdem, dass die Dreiecksungleichung

$$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

gilt.

zu a)

Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt** in V, falls gilt:

SP1 Linearität: $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x, y, z \in V : \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

SP2 Symmetrie/Hermitesch: $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

SP3 Definitheit: $\forall x \in V : \langle x, x \rangle \geq 0 \wedge (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

Aufgabe 2 (lineare Gleichungssysteme und Determinante, 10 Bonuspunkte)
Gegeben ist das von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Geben Sie jeweils alle Werte α, β an, sodass das LGS $Ax = b$ keine, unendlich viele oder genau eine Lösung besitzt.

b) In dieser Teilaufgabe sei $\alpha = -1$ und $\beta = 2$.

  i. Geben Sie $\text{Rang}(A)$ und $\text{Kern}(A)$ an.

  ii. Berechnen Sie alle Lösungen des LGS $Ax = b$.

c) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante von

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & \gamma & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 100 \\ 0 & 7 & 32 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3},$$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 & 21 & 33 & 39 \\ 3 & 162 & 5 & 2 & 29 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 12 & 24 & 48 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6,6}.$$

zu a)

- bringt das LGS in ZSF

zu a)

- bringt das LGS in ZSF
- Lezte Zeile betrachten, wann hat das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

zu a)

- bringt das LGS in ZSF
- Lezte Zeile betrachten, wann hat das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

zu b)

- α und β haben nun feste Werte

zu a)

- bringt das LGS in ZSF
- Lezte Zeile betrachten, wann hat das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

zu b)

- α und β haben nun feste Werte

i) um den Rang(A) und den Kern(A) zu bestimmen, muss das LGS wieder in ZSF gebracht werden

zu a)

- bringt das LGS in ZSF
- Lezte Zeile betrachten, wann hat das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

zu b)

- α und β haben nun feste Werte

i) um den Rang(A) und den Kern(A) zu bestimmen, muss das LGS wieder in ZSF gebracht werden

ii) LGS $Ax = b$ nun wieder in ZSF bringen und dann Lösungsmenge durch RWE erhalten

zu a)

- bringt das LGS in ZSF
- Lezte Zeile betrachten, wann hat das LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

zu b)

- α und β haben nun feste Werte

i) um den Rang(A) und den Kern(A) zu bestimmen, muss das LGS wieder in ZSF gebracht werden

ii) LGS $Ax = b$ nun wieder in ZSF bringen und dann Lösungsmenge durch RWE erhalten

zu c)

- Determinante kann von γ abhängig sein

zu c)

- Determinante kann von γ abhängig sein
- Wichtig hierbei: Satz von Laplace ($n \times n$), sowie Satz von Sarrus für $n = 3$

zu c)

- Determinante kann von γ abhängig sein
- Wichtig hierbei: Satz von Laplace ($n \times n$), sowie Satz von Sarrus für $n = 3$
- Rechenaufwand kann durch eine bestimmte Form der Matrix geringer sein

d) Sei nun $d \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Für welche Werte $\gamma \in \mathbb{R}$ besitzt das LGS $Cx = d$ eine eindeutige Lösung?

e) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren das Kreuzprodukt zwischen a und b als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$.

f) Seien nun $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $Z = (c, a, b) \in R^{3,3}$ die Matrix mit den Spalten c, a, b. Zeigen Sie, dass $\langle c, a \times b \rangle = \det(Z)$.

d) Sei nun $d \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Für welche Werte $\gamma \in \mathbb{R}$ besitzt das LGS $Cx = d$ eine eindeutige Lösung?

e) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren das Kreuzprodukt zwischen a und b als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$.

f) Seien nun $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $Z = (c, a, b) \in R^{3,3}$ die Matrix mit den Spalten c, a, b. Zeigen Sie, dass $\langle c, a \times b \rangle = \det(Z)$.

zu d)

- wann hat das LGS eine eindeutige Lösung? Zusammenhang mit Determinante

zu e)

- $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

d) Sei nun $d \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Für welche Werte $\gamma \in \mathbb{R}$ besitzt das LGS $Cx = d$ eine eindeutige Lösung?

e) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren das Kreuzprodukt zwischen a und b als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$.

f) Seien nun $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $Z = (c, a, b) \in R^{3,3}$ die Matrix mit den Spalten c, a, b. Zeigen Sie, dass $\langle c, a \times b \rangle = \det(Z)$.

