

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Geometrijsko zvezna gibanja togih teles

Matic Oskar Hajšen in Eva Zmazek

Ljubljana, 2019

Kazalo

1	Uvod	4
2	Teoretično ozadje	4
2.1	Homogene in kartezične koordinate	4
2.2	Zveza med koordinatami točk v fiksnem koordinatnem sistemu in ko- ordinatami točk v gibajočem se koordinatnem sistemu	4
2.3	Gibanje točk v času	5
2.4	Opis rotacij s kvaternioni	6
3	Implementacija	7

Listings

1	For educational purposes	8
---	------------------------------------	---

1 Uvod

Z najino seminarsko bova prikazala, kako se da znanje, pridobljeno pri tem predmetu, uporabiti pri upodobitvi gibanja togih teles, ki se uporabljajo pri računalniških animacijah in v robotiki. Za opis teh gibanj bomo uporabljali kvaternione in bezierjeve krivulje na kvaternionih.

2 Teoretično ozadje

2.1 Homogene in kartezične koordinate

Imejmo vektor p v 3-dimenzionalnem prostoru s homogenimi koordinatami $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^4 / \{(0, 0, 0, 0)^T\}$. Če je prva komponenta p_0 neničelna, lahko za točko p definiramo prirejene kartezične koordinate $\underline{p} = (\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3)^T \in \mathbb{R}^3$, pri čemer velja $\underline{p}_i = \frac{p_i}{p_0}$ za $i = 1, 2, 3$. Na tak način vektorja p in λp opisujeta isto točko \underline{p} za poljubno neničelno realno število λ . Vektorjem z ničelno prvo komponento priredimo točke v neskončnosti.

2.2 Zveza med koordinatami točk v fiksnem koordinatnem sistemu in koordinatami točk v gibajočem se koordinatnem sistemu

Definirajmo dva koordinatna sistema v \mathbb{R}^3 :

- fiksen koordinatni sistem E^3 (običajen koordinatni sistem)
- gibajoč se koordinatni sistem \hat{E}^3

Točke lahko predstavimo v enem ali drugem.

Označimo s \underline{p} točko glede na fiksen koordinatni sistem E^3 , s $\hat{\underline{p}}$ pa glede na \hat{E}^3 . Potrebujemo koordinatno transformacijo

$$\hat{E}^3 \rightarrow E^3$$

$$\hat{\underline{p}} \mapsto \underline{p}$$

Z uporabo homogenih koordinat, lahko transformacijo zapišemo s pomočjo matrike

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} m_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{array} \right],$$

kjer velja $m_{0,0} \neq 0$. Preslikavo lahko torej zapišemo kot:

$$\hat{\underline{p}} \mapsto \underline{p} = M\hat{\underline{p}}$$

Vektorju $c = M(1, 0, 0, 0)^T = (m_{0,0}, m_{1,0}, m_{2,0}, m_{3,0})^T$ zapisanemu v homogenih koordinatah pripada vektor $\underline{c} = (\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{2,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{3,0}}{m_{0,0}})^T$, zapisan v kartezičnih koordinatah.

Ta vektor opisuje položaj koordinatnega izhodišča gibajočega se koordinatnega sistema \hat{E}^3 glede na koordinatni sistem E^3 .

3×3 matrika

$$\underline{R} = \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

opisuje orientacijo gibajočega se koordinatnega sistema \hat{E}^3 . Pravimo ji **rotacijska matrika**.

Oglejmo si, kaj naredi matrika M z vektorjem $[1, b_M, c_M, d_M]$:

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} \\ m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{1,1}b_M & m_{1,2}c_M & m_{1,3}d_M \\ m_{2,1}b_M & m_{2,2}c_M & m_{2,3}d_M \\ m_{3,1}b_M & m_{3,2}c_M & m_{3,3}d_M \end{bmatrix}$$

Dobimo vektor v homogeni obliki, ki ima na prvi komponenti vrednost $m_{0,0}$, preostale tri komponente pa predstavlja vektor

$$\begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix}$$

Ker je to vektor v homogeni obliki in ker je prva komponenta neničelna ($m_{0,0} \neq 0$), je njemu prirejen vektor v kartezični obliki enak

$$\frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix},$$

ki pa je enak vsoti $\underline{c} + R \cdot \underline{\hat{p}}$

Transformacijo $\underline{\hat{p}} \mapsto \underline{p}$ tako zapišemo kot:

$$\underline{p} = M \cdot \underline{\hat{p}} = \underline{c} + R\underline{\hat{p}}$$

2.3 Gibanje točk v času

Kadar je $\underline{c} = \underline{c}(t)$ in $R = R(t)$, govorimo o gibanju togega telesa:

$$\hat{E}^3 \times I \rightarrow E^3$$

$$(\underline{\hat{p}}, t) \mapsto \underline{c}(t) + R(t)\underline{\hat{p}} =: \underline{p}(t)$$

Krivulji $\underline{p}(t)$ pravimo **trajektorija** točke $\underline{\hat{p}}$

Če je $\underline{c}(t) = (0, 0, 0)$, potem trajektorija poljubne točke $\underline{\hat{p}}$ leži na sferi z radijem $\|\underline{\hat{p}}\|$. Rotacijski del gibanja $R(t)$ opisuje gibanje po enotski sferi, zato se imenuje tudi **sferični del gibanja togega telesa**. Problem je konstrukcija matrike R , ki mora biti ortogonalna. ($RR^T = R^T R = I$, $\det R = 1$).

