תרגיל בית מספר 3 - להגשה עד 27/11/2021 בשעה 23:55

קראו בעיון את הנחיות העבודה וההגשה המופיעות באתר הקורס, תחת התיקייה assignments. חריגה מההנחיות תגרור ירידת ציון / פסילת התרגיל.

<u>: הגשה</u>

- תשובותיכם יוגשו בקובץ pdf ובקובץ עם בהתאם להנחיות בכל שאלה.
 - התשובות בקובץ ה pdf חייבות להיות מוקלדות ולא בכתב יד.
- השתמשו בקובץ השלד skeleton3.py כבסיס לקובץ ה py אותו אתם מגישים. **•** לא לשכוח לשנות את שם הקובץ למספר ת"ז שלכם לפני ההגשה, עם סיומת py.
- הם שיש להגיש שני קבצים שני קבצים בלבד. עבור סטודנטית שמספר תייז שלה הוא 012345678 הקבצים שיש להגיש הם $hw3_012345678.pyf$.
 - הקפידו לענות על כל מה שנשאלתם.
 - תשובות מילוליות והסברים צריכים להיות תמציתיים, קולעים וברורים. להנחיה זו מטרה כפולה:
 - 1. על מנת שנוכל לבדוק את התרגילים שלכם בזמן סביר.
 - 2. כדי להרגיל אתכם להבעת טיעונים באופן מתומצת ויעיל, ללא פרטים חסרים מצד אחד אך ללא עודף בלתי הכרחי מצד שני. זוהי פרקטיקה חשובה במדעי המחשב.

הערות כלליות לתרגיל זה ולתרגילים הבאים:

- ארית שלמדנו בשבועות האחרונים כיצד לנתח את זמן הריצה של הקוד שלנו, החל מתרגיל זה ולאורך שארית הסמסטר (וכן במבחן) נדרוש שכל הפונקציות שאנו מממשים תהיינה יעילות ככל הניתן. לדוגמה, אם ניתן לממש פתרון לבעיה בסיבוכיות O(logn), ואתם מימשתם פתרון בסיבוכיות O(logn), תקבלו ניקוד חלקי על הפתרון.
 - אין להשתמש בספריות חיצוניות אלא אם נאמר אחרת.

שאלה 1

א. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. ציינו תחילה בברור האם הטענה נכונה או לא, ואחייכ הוכיחו / הפריכו באופן $O(\cdot)$. פורמלי תוך שימוש בהגדרת

הנחיה: יש להוכיח / להפריך כל סעיף בלא יותר מ-5 שורות.

הפתרונות הם קצרים, ואינם דורשים מתמטיקה מתוחכמת. אם נקלעתם לתשובה מסורבלת וארוכה, כנראה הפתרונות הם קצרים, ואינם דורשים מתמטיקה מתוחכמת. כל הפונקציות הן מהטבעיים לעצמם ($f,g:\mathbb{N} o \mathbb{N}$) הוא לפי בסיס 2.

- $16^{logn} = O(n^3)$.1
- $n^2 \log n + n(\log n)^2 = O(n(\log n)^2) \quad .2$
- מתקיים כי $f_i=0$ מתקיים $1\leq i\leq k$ כך שלכל $g_1,...,g_k$ מתקיים $g_1,...,g_k$ מתקיים כי מרקיים כי

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = O\left(\sum_{i=1}^{k} g_i\right)$$

תזכורת: סכום של k פונקציות היא פונקציה המוגדרת על ידי

$$\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$$

מתקיים כי , $f_i=0$ (g_i) מתקיים מלכל מלכל g_1 , ... , g_k , f_1 , ... , f_k מתקיים לכל א לכל לכל .4

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = O\left(\max_{1 \le i \le k} \{g_i\}\right)$$

