

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za matematiko in fiziko

## Gibanja togih teles

Matic Oskar Hajšen in Eva Zmazek

Ljubljana, 2019



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Teoretično ozadje</b>	<b>4</b>
2.1	Homogene in kartezične koordinate . . . . .	4
2.2	Zveza med koordinatami točk v fiksnem koordinatnem sistemu in ko- ordinatami točk v gibajočem se koordinatnem sistemu . . . . .	4
2.3	Gibanje točk v času . . . . .	6
2.4	Opis rotacij s kvaternioni . . . . .	6
2.5	Bezierjeve krivulje . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Implementacija</b>	<b>10</b>
3.1	Primeri . . . . .	10
3.2	Kvaternioni . . . . .	11
3.3	Bezierjeve krivulje . . . . .	15
3.4	Kocka . . . . .	19

## Listings

1	quat_vec . . . . .	11
2	quatmultiply . . . . .	11
3	conj_quat . . . . .	12
4	quat_exp . . . . .	12
5	quat_rot_mat . . . . .	13
6	kot_v_kvrat . . . . .	13
7	rot_vek_za_kot . . . . .	14
8	bezier . . . . .	15
9	decasteljau . . . . .	15
10	sbezier . . . . .	16
11	sdecasteljau . . . . .	16
12	polepsaj_sbezier . . . . .	17
13	translacija . . . . .	17
14	izracunaj_vse . . . . .	18
15	kocka . . . . .	19
16	kocka_vek . . . . .	19
17	rotiraj_kocko . . . . .	20
18	rotirana_kocka . . . . .	20

# 1 Uvod

S seminarsko nalogo bova prikazala, kako se da znanje, pridobljeno pri tem predmetu, uporabiti pri upodobitvi gibanja togih teles, ki se uporabljajo pri računalniških animacijah in v robotiki. Za opis teh gibanj bomo uporabljali kvaternione in bezierjeve krivulje na kvaternionih.

## 2 Teoretično ozadje

### 2.1 Homogene in kartezične koordinate

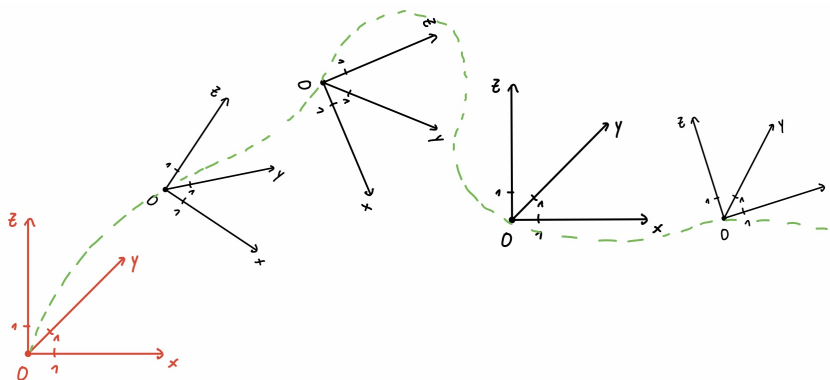
Naj bo  $p$  vektor v 3-dimenzionalnem prostoru s homogenimi koordinatami  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^4 / \{(0, 0, 0, 0)^T\}$ . Če je prva komponenta  $p_0$  neničelna, lahko za točko  $p$  definiramo prirejene kartezične koordinate  $\underline{p} = (\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , pri čemer velja  $\underline{p}_i = \frac{p_i}{p_0}$  za  $i = 1, 2, 3$ . Na tak način vektorja  $p$  in  $\lambda p$  opisujeta isto točko  $\underline{p}$  za poljubno neničelno realno število  $\lambda$ . Vektorjem z ničelno prvo komponento priredimo točke v neskončnosti.

### 2.2 Zveza med koordinatami točk v fiksnem koordinatnem sistemu in koordinatami točk v gibajočem se koordinatnem sistemu

Definirajmo dva koordinatna sistema v  $\mathbb{R}^3$ :

- fiksni koordinatni sistem  $E^3$  (običajni koordinatni sistem)
- gibajoči se koordinatni sistem  $\hat{E}^3$

Točke lahko predstavimo v enem ali drugem.



