

Lösung zur Übung 1: Einführung und Modellierung

Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 1.1: Blockdiagramme ([FrPE10] Aufg. 1.1)

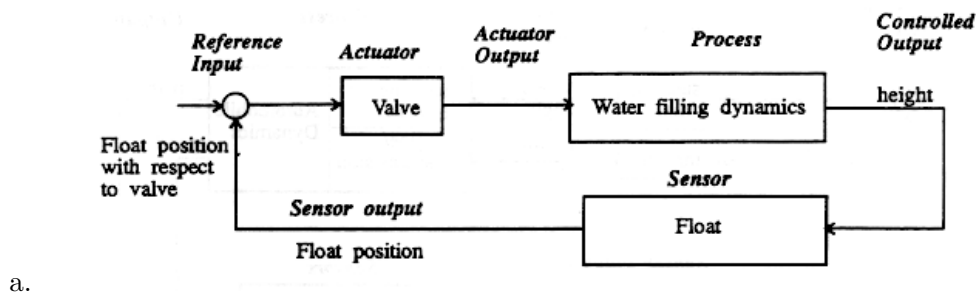


Abbildung 1 (zu L 1.1): Blockdiagramm einer Füllstandregelung

- b. Die Regelgröße des Brutkastens ist die Temperatur im Inneren der Brutkammer. Die Solltemperatur kann durch die Länge des Steuerstabes eingestellt werden. Das sich ergebende Blockdiagramm ist in Abb. 2 dargestellt.

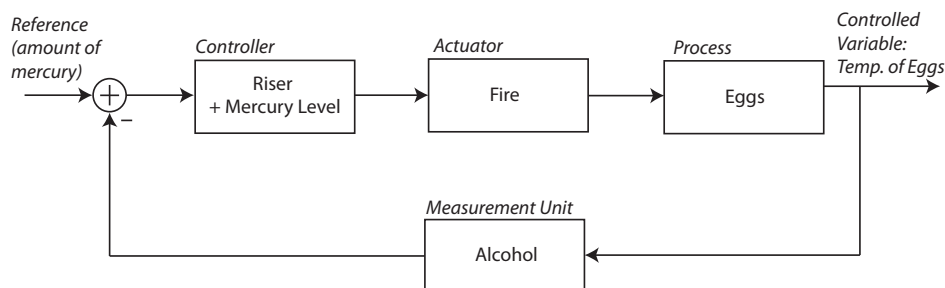


Abbildung 2 (zu L 1.1): Blockdiagramm für Drebbel's Brutkasten

L 1.2: Bandgeschwindigkeit ([Lunz96] Aufg. 2.4)

Zu jedem Zeitpunkt gilt für die Geschwindigkeit v des Bandes vor dem Kopf $v = R\omega$. Da R davon abhängt, wie weit das Band bereits abgespielt wurde, muss ω entsprechend angepasst werden, damit v konstant bleibt. Dies könnte durch eine Steuerung geschehen, hätte jedoch den Nachteil, dass weder schwankende Banddicken noch unterschiedlich dicke Spulenkerne berücksichtigt werden könnten.

L 1.3: Fahrzeug am Hang

- a) Das nichtlineare Modell des Fahrzeuges am Hang ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht

$$m\ddot{x} = F - F_d - mg \sin(\alpha). \quad (1)$$

Durch Einsetzen von F_d erhält man

$$m\ddot{x} = F - c_d|\dot{x}|\dot{x} - mg \sin(\alpha). \quad (2)$$

- b) Das Gleichgewicht errechnet sich durch Einsetzen der Gleichgewichtsbedingungen

$$0 = F_0 - c_d\dot{x}_0^2 - mg \sin(\alpha_0). \quad (3)$$

Daraus folgt

$$F_0 = c_d\dot{x}_0^2 + mg \sin(\alpha_0). \quad (4)$$

- c) Zunächst lässt sich das System mit den vorgeschlagenen Zuständen folgendermaßen darstellen

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{1}{m} (F - c_d|\dot{x}|\dot{x}) - g \sin(\alpha) \end{bmatrix} = f(x, \dot{x}). \quad (5)$$

Durch Berechnung von $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}$ und $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u^T} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}}$, wobei x_0 und u_0 die Gleichgewichtszustände und -eingänge darstellen, erhält man

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2c_d/m \cdot \dot{x}_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Beachten Sie, dass der Sinusterm entfällt, da dieser weder von dem Eingang noch den Zuständen abhängt.

- d) Um den Winkel zu berücksichtigen, muss man diesen im Prinzip als Eingang auffassen:

$$E = \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha^T} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ \alpha=\alpha_0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \cos(\alpha_0) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Lösung zur Übung 2: Modellierung Dynamischer Systeme

Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 2.1: Modellierung ([FrPE14] Aufg. 2.19)

Freischneiden der beweglichen Masse ergibt: Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung der be-

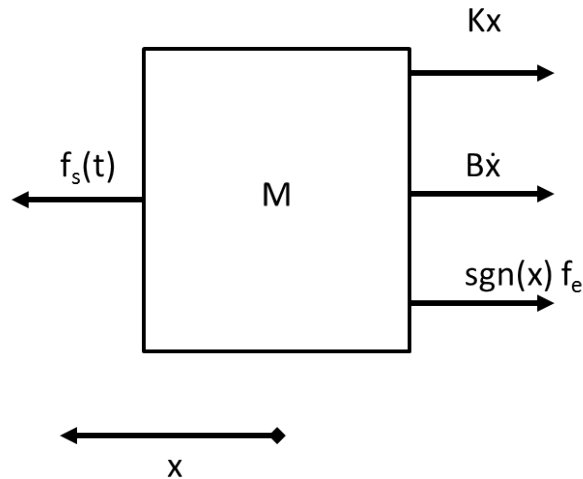


Abbildung 1 (zu L 2.1): Angreifende Kräfte an der beweglichen Masse M .

weglichen Platte ergibt sich damit zu:

$$M\ddot{x} = f_s(t) - B\dot{x} - Kx - f_e \operatorname{sgn}(\dot{x})$$

Die Differentialgleichung der elektrischen Schaltung ist gegeben durch

$$v = iR + L \frac{di}{dt} + U_c,$$

wobei die Spannung über den Kondensatorplatten

$$U_c = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

und $C = \epsilon A/x$.