2.4 Opis rotacij s kvaternioni

Pri opisovanju rotacij si lahko pomagamo s **kvaternioni**. Prostor kvaternionov \mathbb{H} je 4-dimenzionalni vektorski prostor s standardno bazo

$$\underline{1} = (1, (0, 0, 0)^T)$$

$$\underline{i} = (0, (1, 0, 0)^T)$$

$$\underline{j} = (0, (0, 1, 0)^T)$$

$$\underline{k} = (0, (0, 0, 1)^T)$$

Vsak kvaternion \mathcal{A} lahko zapišemo kot:

$$\mathcal{A} = (a_0, \underline{a}), \quad a_0 \in \mathbb{R} \text{ skalarni del, } \underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \text{ vektorski del}$$

Na kvaternionih sta definirana seštevanje in množenje kot:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_0, \underline{a}) + (b_0, \underline{b}) = (a_0 + b_0, \underline{a} + \underline{b})$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (a_0 \cdot b_0 - \underline{a} \cdot \underline{b}, a_0 \underline{b} + b_0 \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b})$$

Definicija 2.1. Preslikava $\chi : \mathbb{H} \setminus \{0\} \rightarrow SO_3$ oblike

$$Q \mapsto \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$Q = (q_0, (q_1, q_2, q_3)^T)$$

se imenuje **kinematična preslikava**.

Matika $\chi(Q)$ je rotacijska matrika.

Velja pa tudi obratno. Vsako rotacijsko matriko R lahko zapišemo v zgornji obliki, to je lahko jo preslikamo v dva **antipodna kvaterniona** oblike

$$\pm Q = \pm(q_0, (q_1, q_2, q_3)^T),$$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Kinematična preslikava poda korespondenco med 3D rotacijami in parom antipodnih točk na 4D enotski sferi $S^3 \subseteq R^4$.

Z uporabo kinematične preslikave lahko za konstrukcijo sferičnih gibanj uporabimo Bezierjeve krivulje.

Izberemo kontrolne kvaternione Q_0, Q_1, \dots, Q_n

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n Q_i B_i^n(t)$$

$$\chi(Q(t)) = R(t)$$

Izberemo $\underline{c}(t) = \frac{w(t)}{\|Q(t)\|^2}$.

3 Implementacija

Ker si pri opisovanju rotacij pomagamo s kvaternioni, sva jih najprej prevedla iz seznama v vektorsko obliko:

```
1 function Q = array2quat(a, b, c, d)
2 %input:
3 %a, b, c, d      komponente
4 %output:
5 %Q              kvaternion
6
7 Q = [a, b, c, d];
8 end
```

S funkcijo *quat_vec(Q)* pridobimo vektorski del kvaterniona.

```
1 function v = quat_vec(Q)
2 %input:
3 %Q              kvaternion (q0, q1, q2, q3)
4 %output:
5 %v              vektorski komponenta Q-ja, (q1, q2, q3)
6
7
8 v = [Q(2) Q(3) Q(4)];
9 end
```

S funkcijo *quat_rot_mat* oblikujemo rotacijsko matriko iz definicije 2.1:

```
1 function H = quat_rot_mat(Q)
2 %input:
3 %Q              kvaternion
4 %
5 %output:
6 %H              rotacijska matrika za sferično gibanje
7 %              (hi v zapiskih)
8
9 H = zeros(3,3);
10 h = sum(Q.^2);
11
12 if h == 0
13     H = eye(3,3);
14 else
15     H(1,1) = Q(1)^2+Q(2)^2 - Q(3)^2 - Q(4)^2;
16     H(1,2) = 2*(Q(2)*Q(3) - Q(1)*Q(4));
17     H(1,3) = 2*(Q(2)*Q(4) + Q(1)*Q(3));
18
19     H(2,1) = 2*(Q(2)*Q(3) + Q(1)*Q(4));
20     H(2,2) = Q(1)^2 - Q(2)^2 + Q(3)^2 - Q(4)^2;
21     H(2,3) = 2*(Q(3)*Q(4) - Q(1)*Q(2));
```

```

22
23     H(3,1) = 2*(Q(2)*Q(4) - Q(1)*Q(3));
24     H(3,2) = 2*(Q(3)*Q(4) + Q(1)*Q(2));
25     H(3,3) = Q(1)^2 - Q(2)^2 - Q(3)^2 + Q(4)^2;
26
27     H = 1/h.*H;
28 end
29
30 end

```

Listing 1: For educational purposes

```

1 % example of while loop using placeholders
2 while <condition>
3     if <something-bad-happens>
4         break
5     else
6         % do something useful
7     end
8     % do more things
9 end

```