Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Geometrijsko zvezna gibanja togih teles

Matic Oskar Hajšen in Eva Zmazek

Ljubljana, 2019

1 Uvod

Kazalo

Listings

1.1 Definicija

Imamo 2 koordinatna sistema v $\mathbb{R}^3$:

- fiksen koordinatni sistem E^3
- gibajoč se koordinatni sistem $\hat{E}^3$

Točke lahko predstavimo v enem ali drugem.

Označimp s $\underline{p}$ točko glede na fiksen koordinatni sistem E^3, s $\underline{\hat{p}}$ pa glede na $\hat{E}^3$. Potrebujemo koordinatno transformacijo

$$\hat{E}^3 \to E^3$$

$$\underline{\hat{p}} \mapsto \underline{p} = \underline{c} + R\underline{\hat{p}}$$

$\underline{c}$ predstavlja položaj izhodišča koordinatnega sistema $\hat{E}^3$ v koordinatni sistem E^3, R pa je **rotacijska matrika**, ki opisuje rotacijo gibajočega se koordinatnega sistema.

Kadar je $\underline{c} = \underline{c}(t)$ in $R = R(t)$, govorimo o gibanju togega telesa:

$$\hat{E}^3 \times I \to E^3$$

$$(\underline{\hat{p}}, t) \mapsto \underline{c}(t) + R(t)\underline{\hat{p}} =: \underline{p}(t)$$

$\underline{p}(t)$ je trajektorija točke $\underline{\hat{p}}$

Če je $\underline{c}(t) = (0, 0, 0)$, potem trajektorija poljubne točke $\underline{\hat{p}}$ leži na sferi z radijem $||\underline{\hat{p}}||$.

Rotacijski del gibanja $R(t)$ opisuje gibanje po enotski sferi, zato se imenuje tudi **sferični del gibanja togega telesa**. Problem je konstrukcija matrike R, ki mora biti ortogonalna. ($RR^T = R^T R = I$, $\det R = 1$).

Pri opisovanju rotacij si lahko pomagamo s **kvaternioni**. Prostor kvaternionov $\mathbb{H}$ je 4-dimenzionalni vektorski prostor s standardno bazo

$$\underline{1} = (1, (0, 0, 0)^T)$$
$$\underline{i} = (0, (1, 0, 0)^T)$$
$$\underline{j} = (0, (0, 1, 0)^T)$$
$$\underline{k} = (0, (0, 0, 1)^T)$$

Vsak kvaternion $\mathcal{A}$ lahko zapišemo kot:

$$\mathcal{A} = (a_0, \underline{a}),\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ skalarni del },\ \underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \text{ vektorski del}$$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_0, \underline{a}) + (b_0, \underline{b}) = (a_0 + b_0, \underline{a} + \underline{b})$$
$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (a_0 \cdot b_0 - \underline{a} \cdot \underline{b}, a_0\underline{b} + b_0\underline{a} + \underline{a} \times \underline{b})$$

Definicija 1.1. Preslikava $\chi : \mathbb{H}\backslash\{0\} \to SO_3$ oblike

$$Q \mapsto \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_2) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$Q = (q_0, (q_1, q_2, q_3)^T)$$

se imenuje **kinematična preslikava**.

Matika $\chi(Q)$ je rotacijska matrika.
Velja pa tudi obratno. Vsako rotacijsko matriko R lahko zapišemo v zgornji obliki, to je lahko jo preslikamo v dva **antipodna kvaterniona** oblike

$$\pm Q = \pm(q_0, (q_1, q_2, q_3)^T),$$
$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Kinematična preslikava poda korespondenco med 3D rotacijami in parom antipodnih točk na 4D enotski sferi $S^3 \subseteq R^4$.
Z uporabo kinematične preslikave lahko za konstrukcijo sferičnih gibanj uporabimo Bezierjeve krivulje.
Izberemo kontrolne kvaternione $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} Q_i B_i^n(t)$$

$$\chi(Q(t)) = R(t)$$

Izberemo $\underline{c}(t) = \frac{w(t)}{||Q(t)||^2}$.

2 Implementacija

Ker si pri opisovanju rotacij pomagamo s kvaternioni, sva jih najprej prevedla iz seznama v vektorsko obliko:

```
function Q = array2quat(a, b, c, d)
%input:
%a, b, c, d      komponente
%output:
%Q               kvaternion

Q = [a, b, c, d];
end
```

S funcijo $quad\_vec(Q)$ pridobima vektorski del kvaterniona.

```
function v = quat_vec(Q)
%input:
%Q               kvaternion (q0, q1, q2, q3)
%output:
%v               vektorski komponenta Q-ja, (q1, q2, q3)


v = [Q(2) Q(3) Q(4)];
end
```

S funcijo $quat\_rot\_mat$ oblikujeva rotacijsko matrako iz definicije 1.1:

```
function H = quat_rot_mat(Q)
%input:
%Q           kvaternion
%
%output:
%H           rotacijska matrika za sfericno gibanje
%            (hi v zapiskih)

H = zeros(3,3);
h = sum(Q.^2);

if h == 0
    H = eye(3,3);
else
    H(1,1) = Q(1)^2+Q(2)^2 - Q(3)^2 - Q(4)^2;
    H(1,2) = 2*(Q(2)*Q(3) - Q(1)*Q(4));
    H(1,3) = 2*(Q(2)*Q(4) + Q(1)*Q(3));

    H(2,1) = 2*(Q(2)*Q(3) + Q(1)*Q(4));
    H(2,2) = Q(1)^2 - Q(2)^2 + Q(3)^2 - Q(4)^2;
    H(2,3) = 2*(Q(3)*Q(4) - Q(1)*Q(2));
```

```

    H(3,1) = 2*(Q(2)*Q(4) - Q(1)*Q(3));
    H(3,2) = 2*(Q(3)*Q(4) + Q(1)*Q(2));
    H(3,3) = Q(1)^2 - Q(2)^2 - Q(3)^2 + Q(4)^2;

    H = 1/h.*H;
end

end
```

Listing 1: For educational purposes

```
% example of while loop using placeholders
while ⟨condition⟩
  if ⟨something-bad-happens⟩
    break
  else
    % do something useful
  end
  % do more things
end
```