Mit $i = \frac{dq}{dt}$ und $U_c = q/C$ ergibt sich

$$v = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{qx}{\epsilon A}.$$

Zusammen ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx + f_\epsilon \operatorname{sgn}(\dot{x}) &= f_s(t) \\ R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{qx}{\epsilon A} &= v \end{aligned}$$

L 2.2: Wassertanks ([FrPE10] Aufg. 2.24)

a) S = Tankfläche, ρ = Flüssigkeitsdichte, w = Fluss

$$\dot{m}_1 = S\rho\dot{h}_1 = w_{in} - w_{out}^A \quad \dot{m}_2 = S\rho\dot{h}_2 = w_{out}^A - w_{out}^C \quad (1)$$

$$w_{out}^A = \frac{1}{R}(p_1 - p_a)^{1/2} \quad p_1 = \rho g(h_1 - h_3) + p_a \quad (2)$$

$$w_{out}^C = \frac{1}{R}(p_2 - p_a)^{1/2} \quad p_2 = \rho g h_2 + p_a \quad (3)$$

Zusammen:

$$\dot{h}_1 = \frac{w_{in} - w_{out}^A}{\rho S} = \frac{w_{in} - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g(h_1 - h_3)}}{\rho S} \quad (4)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{w_{out}^A - w_{out}^C}{\rho S} = \frac{\frac{\sqrt{\rho g}}{R}(\sqrt{h_1 - h_3} - \sqrt{h_2})}{\rho S} \quad (5)$$

Einsetzen der angegebenen Werte für $h_{2,ss}$, ρ , g und $w_{out,ss}^C$ ($200 \text{ [g/min]} = 10/3 \text{ [g/s]}$) in Gleichung (3) ergibt

$$R = \frac{\sqrt{\rho g h_{2,ss}}}{w_{out,ss}^C} = 30 \text{ [g cm]}^{-1/2} . \quad (6)$$

b) Im Arbeitspunkt: $w_{in} = w_{out,ss}^A = w_{out,ss}^C = 200 \text{ [g/min]}$.

Die Löcher sind gleich gross $\Rightarrow p_{10} = p_{20} \Rightarrow h_{2,ss} = (h_{1,ss} - h_3) = 10 \text{ [cm]} \Rightarrow h_{1,ss} = 30 \text{ [cm]}$.

c) Bei dem angegebenen Arbeitspunkt handelt es sich um denjenigen von Unteraufgaben a) und b). Entsprechend gilt immer noch $h_{1,ss} = 30$, $h_{2,ss} = 10$, $h_3 = 20$ und $w_{in} = w_{out,ss}^A = w_{out,ss}^C = 200 \text{ [g/min]} = 10/3 \text{ [g/s]}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich die linearisierte Zustandsraumdarstellung *im steady state* wie folgt schreiben lässt:

$$\dot{x} = \Delta \dot{x} \approx \underbrace{f(x_s, u_s)}_{=0} + F \Delta x + G \Delta u$$

Wobei die beiden Matrizen gegeben sind durch $F = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}}$ und $G = \left. \frac{\partial f}{\partial u^T} \right|_{\substack{x=x_s \\ u=u_s}}$. Einsetzen der entsprechenden Ableitungen ergibt

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{\rho g}}{2R\rho S\sqrt{h_{1,ss}-h_3}} & 0 \\ \frac{\sqrt{\rho g}}{2R\rho S\sqrt{h_{1,ss}-h_3}} & -\frac{\sqrt{\rho g}}{2R\rho S\sqrt{h_{2,ss}}} \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho S} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Parameter ($S = 10/6 \text{ cm}^2$) erhält man

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{10} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta w_{in} \quad (7)$$

d) A geschlossen, B und C offen:

$$w_{out}^B = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^{1/2} = \frac{1}{R}\sqrt{\rho g} \sqrt{h_1 - h_2} \quad (8)$$

w_{out}^C unverändert.

$$\dot{h}_1 = \frac{w_{in} - w_{out}^B}{\rho S} = \frac{w_{in} - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g(h_1 - h_2)}}{\rho S} \quad (9)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{w_{out}^B - w_{out}^C}{\rho S} = \frac{\sqrt{\rho g}}{\rho R S}(\sqrt{h_1 - h_2} - \sqrt{h_2}) \quad (10)$$

Die Gleichgewichtslage bestimmt sich zu $h_{1,ss} = 20$, $h_{2,ss} = 10$. Bei gleichem Vorgehen wie in c) erhält man:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{10} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta w_{in} \quad (11)$$

L 2.3: Impulsantwort ([Lu96] Aufg. 5.11)

Die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

für allgemeines $u(t)$ wurde in der Vorlesung hergeleitet als

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

Mit $t_0 = 0$ und $x(0) = 0$ ergibt sich nach einsetzen des Dirac-Impulses $u(t) = \delta(t)$:

$$x(t) = be^{a \cdot t}$$

und damit die Impulsantwort

$$g(t) = y(t) = cbe^{a \cdot t} + d \cdot \delta(t).$$

Dabei ist durchgängig

$$\begin{aligned} b &= -a = \frac{1}{C_1 R_1 + C_1 R_2}, \\ c &= \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \\ d &= \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \end{aligned}$$

L 2.4: Filter ([FrPE10] Aufg. 3.12)

a)

$$v_1(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (12)$$

b)

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (13)$$

c) Es ist ein System 2. Ordnung.

d)

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14)$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (15)$$

e) Bei 25 % Überspringen ist $\zeta \approx 0.4$.