Označimo s  $\underline{p}$  točko glede na fiksni koordinatni sistem  $E^3$ , s  $\hat{\underline{p}}$  pa glede na  $\hat{E}^3$ . Potrebujemo koordinatno transformacijo

$$\hat{E}^3 \rightarrow E^3$$

$$\hat{p} \mapsto p.$$

Z uporabo homogenih koordinat, lahko transformacijo zapišemo s pomočjo matrike

$$M = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{0,3} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix},$$

kjer velja  $m_{0,0} \neq 0$ . Preslikavo v homogenih koordinatah lahko torej zapišemo kot:

$$\hat{p} \mapsto p = M\hat{p}$$

Vektor  $\hat{p}$ , ki ima neničelno prvo koordinato, lahko zapišemo kot  $(1, b_M, c_M, d_M)^T$  (saj  $\lambda\hat{p}$  in  $\hat{p}$  predstavljata isti vektor v kartezičnih koordinatah). Vektor  $p$  je tako oblike

$$p = \begin{bmatrix} m_{0,0} + m_{0,1}b_M + m_{0,2}c_M + m_{0,3}d_M \\ m_{1,0} + m_{1,1}b_M + m_{1,2}c_M + m_{1,3}d_M \\ m_{2,0} + m_{2,1}b_M + m_{2,2}c_M + m_{2,3}d_M \\ m_{3,0} + m_{3,1}b_M + m_{3,2}c_M + m_{3,3}d_M \end{bmatrix}$$

Ker je to vektor v homogenih koordinatah, lahko ponovno uporabimo lahtnost, da  $\lambda p$  in  $p$  predstavljata isti vektor v kartezičnih koordinatah. Določimo, da ima vektor  $p$  prvo komponento enako  $m_{0,0}$ . Z matriko  $M$  to dosežemo tako, da  $m_{0,1}$ ,  $m_{0,2}$  in  $m_{0,3}$  dodelimo vrednost 0.

$$M = \left[ \begin{array}{c|ccc} m_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{array} \right],$$

Oglejmo si, kaj naredi matrika  $M$  z vektorjem  $(1, b_M, c_M, d_M)^T$ :

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} \\ m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_{1,1}b_M + m_{1,2}c_M + m_{1,3}d_M \\ m_{2,1}b_M + m_{2,2}c_M + m_{2,3}d_M \\ m_{3,1}b_M + m_{3,2}c_M + m_{3,3}d_M \end{bmatrix}$$

Dobimo vektor v homogeni obliki, ki ima na prvi komponenti vrednost  $m_{0,0}$ , preostale tri komponente pa predstavlja vektor

$$\begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix}$$

Ker je to vektor v homogeni obliki in ker je prva komponenta neničelna ( $m_{0,0} \neq 0$ ), je njemu prirejen vektor v kartezični obliki enak

$$\frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix},$$

ki pa je enak vsoti  $\underline{c} + R \cdot \underline{\hat{p}}$

Transformacijo  $\underline{\hat{p}} \mapsto \underline{p}$  v kartezičnih koordinatah zapišemo kot:

$$\underline{p} = \underline{c} + R\underline{\hat{p}}$$

Vektor  $(1, 0, 0, 0)^T$ , zapisan s homogenimi koordinatami, predstavlja koordinatno izhodišče. Vektorju  $c = M(1, 0, 0, 0)^T = (m_{0,0}, m_{1,0}, m_{2,0}, m_{3,0})^T$  zapisanemu v homogenih koordinatah pripada vektor  $\underline{c} = (\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{2,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{3,0}}{m_{0,0}})^T$ , zapisan v kartezičnih koordinatah. Ta vektor opisuje položaj koordinatnega izhodišča gibajočega se koordinatnega sistema  $\hat{E}^3$  glede na koordinatni sistem  $E^3$ . Matrika

$$\underline{R} = \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

opisuje orientacijo gibajočega se koordinatnega sistema  $\hat{E}^3$ . Pravimo ji **rotacijska matrika**. Ker stolpci matrike  $R$  predstavljajo transformacije koordinatnih osi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  in  $\vec{k}$ , za matriko  $R$  velja  $RR^T = R^T R = I$  in  $\det R = 1$ . Hkrati velja, da je matrika  $R$  ortogonalna. Opazimo torej, da lahko transformacijo točke zapišemo kot vsoto transformacije koordinatnega izhodišča gibajočega se koordinatnega izhodišča ter rotacije okrog koordinatnega izhodišča koordinatnega sistema  $\hat{E}^3$ .

