Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Geometrijsko zvezna gibanja togih teles

Matic Oskar Hajšen in Eva Zmazek

Ljubljana, 2019

Kazalo

Listings

1 Uvod

Z najino seminarsko bova prikazala, kako se da znanje, pridobljeno pri tem predmetu, uporabiti pri upodobitvi gibanja togih teles, ki se uporabljajo pri računalniških animacijah in v robotiki. Za opis teh gibanj bomo uporabljali kvaternione in bezierjeve krivulje na kvaternionih.

2 Teoretično ozadje

2.1 Homogene in kartezične koordinate

Imejmo vektor p v 3-dimenzionalnem prostoru s homogenimi koordinatami $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^4/\{(0,0,0,0)^T\}$. Če je prva komponenta p_0 neničelna, lahko za točko p definiramo prirejene kartezične koordinate $\underline{p} = (\underline{p_1}, \underline{p_2}, \underline{p_3})^T \in \mathbb{R}^3$, pri čemer velja $\underline{p_i} = \frac{p_i}{p_0}$ za $i = 1, 2, 3$. Na tak način vektorja p in λp opisujeta isto točko $\underline{p}$ za poljubno neničelno realno število λ. Vektorjem z ničelno prvo komponento priredimo točke v neskončnosti.

2.2 Zveza med koordinatami točk v fiksnem koordinatnem sistemu in koordinatami točk v gibajočem se koordinatnem sistemu

Definirajmo dva koordinatna sistema v $\mathbb{R}^3$:

- fiksen koordinatni sistem E^3 (običajen koordinatni sistem)
- gibajoč se koordinatni sistem $\hat{E}^3$

Točke lahko predstavimo v enem ali drugem.

Označimo s $\underline{p}$ točko glede na fiksen koordinatni sistem E^3, s $\underline{\hat{p}}$ pa glede na $\hat{E}^3$. Potrebujemo koordinatno transformacijo

$$\hat{E}^3 \to E^3$$

$$\underline{\hat{p}} \mapsto \underline{p}$$

Z uporabo homogenih koordinat, lahko transformacijo zapišemo s pomočjo matrike

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} m_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{array}\right],$$

kjer velja $m_{0,0} \neq 0$. Preslikavo v homogenih koordinatah lahko torej zapišemo kot:

$$\underline{\hat{p}} \mapsto \underline{p} = M\underline{\hat{p}}$$

Vektorju $c = M(1,0,0,0)^T = (m_{0,0}, m_{1,0}, m_{2,3}, m_{3,0})^T$ zapisanemu v homogenih koordinatah pripada vektor $\underline{c} = (\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{2,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{3,0}}{m_{0,0}})^T$, zapisan v kartezičnih koordinatah.

Ta vektor opisuje položaj koordinatnega izhodišča gibajočega se koordinatnega sistema $\hat{E}^3$ glede na koordinatni sistem E^3.
3×3 matrika

$$\underline{R} = \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

opisuje orientacijo gibajočega se koordinatnega sistema $\hat{E}^3$. Pravimo ji **rotacijska matrika**.
Oglejmo si, kaj naredi matrika M z vektorjem $[1, b_M, c_M, d_M]$:

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} \\ m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{1,1}b_M & m_{1,2}c_M & m_{1,3}d_M \\ m_{2,1}b_M & m_{2,2}c_M & m_{2,3}d_M \\ m_{3,1}b_M & m_{3,2}c_M & m_{3,3}d_M \end{bmatrix}$$

Dobimo vektor v homogeni obliki, ki ima na prvi komponenti vrednost $m_{0,0}$, preostale tri komponente pa predstavlja vektor

$$\begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix}$$

Ker je to vektor v homogeni obliki in ker je prva komponenta neničelna ($m_{0,0} \neq 0$), je njemu prirejen vektor v kartezični obliki enak

$$\frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix},$$

ki pa je enak vsoti $\underline{c} + R \cdot \underline{\hat{p}}$
Transformacijo $\underline{\hat{p}} \mapsto \underline{p}$ v kartezičnih koordinatah zapišemo kot:

$$\underline{p} = \underline{c} + R\underline{\hat{p}}$$

2.3 Gibanje točk v času

Kadar je $\underline{c} = \underline{c}(t)$ in $R = R(t)$, govorimo o gibanju togega telesa:

$$\hat{E}^3 \times I \to E^3$$

$$(\underline{\hat{p}}, t) \mapsto \underline{c}(t) + R(t)\underline{\hat{p}} =: \underline{p}(t)$$

