$$\varphi(x_1,x_2,x_3)^T = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

a) Seien $x,y \in \mathbb{R}^3$ bel. und $\alpha \in \mathbb{R}$ bel

$$\varphi(\alpha x + y) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 + 3(\alpha x_3 + y_3) \\ 2(\alpha x_2 + y_2) + \alpha x_3 + y_3 \\ \alpha x_1 + y_1 - 2(\alpha x_2 + y_2) + 2(\alpha x_3 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + 3x_3) + y_1 + 3y_3 \\ \alpha(2x_2 + x_3) + 2y_2 + y_3 \\ \alpha(x_1 - 2x_2 + 2x_3) + y_1 - 2y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 3y_3 \\ 2y_2 + y_3 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 \end{pmatrix}$$

$= \alpha\varphi(x) + \varphi(y) \Rightarrow \varphi$ ist lineare Abb.

b) $$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ax$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 2 & -2 & z_2 \\ 3 & 1 & 2 & z_3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 2 & -2 & z_2 \\ 0 & 1 & -1 & z_3 - 3z_1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 2 & -2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 - 2z_3 \end{array}$$

$\text{Bild}(\varphi) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\text{Basis}(\text{Bild}(\varphi)) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

$\dim(\text{Basis}(\text{Bild}(\varphi))) = 2 \Rightarrow \dim(\text{Kern}(\varphi)) = 3 - 2 = 1$

c) Ist φ Isomorphismus?

$\rightarrow$ nicht inj, da $\dim(\text{Kern}(\varphi)) \neq 0 \Rightarrow$ kein Isomophismus

nicht surjektiv, da $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, aber $\nexists\, x \in \mathbb{R}^3$ so dass $\varphi(x) = y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($Ax \overset{!}{=} y$ mit Gauß)

d) $f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$f(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Gibt es eine lineare Abbildung?
$f(\alpha x + y) \overset{!}{=} \alpha f(x) + f(y)$

Angenommen, f ist eine lineare Abb.

$2 f(v_2) = f(v_3) \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha f(x) = f(\alpha x)}}{\Leftrightarrow} f(2 \cdot v_2) = f(v_3)$, aber $2v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3$

$\Rightarrow \nexists$ lineare Abb. mit den gewünschten Voraussetzungen