## 2.3 Gibanje točk v času

Kadar je  $\underline{c} = \underline{c}(t)$  in  $R = R(t)$ , govorimo o gibanju togega telesa:

$$\hat{E}^3 \times I \rightarrow E^3$$

$$(\underline{\hat{p}}, t) \mapsto \underline{c}(t) + R(t)\underline{\hat{p}} =: \underline{p}(t)$$

Krivulji  $\underline{p}(t)$  pravimo **trajektorija** točke  $\underline{\hat{p}}$ . Če je  $\underline{c}(t) = (0, 0, 0)$ , potem trajektorija poljubne točke  $\underline{\hat{p}}$  leži na sferi z radijem  $||\underline{\hat{p}}||$  in središčem v koordinatnem izhodišču fiksnega koordinatnega sistema  $E^3$ . Rotacijski del gibanja  $R(t)$  opisuje gibanje po enotski sferi, zato se imenuje tudi **sferični del gibanja togega telesa**. Problem je konstrukcija ortogonalne matrike  $R$ .

## 2.4 Opis rotacij s kvaternioni

Pri opisovanju rotacij si lahko pomagamo s **kvaternioni**. Prostor kvaternionov  $\mathbb{H}$  je 4-dimenzionalni vektorski prostor s standardno bazo

$$\underline{1} = (1, (0, 0, 0)^T)$$

$$\underline{i} = (0, (1, 0, 0)^T)$$

$$\underline{j} = (0, (0, 1, 0)^T)$$

$$\underline{k} = (0, (0, 0, 1)^T).$$

Vsak kvaternion  $\mathcal{A}$  lahko zapišemo kot:  $\mathcal{A} = (a_0, \underline{a})$ , kjer rečemo, da sta  $a_0 \in \mathbb{R}$  skalarni del in  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  vektorski del.

Na kvaternionih sta definirana seštevanje in množenje kot:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_0, \underline{a}) + (b_0, \underline{b}) = (a_0 + b_0, \underline{a} + \underline{b}),$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (a_0 \cdot b_0 - \underline{a} \cdot \underline{b}, a_0 \underline{b} + b_0 \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b}).$$

Konjugirana vrednost kvaterniona  $\mathcal{A} = (a_0, \underline{a})$  je definirana kot  $\overline{\mathcal{A}} = (a_0, -\underline{a})$ . S pomočjo konjugirane vrednosti nato definiramo tudi normo kvaterniona kot

$$\|\mathcal{A}\| = \sqrt{\mathcal{A} \cdot \overline{\mathcal{A}}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

**Opomba 2.1** (Implementirane metode). V implementaciji vektorski del kvaterniona  $a$  pridobimo s funkcijo `quat_vec(a)`, sklararni del pa kar z ukazom `a(1)`. Kvaterniona  $a$  in  $b$  seštejemo z ukazom `a + b`, njun produkt pa kličemo s funkcijo `quatmultiply(a, b)`. Konjugirano vrednost kvaterniona  $a$  pridobimo s klicom funkcije `conj_quat(a)`. Za kvaternion  $a$  normo izračunamo z ukazom `sum(a.^2)`.

**Definicija 2.2.** Preslikava  $\chi : \mathbb{H} \setminus \{0\} \rightarrow SO_3$  oblike

$$Q \mapsto \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_2) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$Q = (q_0, (q_1, q_2, q_3)^T)$$

se imenuje **kinematična preslikava**.

Matrika  $\chi(Q)$  je rotacijska matrika. Velja pa tudi obratno. Vsako rotacijsko matriko  $R$  lahko zapišemo v zgornji obliki, to je, lahko jo preslikamo v dva **antipodna kvaterniona** oblike

$$\pm Q = \pm(q_0, (q_1, q_2, q_3)^T),$$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

**Kinematična preslikava** poda korespondenco med 3D rotacijami in parom antipodnih točk na 4D enotski sferi  $S^3 \subseteq R^4$ .

