# Gibanja togih teles

Matic Oskar Hajšen in Eva Zmazek

15. januar 2019

# Homogene in kartezične koordinate

$P$ vektor v $3$-dimenzionalnem prostoru $\mathbb{R}^3$

- Homogene koordinate vektorja $P$:

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^4 / \{(0,0,0,0)^T\}$$

- Če $p_0 \neq 0$, potem so kartezične koordinate vektorja $P$ enake

$$\underline{p} = (\underline{p_1}, \underline{p_2}, \underline{p_3})^T \in \mathbb{R}^3;\ \underline{p_i} = \frac{p_i}{p_0} \text{ za } i = 1, 2, 3$$

- Vektorjem z ničelno prvo homogeno komponento priredimo točke v neskončnosti.

### Opomba

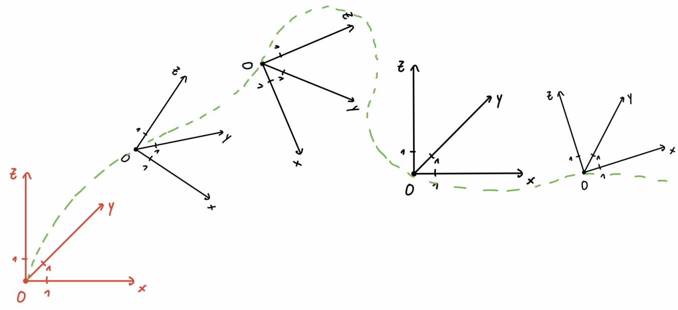
Vektorja $p$ in $\lambda p$ v homogenih koordinatah opisujeta isti vektor $\underline{p}$ v kartezičnih koordinatah za poljubno neničelno realno število $\lambda$.

# Fiksen in gibajoč se koordinatni sistem

Definirajmo dva koordinatna sistema v $\mathbb{R}^3$:

- fiksen koordinatni sistem $E^3$ (običajen koordinatni sistem)
- gibajoč se koordinatni sistem $\hat{E}^3$

Točke lahko predstavimo v enem ali drugem.



Potrebujemo koordinatno transformacijo

$$\hat{E}^3 \to E^3$$

$$\hat{p} \mapsto p$$

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} m_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{array}\right],$$

$$\hat{p} \mapsto p = M\hat{p}$$

# Transformacija koordinatnega izhodišča

Koordinatno izhodišče:

- v kartezičnih koordinatah: $(0, 0, 0)^T$
- v homogenih koordinatah: $(1, 0, 0, 0)^T$

Transformirano koordinatno izhodišče:

- v homogenih koordinatah:

$$c = M(1, 0, 0, 0)^T = (m_{0,0}, m_{1,0}, m_{2,3}, m_{3,0})^T$$

- v kartezičnih koordinatah:

$$\underline{c} = (\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{2,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{3,0}}{m_{0,0}})^T$$

# Rotacijska matrika

$$\underline{R} = \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

opisuje orientacijo gibajočega se koordinatnega sistema $\hat{E}^3$

# Transformacija vektorja $[1, b_M, c_M, d_M]$

$$d = M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} \\ m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{1,1}b_M & m_{1,2}c_M & m_{1,3}d_M \\ m_{2,1}b_M & m_{2,2}c_M & m_{2,3}d_M \\ m_{3,1}b_M & m_{3,2}c_M & m_{3,3}d_M \end{bmatrix}$$

$$d_0 = m_{0,0}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix}$$

$$d_0 = m_{0,0}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix}$$

$$\underline{d} = \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{c} + R \cdot \underline{\hat{p}}$$

Transformacijo $\underline{\hat{p}} \mapsto \underline{p}$ v kartezičnih koordinatah zapišemo kot:

$$\underline{p} = \underline{c} + R\underline{\hat{p}}$$

# Gibanje točk v času

Kadar je $\underline{c} = \underline{c}(t)$ in $R = R(t)$, govorimo o gibanju togega telesa:

$$\hat{E}^3 \times I \to E^3$$

$$(\underline{\hat{p}}, t) \mapsto \underline{c}(t) + R(t)\underline{\hat{p}} =: \underline{p}(t)$$

Krivulji $\underline{p}(t)$ pravimo **trajektorija** točke $\underline{\hat{p}}$

- Če je $c(t) = (0,0,0)^T$, se točka $\underline{\hat{p}}$ giblje po sferi z radije $||\underline{\hat{p}}||$
- $R(t)$ se imenuje tudi **sferični del gibanja togega telesa**