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln^2 0.25}{\pi^2 + \ln^2 0.25}} \approx 0.4 \approx \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (16)$$

$$R = 2\zeta \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \cdot 0.4 \cdot \sqrt{\frac{10 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-6}}} = 40 \, \Omega \quad (17)$$

Übungsaufgaben zur Vorlesung Regelungssysteme – Sommersemester 2021

Lösung zur Übung 3: Laplace-Transformation und Blockdiagramme

Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 3.1: Laplacetransformierte ([FrPE14] Aufg. 3.2-3.4)

- (a) Aus der Tabelle und unter Ausnutzung der Linearität (Superposition) ergibt sich: $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$
- (b) Transformation von t^3 ergibt $\frac{3!}{s^4}$.
- (c) • Anwendung der Zeitskalierung $(3t)^3$ auf die Lösung von (b) ergibt $\frac{1}{|3|} \frac{3!}{(s/3)^4}$.
• Zeitverschiebung um $t \rightarrow t + 4/3$ ergibt schließlich:

$$F(s) = \frac{1}{|3|} \frac{3!}{(s/3)^4} \exp(4/3s).$$

- (d) Aus der Tabelle ergibt sich direkt: $F(s) = 4 \cdot \frac{3}{s^2+3^2}$
- (e) Tabelle und Dämpfungssatz ergibt: $F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s+3}{(s+3)^2+5^2}$

L 3.2: Inverse Laplacetransformierte ([FrPE14] Aufg. 3.7)

- Mit dem Ansatz

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

ergibt sich wegen

$$A = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=0} = 1 \quad B = \frac{1}{s} \Big|_{s=-1} = -1$$

die Lösung

$$G_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad g(t) = (1 - e^{-t})I(t).$$

- Mit dem Ansatz

$$G_2(s) = \frac{4s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1}$$

ergibt sich wegen

$$A = \frac{4s+5}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = -3 \quad B = \frac{4s+5}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1$$

sowie

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{4s+5}{s+2} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{A}{s+2} (s+1)^2 + B + C(s+1) \right] \Big|_{s=-1}$$

$$\left. \frac{4(s+2) - (4s+5)}{(s+2)^2} \right|_{s=-1} = \left. \frac{A(-2(s+1)^2 + 2(s+2)(s+1))}{(s+2)^2} + C \right|_{s=-1}$$

und damit $C = 3$, die Lösung

$$G_2(s) = \frac{-3}{s+2} + \frac{3}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} \quad \circ \bullet \quad g(t) = ((3+t)e^{-t} - 3e^{-2t})I(t).$$

Schneller findet man die Lösung für C aus einem Koeffizientenvergleich, sobald $A = -3$ bekannt ist:

$$\frac{4s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-3(s+1)^2 + C(s+2)(s+1) + B(s+2)}{(s+1)^2(s+2)}$$

woraus folgt, dass gelten muss

$$-3s^2 - 6s - 3 + Cs^2 + 3Cs + 2C + Bs + 2B,$$

beziehungsweise

$$-3s^2 + Cs^2 = 0 \quad -3 + 2B + 6 = 5.$$

Hieraus gewinnt man schnell, die gesuchten Koeffizienten.

- Mit dem Ansatz

$$G_3(s) = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}e^{-3s} = \left(\frac{A_1}{s-1} + \frac{A_2s+A_3}{s^2+1} \right) e^{-3s}$$

ergeben sich wegen

$$A_1 = \left. \frac{3s+1}{s^2+1} \right|_{s=1} = 2$$

und dem Koeffizientenvergleich

$$2s^2 + 2 + (A_2s + A_3)(s-1) = 3s + 1$$

die weiteren Unbekannten $A_2 = -2$ und $A_3 = 1$. Somit gilt

$$G_3(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1-2s}{s^2+1} \quad \circ \bullet \quad g(t) = (2e^{t-3} + \sin(t-3) - 2\cos(t-3))I(t).$$

L 3.3: Blockdiagramme([FrPE10] Aufg. 3.21)

a)

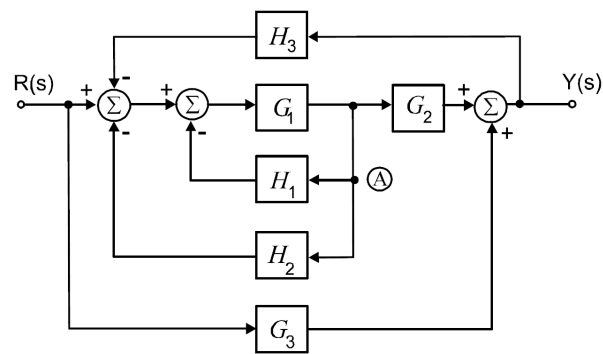
$$\frac{y}{r} = \frac{G_1}{1+G_1} + G_2 \quad (1)$$

b)