תזכורת : מקסימום של k פונקציות היא פונקציה המוגדרת על ידי

$$\max_{1 \le i \le k} \{g_i\}(x) = \max_{1 \le i \le k} \{g_i(x)\}$$

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = Oig(g_1(n) \cdot g_2(n)ig)$$
 אז $f_2(n) = Oig(g_2(n)ig)$ גגם $f_1(n) = Oig(g_1(n)ig)$ אם .5

$$f_1\circ f_2(n)=Oig(g_1\circ g_2(n)ig)$$
 אז $f_2(n)=Oig(g_2(n)ig)$ ו $f_1(n)=Oig(g_1(n)ig)$.6
$$f\circ h(n)=fig(h(n)ig)$$

$$n^n={\it O}(b^{nt})$$
 -פך ש- $b>0, t>0$ קיימים קבועים .7

 $\epsilon > 0$ קבוע הינה הבאה אינה הינה אינה ולכל $k \in \mathbb{N}$ קבוע אינה הבאה בינה כי לכל

$$(2^k + \varepsilon)^{\log n} = O(n^k)$$

ג. לכל אחת משתי הפונקציות הבאות, נתחו את סיבוכיות זמן ריצתה במקרה הגרוע כתלות בn- (אורך הרשימה L). מכל אחת משתי הפונקציות הבאות, נתחו את סיבוכיות הנקראות מהספרייה (math ופעולות אריתמטיות (כמו גם המתודות הנקראות מהספרייה (math ופעולות אריתמטיים או הסברים ציינו את התשובה הסופית, ונמקו. על הנימוק להיות קולע, קצר וברור, ולהכיל טיעונים מתמטיים או הסברים מילוליים, בהתאם לצורך.

על התשובה להינתן במונחי O(...), ועל החסם להיות הדוק ככל שניתן. למשל, אם הסיבוכיות של פונקציה היא על התשובה להינתן במונחי O(nlogn), התשובה לא תקבל ניקוד (על אף שפורמלית O(nlogn)), התשובה לא תקבל ניקוד (על אף שפורמלית O(nlogn)).

.1

.2

שאלה 2

בשאלה זה נעסוק בייצוג של float במחשב.

בשונה מגרסת ה-64 ביטים שראיתם בהרצאה ובתרגול, בשאלה זו נשתמש בייצוג של 32 ביטים.

: נייצג מספר ממשי על ידי המחרוזת $b_i \in \{0,1\}$ כאשר כאופן הבא לכל $b_i \in \{0,1\}$ כאשר המחרוזת באופן הבא נייצג מספר ממשי על ידי המחרוזת באופן הבא

- ביט יחיד הקובע את סימן המספר. $sign = b_0$
- : מתקיים מובילים), מחפר בייצוג בינארי בן 8 ביטים (יתכנו אפסים מובילים). מספר $exp=b_1\dots b_8$

$$0 \le exp \le 2^8 - 1 = 255$$

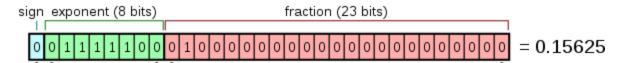
: מספר, ומחושב על ידי - מספר מספר, ומחושב על ידי - מספר מספר - fraction - מספר בינארי של ידי - מספר בינארי בן צ

$$fraction = \sum_{i=1}^{23} b_{i+8} 2^{-i}$$

והנוסחה לחישוב המספר היא:

$$num = (-1)^{sign} \cdot 2^{exp-127} \cdot (1 + fraction)$$

: דוגמה להמחשה



בדוגמה זו sign=0 ו- $fraction=1\cdot 2^{-2}=rac{1}{4}$, $exp=(01111100)_2=(124)_{10}$ ולכן המספר הממשי שמחרוזת זו $(-1)^0\cdot 2^{124-127}\cdot \left(1+rac{1}{4}\right)=0.15625$ מייצגת הוא

- א. הוכיחו כי כל מספר שניתן לייצג בשיטת ייצוג זו ניתן לייצג באופן מדויק גם בשיטת הייצוג של 64 ביטים שראיתם בכיתה.
- ב. תנו דוגמה למספר שניתן לייצוג ב-64 ביטים אך לא ניתן לייצוג ב-32 ביטים בתחום [1,2]. כתבו את המספר כסכום של מספרים בבסיס עשרוני (לדוגמה $\frac{1}{4}+1$), ולא את הייצוג הבינארי המפורש.
 - ג. ממשו את הפונקציה (bin_to_fraction(binary) אשר מקבלת מחרוזת בינארית באורך כלשהו, המייצגת חלק שברי במספר, ומחזירה את המספר כ-float. מותר לקרוא לפונקציה int.

