Übungsaufgaben zur Vorlesung Regelungssysteme – Sommersemester 2021

Lösung zur Übung 3: Laplace-Transformation und Blockdiagramme

Prof. Dr. Philipp Rostalski
Institut für Medizinische Elektrotechnik
Universität zu Lübeck

L 3.1: Laplacetransformierte ([FrPE14] Aufg. 3.2-3.4)

(a) Aus der Tabelle und unter Ausnutzung der Linearität (Superposition) ergibt sich: $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$

(b) Transformation von t^3 ergibt $\frac{3!}{s^4}$.

(c)
- Anwendung der Zeitskalierung $(3t)^3$ auf die Lösung von (b) ergibt $\frac{1}{|3|}\frac{3!}{(s/3)^4}$.
- Zeitverschiebung um $t \to t + 4/3$ ergibt schließlich:

$$F(s) = \frac{1}{|3|}\frac{3!}{(s/3)^4}\exp(4/3s).$$

(d) Aus der Tabelle ergibt sich direkt: $F(s) = 4 \cdot \frac{3}{s^2+3^2}$

(e) Tabelle und Dämpfungssatz ergibt: $F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s+3}{(s+3)^2+5^2}$

L 3.2: Inverse Laplacetransformierte ([FrPE14] Aufg. 3.7)

- Mit dem Ansatz

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

ergibt sich wegen

$$A = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=0} = 1 \qquad B = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=-1} = -1$$

die Lösung

$$G_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad g(t) = (1-e^{-t})I(t).$$

- Mit dem Ansatz

$$G_2(s) = \frac{4s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1}$$

ergibt sich wegen

$$A = \left.\frac{4s+5}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = -3 \qquad B = \left.\frac{4s+5}{s+2}\right|_{s=-1} = 1$$

sowie

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{4s+5}{s+2}\right]\right|_{s=-1} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{A}{s+2}(s+1)^2 + B + C(s+1)\right]\right|_{s=-1}$$

$$\left.\frac{4(s+2)-(4s+5)}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = \left.\frac{A(-2(s+1)^2+2(s+2)(s+1))}{(s+2)^2}+C\right|_{s=-1}$$

und damit $C=3$, die Lösung

$$G_2(s) = \frac{-3}{s+2}+\frac{3}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad g(t) = ((3+t)e^{-t}-3e^{-2t})I(t).$$

Schneller findet man die Lösung für C aus einem Koeffizientenvergleich, sobald $A=-3$ bekannt ist:

$$\frac{4s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-3(s+1)^2+C(s+2)(s+1)+B(s+2)}{(s+1)^2(s+2)}$$

woraus folgt, dass gelten muss

$$-3s^2-6s-3+Cs^2+3Cs+2C+Bs+2B,$$

beziehungsweise

$$-3s^2+Cs^2=0 \qquad -3+2B+6=5.$$

Hieraus gewinnt man schnell, die gesuchten Koeffizienten.

- Mit dem Ansatz

$$G_3(s) = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}e^{-3s} = \left(\frac{A_1}{s-1}+\frac{A_2s+A_3}{s^2+1}\right)e^{-3s}$$

ergeben sich wegen

$$A_1 = \left.\frac{3s+1}{s^2+1}\right|_{s=1} = 2$$

und dem Koeffizientenvergleich

$$2s^2+2+(A_2s+A_3)(s-1) = 3s+1$$

die weiteren Unbekanten $A_2=-2$ und $A_3=1$. Somit gilt

$$G_3(s) = \frac{2}{s-1}-\frac{1-2s}{s^2+1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad g(t) = (2e^{t-3}+sin(t-3)-2cos(t-3))I(t).$$