zu d)

- wann hat das LGS eine eindeutige Lösung? Zusammenhang mit Determinante

zu e)

- $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

zu f)

- $\langle c, a \times b \rangle$ berechnen

d) Sei nun $d \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Für welche Werte $\gamma \in \mathbb{R}$ besitzt das LGS $Cx = d$ eine eindeutige Lösung?

e) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren das Kreuzprodukt zwischen a und b als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$.

f) Seien nun $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $Z = (c, a, b) \in R^{3,3}$ die Matrix mit den Spalten c, a, b. Zeigen Sie, dass $\langle c, a \times b \rangle = \det(Z)$.

zu d)

- wann hat das LGS eine eindeutige Lösung? Zusammenhang mit Determinante

zu e)

- $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

zu f)

- $\langle c, a \times b \rangle$ berechnen
- $\det(Z)$ mit Sarrus berechnen

Aufgabe 3 (lineare Abbildungen und Basiswechsel, 5 Bonuspunkte)

a) Sei $\Pi_n(\mathbb{R})$ der Raum der Polynome mit Grad kleiner gleich $n \in \mathbb{N}$ und $p_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_j(t) = t^j$ für $j \in \{0, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi : \Pi_2(\mathbb{R}) \to \Pi_3(\mathbb{R}), \quad p \mapsto \varphi(p) := f,$$

mit $f(t) := \int_0^t p(s)\mathrm{d}s$, eine lineare Abbildung definiert.

b) Seien $\mathcal{E}_2 = \{p_0, p_1, p_2\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ Basen von $\Pi_2(\mathbb{R})$ bzw. $\Pi_3(\mathbb{R})$. Geben Sie die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}$ von φ aus Aufgabenteil a) an.

c) Prüfen Sie, ob φ aus Aufgabenteil a) injektiv oder surjektiv ist.

d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (1,2)^\top$. Sei außerdem $\mu : V \to V$ eine lineare Abbildung, die die Spiegelung an der durch v erklärten Geraden $G = \mathbb{R}v$ beschreibt. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ von μ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, indem Sie zunächst Vektoren w_1, w_2 mit $\|w_i\| = 1$, $i = 1, 2$ bestimmen so, dass w_1 parallel zu v ist und w_2 senkrecht auf w_1 steht. Stellen Sie für diese Vektoren die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$ auf und berechnen Sie mit Hilfe dieser $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$.

zu a)
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:
$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

zu a)
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:
$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$
Beachtet: x und y sind hier $\in \Pi_n(\mathbb{R})$ (Polynome)

zu a)
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:
$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$
Beachtet: x und y sind hier $\in \Pi_n(\mathbb{R})$ (Polynome)
zu b)

- $A^{\varepsilon_2}_{\varepsilon_3}$: bestimme die Bilder $\varphi(p_i), \forall p_i \in \varepsilon_2$

zu a)
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:
$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$
Beachtet: x und y sind hier $\in \Pi_n(\mathbb{R})$ (Polynome)
zu b)

- $A^{\varepsilon_2}_{\varepsilon_3}$: bestimme die Bilder $\varphi(p_i), \forall p_i \in \varepsilon_2$
- anschließend jedes einzelne Bild $\varphi(p_i)$ als Linearkombination mit den Elementen aus ε_3 darstellen

zu a)
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:
$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$
Beachtet: x und y sind hier $\in \Pi_n(\mathbb{R})$ (Polynome)
zu b)

- $A^{\varepsilon_2}_{\varepsilon_3}$: bestimme die Bilder $\varphi(p_i), \forall p_i \in \varepsilon_2$
- anschließend jedes einzelne Bild $\varphi(p_i)$ als Linearkombination mit den Elementen aus ε_3 darstellen
- die Koeffizienten werden spaltenweise in die Matrix geschrieben, pro Bild eine Spalte

zu a)
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:
$\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in V : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$
Beachtet: x und y sind hier $\in \Pi_n(\mathbb{R})$ (Polynome)
zu b)

- $A_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_2}$: bestimme die Bilder $\varphi(p_i), \forall p_i \in \varepsilon_2$
- anschließend jedes einzelne Bild $\varphi(p_i)$ als Linearkombination mit den Elementen aus ε_3 darstellen
- die Koeffizienten werden spaltenweise in die Matrix geschrieben, pro Bild eine Spalte
- $|\varepsilon_3| = 4$ und $|\varepsilon_2| = 3 \Rightarrow A_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_2}$ ist eine 4×3 Matrix

