Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Predstavitev 4-ciklov v snarkih

Eva Strašek in Vanja Kalaković

Mentorja: Janoš Vidali, Riste Škrekovski

Predmet: Finančna matematika

Ljubljana, 2023

1 Uvod

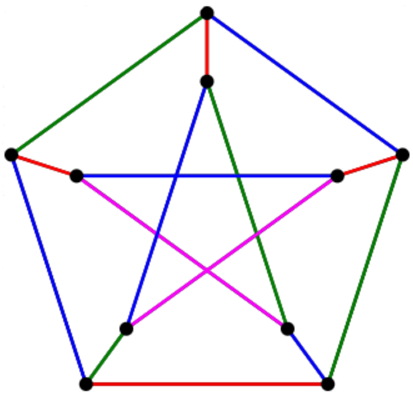
Začeli bomo z definicjami in izreki, ki nam bodo v pomoč pri razumevanju naloge in pisanju programa.

Definicija 1.4: **Komponenta** grafa G je maksimalen povezan podgraf grafa G.

Definicija 1.5: Vozlišče $v \in V(G)$ je **prerezano vozlišče**, če ima podgraf G - v več komponent kot graf G.

Definicija 1.6: Povezavi, ki ima za krajišči prerezani vozlišči, pravimo **prerezana povezava** ali **most**.

Definicija 1.8: **Kromatični indeks** grafa G je število χ'(G), ki predstavlja najmanjše število barv, ki jih potrebujemo za barvanje povezav grafa G tako, da so sosednje povezave pobarvane paroma različno.



Slika 1: Barvanje Petersenovega grafa

Vizingov izrek: Za enostaven graf G z maksimalno stopnjo Δ(G) velja Δ(G) ≤ χ'(G) ≤ Δ(G) + 1.

Definicija 1.9: Če so vsa vozlišča $v_0, v_1, \ldots, v_k$ različna, govroimo o poti, v primeru, ko pa so vsa vozlišča različna, razen $v_0 = v_k$, imamo opravka z **obhodom**. Dolžini najkrajšega obhoda v grafu G pravimo **notranji obseg**.

Definicija 2.1: Naj bo A množica prerezanih povezav moči 3 in G graf. Če G - A predstavlja dve komponenti, ki vsebujeta cikel, pravimo da je A ciklični prerez.

Definicija 2.2: Ciklična povezavna povezanost grafa G (zapis λ_c(G)) je velikost najmanjšega cikličnega prereza grafa G. Pravimo, da je G ciklično k-povezavno povezan, če je λ_c(G) $\geq$ k. Ali drugače, grafu G moramo odstraniti najmanj k-povezav, da nam ta razpade na dve komponenti, ki vsebujeta cikel.

Definicija 2.3: Snark je ciklično 4-povezavno povezan kubičen graf z notranjim obsegom vsaj 5 in kromatičnem indeksom 4.

Lema: Naj bo graf G' dobljen tako, da kubičnemu grafu G dodamo vozlišča a_1, a_2 in a_3, a_4 zaporedno na povezavi $e_1 = u_1v_1$ in $e_2 = u_2v_2$ ter povezave a_1a_4 in a_2a_3. Če je χ'(G') = 4, potem je χ'(G) = 4.

2 Naloga:

Želimo preveriti, ali (in kdaj) uvedba 4-ciklov v snark ohranja kromatični indeks(tj. kromatični indeks ostane 4). Uvedbo 4-cikla lahko izvedemo vsaj na dva načina:

1. Vzemite dva robova ab in cd v G in ju dvakrat razdelite, tako da dobite pot au1u2b iz roba ab in pot cv1v2d iz roba cd. Nato povežite u1 z v1 in u2 z v2.

2. Naj bo ab rob v G in a1, a2 druga dva soseda a, in naj bosta b1, b2 druga dva soseda b. Zdaj odstranimo vrhova a, b in povežemo a1 z b1 in a2 z b2.

3 Opis dela

Metoda 1: Ideja je, da metodo 1 iterativno ponavlajmo in v vsakem koraku pogledamo koliko je kromatični indeks. Predvsem nas zanima kdaj se ohrani, kdaj se spremeni in, ali je možno, da je nekaj časa kromatični indeks enak 3 nato pa zopet pride na 4. Seveda je tu pomembno tudi na katere povezave dodajamo vozlišča, zato je smiselno v vsakem koraku shraniti povezavi na katerih izvedemo metodo 1, saj bomo tako lažje ugotovili v katerem primeru se kromatični indeks ohrani in kdaj ne.