Ker velja  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ , so vrednosti  $|q_i|$ ;  $i = 0, 1, 2, 3$  na zaprtem intervalu med 0 in 1. Vrednost  $q_0$  in vektor  $(q_1, q_2, q_3)^T$  lahko zato zapišemo v obliki:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

in

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \vec{r}; \quad \vec{r} \text{ enotski vektor.}$$

Če kvaternion  $Q$  zapišemo v tej obliki, ima rotacija, prirejena temu kvaternionu lepo geometrijsko interpretacijo. Predstavlja namreč rotacijo za kot  $\phi$  okrog osi  $\vec{r}$ .

**Opomba 2.3** (Implementirane metode). V implementaciji rotacijsko matriko, prirejeno kvaternionu  $a$  generiramo s funkcijo  $quat\_rot\_mat(a)$ . Če imamo podan kot  $\phi$  in enotski vektor  $r$ , nam funkcija  $kot\_v\_kvat(\phi, r)$  poda pripadajoč kvaternion.

Ker lahko vsako rotacijo zapišemo v tej obliki, lahko tako zapišemo tudi rotacijo iz poglavja 2.2. Če imamo podano preslikavo  $M$ , poiščimo, kako za to preslikavo definiramo kvaternion  $Q$ . Primerjajmo matriki  $\mathbb{R}$  in poglavja 2.2 in  $\mathbb{R}$ , zapisanega s kvaternioni.

$$\begin{aligned} m_{0,0} + m_{1,1} + m_{1,2} + m_{3,3} &= 4q_0^2 \\ m_{3,2} - m_{2,3} &= 2 \cdot (q_2q_3 - q_0q_1) - 2 \cdot (q_2q_3 + q_0q_1) = 4q_0q_1 \\ m_{1,3} - m_{3,1} &= 2 \cdot (q_1q_3 + q_0q_2) - 2 \cdot (q_1q_3 + q_0q_2) = 4q_0q_2 \\ m_{2,1} - m_{1,2} &= 2 \cdot (q_1q_2 + q_0q_4) - 2 \cdot (q_1q_2 + q_0q_4) = 4q_0q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{3,2} - m_{2,3} &= 4q_0q_1 \\ m_{0,0} + m_{1,1} - m_{1,2} - m_{3,3} &= 4q_1^2 \\ m_{2,1} + m_{1,2} &= 4q_1q_2 \\ m_{1,3} + m_{3,1} &= 4q_1q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{1,3} - m_{3,1} &= 4q_0q_2 \\ m_{2,1} + m_{1,2} &= 4q_1q_2 \\ m_{0,0} - m_{1,1} + m_{1,2} - m_{3,3} &= 4q_2^2 \\ m_{3,2} + m_{2,3} &= 4q_2q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{2,1} - m_{1,2} &= 4q_0q_3 \\ m_{1,3} + m_{3,1} &= 4q_1q_3 \\ m_{3,2} + m_{2,3} &= 4q_2q_3 \\ m_{0,0} - m_{1,1} - m_{1,2} + m_{3,3} &= 4q_0^2 \end{aligned}$$

Opazimo, da v vsakem sklopu razmerja med vrednostmi enaka

$$q_0 : q_1 : q_2 : q_3$$

Ker  $q_0, q_1, q_2, q_3$  niso hkrati enaki 0, bo vsaj eno izmed zgornjih razmerij različno od  $0 : 0 : 0 : 0$ . Tisto razmerje nato uporabimo kot razmerje  $q_0 : q_1 : q_2 : q_3$ . Skupaj z enakostjo  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$  nato izračunamo kvaternion  $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$  (bolj natančno sta v množici rešitev dva antipodna kvaterniona).



## 2.5 Bezierjeve krivulje

Z uporabo kinematične preslikave lahko za konstrukcijo sferičnih gibanj uporabimo Bezierjeve krivulje. Izberemo kontrolne kvaternione  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ .

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n Q_i B_i^n(t)$$

Bezierjeva krivulja  $Q(t)$  v času  $t$  opiše kvaternion, ki mu priredimo rotacijo  $R(t)$ :

$$\chi(Q(t)) = R(t)$$

Rotacija, ki je določena z Bezierjevo krivuljo  $Q(t) = \sum_{i=0}^n Q_i B_i^n(t)$  stopnje  $n$ , je sferično racionalno gibanje stopnje  $2n$ .

