Robotik-Praktikum Übung 1

Wintersemester 2022/2023

Institut für Robotik und Kognitive Systeme

Ralf Bruder, *bruder@rob.uni-luebeck.de*

Formelles

Abgabe der Lösung bis zum Termin am **02.11.2022** bei Ralf Bruder (G64/R92). Zum Bestehen des Übungsblattes muss mindestens die Hälfte der Gesamtpunktzahl erreicht werden.

Theorie

Mit diesem Arbeitsblatt sollen Sie mit den notwendigen mathematischen Grundlagen für das Robotik-Praktikum vertraut gemacht werden. Weitere Informationen zur Robotik gibt es im Folienskriptum zur Vorlesung Robotik (siehe Moodle).

Aufgabe 1 – Lineare Transformationen

In der Robotik werden Matrizen benutzt, um Transformationen von Objekten im dreidimensionalen Raum zu beschreiben. Reellwertige 3×3 Matrizen können beliebige lineare Transformationen, nämlich

- Rotationen,
- Skalierungen und
- Scherungen

beschreiben. Solche Matrizen sind sogenannte *lineare Transformationen*. Jedoch kann eine einfache Translation im Raum nicht durch eine solche Matrix beschrieben werden, da der Ursprung $O = (0,0,0)^T$ durch eine lineare Transformation nie verändert wird.

Eine Transformation, die die Proportionen von Objekten (also keine Verzerrungen!) beibehält, wird *starr* genannt.

a) Bestimmen Sie die 3×3 Matrix, die die x-Achse um den Faktor 0.3 streckt (verlängert) und die y-Achse um den Faktor 1.2 in Richtung der z-Achse schert.

b) Bestimmen Sie die 3×3 Matrix, die Punkte um 45° um die y-Achse dreht.

c) Gibt es einen Unterschied zwischen den Matrizen $T_1 = \mathrm{rot}_x(45°) \cdot \mathrm{rot}_y(10°)$ und $T_2 = \mathrm{rot}_y(10°) \cdot \mathrm{rot}_x(45°)$? Wenn ja, warum?

Aufgabe 2 – Homogene Koordinaten und Transformationen

Die Familie der linearen Transformationen wird zu den sogenannten *affinen Transformationen* ergänzt, indem man zusätzlich Translationen zulässt. Um diese Transformationen durch Matrizen auszudrücken, verwendet man *homogene Koordinaten*. Dazu wird ein Punkt $p = (p_x, p_y, p_z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ zum Punkt $p' = (p_x, p_y, p_z, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$, der dann wiederum als homogener Punkt p bezeichnet wird. Entsprechend wird eine 3×3 Matrix M, die eine lineare Transformation beschreibt, in den $\mathbb{R}^{4\times4}$ eingebettet als

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & t_x \\ & \mathrm{M} & & t_y \\ & & & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dementsprechend wird die Multiplikation $M' \cdot p'$ als

$$M'p' = \begin{pmatrix} M \cdot p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

interpretiert.

a) Ergänzen Sie die Matrix aus 1a) um eine Translation von 10 in x-Richtung.

b) Was ist die Inverse einer beliebigen affinen Transformation

$$T = \begin{pmatrix} M & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Denken, nicht rechnen! Nehmen Sie an, dass M invertierbar ist.

Aufgabe 3 – Eigenschaften von Vektoren

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren v and w in $\mathbb{R}^n$ wird definiert als

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Zwei Vektoren heißen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

Die *Norm* eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ wird definiert als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}.$$

Ein Vektor heißt *normal*, wenn seine Norm 1 ist.

Der Winkel α zwischen zwei Vektoren v und w wird durch

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}\right)$$

berechnet.

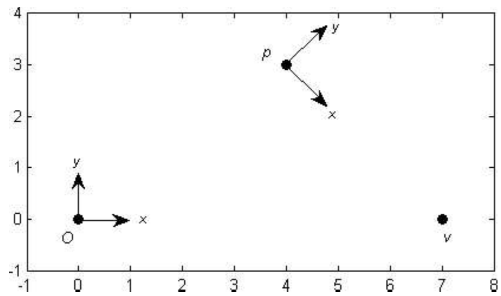

Abbildung 1: Transformation zwischen Koordinatensystemen

.

a) Bestimmen Sie die Norm des Vektors $v = \left(1, \sqrt{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

b) Welchen Winkel bilden die Vektoren

$$v = (1, 0, 0) \quad \text{und} \quad w = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)^{\mathrm{T}}?$$

Aufgabe 4 – Transformationen von Koordinatensystemen

Eine starre Transformation kann auch den Basiswechsel eines Koordinatensystems beschreiben, siehe Abbildung 1. Nehmen wir nun an, dass der Beobachter sich nicht am Ursprung O sondern im Punkt p befindet.

a) Bestimmen Sie die homogene Matrix, die die Transformation zwischen dem Weltkoordinatensystem in O und dem neuen Beobachter-Koordinatensystem in p beschreibt.

b) Was sind die Koordinaten der Punkte O und v im Beobachter-Koordinatensystem in p? Erst denken, dann rechnen!

c) Können Sie die Matrix aus a) benutzen, um diese neuen Koordinaten zu berechnen? Wenn ja, wie?

Aufgabe 5 – Eigenschaften von Matrizen

Man sagt, dass eine Matrix *orthonormal* ist, wenn alle ihre Spalten normal und paarweise orthogonal sind.

Determinante

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

die *Determinante* von A. Für einfache 3-×-3 Matrizen gibt es eine einfachere Formel:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \\ &= m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} \\ &\quad - m_{31}m_{22}m_{13} - m_{32}m_{23}m_{11} - m_{33}m_{21}m_{12}\end{aligned}$$

Entsprechend ist die Determinante einer homogenen Matrix $A = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Determinante von R. Wichtige Regeln:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \qquad \det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A),$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} \qquad \det(rA) = r^n \det(A)$$

Eine Matrix mit Determinante 0 heißt *singulär*, sonst heißt sie *regulär*. Eine Matrix, die nur eine Rotation beschreibt, hat Determinante 1.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Die *Eigenwerte* einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die Nullstellen des Polynoms

$$\det\left(A - x\mathbb{E}_n\right)$$

Hierbei muss die Anzahl der Eigenwerte – gezählt mit ihrer Vielfachheit – gleich n sein.
Für jeden Eigenwert λ_i mit Vielfachheit k_i gibt es eine Menge von Vektoren $x_{i,j}$, $j = 1, \ldots, l_i$, mit $l_i \leq k_i$, sodass

$$Ax_{i,j} = \lambda_i x_{i,j}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix aus Aufgabe 1a).

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix aus Aufgabe 1b).