Beispiel 6.20:
Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ bzw. $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$, $f : V \to W$ mit $\text{f}(\text{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

Beispiel 6.20:
Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ bzw. $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$, $f : V \to W$ mit $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$
Es gilt
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 6.20:

Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ bzw. $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$, $f : V \to W$ mit $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

Es gilt

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dann gilt:

$$f(v_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2$$

Beispiel 6.20:

Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ bzw. $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$, $f : V \to W$

mit $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

Es gilt

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dann gilt:

$f(v_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2$

$f(v_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2$

Beispiel 6.20:
Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ bzw. $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$, $f : V \to W$
mit $f(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$
Es gilt
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Dann gilt:
$f(v_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$
$f(v_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$
$\Rightarrow A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Beispiel 6.20:
Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ mit den Basen $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ bzw. $\mathcal{W} = (w_1, w_2)$, $f : V \to W$
mit $f(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$
Es gilt
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Dann gilt:

$$f(v_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2$$

$$f(v_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2$$

$$\Rightarrow A^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Prüfen Sie, ob φ aus Aufgabenteil a) injektiv oder surjektiv ist.

d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (1,2)^\top$. Sei außerdem $\mu : V \to V$ eine lineare Abbildung, die die Spiegelung an der durch v erklärten Geraden $G = \mathbb{R}v$ beschreibt. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_\mathcal{E}^\mathcal{E}$ von μ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, indem Sie zunächst Vektoren w_1, w_2 mit $\|w_i\| = 1,\ i = 1,2$ bestimmen so, dass w_1 parallel zu v ist und w_2 senkrecht auf w_1 steht. Stellen Sie für diese Vektoren die Darstellungsmatrix $A_\mathcal{W}^\mathcal{W}$ auf und berechnen Sie mit Hilfe dieser $A_\mathcal{E}^\mathcal{E}$.

zu c)

- Zusammenhänge zwischen Surjektivität und Bild, Injektivität und Kern?

c) Prüfen Sie, ob φ aus Aufgabenteil a) injektiv oder surjektiv ist.

d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (1,2)^\top$. Sei außerdem $\mu : V \to V$ eine lineare Abbildung, die die Spiegelung an der durch v erklärten Geraden $G = \mathbb{R}v$ beschreibt. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ von μ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, indem Sie zunächst Vektoren w_1, w_2 mit $\|w_i\| = 1,\ i = 1,2$ bestimmen so, dass w_1 parallel zu v ist und w_2 senkrecht auf w_1 steht. Stellen Sie für diese Vektoren die Darstellungsmatrix $A^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}}$ auf und berechnen Sie mit Hilfe dieser $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$.

zu c)

- Zusammenhänge zwischen Surjektivität und Bild, Injektivität und Kern?

zu d)

- Wahl von w_1: Normiere v

c) Prüfen Sie, ob φ aus Aufgabenteil a) injektiv oder surjektiv ist.

d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (1,2)^\top$. Sei außerdem $\mu : V \to V$ eine lineare Abbildung, die die Spiegelung an der durch v erklärten Geraden $G = \mathbb{R}v$ beschreibt. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ von μ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, indem Sie zunächst Vektoren w_1, w_2 mit $\|w_i\| = 1$, $i = 1, 2$ bestimmen so, dass w_1 parallel zu v ist und w_2 senkrecht auf w_1 steht. Stellen Sie für diese Vektoren die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$ auf und berechnen Sie mit Hilfe dieser $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$.

zu c)

- Zusammenhänge zwischen Surjektivität und Bild, Injektivität und Kern?

zu d)

- Wahl von w_1: Normiere v
- Wahl von w_2 : $\langle w_1, w_2 \rangle \overset{!}{=} 0$

c) Prüfen Sie, ob φ aus Aufgabenteil a) injektiv oder surjektiv ist.

d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (1,2)^\top$. Sei außerdem $\mu : V \to V$ eine lineare Abbildung, die die Spiegelung an der durch v erklärten Geraden $G = \mathbb{R}v$ beschreibt. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ von μ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, indem Sie zunächst Vektoren w_1, w_2 mit $\|w_i\| = 1$, $i = 1,2$ bestimmen so, dass w_1 parallel zu v ist und w_2 senkrecht auf w_1 steht. Stellen Sie für diese Vektoren die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$ auf und berechnen Sie mit Hilfe dieser $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$.