Krivulji $\underline{p}(t)$ pravimo **trajektorija** točke $\underline{\hat{p}}$

Če je $\underline{c}(t) = (0, 0, 0)$, potem trajektorija poljubne točke $\underline{\hat{p}}$ leži na sferi z radijem $||\underline{\hat{p}}||$ in središčem v koordinatnem izhodišču fiksnega koordinatnega sistema E^3. Rotacijski del gibanja $R(t)$ opisuje gibanje po enotski sferi, zato se imenuje tudi **sferični del gibanja togega telesa**. Problem je konstrukcija matrike R, ki mora biti ortogonalna. ($RR^T = R^TR = I$, $\det R = 1$).

2.4 Opis rotacij s kvaternioni

Pri opisovanju rotacij si lahko pomagamo s **kvaternioni**. Prostor kvaternionov $\mathbb{H}$ je 4-dimenzionalni vektorski prostor s standardno bazo

$$\underline{1} = (1, (0,0,0)^T)$$

$$\underline{i} = (0, (1,0,0)^T)$$

$$\underline{j} = (0, (0,1,0)^T)$$

$$\underline{k} = (0, (0,0,1)^T)$$

Vsak kvaternion $\mathcal{A}$ lahko zapišemo kot:

$$\mathcal{A} = (a_0, \underline{a}),\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ skalarni del },\ \underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \text{ vektorski del}$$

Na kvaternionih sta definirana seštevanje in množenje kot:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_0, \underline{a}) + (b_0, \underline{b}) = (a_0 + b_0, \underline{a} + \underline{b})$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (a_0 \cdot b_0 - \underline{a} \cdot \underline{b}, a_0\underline{b} + b_0\underline{a} + \underline{a} \times \underline{b})$$

Konjugirana vrednost kvaretniona $\mathcal{A} = (a_0, \underline{a})$ je definirana kot $\overline{\mathcal{A}} = (a_0, -\underline{a})$.

Definicija 2.1. Preslikava $\chi : \mathbb{H} \backslash \{0\} \to SO_3$ oblike

$$Q \mapsto \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_2) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$Q = (q_0, (q_1, q_2, q_3)^T)$$

se imenuje **kinematična preslikava**.

Matika $\chi(Q)$ je rotacijska matrika. Velja pa tudi obratno. Vsako rotacijsko matriko R lahko zapišemo v zgornji obliki, to je, lahko jo preslikamo v dva **antipodna kvaterniona** oblike

$$\pm Q = \pm(q_0, (q_1, q_2, q_3)^T),$$
$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Kinematična preslikava poda korespondenco med 3D rotacijami in parom antipodnih točk na 4D enotski sferi $S^3 \subseteq R^4$.

Ker velja $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, so vrednosti $|q_i|;\ i = 0, 1, 2, 3$ na zaprtem interalu med 0 in 1. Vrednost q_0 in vektor $(q_1, q_2, q_3)^T$ lahko zato zapišemo v obliki:

$$q_0 = \cos(\frac{\phi}{2})$$

in

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \sin(\frac{\phi}{2}) \cdot \vec{r};\ \ \vec{r} \text{ enotski vektor}$$

Če kvaternion Q zapišemo v tej obliki, ima rotacija, prirejena temu kvaternionu lepo geometrijsko interpretacijo. Predstavlja namreč rotacijo za kot ϕ okrog osi $\vec{r}$.

Ker lahko vsako rotacijo zapišemo v tej obliki, lahko tako zapišemo tudi rotacijo iz poglavja 2.2. Če imamo podano preslikavo M, poiščimo, kako za to preslikavo definiramo kvaternion Q. Priemerjajmo matriki $\mathbb{R}$ in poglavja 2.2 in $\mathbb{R}$, zapisanega s kvaternioni.

