КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Лабораторна робота №3

Виконав:
студент 4-го курсу
спеціальність Математика
Шатохін Михайло

2016

1 Постановка задачі

На відрізку $[a, b]$ методом невизначених коефіцієнтів Коллатца побудувати в точці $x_i \in \{x_j\}_{j=1}^{r+1}$ апроксимацію лінійного диференціального оператора

$$Lu(x) = u(x) + du^{(2)}(x) + ku^{(4)}(x) + u^{(m)}(x)$$

з порядком $q = r + 1 - m \equiv g$. Тут введено позначення:

$[a, b] = [0, 1]$,

$x_j = a + (j - 1)h, \quad h = \frac{b-a}{r}, \quad j = \overline{1, r+1}$,

$m = g + 4, \quad i = mod(d, r + 1)$,

k — номер за списком студента в групі,

g — номер групи,

d — день народження студента.

2 Теоретичні відомості

Для апроксимації оператора використовується метод невизначених коефіцієнтів Коллатца. Згідно з цим методом необхідно визначитися з так званим шаблоном $S(x_i)$, вузли якого і відповідні значення функції $u(x)$ використовуються у формулі числового диференціювання. Крім того, цей метод передбачає рівномірний розподіл вузлів x_i. За таких припущень формула числового диференціювання є зваженою сумою значень функції $u(x)$ у точках шаблона де коефіцієнти — невідомі, а їх кількість $(r + 1)$ залежить від заданого порядку апроксимації диференціального оператора і визначиться пізніше. Ідея методу полягає у знаходженні таких значень коефіцієнтів c_i, щоб забезпечити найбільший порядок нев'язки. Вимагаючи певного порядку нев'язки, необхідно перш за все забезпечити в її розвиненні у ряд Тейлора нульові коефіцієнти похідних функції $u(x)$ до m-го порядку включно, а також додаткові рівняння для складання замкненої системи рівнянь щодо знаходження коефіцієнтів c_i. Тобто, усього рівнянь має бути $(r + 1)$, причому $r \geq m$. Запишемо розвинення нев'язки $\psi(x)^2$ у ряд Тейлора в околі точки шаблона x_i, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів c_i з такою розширеною матрицею:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_r & \frac{a_1}{h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^m & a_1^m & \dots & a_r^m & m!\frac{a_m}{h^m} \\ a_0^{m+1} & a_1^{m+1} & \dots & a_r^{m+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^r & a_1^r & \dots & a_r^r & 0 \end{array}\right)$$

матрицею Вандермонда, що не дорівнює нулю, тому що a_k попарно різні. Це означає, що система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів c_i має єдиний розв'язок.

3 Практична реалізація

Нижче наведена реалізація методу невизначених коефіцієнтів Коллатца мовою Matlab.

Функція main здійснює ініціалізацію параметрів задачі та виклик функції GetCollatzCoefficients, яка виконує основні обрахунки.

main.m

```
function [] = main()
    [ operatorCoefficients , divisionNumber, pointNumber, interval ] = Init ('params.mat');
    intervalDivision = interval (1) + (0:divisionNumber) * ( interval (2) - interval (1)) /
        divisionNumber;
    [ coefficients , approximationDegree] = GetCollatzCoefficients ( operatorCoefficients ,
        intervalDivision , pointNumber)
end;

function [ operatorCoefficients , divisionNumber, pointNumber, interval ] = Init (fileName)
    load(fileName);
end;
```

Функція GetCollatzCoefficients власне містить інтерпретацію мовою ./Matlab наведеного вище алгоритму невизначених коефіцієнтів Коллатца.

GetCollatzCoefficients.m

```
function [ coefficients , approximationDegree] =
    GetCollatzCoefficients ( operatorCoefficients , intervalDivision , pointNumber)
    operatorDegree = length( operatorCoefficients );
    divisionNumber = length( intervalDivision ) - 1;
    intervalLength = ( intervalDivision (end) - intervalDivision (1)) / divisionNumber;
    approximationDegree = divisionNumber + 1 - operatorDegree;
    matrix = (ones(divisionNumber + 1, 1) * ((0:divisionNumber) - pointNumber)) .^
        ((ones(divisionNumber + 1, 1) * (0:divisionNumber))');
    rightSide = zeros(divisionNumber + 1, 1);
    rightSide (1) = 1;
    for i = 1:operatorDegree
        rightSide (i + 1) = rightSide (i) * i / intervalLength ;
    end;
    rightSide = rightSide .* ([ operatorCoefficients , zeros(1, approximationDegree) ]');
    coefficients = matrix \ rightSide ;
end;
```

Використаний у функції main файл params.mat містить параметри задачі, що наведені в постановці задачі. Наведено текстовий варіант цього файлу з метою можливості його розуміння людиною.

params.mat

```
# name: operatorCoefficients
# type: matrix
```

```
# rows:  1
# columns:  6
 1  0  13  0  21  1
# name: divisionNumber
#  type :   scalar
 8
# name: pointNumber
#  type :   scalar
 4
# name:  interval
#  type :  matrix
# rows:  1
# columns:  2
 0  1
```

В результаті роботи даної програми отримується наступний результат

```
>>main
 coefficients   =

    7.9686e+03
  −8.3537e+04
    3.8411e+05
  −8.5664e+05
    9.7606e+05
  −5.3989e+05
    1.0012e+05
    1.4767e+04
  −2.9540e+03

approximationDegree =   3
>>
```