Gibanje koordinatnega izhodišča zapišemo v obliki

$$\underline{c}(t) = \frac{w(t)}{\|Q(t)\|^2}; \quad w(t) := (w_1(t), w_2(t), w_3(t)).$$

**Opomba 2.4.** Za računanje Bezierjeve krivulje rotacije uporabimo funkciji *sbezier* in *sdecasteljau*, za gibanje koordinatnega izhodišča pa *bezier* in *decasteljau*.

Bezierjeve krivulje za rotacije računamo na sferi, zato pride do manjših zapletov z že znanimi postopki. Pri De Casteljaujevem algoritmu se običajno naredi linearno interpolacijo  $b = (1-t)b_0 + tb_1$  za parameter  $t$  med točkama  $b_0$  in  $b_1$ , ker pa želimo gibanje po sferi in ne po premici med točkama, moramo uporabiti sferično linearno interpolacijo.

**Definicija 2.5.** [3] **Sferična linearna interpolacija**, znana tudi kot **slerp**, je preslikava

$$\text{slerp}(p_0, p_1, t) = \frac{\sin((1-t)\varphi)}{\sin \varphi} p_0 + \frac{\sin(t\varphi)}{\sin \varphi} p_1,$$

kjer je  $\varphi$  kot med  $p_0$  in  $p_1$ , da velja  $\cos \varphi = p_0 \cdot p_1$ . Slerp torej vrne točko na krožnem loku med točkama  $p_0$  in  $p_1$ , ki ustreza parameteru  $t$ .

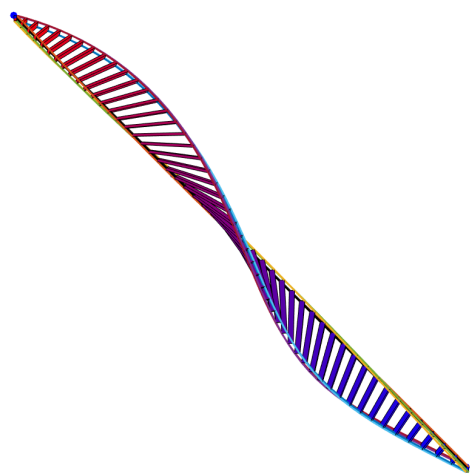
Sferično linearno interpolacijo lahko krajše zapišemo v kontekstu kvaternionov  $q_0$  in  $q_1$ :

$$\begin{aligned} \text{slerp}(q_0, q_1, t) &= q_0(q_0^{-1}q_1)^t \\ &= q_1(q_1^{-1}q_0)^{1-t} \\ &= (q_0q_1^{-1})^{1-t}q_1 \\ &= (q_1q_0^{-1})^tq_0. \end{aligned}$$

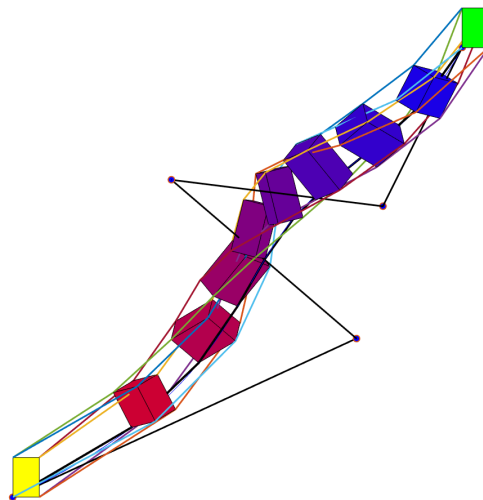
Pri računanju rotacije je bila uporabljena prva verzija formule.

## 3 Implementacija

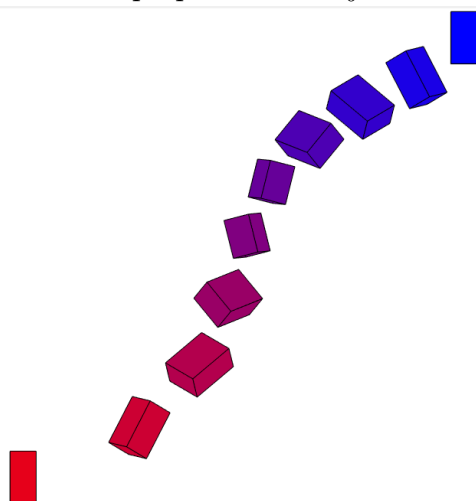
### 3.1 Primeri



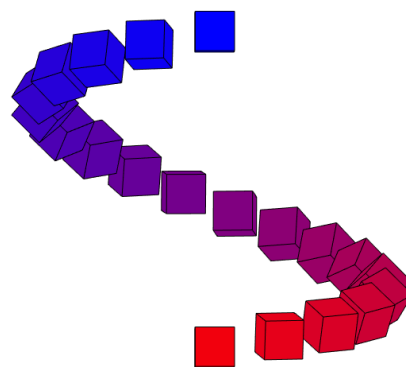
Gibanje palice (v obliki kvadra)  
s preprosto rotacijo