$$\begin{aligned} m_{0,0} + m_{1,1} + m_{1,2} + m_{3,3} &= 4q_0^2 \\ m_{3,2} - m_{2,3} = 2 \cdot (q_2q_3 - q_0q_1) - 2 \cdot (q_2q_3 + q_0q_1) &= 4q_0q_1 \\ m_{1,3} - m_{3,1} = 2 \cdot (q_1q_3 + q_0q_2) - 2 \cdot (q_1q_3 + q_0q_2) &= 4q_0q_2 \\ m_{2,1} - m_{1,2} = 2 \cdot (q_1q_2 + q_0q_4) - 2 \cdot (q_1q_2 + q_0q_4) &= 4q_0q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{3,2} - m_{2,3} &= 4q_0q_1 \\ m_{0,0} + m_{1,1} - m_{1,2} - m_{3,3} &= 4q_1^2 \\ m_{2,1} + m_{1,2} &= 4q_1q_2 \\ m_{1,3} + m_{3,1} &= 4q_1q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{1,3} - m_{3,1} &= 4q_0q_2 \\ m_{2,1} + m_{1,2} &= 4q_1q_2 \\ m_{0,0} - m_{1,1} + m_{1,2} - m_{3,3} &= 4q_2^2 \\ m_{3,2} + m_{2,3} &= 4q_2q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{2,1} - m_{1,2} &= 4q_0q_3 \\ m_{1,3} + m_{3,1} &= 4q_1q_3 \\ m_{3,2} + m_{2,3} &= 4q_2q_3 \\ m_{0,0} - m_{1,1} - m_{1,2} + m_{3,3} &= 4q_0^2 \end{aligned}$$

Opazimo, da v vsakem sklopu razmerja med vrednostmi enaka

$$q_0 : q_1 : q_2 : q_3$$

Ker q_0, q_1, q_2, q_3 niso hkrati enaki 0, bo vsaj eno izmed zgornjih razmerij različno od $0 : 0 : 0 : 0$. Tisto razmerje nato uporabimo kot razmerje $q_0 : q_1 : q_2 : q_3$. Skupaj z enakostjo $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ nato izračunamo kvaternion $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$ (bolj natančno sta v množici rešitev dva antipodna kvaterniona).

2.5 Bezierjeve krivulje

Z uporabo kinematične preslikave lahko za konstrukcijo sferičnih gibanj uporabimo Bezierjeve krivulje.
Izberemo kontrolne kvaternione $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} Q_i B_i^n(t)$$

$$\chi(Q(t)) = R(t)$$

Izberemo $\underline{c}(t) = \frac{w(t)}{||Q(t)||^2}$.

3 Implementacija

Ker si pri opisovanju rotacij pomagamo s kvaternioni, sva jih najprej prevedla iz seznama v vektorsko obliko:

```
function Q = array2quat(a, b, c, d)
%input:
%a, b, c, d      komponente
%output:
%Q               kvaternion

Q = [a, b, c, d];
end
```

S funcijo $quad\_vec(Q)$ pridobima vektorski del kvaterniona.

```
function v = quat_vec(Q)
%input:
%Q               kvaternion (q0, q1, q2, q3)
%output:
%v               vektorski komponenta Q-ja, (q1, q2, q3)


v = [Q(2) Q(3) Q(4)];
end
```

S funcijo *quat_rot_mat* oblikujeva rotacijsko matrako iz definicije 2.1:

```
function H = quat_rot_mat(Q)
%input:
%Q           kvaternion
%
%output:
%H           rotacijska matrika za sfericno gibanje
%            (hi v zapiskih)

```

```
H = zeros(3,3);
h = sum(Q.^2);

if h == 0
    H = eye(3,3);
else
    H(1,1) = Q(1)^2+Q(2)^2 − Q(3)^2 − Q(4)^2;
    H(1,2) = 2∗(Q(2)∗Q(3) − Q(1)∗Q(4));
    H(1,3) = 2∗(Q(2)∗Q(4) + Q(1)∗Q(3));

    H(2,1) = 2∗(Q(2)∗Q(3) + Q(1)∗Q(4));
    H(2,2) = Q(1)^2 − Q(2)^2 + Q(3)^2 − Q(4)^2;
    H(2,3) = 2∗(Q(3)∗Q(4) − Q(1)∗Q(2));

    H(3,1) = 2∗(Q(2)∗Q(4) − Q(1)∗Q(3));
    H(3,2) = 2∗(Q(3)∗Q(4) + Q(1)∗Q(2));
    H(3,3) = Q(1)^2 − Q(2)^2 − Q(3)^2 + Q(4)^2;

    H = 1/h.∗H;
end

end
```

Listing 1: For educational purposes

```
% example of while loop using placeholders
while ⟨condition⟩
  if ⟨something-bad-happens⟩
    break
  else
    % do something useful
  end
  % do more things
end
```