zu c)

- Zusammenhänge zwischen Surjektivität und Bild, Injektivität und Kern?

zu d)

- Wahl von w_1: Normiere v
- Wahl von w_2 : $\langle w_1, w_2 \rangle \overset{!}{=} 0$
- $A_{\mathcal{W}}^{\varepsilon} = (A_{\varepsilon}^{\mathcal{W}})^{-1}$

c) Prüfen Sie, ob φ aus Aufgabenteil a) injektiv oder surjektiv ist.

d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (1,2)^\top$. Sei außerdem $\mu : V \to V$ eine lineare Abbildung, die die Spiegelung an der durch v erklärten Geraden $G = \mathbb{R}v$ beschreibt. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_\mathcal{E}^\mathcal{E}$ von μ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, indem Sie zunächst Vektoren w_1, w_2 mit $\|w_i\| = 1$, $i = 1,2$ bestimmen so, dass w_1 parallel zu v ist und w_2 senkrecht auf w_1 steht. Stellen Sie für diese Vektoren die Darstellungsmatrix $A_\mathcal{W}^\mathcal{W}$ auf und berechnen Sie mit Hilfe dieser $A_\mathcal{E}^\mathcal{E}$.

zu c)

- Zusammenhänge zwischen Surjektivität und Bild, Injektivität und Kern?

zu d)

- Wahl von w_1: Normiere v
- Wahl von w_2 : $\langle w_1, w_2 \rangle \overset{!}{=} 0$
- $A_\mathcal{W}^\varepsilon = (A_\varepsilon^\mathcal{W})^{-1}$
- $A_\varepsilon^\varepsilon = A_\varepsilon^\mathcal{W} A_\mathcal{W}^\mathcal{W} A_\mathcal{W}^\varepsilon$

Aufgabe 4 (Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit, 4 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A und geben Sie die deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

b) Begründen Sie, ob A diagonalisierbar ist oder nicht.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal. Zeigen Sie: Wenn λ ein Eigenwert von B ist, so ist auch λ^{-1} ein Eigenwert von B.

Aufgabe 4 (Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit, 4 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A und geben Sie die deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

b) Begründen Sie, ob A diagonalisierbar ist oder nicht.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal. Zeigen Sie: Wenn λ ein Eigenwert von B ist, so ist auch λ^{-1} ein Eigenwert von B.

zu a)

- $\mathcal{X}_A(\lambda) = det(A - \lambda E_3) \stackrel{!}{=} 0$

Aufgabe 4 (Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit, 4 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A und geben Sie die deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

b) Begründen Sie, ob A diagonalisierbar ist oder nicht.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal. Zeigen Sie: Wenn λ ein Eigenwert von B ist, so ist auch λ^{-1} ein Eigenwert von B.

zu a)

- $\mathcal{X}_A(\lambda) = det(A - \lambda E_3) \stackrel{!}{=} 0$
- algebraische Vielfachheit $\widehat{=}$ der Vielfachheit der Nullstelle von λ_j

Aufgabe 4 (Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit, 4 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von A und geben Sie die deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

b) Begründen Sie, ob A diagonalisierbar ist oder nicht.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal. Zeigen Sie: Wenn λ ein Eigenwert von B ist, so ist auch λ^{-1} ein Eigenwert von B.

zu a)

- $\mathcal{X}_A(\lambda) = det(A - \lambda E_3) \stackrel{!}{=} 0$
- algebraische Vielfachheit $\widehat{=}$ der Vielfachheit der Nullstelle von λ_j
- geometrische Vielfachheit $\widehat{=}$ die Dimension des Eigenraums von λ_j

zu b)

- Matrix diagonalisierbar: $aV(\lambda_i) = gV(\lambda_i)$ für alle i Eigenwerte

zu b)

- Matrix diagonalisierbar: $aV(\lambda_i) = gV(\lambda_i)$ für alle i Eigenwerte

zu c)

- Was gilt für orthogonale Matrizen?

zu b)

- Matrix diagonalisierbar: $aV(\lambda_i) = gV(\lambda_i)$ für alle i Eigenwerte

zu c)

- Was gilt für orthogonale Matrizen?
- Nutze $Bv = \lambda v$

zu b)

- Matrix diagonalisierbar: $aV(\lambda_i) = gV(\lambda_i)$ für alle i Eigenwerte

zu c)

- Was gilt für orthogonale Matrizen?
- Nutze $Bv = \lambda v$
- Wieso gilt $\lambda \neq 0$?