Gibanje kvadra po prostoru z  
izrisanimi tirnicami ogljšč



Gibanje kocke po spirali  
(prva perspektiva)



Gibanje kocke po spirali  
(druga perspektiva)

## 3.2 Kvaternioni

Ker si pri opisovanju rotacij pomagamo s kvaternioni, sva na kvaternionih definirala naslednje funkcije:

### Vektorski del kvaterniona:

Input:

- kvaternion  $Q$  oblike  $[q_0, q_1, q_2, q_3]$

Output:

- vektorski del  $v$  ( $q_1, q_2, q_3$ ) kvaterniona  $Q$

Listing 1: quat\_vec

```
1 function v = quat_vec(Q)
2
3 v = [Q(2) Q(3) Q(4)];
4 end
```

### Množenje kvaternionov:

Input:

- kvaternion  $a$  oblike  $[a_1, a_2, a_3, a_4]$
- kvaternion  $b$  oblike  $[b_1, b_2, b_3, b_4]$

Output:

- kvaternion  $c = a \cdot b$

Listing 2: quatmultiply

```
1 function c = quatmultiply(a,b)
2
3 c = zeros(1,4);
4 a_s = a(1);
5 b_s = b(1);
6 a_v = quat_vec(a);
7 b_v = quat_vec(b);
8 c(1) = a_s * b_s - a_v * b_v';
9 c_v = a_s * b_v + b_s * a_v + cross(a_v,b_v);
10 c(2) = c_v(1);
11 c(3) = c_v(2);
12 c(4) = c_v(3);
13 end
```

### Konjugirana vrednost kvaterniona:

Input:

- kvaternion  $q$  oblike  $[q_1, q_2, q_3, q_4]$

Output:

- kvaternion  $Q = \bar{q}$

Listing 3: conj\_quat

```
1 function Q = conj_quat(q)
2
3 Q = [q(1), -q(2:4)];
4 end
```

### Potenca kvaterniona $q$ :

Input:

- kvaternion  $q$  oblike  $[q_1, q_2, q_3, q_4]$
- eksponent  $t$

Output:

- $q^t$

Listing 4: quat\_exp

```
1 function e = quat_exp(q, t)
2
3 if t==1
4     e = conj_quat(q)/norm(q);
5 else
6     a = q(1);
7     v = quat_vec(q);
8     theta = acos(a/norm(q));
9     n = v/norm(v);
10    e = norm(q)^t*[cos(t*theta), n*sin(t*theta)];
11 end
```

### Rotacijska matrika:

Input:

- kvaternion  $q$  oblike  $[q_1, q_2, q_3, q_4]$

Output:

- rotacijska matrika  $H$  za sfericno gibanje

Listing 5: quat\_rot\_mat

```

1 function H = quat_rot_mat(Q)
2
3 H = zeros(3,3);
4 h = sum(Q.^2);
5
6 if h == 0
7     H = eye(3,3);
8 else
9     H(1,1) = Q(1)^2+Q(2)^2 - Q(3)^2 - Q(4)^2;
10    H(1,2) = 2*(Q(2)*Q(3) - Q(1)*Q(4));
11    H(1,3) = 2*(Q(2)*Q(4) + Q(1)*Q(3));
12
13    H(2,1) = 2*(Q(2)*Q(3) + Q(1)*Q(4));
14    H(2,2) = Q(1)^2 - Q(2)^2 + Q(3)^2 - Q(4)^2;
15    H(2,3) = 2*(Q(3)*Q(4) - Q(1)*Q(2));
16
17    H(3,1) = 2*(Q(2)*Q(4) - Q(1)*Q(3));
18    H(3,2) = 2*(Q(3)*Q(4) + Q(1)*Q(2));
19    H(3,3) = Q(1)^2 - Q(2)^2 - Q(3)^2 + Q(4)^2;
20
21    H = 1/h.*H;
22 end
23 end