Metoda 2: Pri metodi dva vzamemo snark na n vozliščih in najprej izvedemo metodo 1, da dobimo graf na n + 4 vozliščih. Nato izvedemo metodo 2, kjer pazimo, da ne odstranimo povezav, ki so mostovi in, da novo nastali graf ne vsebuje več komponent kot prvotni graf. Naš cilj je dobiti graf na n vozliščih, zato moramo metodo 2 izvesti dvakrat. Ideja je podobno, kot pri metodi 1, torej ko izvedemo metodo 2 zopet izračunamo kromatični indeks in pogledamo ali se ta spremeni ali ne. Tudi to metodo iterativno ponavljamo, dokler imamo povezave, ki jih lahko odstranimo, ko je seznam povezav, ki jih lahko odstranimo prazen se ustavimo.

4 Končni sklep za metodo 1

Za preverjanje metode sem vzela Petersenov graf (namreč ima relativno malo vozlišč in so zato grafični prikazi bolj jasni). Rezultate metode izvedene na Petersenov garfu si lahko ogledamo v kodi in sicer pod **indeks1** in **vozlisca1**. V vsaki vrstici prve tabele so prikazani kromatični indeksi po vsaki iteraciji medtem, ko so v drugi tabeli prikazane povezave na katere smo dodajali vozlišča. Kot sem povedala zgoraj, nas zanima kdaj se kromatični indeks spremeni in ali je možno da se po določenem času spremeni nazaj na 4.

Najprej bomo preverili ali se lahko vrne nazaj na 4. Opazimo lahko, da ne glede na to kako izberemo povezave se kromatični indeks nikoli ne spremni nazaj na 4.

Zdaj pa poglejmo še v katerih primerih se indeks spremeni. Vemo, da metodo začnemu z snarkom, ki ima kromatični indeks 4, če pogledamo sedaj prvo vrstico tabele lahko vidimo, da se že v prvei iteraciji indeks spremeni na 3, hkrati pa lahlo v drugi tabeli vidimo, da smo za dodajanje vozlišč vzeli povezavi (0,4) in (3,8). Če zdaj pogledamo drugo vrstico lahko vidimo, da se v prvem koraku indeks ohrani nato pa v naslednjem spremeni in če še pogledamo kam smo dodajali vozlišča vidimo da smo najprej dodali na (7,9) in (4,9) nato pa na (7,10) in (0,1). Opazimo, da v primeru, ko smo vozlišča dodali na zaporedne povezave se je indeks ohranil medtem, ko v primeru ko smo dodali na ne zaporedni povezavi se je spremenil. Od tu sem postavila hipotezo, da se kromatični indeks ohrani v primeru, da nova vozlišča dodamo na dve zaporedni povezavi, spremeni pa takrat, ko izberemo ne zaporedni povezavi. Da sem hipotezo lahko preverila sem metoda izvedla 100-krat in pogledala ali se res ohrani samo v primeru zaporednih povezav.

Zelo lepo se to vidi v 7 vrstici prve tabele, kjer se kromatični indeks ohrani v prvih štirih korakih nato pa se spremeni. Če zopet pogledamo na katere povezave smo dodajali vozlišča tj. ((3,8),(5,8)), ((12,13),(3,10)), ((10,12),(11,13)), ((14,16),(12,19)), ((0,4),(22,24)) lahko vidimo da v prvih štirih korakih dodajamo na zaporedne povezave v petem koraku pa na ne zaporedni. Od tu sem sklepala, da moja hipoteza drži dodatno pa jo potrdi tudi lema, ki sem jo napisala na začetku.

Za konec sem rezultate še analizirala in sicer zelo opazno je, da se v večini primerov kromatični indeks spremeni. Glede na rezultate se v 32% zgodi, da se kromatični indeks ohrani po prvem koraku, z 5% se ohrani v drugem koraku, z 3% se ohrani v tretjem koraku in zgolj z 1% se ohrani v četrtem koraku. Torej v primeru, da naključno izbiramo povezave je bolj verjetno, da se kormatični indeks spremeni kot pa da se ohrani.