Wiederholung

Gram-Schmidt-Verfahren

Satz 7.14 (Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt). Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $x_1, \ldots, x_r \in V$ und $W = \operatorname{spann}(x_1, \ldots, x_r)$. Dann ist entweder $W = \{0\}$ oder es existiert ein ONS $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit $W = \operatorname{spann}(v_1, \ldots, v_n)$.
Die Vektoren v_j können sukzessive wie folgt berechnet werden. Wir setzen $n = 0$ und führen für $k = 1, \ldots, r$ folgende Schritte durch:

1. Berechne $\tilde{v}_{n+1} = x_{k+1} - P_{V \to W_n}(x_{k+1}) = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{k+1}, v_j \rangle v_j$.
2. Ist $\tilde{v}_{n+1} \neq 0$, setze $n \leftarrow n+1$, $v_j := \frac{1}{\| \tilde{v}_{j+1} \|} \tilde{v}_{j+1}$

Wiederholung

Fourierkoeffizienten

Satz 7.4. Sei I eine Indexmenge, $(v_j,\ j \in I)$ eine OGB des Prähilbertraumes V. Dann gilt für alle $x \in V$:

$$x = \sum_{j \in I} \frac{\langle x, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j.$$

Definition 7.5. Sei I eine Indexmenge, V ein Prähilbertraum mit OGB $(v_j,\ j \in I)$. Dann heißt die Darstellung im Satz 7.4 die **Fourierdarstellung** von $x \in V$. Die Koeffizienten $\xi_j := \frac{\langle x, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$ heißen auch **Fourierkoeffizienten** von x. $\square$

Wiederholung

Beste Approximation

Satz 7.17 (Approximationssatz). Sein V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$ sowie $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Für beliebiges $x \in V$ gibt es genau ein $z \in W$, so dass

$$\forall\, u \in W : \quad \| x - z \| \leq \| x - u \| \quad \wedge \quad z = P_{V \to W}(x).$$

Blatt 14

Aufgabe 5 (Orthogonalität und Gram-Schmidt-Verfahren, 4 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Menge $\mathcal{W} := \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt ausgehend von $\mathcal{W}$ eine Orthonormalbasis $\tilde{\mathcal{W}}$ von $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von $x = (1, -1, 1, 0)^\top$ bzgl. $\tilde{\mathcal{W}}$ aus Aufgabenteil a).

c) Betrachten Sie das OGS $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\} = \left\{(1, -1, 0)^\top, (1, 1, 1)^\top\right\}$ und bestimmen Sie die beste Approximation von $y = (1, -1, 1)^\top$ im spann($\mathcal{V}$) bezüglich der vom Standardskalarprodukt induzierten Norm.

Aufgabe 5 a) Beispiel Gram-Schmidt

Beispiel 7.16. $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ mit Basis (x_1, x_2, x_3),

$$x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Konstruktion einer ONB: nach Gram-Schmidt:

1.1 $\tilde{v}_1 := x_1 \neq 0.$

1.2 $v_1 = \frac{1}{\| \tilde{v}_1 \|} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2.1 $\tilde{v}_2 = x_2 - \langle x_2, v_1 \rangle_2 \, v_1,$

2.2 $v_2 = \frac{1}{\| \tilde{v} \|} \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 5 a)

$$3.1\ \ \tilde{v}_3 = x_3 - \langle\, x_3, v_1 \,\rangle_2\, v_1 - \langle\, x_3, v_2 \,\rangle_2\, v_2$$

$$3.2\ \ v_3 = \frac{1}{\|\,\tilde{v}_3\,\|}\, \tilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 b) Beispiel Fourierkoeffizienten

Wir betrachten $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ und die ONB (v_1, v_2, v_3),

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da $\langle v_j, v_j \rangle = 1$, gilt für die Fourierkoeffizienten $\xi_j = \langle x, v_j \rangle$ und

$$x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \langle x, v_3 \rangle v_3,$$

z.B. für $x = (1, 2, 3)^\top$:

$$\xi_1 = \langle x, v_1 \rangle = \frac{6}{\sqrt{3}}, \qquad \xi_2 = \langle x, v_2 \rangle = \frac{-2}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_3 = \langle x, v_3 \rangle = 0,$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}} v_1 + \frac{-2}{\sqrt{2}} v_2 + 0 v_3 \quad = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 c) Beste Approximation