: דוגמה הרצה

```
>>> bin_to_fraction('01101')
0.40625
>>> bin_to_fraction('1010000')
0.625
```

ד. ממשו את הפונקציה (bin_to_float(binary) אשר מקבלת מחרוזת בינארית באורך 32 המתארת ייצוג של מספר ממשי כמתואר לעיל, ומחזירה את המספר כ-float. יש לממש את הפונקציה בעזרת כתיב למבדא (lambda), כפי שהיא מופיעה בקובץ השלד (החליפו את None במימוש שלכם). מותר לקרוא לפונקציה ולפונקציה מסעיף ג׳. דוגמת הרצה:

- ה. ממשו את הפונקציה (is_greater_equal(bin1,bin2 המקבלת שתי מחרוזות בינאריות באורך 32 המייצגות מספר ממשי כמתואר לעיל, ומחזירה True אם המספר שמייצג bin1 גדול או שווה למספר שמייצג בינאריות למספרים, בפרט אסור לקרוא לפונקציות מסעיפים ג' וד'.
 - ו. כל השאלות הבאות מתייחסות לשיטת הייצוג ב<u>-32 ביטים</u>. יש <u>לפרט בקצרה</u> את חישוביכם בקובץ ה-PDF.
 - $?[2^k,2^{k+1})$ מספר לייצוג בקטע ניתנים שונים מספרים מספר שלם לשהו, מספר שלם $k\in\mathbb{Z}$.i
 - ii. כמה מספרים שונים ניתנים לייצוג בקטע [3,10]!
 - iii. כמה מספרים שונים ניתנים לייצוג בקטע [0,1]!
- iv. מהי מידת הדיוק בקטע (32,64)! כלומר, מהו ההפרש המינימלי בין שני מספרים שונים הניתנים לייצוג בקטע!

שאלה 3

שאלה זו תעסוק בחישוב נומרי.

הייחס מטבעם, אך בשאלה זו נתייחס float הערה של אובייקטים של אובייקטים מטיפוס הייחס מדויקים מטבעם, אך בשאלה זו נתייחס לחישוב כאילו הוא מדויק. בפרט, ניתן להתעלם משגיאות הנובעות מחוסר דיוק של float.

א. בסעיף זה נממש פונקציה שמקרבת שורש של מספר ממשי חיובי.

מחצורה (אולי אינסופי) מהצורה בעובדה הבאה אבעה: לכל $x\in\mathbb{R}^+$ מספר ממשי חיובי, ניתן לכתוב את מספר לכל מחצורה מחצורה

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} + \cdots$$

: כאשר לכל n טבעי, האיבר הוא מספר טבעי המחושב על ידי החוקיות הבא כאשר לכל n

- $x \geq \frac{1}{a_1}$ ע כך המינימלי המספר הטבעי המספר הוא $a_1 : \underline{a_1}$.1
- וכן מתקיים הטבעי המספר הטבעי וכן המספר הוא וכן $a_n \geq a_{n-1}$ כי מתקיים מתקיים לכל מכיגה מכל כלל נסיגה $n \geq 2$

$$x \ge \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

שימו לב: במקרים מסוימים הסדרה שתיארנו מסתיימת לאחר מספר סופי של איברים, וזה תקין לחלוטין (הבחנה מעניינת: הסדרה תהיה סופית אמיים המספר x הוא רציונלי).