L 3.3: Blockdiagramme([FrPE10] Aufg. 3.21)

a)

$$\frac{y}{r} = \frac{G_1}{1+G_1}+G_2 \tag{1}$$

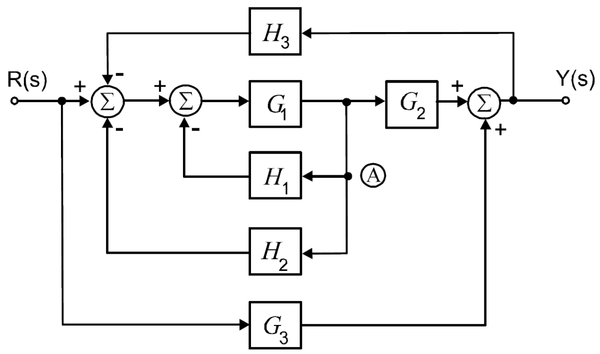
b)

$$\frac{y}{r} = G_7+\frac{G_1G_3G_4G_6}{(1+G_1G_2)(1+G_4G_5)} \tag{2}$$

c)

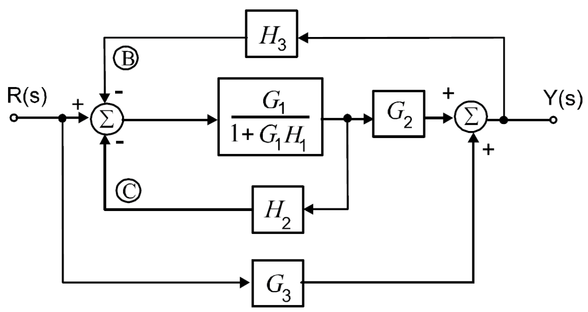
$$\frac{y}{r} = G_7+\left(G_6+\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2}\right)\frac{G_4G_5}{1+G_4} \tag{3}$$

L 3.4: Blockdiagrammalgebra([FrPE10] Aufg. 3.24)



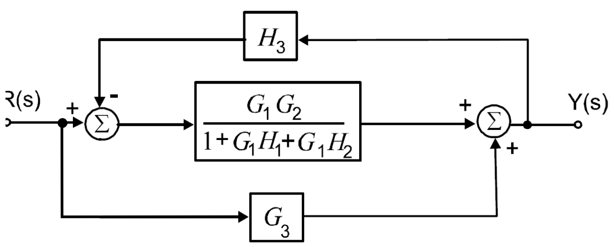
Angegebenes Blockdiagramm.

Verschiebung des Punktes A und schliessen des inneren Kreises ergibt:



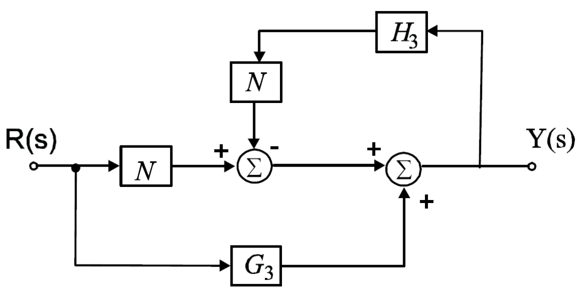
Blockdiagramm reduziert.

Nach dem Aufteilen der Additionstelle in eine für das Signal B und eine für das Signal C, Schliessen des nächsten Kreises und Multiplizieren mit G_2 erhält man:



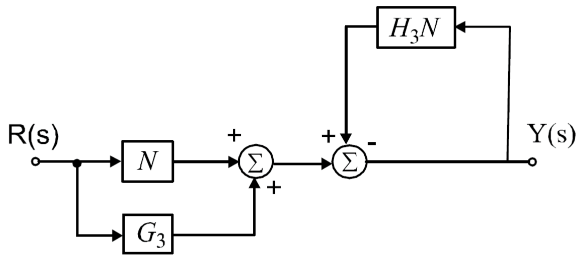
Blockdiagramm reduziert.

Verschieben des mittleren Blocks hinter die Additionsstelle ergibt:



Blockdiagramm reduziert.

Nach Vertauschung der Additionsstellen und schliessen jedes Blocks einzeln erhält man schliesslich:



Blockdiagramm reduziert.

Mit

$$\frac{Y}{R} = \overbrace{(N + G_3)}^{\text{feedforward}} \underbrace{\left(\frac{1}{1 + NH_3}\right)}_{\text{feedback}}$$

ergibt sich die Lösung zu

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1G_2 + G_3(1 + G_1H_1 + G_1H_2)}{1 + G_1H_1 + G_1H_2 + G_1G_2H_3} \tag{4}$$