Im Abschnitt 3.6 wurde gezeigt: Ist V ein reeller Prähilbertraum und $G = \mathbb{R}b \subset V$ eine Gerade, dann gibt es für beliebiges $x \in V$ genau ein $z \in G$ mit

$$\forall\, u \in G : \quad \|\, x - z \,\| \leq \|\, x - u \,\| \quad \wedge \quad z = P_{V \to G}(x) = \frac{\langle\, x, b \,\rangle}{\langle\, b, b \,\rangle} b,$$

d.h. die(!) beste Approximation an x ist z, die orthogonale Projektion .

Blatt 14

Aufgabe 6 (Quadriken, 5 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Skizzieren Sie Q (nutzen Sie dazu die Normalform). Welche Form hat die Quadrik?

Blatt 14

Aufgabe 6 (Quadriken, 5 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Skizzieren Sie Q (nutzen Sie dazu die Normalform). Welche Form hat die Quadrik?

Übliches Vorgehen:

- Quadrik in Matrixform umschreiben

Blatt 14

Aufgabe 6 (Quadriken, 5 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Skizzieren Sie Q (nutzen Sie dazu die Normalform). Welche Form hat die Quadrik?

Übliches Vorgehen:

- Quadrik in Matrixform umschreiben
- Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenräumen bestimmen

Blatt 14

Aufgabe 6 (Quadriken, 5 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Skizzieren Sie Q (nutzen Sie dazu die Normalform). Welche Form hat die Quadrik?

Übliches Vorgehen:

- Quadrik in Matrixform umschreiben
- Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenräumen bestimmen
- Matrix T mithilfe der Eigenvektoren erstellen

Blatt 14

Aufgabe 6 (Quadriken, 5 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1 x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Skizzieren Sie Q (nutzen Sie dazu die Normalform). Welche Form hat die Quadrik?

Übliches Vorgehen:

- Quadrik in Matrixform umschreiben
- Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenräumen bestimmen
- Matrix T mithilfe der Eigenvektoren erstellen
- mithilfe von $T^T AT = D$ Quadrikbeschreibung anpassen

Blatt 14

Aufgabe 6 (Quadriken, 5 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Skizzieren Sie Q (nutzen Sie dazu die Normalform). Welche Form hat die Quadrik?

Übliches Vorgehen:

- Quadrik in Matrixform umschreiben
- Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenräumen bestimmen
- Matrix T mithilfe der Eigenvektoren erstellen
- mithilfe von $T^TAT = D$ Quadrikbeschreibung anpassen
- Substitution: $y = T^Tx$

Blatt 14

Aufgabe 6 (Quadriken, 5 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Skizzieren Sie Q (nutzen Sie dazu die Normalform). Welche Form hat die Quadrik?

Übliches Vorgehen:

- Quadrik in Matrixform umschreiben
- Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenräumen bestimmen
- Matrix T mithilfe der Eigenvektoren erstellen
- mithilfe von $T^TAT = D$ Quadrikbeschreibung anpassen
- Substitution: $y = T^Tx$
- einsetzen und ausrechnen

Blatt 14

Aufgabe 6 (Quadriken, 5 Bonuspunkte)
Gegeben ist die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1x_2 + -\sqrt{18}x_1 + \sqrt{2}x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadrik.

b) Skizzieren Sie Q (nutzen Sie dazu die Normalform). Welche Form hat die Quadrik?

Übliches Vorgehen:

- Quadrik in Matrixform umschreiben
- Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenräumen bestimmen
- Matrix T mithilfe der Eigenvektoren erstellen
- mithilfe von $T^TAT = D$ Quadrikbeschreibung anpassen
- Substitution: $y = T^Tx$
- einsetzen und ausrechnen
- schließlich mit quadratischer Ergänzung zur Normalform gelangen

Blatt 14

Aufgabe 7 (SVD und Ausgleichsproblem, 6 Bonuspunkte)

a) Sei $d = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)^\top \in \mathbb{R}^{14}$ und $D = dd^\top \in \mathbb{R}^{14,14}$. Bestimmen Sie die SVD $U\Sigma V^\top = D$ von $D \in \mathbb{R}^{14,14}$. Sie müssen die Spalten von U, V nicht explizit ausrechnen. Es reicht, wenn Sie angeben, wie die Spalten bestimmt werden.