: (מומלץ להמשיך עד לפחות n=4 כדי לוודא שההגדרה ברורה לכם) $x=\sqrt{2}$ דוגמה לחישוב הסדרה עבור

$$\sqrt{2} \ge \frac{1}{1}$$
יס - $a_1 = 1$

$$\sqrt{2} \ge \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2}$$
אבל $\sqrt{2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2}$ י - $a_2 = 3$

. $\sqrt{2}$ שימו לב שככל שאנו מתקדמים בסדרה, הסכום הולך ומתקרב ל-

עבור e המקבלת approx_root(x,e) ממשו את הפונקציה (approx_root(x,e המקבלת מספר ממשי חיובי \mathbf{x} ומוצאת קירוב שורש בפרט, הפונקציה תחזיר אובייקט מסוג \mathbf{x} שור יכיל את זוג האובייקטים הבאים:

ביים המכילה את ערכי הסדרה החל מ- a_n , ועד a_n הראשון שמקיים .1

$$\sqrt{x} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}\right) < e$$

 \sqrt{x} אלו, קרי הקירוב שהתקבל ל- a_i אלו. מערכי .2

<u>הנחיה מחייבת</u>: אסור להשתמש בפונקציה מובנית אשר מחשבת שורש של מספרים (בפרט, אין להעלות בחזקת 0.5 או להשתמש ב-math.sqrt).

שימו לב שסעיף זה איננו סעיף ברקורסיה, על אף שהשאלה נראית רקורסיבית באופייה.

: דוגמת הרצה

- ב. בהרצאה ראיתם אלגוריתם לקירוב של π באמצעות שיטת מונטה-קרלו. בסעיף זה נקרב את הקבוע e בצורה דומה. נתאר את המשחק הרנדומי הבא: בכל סיבוב של המשחק נגריל מספר אקראי בתחום [0,1]. נפסיק לשחק כאשר סכום כל המספרים שהגרלנו מתחילת המשחק עבר את 1. באופן יותר פורמלי:
 - .[0,1] אחיד מתוך אחיד באופן באופן את המספר גריל את המשחק נגריל את של המשחק של המשחק בסיבוב -1
 - . אם $\sum_{i=1}^k r_i > 1$ עפסיק את המשחק, אחרת נעבר לסיבוב הבא. 2

. $\sum_{i=1}^n r_i > 1$ את מספר הסיבובים ששיחקנו, כלומר את הסיבוב הסיבובים שבו n את מספר הסתברותיים). פסתבר שהערך הממוצע של n הוא המספר e (ניתן להוכיח זאת בכלים הסתברותיים).

- .i ממשו את הפונקציה (approx_e(N) אשר מסמלצת את המשחק המתואר (שימו לב כל משחק משחק המתואר (שימו לב כל משחק מכיל כמה סיבובים), ומחזירה קירוב מתאים למספר e. השתמשו בפונקציה (ומחזירה קירוב מתאים למספר בדומה הערה (בדומה מומלץ לממש פונקציית עזר שמסמלצת משחק יחיד, ואז לקרוא לפונקציה זו N פעמים (בדומה לשאלת הרולטה בתרגיל 2).
- . ${f PDF}$ וכתבו את התוצאות בטבלה בקובץ ה-100, 1000, הריצו את הפונקציה על הערכים N=100,1000,10000 .ii
 - iii. מהו זמן הריצה של הפונקציה שמימשתם במקרה הגרוע ביותר!

שאלה 4

בשאלה זו הניחו כי פעולות אריתמטיות והשוואת מספרים מתבצעות בזמן קבוע.

רשימה L היא כמעט ממוינת. אם כל איבר בה נמצא לכל היותר במרחק אינדקס אחד מהמיקום שלו ברשימה הממוינת. L[i] ברשימה האינדקס של arg_sort(i) כלומר, אם

$$arg_sort(i) \in \{i - 1, i, i + 1\}$$

לדוגמה, הרשימה [2, 1, 3, 5, 4, 7, 6, 8, 9] היא כמעט ממוינת.

