Übungsaufgaben zur Vorlesung Regelungssysteme – Sommersemester 2021

Lösung zur Übung 2: Modellierung Dynamischer Systeme

Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 2.1: Modellierung ([FrPE14] Aufg. 2.19)

Freischneiden der beweglichen Masse ergibt: Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung der be-

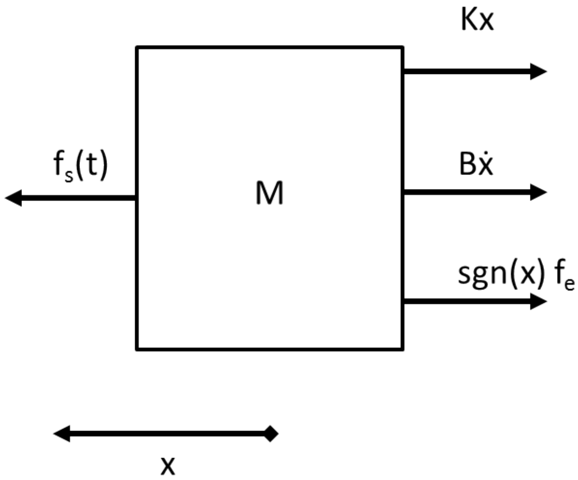

Abbildung 1 (zu L 2.1): Angreifende Kräfte an der beweglichen Masse M.

weglichen Platte ergibt sich damit zu:

$$M\ddot{x} = f_s(t) - B\dot{x} - Kx - f_\epsilon \text{sgn}(\dot{x})$$

Die Differentialgleichung der elektrischen Schaltung ist gegeben durch

$$v = iR + L\frac{di}{dt} + U_c,$$

wobei die Spannung über den Kondensatorplatten

$$U_c = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

und $C = \epsilon A/x$.

Mit $i = \frac{dq}{dt}$ und $U_c = q/C$ ergibt sich

$$v = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{qx}{\epsilon A}.$$

Zusammen ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx + f_\epsilon \operatorname{sgn}(\dot{x}) = f_s(t)$$
$$R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{qx}{\epsilon A} = v$$

L 2.2: Wassertanks ([FrPE10] Aufg. 2.24)

a) S = Tankfläche, ρ = Flüssigkeitsdichte, w = Fluss

$$\dot{m}_1 = S\rho\dot{h}_1 = w_{in} - w_{out}^A \qquad \dot{m}_2 = S\rho\dot{h}_2 = w_{out}^A - w_{out}^C \tag{1}$$

$$w_{out}^A = \frac{1}{R}(p_1 - p_a)^{1/2} \qquad p_1 = \rho g(h_1 - h_3) + p_a \tag{2}$$
$$w_{out}^C = \frac{1}{R}(p_2 - p_a)^{1/2} \qquad p_2 = \rho g h_2 + p_a \tag{3}$$

Zusammen:

$$\dot{h}_1 = \frac{w_{in} - w_{out}^A}{\rho S} = \frac{w_{in} - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g(h_1 - h_3)}}{\rho S} \tag{4}$$
$$\dot{h}_2 = \frac{w_{out}^A - w_{out}^C}{\rho S} = \frac{\sqrt{\rho g}}{\rho R S}(\sqrt{h_1 - h_3} - \sqrt{h_2}) \tag{5}$$

Einsetzen der angegebenen Werte für $h_{2,ss}$, ρ, g und $w_{out,ss}^C$ (200 [g/min] = 10/3 [g/s]) in Gleichung (3) ergibt

$$R = \frac{\sqrt{\rho\, g\, h_{2,ss}}}{w_{out,ss}^C} = 30\,[\mathrm{g\,cm}]^{-1/2} \ . \tag{6}$$

b) Im Arbeitspunkt: $w_{in} = w_{out,ss}^A = w_{out,ss}^C = 200\,[\mathrm{g/min}]$.
Die Löcher sind gleich gross $\Rightarrow p_{10} = p_{20} \Rightarrow h_{2,ss} = (h_{1,ss} - h_3) = 10\,[\mathrm{cm}] \Rightarrow h_{1,ss} = 30\,[\mathrm{cm}]$.

