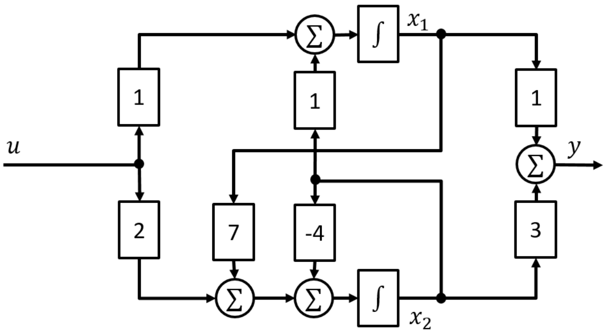
Übungsaufgaben zur Vorlesung Regelungssysteme – Sommersemester 2021

Übung 8: Zustandsraumdarstellung

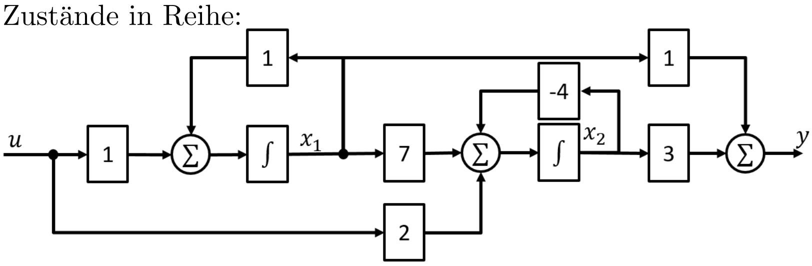
Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 8.1: Zustandsraumtransformation ([FrPE14] Aufg. 7.20)

a) Parallele Zustände:



Zustände in Reihe:



b)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ 7 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{s(s+4) - 7}$$

$$= \frac{7s + 27}{s^2 + 4s - 7}$$

c) Regelungsnormalform:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{1}$$

$$y = \begin{bmatrix} 27 & 7 \end{bmatrix} x \tag{2}$$

Beobachternormalform:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 27 \\ 7 \end{bmatrix} u \tag{3}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \tag{4}$$

Modalform: Partialbruchzerlegung und Koeffizientenvergleich ergeben:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2\sqrt{11}} \left(\frac{7\sqrt{11} - 13}{s + 2 + \sqrt{11}} + \frac{7\sqrt{11} + 13}{s + 2 - \sqrt{11}} \right)$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{11} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{5}$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{11}+13}{2\sqrt{11}} & \frac{7\sqrt{11}-13}{2\sqrt{11}} \end{bmatrix} x \tag{6}$$

L 8.2: Zusammenhang zwischen Zustandsraum und Übertragungsfunktion ([FrPE14] Aufg. 7.7)

Gegeben ist die nicht singuläre Zustandsraumtransformation:

$$x = Tz.$$

Die zeitliche Veränderung beider Zustandsvektoren lässt sich durch

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz + Gu \\ y &= Hz + Ju \end{aligned}$$

darstellen, dabei gilt

$$\begin{aligned} F &= T^{-1}AT \\ G &= T^{-1}B \\ H &= CT, \quad J = D. \end{aligned}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass die Übertragungsfunktion für beide Differentialgleichungssysteme gleich ist. Dafür sei

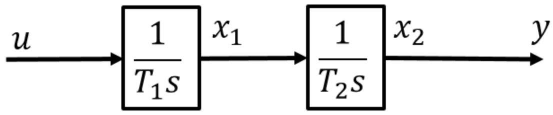
$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D, \\ \hat{G}(s) &= H(sI - F)^{-1}G + J. \end{aligned}$$

die jeweilige Übertragungsfunktion. Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CT(sT^{-1}IT - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \qquad |(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \\ &= CT(T^{-1}(sI - A)^{-1}T)T^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s). \end{aligned}$$

L 8.3: Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit gekoppelter Systeme ([Lunze14] Aufg. 3.6)

a) i) Zwei Integratoren in Reihe:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Steurbarkeitsmatrix $\mathcal{C} = [B, AB, ..., A^{n-1}B]$:

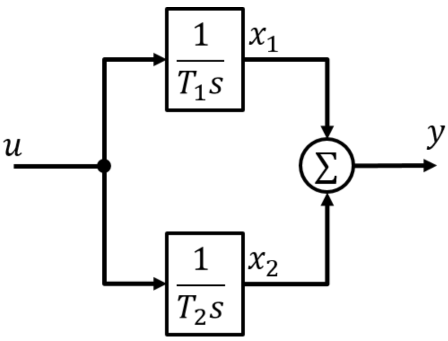
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_1 T_2} \end{bmatrix}$$

Die Steurbarkeitsmatrix hat vollen Rang, somit ist das System steuerbar. Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O} = [C, CA, ..., CA^{n-1}]^T$:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat vollen Rang, somit ist das System beobachtbar.

ii) Zwei Integratoren parallel:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix hat keinen vollen Rang, somit sind nicht alle Zustände des Systems frei regelbar.

Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat keinen vollen Rang, somit sind die Zustände das Systems nicht vollständig beobachtbar.

b) Gegeben ist sind zwei Systeme, jeweils beschrieben durch die Differentialgleichung:

$$G : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{cases}$$

welche parallel zusammengeschlossen werden. Damit ergibt sich das Gesamtsystem:

$$\Sigma : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C & C \end{bmatrix} x. \end{cases} \quad .$$

Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{C} = [B, AB, ..., A^{n-1}B]$ für das System

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & ... & A^{2n-1}B \\ B & AB & A^2B & ... & A^{2n-1}B \end{bmatrix}$$

hat maximal den Rang von n. Um Steuerbar zu sein wäre ein Rang von $2n$ nötig, somit kann ein solches System nie komplett Steuerbar sein.

Für die vollständige Beobachtbarkeit des Systems muss die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O} = [C, CA, ..., CA^{n-1}]^T$ den rang $2n$ haben. Die Beobachtbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & ... & CA^{2n-1} \\ C & CA & CA^2 & ... & CA^{2n-1} \end{bmatrix}^T,$$

hat, wenn das System G vollständig beobachtbar ist, nur den einen Rang von n.

L 8.4: Übertragungsfunktion nicht vollständig steuerbarer Systeme ([Lunze14] Aufg. 3.7)

Gegeben ist folgendes System:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

a) Steurbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}.$$

Die Steuerbarkeitsmatrix hat ein Rang von 1, somit sind nicht alle Zustände des Systems frei regelbar.

Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat den Rang 2, somit sind alle Zustände des beobachtbar.

b) Bestimmung der Nullstellen:

$$\det \begin{bmatrix} z-3 & 1 & -2 \\ 0 & z+2 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2z - 6 \stackrel{!}{=} 0$$

Es befindet sich eine Nullstelle bei $z = 3$

c) Die Übertragungsfunktion folgt aus der allgemeinen Beziehung

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1}{(s-3)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2(s-3)}{(s-3)(s+2)} \\ &= \frac{2}{s+2} \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Systemordnung $n = 2$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ liegt eine Übertragungsfunktion erster Ordnung mit nur einem Pol $s_1 = -2$ vor. Der Pol entspricht dem steuerbaren Eigenwert λ_2. Die Übertragungsfunktion hat keine Nullstelle, denn das System hat nur eine invariante Nullstelle, die mit einem Eigenwert der Matrix A zusammenfällt und folglich eine Entkopplungsnullstelle darstellt, die in der Übertragungsfunktion nicht zu sehen ist.

Da der Eigenwert $\lambda_1 = 3$ ein positiven Realteil hat, ist das System nicht zustandsstabil. Weil der instabile Eigenwert nicht als Pol in der Übertragungsfunktion G(s) auftritt, ist das System jedoch Eingangs-Ausgangs-stabil (E/A-Stabil). Dieser scheinbare Widerspruch liegt darin, dass bei der Betrachtung der E/A-Stabilität vorausgesetzt wird, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ in der Ruhelage befindet ($x_0 = 0$). Da der zu λ_1 gehörige instabile Eigenvorgang nicht steuerbar ist, kann er durch die Eingangsgröße nicht angeregt werden. Obwohl das System vollständig beobachtbar und der instabile Eigenvorgang $\exp(3t)$ deshalb am Ausgang erkennbar ist, spielt dieser Eigenvorgang bei Betrachtung der E/A-Stabilität keine Rolle, weil er durch den Systemeingang nicht angeregt werden kann.