$$\frac{y}{r} = G_7 + \frac{G_1G_3G_4G_6}{(1+G_1G_2)(1+G_4G_5)} \quad (2)$$

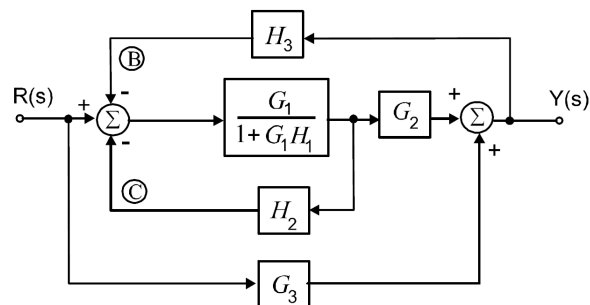
c)

$$\frac{y}{r} = G_7 + \left(G_6 + \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2} \right) \frac{G_4G_5}{1+G_4} \quad (3)$$

L 3.4: Blockdiagrammalgebra ([FrPE10] Aufg. 3.24)

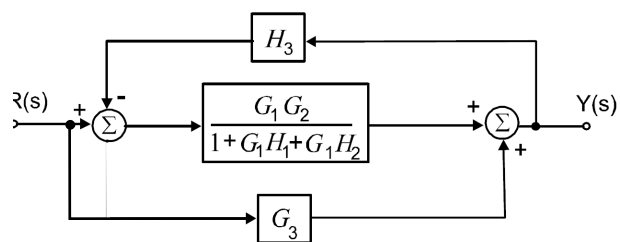
Angegebenes Blockdiagramm.

Verschiebung des Punktes A und Schließen des inneren Kreises ergibt:



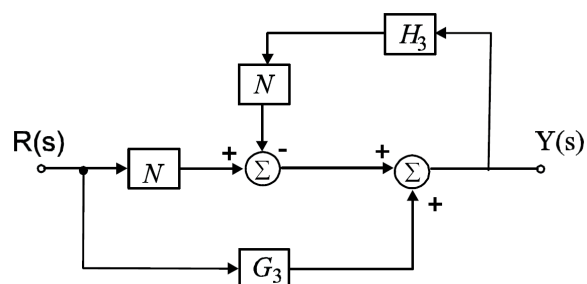
Blockdiagramm reduziert.

Nach dem Aufteilen der Additionstelle in eine für das Signal B und eine für das Signal C, Schließen des nächsten Kreises und Multiplizieren mit G_2 erhält man:



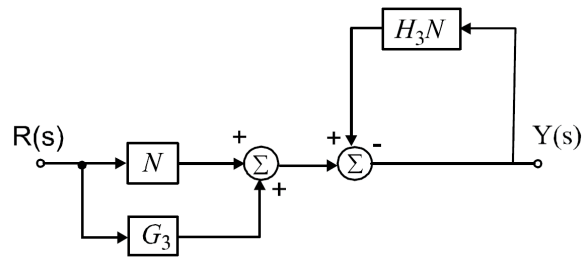
Blockdiagramm reduziert.

Verschieben des mittleren Blocks hinter die Additionsstelle ergibt:



Blockdiagramm reduziert.

Nach Vertauschung der Additionsstellen und schliessen jedes Blocks einzeln erhält man schliesslich:



Blockdiagramm reduziert.

Mit

$$\frac{Y}{R} = \overbrace{(N + G_3)}^{\text{feedforward}} \underbrace{\left(\frac{1}{1 + NH_3} \right)}_{\text{feedback}}$$

ergibt sich die Lösung zu

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2 + G_3 (1 + G_1 H_1 + G_1 H_2)}{1 + G_1 H_1 + G_1 H_2 + G_1 G_2 H_3} \quad (4)$$

Lösung zur Übung 4: Der standard Regelkreis

Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 4.1: Inverse Laplacetransformation

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

- Ordnung = Nennergrad = 1.
- Aus Laplace Tabelle

$$g(t) = e^{-t}.$$

- Sprungantwort z.B. als Integral der Impulsantwort

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = 1 - e^{-t}.$$

L 4.2: Blockdiagrammalgebra und Endwertsatz

- Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises, also vom Referenzsignal $r(t)$ zum Ausgangssignal $y(t)$ für allgemeines $K(s)$:

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{K(s)}{s+1+K(s)}.$$

- Die Übertragungsfunktion von dem Referenzsignal $r(t)$ zum Fehlersignal $e(t) = r(t) - y(t)$ ergibt sich allgemein zu:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} = \frac{s+1}{s+1+K(s)}.$$

Regelabweichung $E(s)$ auf einen Einheitssprung $R(s) = 1/s$ ergibt sich damit zu

$$E(s) = \frac{s+1}{s+1+K(s)} R(s).$$

Für den Fall eines Proportionalreglers mit $K(s) = k_p$ ergibt sich als bleibende Regelabweichung (mittels Endwertsatz):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s+1+k_p} = \frac{1}{1+k_p}.$$

- Regelabweichung auf einen Einheitssprung für den Fall eines PI-Reglers

$$K(s) = k_p + k_i \cdot \frac{1}{s}.$$

ergibt sich analog:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s+1+k_p+k_i \cdot \frac{1}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1)}{s^2+s+sk_p+k_i} = 0.$$

Lösung zur Übung 6: Bode- und Nyquist-Diagramme

Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 6.1: Einführung Bode- und Nyquist-Diagramme