b) Bestimmen Sie die SVD $U\Sigma V^\top = A$ von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

c) Sei $b = (1,1,1)^\top \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^2$ so, dass

$$\|Ax - b\|_2 = \min\{\|Az - b\|_2 \mid z \in \mathbb{R}^2\}.$$

d) Sei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,2}$$

und $\tilde{b} = (1,5,1,2)^\top \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min\{\|Cz - \tilde{b}\|_2 \mid z \in \mathbb{R}^2\}.$$

Blatt 14

a) überlegen welchen Rang D hat

Blatt 14

a) überlegen welchen Rang D hat
$\hookrightarrow$ Was beudeutet das für die Anzahl der Singulärwerte?

Blatt 14

a) überlegen welchen Rang D hat
$\hookrightarrow$ Was beudeutet das für die Anzahl der Singulärwerte?
beachten, dass die Quadrate der Singulärwerte Eigenwerte von DD^T sind und

Blatt 14

a) überlegen welchen Rang D hat
$\hookrightarrow$ Was beudeutet das für die Anzahl der Singulärwerte?
beachten, dass die Quadrate der Singulärwerte Eigenwerte von DD^T sind und die Spalten von V und U normiert und orthogonal sein müssen

Blatt 14

a) überlegen welchen Rang D hat
$\hookrightarrow$ Was beudeutet das für die Anzahl der Singulärwerte?
beachten, dass die Quadrate der Singulärwerte Eigenwerte von DD^T sind und die Spalten von V und U normiert und orthogonal sein müssen
$\hookrightarrow$ Welches Verfahren kennen wir dafür?

Blatt 14

a) überlegen welchen Rang D hat
$\hookrightarrow$ Was beudeutet das für die Anzahl der Singulärwerte?
beachten, dass die Quadrate der Singulärwerte Eigenwerte von DD^T sind und die Spalten von V und U normiert und orthogonal sein müssen
$\hookrightarrow$ Welches Verfahren kennen wir dafür?

b) Grundsätzliches Vorgehen wie bei Übungsblatt 13 Aufgabe 2

Blatt 14

a) überlegen welchen Rang D hat
$\hookrightarrow$ Was beudeutet das für die Anzahl der Singulärwerte?
beachten, dass die Quadrate der Singulärwerte Eigenwerte von DD^T sind und die Spalten von V und U normiert und orthogonal sein müssen
$\hookrightarrow$ Welches Verfahren kennen wir dafür?

b) Grundsätzliches Vorgehen wie bei Übungsblatt 13 Aufgabe 2

c) Ergebnisse aus b) sowie Pseudoinverse hilfreich

Blatt 14

a) überlegen welchen Rang D hat
$\hookrightarrow$ Was beudeutet das für die Anzahl der Singulärwerte?
beachten, dass die Quadrate der Singulärwerte Eigenwerte von DD^T sind und die Spalten von V und U normiert und orthogonal sein müssen
$\hookrightarrow$ Welches Verfahren kennen wir dafür?

b) Grundsätzliches Vorgehen wie bei Übungsblatt 13 Aufgabe 2

c) Ergebnisse aus b) sowie Pseudoinverse hilfreich

d) Normalengleichung $A^TAx = A^Tb$ nützlich

Blatt 14

Aufgabe 8 (Verständnis, 4 Bonuspunkte)

Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, V, W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\varphi, V \to W$ eine lineare Abbildung sowie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\| \cdot \|$ die induzierte Norm. Kreuzen Sie passendes an:

ist	Menge	Aussage	Vektorraum	Zahl	Abbildung
Rang(A)					
Bild(A)					
det($\cdot$)					
A ist invertierbar					
A ist ähnlich zu B					
Kern(φ)					
SR(A)					
EW(A)					
$E_{\lambda,A}$					
$\chi_A(3)$					
$\langle \cdot, \cdot \rangle$					
gV(λ)					

Blatt14

Unter anderem könnten hilfreich sein:

- Definition 4.46
- Definition 5.2
- Definition 8.3
- Definition 8.7

Blatt14

Unter anderem könnten hilfreich sein:

- Definition 4.46
- Definition 5.2
- Definition 8.3
- Definition 8.7
- Mehre Kreuze in einer Zeile möglich!

Blatt 14

Fragen zu Blatt 14 ?

Blatt 14

Fragen zu Blatt 14 ?
Sonstige Fragen?