# Opis rotacij s kvaternioni

### Definicija

Prostor kvaternionov $\mathbb{H}$ je $4$-dimenzionalni vektorski prostor s standardno bazo

$$\underline{1} = (1, (0, 0, 0)^T)$$

$$\underline{i} = (0, (1, 0, 0)^T)$$

$$\underline{j} = (0, (0, 1, 0)^T)$$

$$\underline{k} = (0, (0, 0, 1)^T)$$

Vsak kvaternion $\mathcal{A}$ lahko zapišemo kot:

$$\mathcal{A} = (a_0, \underline{a}),\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ skalarni del },\ \underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \text{ vektorski del}$$

## operacije na kvaternionih

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_0, \underline{a}) + (b_0, \underline{b}) = (a_0 + b_0, \underline{a} + \underline{b})$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (a_0 \cdot b_0 - \underline{a} \cdot \underline{b}, a_0 \underline{b} + b_0 \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b})$$

$$\overline{\mathcal{A}} = (a_0, -\underline{a})$$

$$||\mathcal{A}|| = \sqrt{\mathcal{A} \cdot \overline{\mathcal{A}}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

## Definicija

Preslikava $\chi : \mathbb{H}\backslash\{0\} \to SO_3$ oblike

$$Q \mapsto \frac{1}{||Q||^2} \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_2) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$Q = (q_0, (q_1, q_2, q_3)^T)$$

se imenuje **kinematična preslikava.**

- matrika $\chi(Q)$ je rotacijska matrika
- vsako rotacijsko matriko $R$ lahko preslikamo v dva **antipodna kvaterniona** oblike

$$\pm Q = \pm(q_0, (q_1, q_2, q_3)^T),$$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

# Geometrijska interpretacija

Vrednost $q_0$ in vektor $(q_1, q_2, q_3)^T$ lahko zato zapišemo v obliki:

$$q_0 = \cos(\frac{\phi}{2})$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \sin(\frac{\phi}{2}) \cdot \vec{r};\ \vec{r} \text{ enotski vektor}$$

Kvaternion $Q$ predstavlja rotacijo za kot $\phi$ okrog osi $\vec{r}$.

# Prirejanje kvaterniona podani matriki $M$

$$
\begin{aligned}
m_{0,0} + m_{1,1} + m_{1,2} + m_{3,3} &= 4q_0^2 \\
m_{3,2} - m_{2,3} = 2 \cdot (q_2q_3 - q_0q_1) - 2 \cdot (q_2q_3 + q_0q_1) &= 4q_0q_1 \\
m_{1,3} - m_{3,1} = 2 \cdot (q_1q_3 + q_0q_2) - 2 \cdot (q_1q_3 + q_0q_2) &= 4q_0q_2 \\
m_{2,1} - m_{1,2} = 2 \cdot (q_1q_2 + q_0q_4) - 2 \cdot (q_1q_2 + q_0q_4) &= 4q_0q_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{3,2} - m_{2,3} &= 4q_0q_1 \\
m_{0,0} + m_{1,1} - m_{1,2} - m_{3,3} &= 4q_1^2 \\
m_{2,1} + m_{1,2} &= 4q_1q_2 \\
m_{1,3} + m_{3,1} &= 4q_1q_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{1,3} - m_{3,1} &= 4q_0q_2 \\
m_{2,1} + m_{1,2} &= 4q_1q_2 \\
m_{0,0} - m_{1,1} + m_{1,2} - m_{3,3} &= 4q_2^2 \\
m_{3,2} + m_{2,3} &= 4q_2q_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{2,1} - m_{1,2} &= 4q_0q_3 \\
m_{1,3} + m_{3,1} &= 4q_1q_3 \\
m_{3,2} + m_{2,3} &= 4q_2q_3 \\
m_{0,0} - m_{1,1} - m_{1,2} + m_{3,3} &= 4q_0^2
\end{aligned}
$$

Razmerja:

$$q_0 : q_1 : q_2 : q_3$$

Z uporabo kinematične preslikave lahko za konstrukcijo sferičnih gibanj uporabimo Bezierjeve krivulje. Izberemo kontrolne kvaternione $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$.

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} Q_i B_i^n(t)$$

Bezierjeva krivulja $Q(t)$ v času $t$ opiše kvaternion, ki mu priredimo rotacijo $R(t)$:

$$\chi(Q(t)) = R(t)$$

Gibanje koordinatnega izhodišča zapišemo v obliki

$$\underline{c}(t) = \frac{w(t)}{||Q(t)||^2};\ w(t) := (w_1(t), w_2(t), w_3(t)).$$

($w(t)$ lahko podamo kot Bezierjevo krivuljo)