- א. נרצה לממש פעולת חיפוש ברשימה כמעט ממוינת.
- .i השלימו את הפונקציה find בשלד, שמקבלת את רשימה כמעט ממוינת L ומספר שלם s ומחזירה את השלימו את השלימו איבר s הוא איבר ברשימה s הוא איבר ברשימה t אחרת מחזירה למשל, עבור t מהדוגמה t ובור t בון באינדקס t הפונקציה תחזיר t (כי המספר t נמצא באינדקס t ברשימה t ברשימה t הפונקציה תחזיר t וכי המספר t לא נמצא ברשימה t).
 - ii. מה היא סיבוכיות זמן הריצה! הסבירו בקצרה.
 - ב. נרצה למיין רשימה <u>כמעט ממוינת</u> במקום (in-place), <u>ללא</u> שימוש ברשימת עזר.
- ג השלימו את הפונקציה (sort_from_almost(lst) בשלד, שמקבלת בשלד, את הפונקציה (O(1)). שימוש ברשימת עזר (או כל מבנה בעל גודל יותר מ
 - ii. הסבירו בקצרה את הפתרון שלכם ואת סיבוכיות זמן הריצה שלו.
 - ג. סעיף זה לא עוסק ברשימה כמעט ממוינת.

: מינימום מקומי ברשימה L הוא כל אינדקס i שקטן או שווה לשכניו המידיים. כלומר, כל אינדקס המקיים

$$(i == 0 \text{ or } L[i] \le L[i-1]) \text{ and } (i == n-1 \text{ or } L[i] \le L[i+1])$$

לדוגמא, ברשימה [5, 6, 7, 5, 1, 1, 99, 100] האינדקסים 5, 4, 5 הם מינימום מקומי.

- i. האם בכל רשימה לא ריקה של מספרים יש מינימום מקומי? נמקו את תשובתכם.
- ii. השלימו את הפונקציה find_local_min בשלד, שמקבלת רשימה לא ריקה של מספרים (לא ממוינים וייתכנו השלימו את הפונקציה i של מינימום מקומי (אם יש יותר מאחד אז ניתן לבחור שרירותית). למשל, עבור הרשימה מהדוגמה תשובה של 0,4 א 5 תהיה תקינה.
 - iii. מהי סיבוכיות זמן הריצה? הסבירו בקצרה.

שאלה 5

בכיתה ראינו את האלגוריתם מיון-בחירה (selection sort) למיון רשימה נתונה. האלגוריתם כזכור רץ בסיבוכיות זמן בכיתה ראינו את האלגוריתם מיון-בחירה (selection sort), שרץ בסיבוכיות זמן ממוצעת $O(n^2)$ עבור רשימה בגודל n. ראינו גם אלגוריתם מיון-מהיר יעיל יותר (quicksort), שרץ בסיבוכיות זמן מובה מזו. למשל, בשאלה זו, $O(n \log n)$. לפעמים, כאשר יש לנו מידע נוסף על הקלט, אפשר למיין בסיבוכיות זמן טובה מזו. למשל, בשאלה זו, עסוק במיון של רשימה שכל איבריה מוגבלים לתחום מצומצם יחסית: מחרוזות באורך n, עבור n0 שמכיל n1 תווים.

ההשוואה בין זוג מחרוזות תהיה לקסיקוגרפית, כלומר השוואה מילונית רגילה.

: <u>הערות</u>

- 1. בשאלה זו אסור להשתמש בפונקציות מיון מובנות של פייתון.
- 2. בניתוח הסיבוכיות בשאלה זו נניח שהשוואה של זוג מחרוזות באורך k מבצעת בפועל השוואה של התווים של המחרוזות משמאל לימין, ובמקרה הגרוע תהיה מסיבוכיות זמן O(k)
 - לשם פשטות ניתוח הסיבוכיות נתייחס הן לפעולות אריתמטיות והן לפעולות העתקה של מספרים ממקום למקום בזכרון כפעולות שרצות בזמן קבוע.
 - א. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (string_to_int(s) שמקבלת כקלט מחרוזת s באורך k בדיוק שמורכבת השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (ספר שלם בין a,b,c,d,e מהתווים a,b,c,d,e ומחזירה מספר שלם בין a,b,c,d,e כולל, המייצג את הערך הלקסיקוגרפי היחסי של המחרוזת. על הפונקציה להיות חד-חד-ערכית. סיבוכיות הזמן שלה צריכה להיות o(k).