c) Bei dem angegebenen Arbeitspunkt handelt es sich um denjenigen von Unteraufgaben a) und b). Entsprechend gilt immer noch $h_{1,ss} = 30$, $h_{2,ss} = 10$, $h_3 = 20$ und $w_{in} = w_{out,ss}^A = w_{out,ss}^C = 200\,[\mathrm{g/min}] = 10/3$ [g/s]. Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich die linearisierte Zustandsraumdarstellung *im steady state* wie folgt schreiben lässt:

$$\dot{x} = \Delta\dot{x} \approx \underbrace{f(x_s, u_s)}_{=0} + F\Delta x + G\Delta u$$

Wobei die beiden Matrizen gegeben sind durch $F = \frac{\partial f}{\partial x^T}\Big|_{\substack{x=x_s\\u=u_s}}$ und $G = \frac{\partial f}{\partial u^T}\Big|_{\substack{x=x_s\\u=u_s}}$. Einsetzen der entsprechenden Ableitungen ergibt

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{\rho g}}{2R\rho S\sqrt{h_{1,ss}-h_3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{\rho g}}{2R\rho S\sqrt{h_{1,ss}-h_3}} & -\frac{\sqrt{\rho g}}{2R\rho S\sqrt{h_{2,ss}}} \end{bmatrix}$$
$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nach Einsetzen der Parameter ($S = 10/6\,\mathrm{cm}^2$) erhält man

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{h}_1 \\ \Delta\dot{h}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{10} \\ 0 \end{bmatrix}\Delta w_{in} \tag{7}$$

d) A geschlossen, B und C offen:

$$w_{out}^B = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^{1/2} = \frac{1}{R}\sqrt{\rho g}\sqrt{h_1 - h_2} \tag{8}$$

w_{out}^C unverändert.

$$\dot{h}_1 = \frac{w_{in} - w_{out}^B}{\rho S} = \frac{w_{in} - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g(h_1 - h_2)}}{\rho S} \tag{9}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{w_{out}^B - w_{out}^C}{\rho S} = \frac{\sqrt{\rho g}}{\rho R S}(\sqrt{h_1 - h_2} - \sqrt{h_2}) \tag{10}$$

Die Gleichgewichtslage bestimmt sich zu $h_{1,ss} = 20$, $h_{2,ss} = 10$. Bei gleichem Vorgehen wie in c) erhält man:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{h}_1 \\ \Delta\dot{h}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{10} \\ 0 \end{bmatrix}\Delta w_{in} \tag{11}$$

L 2.3: Impulsantwort ([Lu96] Aufg. 5.11)

Die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t),$$
$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

für allgemeines $u(t)$ wurde in der Vorlesung hergeleitet als

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)dt$$

Mit $t_0 = 0$ und $x(0) = 0$ ergibt sich nach einsetzen des Dirac-Impulses $u(t) = \delta(t)$:

$$x(t) = be^{a\cdot t}$$

und damit die Impulsantwort

$$g(t) = y(t) = cbe^{a\cdot t} + d\cdot\delta(t).$$

Dabei ist durchgängig

$$b = -a = \frac{1}{C_1R_1 + C_1R_2},$$
$$c = \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$
$$d = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

L 2.4: Filter ([FrPE10] Aufg. 3.12)

a)
$$v_1(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{12}$$

b)
$$v_2(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{13}$$

c) Es ist ein System 2. Ordnung.

d)
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{14}$$
$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{15}$$

e) Bei 25 % Überschwingen ist $\zeta \approx 0.4$.

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2 0.25}{\pi^2 + \ln^2 0.25}} \approx 0.4 \approx \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} \tag{16}$$

$$R = 2\zeta\sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \cdot 0.4 \cdot \sqrt{\frac{10 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-6}}} = 40\,\Omega \tag{17}$$