Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Odpornost snarkov

Vanja Kalaković in Eva Strašek

Mentorja: Janoš Vidali, Riste Škrekovski

Predmet: Finančna matematika

Ljubljana, 2023

1 Uvod

Najprej bomo opredelili, kaj snarki sploh so.

Definicija 1 *Če so vsa vozlišča grafa G enake stopnje k, pravimo, da je graf k-regularen; 3-regularnim grafom pravimo tudi kubični grafi.*

Definicija 2 *Kromatični indeks grafa G je število $\chi'(G)$, ki predstavlja najmanjše število barv, ki jih potrebujemo za barvanje povezav grafa G tako, da so sosednje povezave pobarvane različno.*

Definicija 3 *Snark je ciklično 4-povezan kubičen graf z notranjim obsegom vsaj 5 in kromatičnim indeksom 4. Snark reda n in velikosti m označimo z $S(n,m)$.*

Zgodovina snarkov

Snark je svoje ime dobil leta 1976, ko ga je Markin Gardner poimenoval po skrivnostnem predmetu iz pesmi The Hunting of the Snark Lewisa Carrolla.
Prvi znani snark, Petersenov graf, je odkril Julius Petersen in zanj velja, da ima 10 vozlišč in 15 povezav ter je najmanjši snark. V naslednjih letih so matematiki odrili nekaj manjših snarkov, dokler ni do leta 1975 ameriški matematik Isaacs posplošil metodo, hrvaškega matematika Blanuša, za izgradnjo dveh neskončnih družin snarkov, in sicer za družino snarkov v obliki cvetja in za Blanuša-Descartes-Szekersov snark. Isaacs je odkril tudi snark poimenovan dvojna zvezda.

Odpornost povezav in vozlišč

Izrek 1 *Vizingov izrek Za enostaven graf G z maksimalno stopnjo $\Delta(G)$ velja $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Definicija 4 *Snark je kritičen, če zanj velja, da če snarku odstranimo dve sosednji vozlišči postane 3-robno pobarljiv.*

Definicija 5 *Snark je bikritičen, če zanj velja, da če snarku odstranimo dve poljubni vozlišči postane 3-robno pobarljiv.*

Izrek 2 *Če je snark bikritičen, zanj velja, da je tudi kritičen.*

Definicija 6 *Predpostavimo, da imamo snark $G = (V, E)$. Odpornost povezav $er(G)$ je je najmanjše število k povezav, ki jih je treba odstraniti, da postane snark G 3-robno obarljiv.*

Koda, s katero sma računali odpornost povezav snarkov:

```
def odpornost_povezav(snark):
    snark = Graph(snark)
    seznam_povezav = snark.edges()
    st_povezav = snark.size()
    for i in range(st_povezav-3):
        combo = Combinations(seznam_povezav, i).list()
        for kombinacija in combo:
            graf = snark.copy()
            graf.delete_edges(kombinacija)
            if graf.chromatic_index() == 3:
                return(i)
```

Definicija 7 *Predpostavimo, da imamo snark $G = (V, E)$. Odpornost vozlišč $vr(G)$ je najmanjše število k vozlišč E, ki jih je treba odstraniti, da postane graf G 3-robno obarljiv.*

Koda, s katero sma izračunali odpornost vozlišč snarkov:

```
def odpornost_vozlisc(snark):
    st_vozlisc = Graph(snark).order()
    snark = Graph(snark)
    for i in range(st_vozlisc-3):
        combo = Combinations(range(st_vozlisc-1),i).list()
        for kombinacija in combo:
            graf = snark.copy()
            graf.delete_vertices(kombinacija)
            if graf.chromatic_index() == 3:
                return(i)
```

Predstavitev rezultatov

V spodnji tabeli vidimo odpornosti povezav in odpornosti vozlišč kot sva jih izračunali s pomočjo najine kode.

št. vozl.	št. povez.	odpor. povez.	odpor. vozl.
10	15	2	2
18	27	2	2
20	30	2	2
22	33	2	2
24	36	2	2
26	39	2	2
28	42	2	2
30	45	2	2
32	48	2	2
34	51	2	2
36	54	2	2
38	57	2	2
40	60	2	2
44	66	≥ 2	≥ 2

Ugotovili sva, da velja da za vsak poljuben snark G velja, da je njegova $vr(G) \geq 2$ in njegova $er(G) \geq 2$. Poleg tega velja $er(G) = vr(G)$ Ugotovili sva, da so najmanjši snarki, katerih $vr(G) \geq 3$ snarki z 44 vozlišči in 66 povezavami. Torej velja, da so vsi snarki, ki imajo manj kot 44 vozlišč krtični ali bikritični.

Potek dela:

Najprej sva napisali program, ki je izračunal odpornost vozlišč $vr(G)$ in program, ki je izračunal odpornost povezav $er(G)$ za snarke, ki sva jih prenesli iz House of Graphs. Programa sta v prvem koraku iz danega snarka izbrisala eno povezavo in vozlišče ter preverila, ali se je kromatični indeks snarka zmanjšal. Če se kromatični indeks snarka ni spremenil, je program naredil seznam vseh možnih kombinacij dveh povezav in je za vsak element tega seznama preveri ali se kromatični indeks spremeni, če ga odstranimo iz originalnega snarka. Če se kromatični indeks ne spremeni, program naredi seznam vseh možnih kombinacij treh povezav in treh vozlišč ter za vsak element tega seznama preveri, ali kromatični indeks ostane enak, če odstranimo ta element. To ponavlja, dokler kromatični indeks grafa ni enak 3. Ker je program preveril spremembo kromatičnega indeksa za vse možne kombinacije vozlišč in povezav, je bila njegova časovna zahtevnost zelo velika in se je v primeru, da smo ga uporabili na večjih snarkih ali večjem številu snarkov, izvajal vsaj nekaj ur.
Na koncu sva primerjali odpornost vozlišč in odpornost povezav danih snarkov.
Na koncu sva s poskušanjem poiskali najmanjši snark za katerega velja, da ima $vr(G) \geq 3$.