```

**Kvaternion glede na rotacijo za kot  $\phi$  okrog osi  $e$ :**

Input:

- kot  $\phi$
- vektor osi  $e$

Output:

- kvaternion  $Q$

Listing 6: kot\_v\_kvrat

```

1 function r = kot_v_kvrat(fi, e)
2
3 e = e/norm(e);
4 r = [cos(fi/2) sin(fi/2)*e(1) sin(fi/2)*e(2) sin(fi/2)*e(3)];
5 end

```

### Rotacija vektorja okrog koordinatnih osi:

Input:

- vektor  $vec$
- koti  $kot\_x$ ,  $kot\_y$ ,  $kot\_z$  rotacije okrog  $x,y,z$  osi

Output:

- zarotiran vektor  $v$

Listing 7: rot\_vek\_za\_kot

```
1 function v = rot_vek_za_kot(vec, kot_x,kot_y,kot_z)
2
3 q = angle2quat(kot_x, kot_y, kot_z);
4 v = quatmultiply(q, quatmultiply([0 vec], conj_quat(q)));
5 end
```

### 3.3 Bezierjeve krivulje

#### Bezier:

Input:

- matrika  $B$  velikosti  $(n+1) \times d$ , ki predstavlja kontrolne točke Bezierjeve krivulje
- seznam parametrov  $t$  dolžine  $k$ , pri katerih računamo vrednost Bezierjeve krivulje

Output:

- matrika  $b$ , ki predstavlja točke na Bezierjevi krivulji pri parametrih iz  $t$

Listing 8: bezier

```
1 function b = bezier (B,t)
2
3 [n,d] = size(B);
4 k = length(t);
5 b = zeros(k,d);
6
7 for i=1:k
8     for j=1:d
9         D = decasteljau(B(:,j)',t(i));
10        b(i,j) = D(1,n);
11    end
12 end
```

#### Decasteljau:

Input:

- seznam koordinat  $b$  kontrolnih točk Bezierjeve krivulje stopnje  $n$
- parameter  $t$ , pri katerem računamo koordinato Bezierjeve krivulje

Output:

- Casteljaujeva shema  $D$

Listing 9: decasteljau

```
1 function D = decasteljau (b,t)
2
3 n = length(b);
4 D = [b', NaN(n,n-1)];
5
6 for r=1:n
7     for i=0:n-r-1
8         D(i+1,r+1) = (1-t)*D(i+1,r) + t*D(i+2,r);
9     end
10 end
```

### sBezier:

Input:

- matrika  $Q$  velikosti  $(n+1) \times d$ , ki predstavlja kontrolne točke Bezierjeve krivulje
- seznam parametrov  $t$  dolžine  $k$ , pri katerih računamo vrednost Bezierjeve krivulje

Output:

- matrika  $b$ , ki predstavlja točke na Bezierjevi krivulji pri parametrih iz  $t$

Listing 10: sbezier

```
1 function b = sbezier(Q,t)
2 k = length(t);
3
4 b = cell(k,1);
5
6 for K = 1:k
7     decast = sdecasteljau(Q,t(K));
8     b{K} = decast(1,end);
9 end
10 b;
```

### sDecasteljau:

Input:

- seznam koordinat  $Q$  kontrolnih točk Bezierjeve krivulje stopnje  $n$
- parameter  $t$ , pri katerem računamo koordinato Bezierjeve krivulje

Output:

- Casteljaujeva shema  $D$

Listing 11: sdecasteljau

```
1 function D = sdecasteljau(Q,t)
2
3 [n,m] = size(Q);
4 n = n-1;
5 D = cell(n+1, n+1);
6 for i = 1:(n+1)
7     D{i,1} = Q(i,:);
8 end
9 for j=2:(n+1)
10     for i=1:(n+2-j)
11         D{i,j} = slerp(D{i,j-1},D{i+1,j-1},t);
12     end
13 end
14 end
```



### Matrika iz celice:

Input:

- celica  $Q$

Output:

- matrika  $Q$

Listing 12: polepsaj\_sbezier

```
1 function mat_Q = polepsaj_sbezier(Q)
2
3 n = length(Q);
4 mat_Q = zeros(n,4);
5 for i = 1:n
6     mat_Q(i,:) = Q{i}{1};
7 end
8 end
```

### Translacija izhodišča:

Input:

- translacijska funkcija izhodišča  $w$ , računana na  $t$  ( $n \times 3$  matrika)
- sferična rotacijska Bezierjeva krivulja, računana na  $t$  ( $n \times 4$  matrika)
- seznam parametrov  $t$  dolžine  $n$ , pri katerih računamo funkcijo.