- a.i) System 4 zeigt den charakteristischen Phasenabfall für steigende Frequenzen. Für eine sehr hohe Frequenz, z.B. $\omega = 100 \text{ rad/s}$ erhält man eine Phasenverzögerung von ca. 11520° , oder ca. 200 rad. Es ergibt sich also eine Verzögerung von etwa 2 s.
- a.ii) Aus dem Anstieg der Magnitude für grosse Frequenzen folgt der relative Grad von 3 für System 1, 1 für System 2, und 3 für System 3. Aus dem Anstieg der Magnitude für kleine Frequenzen folgt dass Systeme 1 und 3 keine Integratoren beinhalten, während System 2 einen doppelten Integrator besitzt.
- a.iii) Aus den Phasendiagrammen entnimmt man das keines der Systeme 1, 2 und 3 Nullstellen in der rechten Halbebene besitzt; daher sind alle drei minimal-phasig. System 4 hingegen enthält ein Verzögerungsglied und ist daher nicht-minimalphasig.
- b) Es gilt die folgende Zuordnung:

Bode-Diagramm	Nyquist-Kurve
1	D
2	B
3	A
4	C

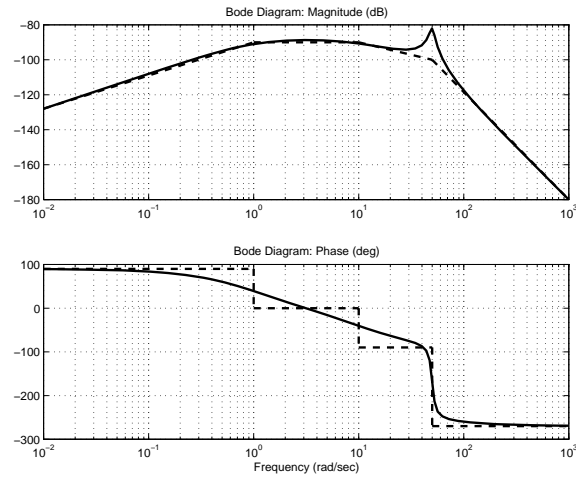
L 6.2: Übertragungsfunktionen aus Nyquist-Kurven [FrPE94 Aufg. 6.22]

- a) $n = 1, m = 1, n - m = 0$
Wir haben hier ein sogenanntes Lag-Element, z.B. $G(s) = \frac{s+1}{s+0.1}$.
- b) $n = 1, m = 1, n - m = 0$
Beispielsweise $G(s) = \frac{s-0.1}{s-1}$.
- c) $n = 1, m = 1, n - m = 0$
Wir haben hier ein sogenanntes Lead-Element, z.B. $G(s) = \frac{s+0.1}{s+1}$.

L 6.3: Skizzierung Bode-Diagramme [FrPE10 Aufg. 6.3]

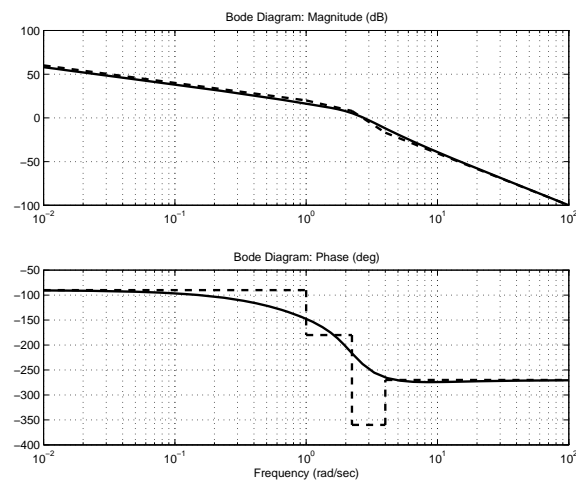
a)

$$G(s) = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{2500}\right)s}{(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)\left[\left(\frac{s}{50}\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{s}{50}\right) + 1\right]}$$



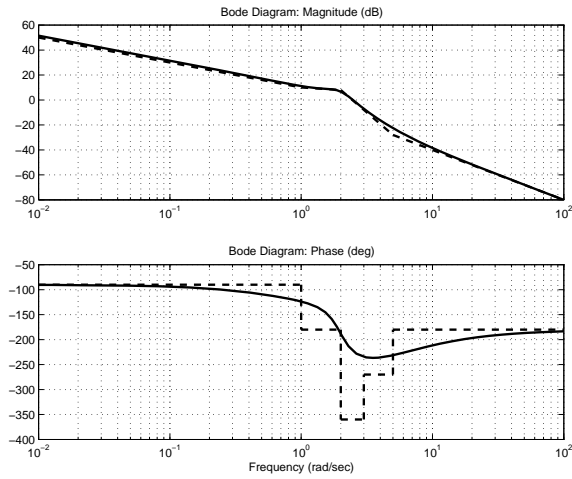
b)

$$G(s) = \frac{8\left(\frac{s}{4} + 1\right)}{s(s+1)\left[\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{2}{5}s + 1\right]}$$



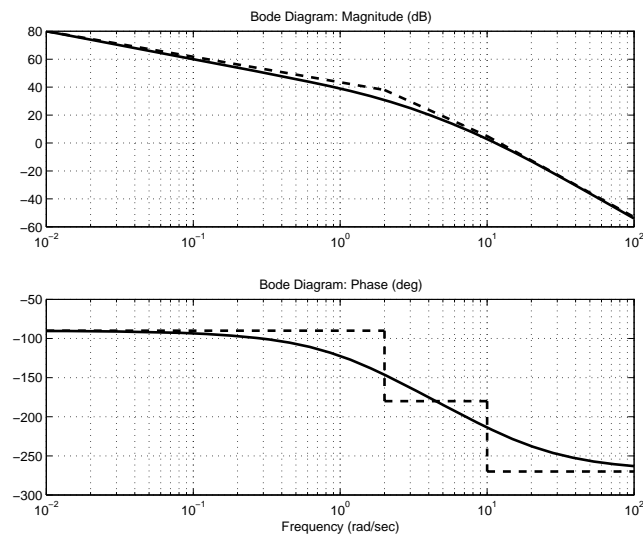
c)

$$G(s) = \frac{\left(\frac{15}{4}\right)\left(\frac{s}{5} + 1\right)\left(\frac{s}{3} + 1\right)}{s(s+1)\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s}{4} + 1\right]}$$