string to int(int to string(k, i)) == i

: דוגמת הרצה

```
>>> for i in range(5**3):
    if string_to_int(int_to_string(3, i)) != i:
        print("Problem with ", i)
>>> alphabet = ["a","b","c","d","e"]
>>> lst = [x+y+z for x in alphabet for y in alphabet for z in alphabet]
>>> for item in lst:
    if int_to_string(3, string_to_int(item)) != item:
        print("Problem with ", item)
>>> #Nothing was printed
```

– בסעיפים הבאים נממש פונקציות מיון באמצעות ההמרה שהגדרנו זה עתה. נבחן שתי שיטות שונות לממש את המיון – אחת המשתמשת בזכרון עזר גדול ולה זמן ריצה קצר במיוחד, ואחת המשתמשת בזכרון עזר מינימלי ולה זמן ריצה ארוך במיוחד.

- ג. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה n שמקבלת כקלט רשימה sort_strings1(lst, k) מחרוזות כמתואר ומספר חיובי n כך שכל מחרוזת ברשימה הינה באורך n בדיוק. על הפונקציה להחזיר רשימה חדשה ממויינת בסדר n עולה (ולא לשנות את lst עצמה). בנוסף לרשימת הפלט שהיא בגודל n כמובן, על הפונקציה להשתמש ברשימת עזר בעלת n איברים.
 - עליכם להשתמש בפונקציות מסעיפים אי, בי.
 - $O(kn + 5^k)$ על הפונקציה sort_strings1 להיות מסיבוכיות אפונקציה
 - ד. בקובץ ה pdf הסבירו מדוע הפונקציה מסעיף גי עומדת בדרישות הסיבוכיות.
 - ה. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (lst, k) שמקבלת קלטים כמו הפונקציה מסעיף ג', ובדומה sort_strings2 (lst, k) לפונקציה הקודמת עליה להחזיר רשימה <u>חדשה</u> ממויינת בסדר עולה (ולא לשנות את lst עצמה).
 - - ו. בקובץ ה pdf הסבירו מדוע הפונקציה מסעיף הי עומדת בדרישות סיבוכיות הזמן והזיכרון.

שאלה 6

שאלה זו היא השלב האחרון בתהליך משוב העמיתים שהתבצע לאורך הסמסטר. בשלב זה, תקבלו במהלך הימים הקרובים את ההערכות שנתנו לכם חבריכם וחברותיכם לקבוצה בתרגיל הבית הקודם. לאחר מכן, תתבקשו לממש שוב את הפונקציה (max even seg (n ולמלא סקר קצר על השתתפותכם בתהליך.

אנחנו מודים לכם מאוד על שיתוף הפעולה!

- א. קראו את ההערכות שנתנו לכם חבריכם וחברותיכם לקבוצה בתרגיל הבית הקודם על ידי כניסה לרכיב משוב עמיתים במודל ולחיצה על ההגשה שלכם. לאחר מכן, ממשו שוב, בצורה הטובה ביותר שביכולתכם, את הפונקציה $\max_{\text{even_seq.py}}$ שבקובץ השלד $\max_{\text{even_seq}}$ (n) $\max_{\text{even_seq}}$ (n) הקוד) והגישו אותו בתיבת ההגשה המיועדת לכך! (ולא בתיבת ההגשה של תרגיל בית 3).
 - ב. מלאו את הסקר המסכם של תהליך משוב העמיתים¹.

¹ גם תיבת ההגשה וגם הסקר יהיו זמינים במודל לאחר קבלת ההערכות.