Output:

- normirana translacija ( $n \times 3$  matrika)

Listing 13: translacija

```
1 function c = translacija(w, Q, t)
2
3 n = length(t);
4 c = zeros(n,3);
5
6 for i = 1:n
7     nQt = norm(Q(i,:))^2;
8     c(i,:) = w(i,:)/nQt;
9 end
10 end
```

### Celotno gibanje togega telesa:

Input:

- matrika kontrolnih kvaternionov  $Q$  za sferične rotacije
- matrika kontrolnih točk za Bezierjevo krivuljo gibanja izhodišča
- seznam parametrov  $t$ , pri katerih opazujemo gibanje

Output:

- matrika kvaternionov  $mat_Q$ , ki določajo sferične rotacije
- Bezierjeva krivulja  $w$ , ki določa gibanje koordinatnega izhodišča
- normirana translacijska funkcija  $c$

Listing 14: izracunaj\_vse

```
1 function [mat_Q,w,c] = izracunaj_vse(Q, B, t)
2
3 mat_Q = polepsaj_sbezier(sbezier(Q,t));
4 w = bezier(B,t);
5 c = translacija(w,mat_Q, t);
6 end
```

### 3.4 Kocka

**Oglišča kocke z diagonalo  $d$ :**

Input:

- krajišči diagonale  $T0$  in  $T1$  ( $d = T0T1$ )

Output:

- koordinate oglišč kocke

Listing 15: kocka

```
1 function oglisca = kocka(T0, T1)
2
3 a = [T1(1) - T0(1) 0 0];
4 b = [0 T1(2) - T0(2) 0];
5 c = [0 0 T1(3) - T0(3)];
6 oglisca = [T0; T0+b; T0+a+b; T0+a; T0+c; T0+c+b; T0+a+b+c; T0+a+c];
7 end
```

**Kocka s stranicami in izhodiščem:**

Input:

- vektorji stranic  $X, Y, Z$
- izhodišče  $T0$

Output:

- vsa oglišča kocke, ki se začne v  $T0$

Listing 16: kocka\_vek

```
1 function oglisca = kocka_vek(X, Y, Z, T0)
2
3 oglisca = [T0; T0+Y; T0+X+Y; T0+X; T0+Z; T0+Z+Y; T0+X+Y+Z; T0+X+Z];
4 end
```

**Rotacija kocke:**

Input:

- kocka  $K0$
- koti  $kot\_x, kot\_y, kot\_z$

Output:

- $K1$  - zarotirana kocka  $K0$  za podane kote

Listing 17: rotiraj\_kocko

```

1 function K1 = rotiraj_kocko(K0, kot_x, kot_y, kot_z)
2
3 K1 = zeros(size(K0));
4 for i = 1:8
5     K1(i,:) = quat_vec(rot_vek_za_kot(K0(i,:), kot_x, kot_y, kot_z));
6 end
7 end

```

### Rotacija kocke:

Input:

- kvaternion  $Q$
- vektorji stranic kocke  $x, y$  in  $z$

Output:

- Oglišča zarotirane kocke z enim ogliščem v  $[0, 0, 0]$

Listing 18: rotirana\_kocka

```

1 function [K0, x0, y0, z0] = rotirana_kocka(x,y,z,Q)
2
3 H = quat_rot_mat(Q);
4 x0 = (H*x')';
5 y0 = (H*y')';
6 z0 = (H*z')';
7 K0 = kocka_vek(x0,y0,z0, [0 0 0]);
8
9 end

```

## Literatura

- [1] G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim, *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, verzija 2002, [ogled 10. .1. 2019]
- [2] G. Jaklič, B. Jüttler, M. Krajnc, V. Vitrih, E. Žagar, *Hermite interpolation by rational Gk motions of low degree*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013, dostopno na <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042712003433>
- [3] *Slerp* v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 10. .1. 2019], dostopno na <https://en.wikipedia.org/wiki/Slerp>.