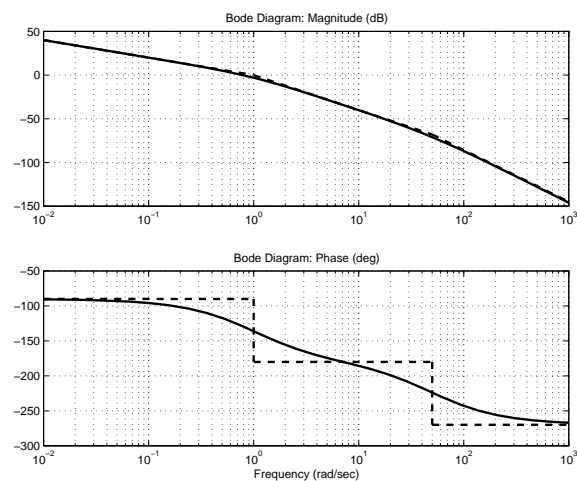
d)

$$G(s) = \frac{100}{s(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{2} + 1)}$$



e)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(\frac{s}{50} + 1)}$$



L 6.4: Skizzierung Nyquist-Kurven [FrPE10 Aufg. 6.18]

a) $G(s) = \frac{(s+2)}{s+10}$

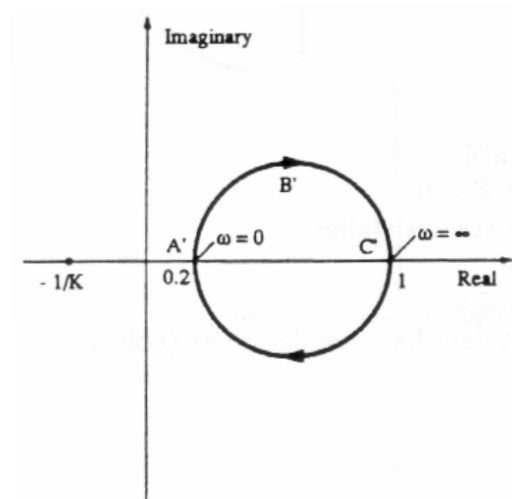


Abbildung 1 (zu L 6.4): Nyquist Kurve zu a)

b) $G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+2)^2}$

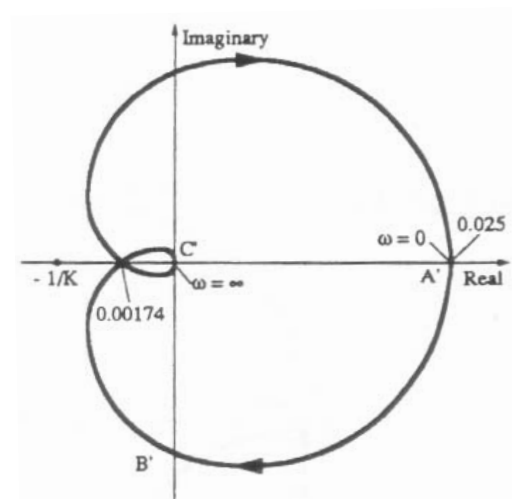


Abbildung 2 (zu L 6.4): Nyquist Kurve zu b)

Lösung zur Übung 7: Matlab-Übung zum Nyquist-Kriterium/Reglerentwurf

Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 7.1: Stabilitätsuntersuchung des geschlossenen Kreises

Darstellung der Nyquistdiagramme in Matlab mittels (z.B. für Aufgabe a)):

```
s = tf('s')  
Ga = 1/((s+1)*(s+2))  
nyquist(Ga)
```

Untersuchung der Umkreisungen des Punktes $-1/k$ ergibt folgende Stabilitätsaussagen:

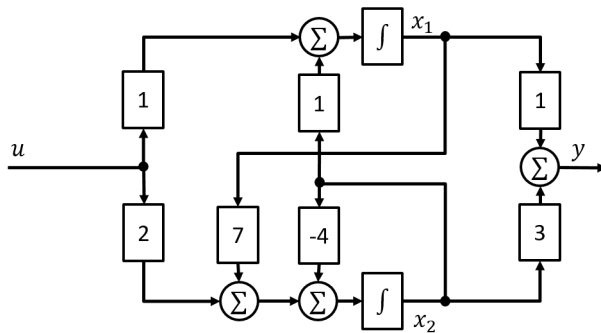
- a) Das System hat keine instabile Polstelle im offenen Kreis, somit darf es keine Umkreisungen des Punktes $-1/k$ geben. Dies ist der Fall für $k \geq -2$.
- b) Das System hat keine instabile Polstelle im offenen Kreis, somit darf es keine Umkreisungen des Punktes $-1/k$ geben. Dies ist der Fall für $k \geq -3$.
Interessante Nebenbemerkung (ohne Einfluss auf diese Stabilitätsaussage): Start $\omega \rightarrow 0$ und Ende $\omega \rightarrow \pm\infty$ beider Zweige ($\omega \geq 0$ und $\omega \leq 0$) der Kurve liegen im Ursprung! Damit wird die Kurve mindestens zweimal umfahren. Dass sie genau zweimal umfahren wird, sieht man durch Betrachtung der Phase oder wenn man alle Schnittpunkte mit der reellen Achse bestimmt.
- c) Das System besitzt keine instabile Polstelle im offenen Kreis, aber einen Integrator. Die Kontur für $\omega = 0$ schließt sich um die rechte Halbebene, somit muss $k \geq 0$ sein. Weiterhin muss $k \leq 6$ sein um eine Umkreisung des Punkts $-1/k$ zu vermeiden.
- d) Das System hat eine instabile Polstelle im offenen Kreis, somit muss k so gewählt werden, dass der Punkt $-1/k$ einmal mehr gegen den Uhrzeigersinn als im Uhrzeigersinn umrundet wird. Dies ist der Fall für $k \geq 2$.
- e) Das System hat eine instabile Polstelle im offenen Kreis, somit muss k so gewählt werden, dass der Punkt $-1/k$ einmal mehr gegen den Uhrzeigersinn als im Uhrzeigersinn umrundet wird. Dies ist mit statischer Rückführung nicht möglich. Das System ist also mit statischer Rückführung nicht stabilisierbar.
- f) Das System hat eine instabile Polstelle im offenen Kreis und einen Integrator. Das System ist mit statischer Rückführung nicht stabilisierbar.
- g) Das System hat eine instabile Polstelle im offenen Kreis und einen Integrator. Der Kreisschluss des Integrators geht um die linke Halbebene, somit ist der geschlossene Kreis stabil für $k \geq 1$ (Reinzoomen!).

Übung 8: Zustandsraumdarstellung

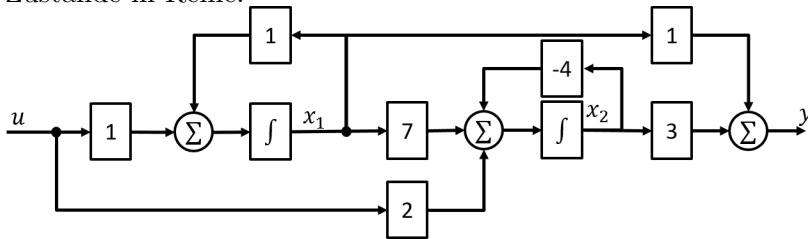
Prof. Dr. Philipp Rostalski
 Institut für Medizinische Elektrotechnik
 Universität zu Lübeck

L 8.1: Zustandsraumtransformation ([FrPE14] Aufg. 7.20)

a) Parallele Zustände:



Zustände in Reihe:



b)

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ 7 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{s(s+4) - 7} \\ &= \frac{7s + 27}{s^2 + 4s - 7} \end{aligned}$$

c) Regelungsnormalform:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 27 & 7 \end{bmatrix} x \quad (2)$$

Beobachternormalform:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 27 \\ 7 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (4)$$

Modalform: Partialbruchzerlegung und Koeffizientenvergleich ergeben:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2\sqrt{11}} \left(\frac{7\sqrt{11} - 13}{s + 2 + \sqrt{11}} + \frac{7\sqrt{11} + 13}{s + 2 - \sqrt{11}} \right)$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{11} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5)$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{11}+13}{2\sqrt{11}} & \frac{7\sqrt{11}-13}{2\sqrt{11}} \end{bmatrix} x \quad (6)$$

L 8.2: Zusammenhang zwischen Zustandsraum und Übertragungsfunktion ([FrPE14] Aufg. 7.7)

Gegeben ist die nicht singuläre Zustandsraumtransformation:

$$x = Tz.$$

Die zeitliche Veränderung beider Zustandsvektoren lässt sich durch

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

und

$$\dot{z} = Fz + Gu$$

$$y = Hz + Ju$$

darstellen, dabei gilt

$$F = T^{-1}AT$$

$$G = T^{-1}B$$

$$H = CT, \quad J = D.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass die Übertragungsfunktion für beide Differentialgleichungssysteme gleich ist. Dafür sei

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

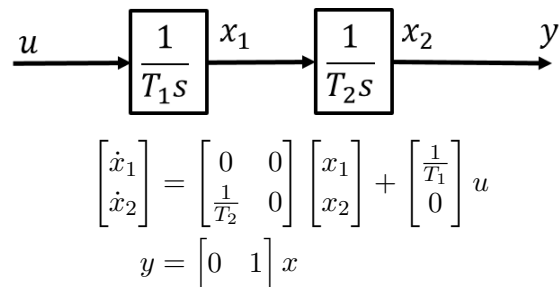
$$\hat{G}(s) = H(sI - F)^{-1}G + J.$$

die jeweilige Übertragungsfunktion. Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CT(sT^{-1}IT - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D & |(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \\ &= CT(T^{-1}(sI - A)^{-1}T)T^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s). \end{aligned}$$

L 8.3: Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit gekoppelter Systeme ([Lunze14] Aufg. 3.6)

a) i) Zwei Integratoren in Reihe:



Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{C} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$:

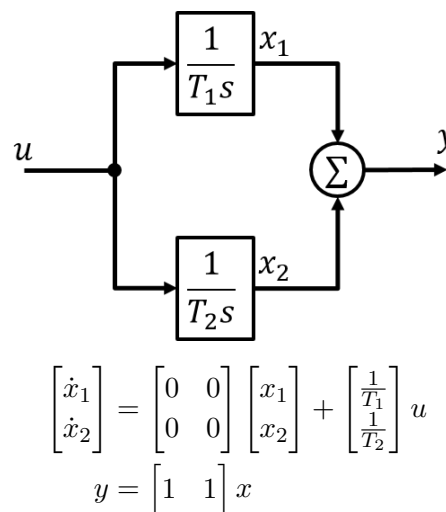
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_1 T_2} \end{bmatrix}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix hat vollen Rang, somit ist das System steuerbar. Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O} = [C, CA, \dots, CA^{n-1}]^T$:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat vollen Rang, somit ist das System beobachtbar.

ii) Zwei Integratoren parallel:



Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix hat keinen vollen Rang, somit sind nicht alle Zustände des Systems frei regelbar.

Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat keinen vollen Rang, somit sind die Zustände des Systems nicht vollständig beobachtbar.

b) Gegeben ist sind zwei Systeme, jeweils beschrieben durch die Differentialgleichung:

$$G : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{cases}$$

welche parallel zusammengeschlossen werden. Damit ergibt sich das Gesamtsystem:

$$\Sigma : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C & C \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{C} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ für das System

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{2n-1}B \\ B & AB & A^2B & \dots & A^{2n-1}B \end{bmatrix}$$

hat maximal den Rang von n . Um Steuerbar zu sein wäre ein Rang von $2n$ nötig, somit kann ein solches System nie komplett Steuerbar sein.

Für die vollständige Beobachtbarkeit des Systems muss die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O} = [C, CA, \dots, CA^{n-1}]^T$ den rang $2n$ haben. Die Beobachtbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{2n-1} \\ C & CA & CA^2 & \dots & CA^{2n-1} \end{bmatrix}^T,$$

hat, wenn das System G vollständig beobachtbar ist, nur den einen Rang von n .

L 8.4: Übertragungsfunktion nicht vollständig steuerbarer Systeme ([Lunze14] Aufg. 3.7)

Gegeben ist folgendes System:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

a) Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}.$$

Die Steuerbarkeitsmatrix hat ein Rang von 1, somit sind nicht alle Zustände des Systems frei regelbar.

Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat den Rang 2, somit sind alle Zustände des beobachtbar.

b) Bestimmung der Nullstellen:

$$\det \begin{bmatrix} z-3 & 1 & -2 \\ 0 & z+2 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2z - 6 \stackrel{!}{=} 0$$

Es befindet sich eine Nullstelle bei $z = 3$

c) Die Übertragungsfunktion folgt aus der allgemeinen Beziehung

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1}{(s-3)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2(s-3)}{(s-3)(s+2)} \\ &= \frac{2}{s+2} \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Systemordnung $n = 2$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ liegt eine Übertragungsfunktion erster Ordnung mit nur einem Pol $s_1 = -2$ vor. Der Pol entspricht dem steuerbaren Eigenwert λ_2 . Die Übertragungsfunktion hat keine Nullstelle, denn das System hat nur eine invariante Nullstelle, die mit einem Eigenwert der Matrix A zusammenfällt und folglich eine Entkopplungsnullstelle darstellt, die in der Übertragungsfunktion nicht zu sehen ist.

Da der Eigenwert $\lambda_1 = 3$ einen positiven Realteil hat, ist das System nicht zustandsstabil. Weil der instabile Eigenwert nicht als Pol in der Übertragungsfunktion $G(s)$ auftritt, ist das System jedoch Eingangs-Ausgangs-stabil (E/A-Stabil). Dieser scheinbare Widerspruch liegt darin, dass bei der Betrachtung der E/A-Stabilität vorausgesetzt wird, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindet ($x_0 = 0$). Da der zu λ_1 gehörige instabile Eigenvorgang nicht steuerbar ist, kann er durch die Eingangsgröße nicht angeregt werden. Obwohl das System vollständig beobachtbar und der instabile Eigenvorgang $\exp(3t)$ deshalb am Ausgang erkennbar ist, spielt dieser Eigenvorgang bei Betrachtung der E/A-Stabilität keine Rolle, weil er durch den Systemeingang nicht angeregt werden kann.

Anhang: Spezifikationen im Zeitbereich

Ein dynamisches System 2. Ordnung besitzt folgende allgemeine Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

k = Verstärkungsfaktor (gain)

ζ = Dämpfungsfaktor (damping factor)

ω_n = Natürliche Frequenz (natural frequency)

Die Sprungantwort dieses Systems (für $\zeta \leq 1$) ist in Abbildung 1 dargestellt.

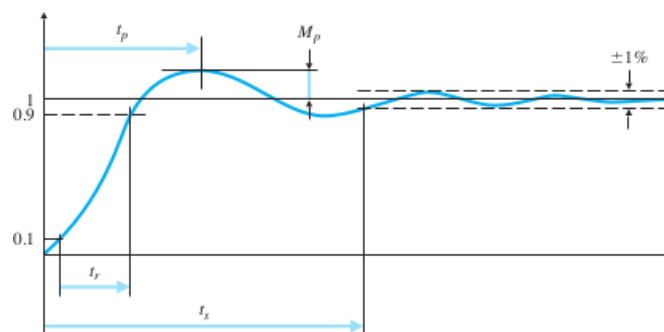


Abbildung 1: Sprungantwort eines gedämpften Systems 2. Ordnung.

Hierbei ergibt sich der in der Vorlesung Regelungstechnik beschriebene Zusammenhang zwischen den Parametern der Übertragungsfunktion und den resultierenden Eigenschaften der Sprungantwort:

Anstiegszeit	(rise time)	$t_r \cong \frac{1.8}{\omega_n}$
Überschwingen	(overshoot)	$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, 0 \leq \zeta < 1$
Ausregelzeit	(settling time)	$t_s \cong \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = \frac{4.6}{\sigma}$