Gibanja togih teles

Matic Oskar Hajšen in Eva Zmazek

15. januar 2019

Homogene in kartezične koordinate

P vektor v 3-dimenzionalnem prostoru $\mathbb{R}^3$

- Homogene koordinate vektorja P:

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^4 / \{(0,0,0,0)^T\}$$

- Če $p_0 \neq 0$, potem so kartezične koordinate vektorja P enake

$$\underline{p} = (\underline{p_1}, \underline{p_2}, \underline{p_3})^T \in \mathbb{R}^3; \ \underline{p_i} = \frac{p_i}{p_0} \text{ za } i = 1, 2, 3$$

- Vektorjem z ničelno prvo homogeno komponento priredimo točke v neskončnosti.

Opomba

Vektorja p in λp v homogenih koordinatah opisujeta isti vektor $\underline{p}$ v kartezičnih koordinatah za poljubno neničelno realno število λ.

Fiksen in gibajoč se koordinatni sistem

Definirajmo dva koordinatna sistema v $\mathbb{R}^3$:

- fiksen koordinatni sistem E^3 (običajen koordinatni sistem)
- gibajoč se koordinatni sistem $\hat{E}^3$

Točke lahko predstavimo v enem ali drugem.

Potrebujemo koordinatno transformacijo

$$\hat{E}^3 \to E^3$$

$$\hat{p} \mapsto p$$

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} m_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{array}\right],$$

$$\hat{p} \mapsto p = M\hat{p}$$

Transformacija koordinatnega izhodišča

Koordinatno izhodišče:

- v kartezičnih koordinatah: $(0, 0, 0)^T$
- v homogenih koordinatah: $(1, 0, 0, 0)^T$

Transformirano koordinatno izhodišče:

- v homogenih koordinatah:

$$c = M(1, 0, 0, 0)^T = (m_{0,0}, m_{1,0}, m_{2,3}, m_{3,0})^T$$

- v kartezičnih koordinatah:

$$\underline{c} = (\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{2,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{3,0}}{m_{0,0}})^T$$

Rotacijska matrika

$$\underline{R} = \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

opisuje orientacijo gibajočega se koordinatnega sistema $\hat{E}^3$

Transformacija vektorja $[1, b_M, c_M, d_M]$

$$d = M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} \\ m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{1,1}b_M & m_{1,2}c_M & m_{1,3}d_M \\ m_{2,1}b_M & m_{2,2}c_M & m_{2,3}d_M \\ m_{3,1}b_M & m_{3,2}c_M & m_{3,3}d_M \end{bmatrix}$$

$$d_0 = m_{0,0}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix}$$

$$d_0 = m_{0,0}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix}$$

$$\underline{d} = \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,0} \\ m_{2,0} \\ m_{3,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{m_{0,0}} \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ c_M \\ d_M \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{c} + R \cdot \underline{\hat{p}}$$

Transformacijo $\underline{\hat{p}} \mapsto \underline{p}$ v kartezičnih koordinatah zapišemo kot:

$$\underline{p} = \underline{c} + R\underline{\hat{p}}$$

Gibanje točk v času

Kadar je $\underline{c} = \underline{c}(t)$ in $R = R(t)$, govorimo o gibanju togega telesa:

$$\hat{E}^3 \times I \to E^3$$

$$(\underline{\hat{p}}, t) \mapsto \underline{c}(t) + R(t)\underline{\hat{p}} =: \underline{p}(t)$$

Krivulji $\underline{p}(t)$ pravimo **trajektorija** točke $\underline{\hat{p}}$

Če je $\underline{c}(t) = (0,0,0)$, potem trajektorija poljubne točke $\underline{\hat{p}}$ leži na sferi z radijem $||\underline{\hat{p}}||$ in središčem v koordinatnem izhodišču fiksnega koordinatnega sistema E^3. Rotacijski del gibanja $R(t)$ opisuje gibanje po enotski sferi, zato se imenuje tudi **sferični del gibanja togega telesa**. Problem je konstrukcija matrike R, ki mora biti ortogonalna. ($RR^T = R^T R = I, \det R = 1$).

Opis rotacij s kvaternioni

Pri opisovanju rotacij si lahko pomagamo s **kvaternioni.** Prostor kvaternionov $\mathbb{H}$ je 4-dimenzionalni vektorski prostor s standardno bazo

$$\underline{1} = (1, (0,0,0)^T)$$

$$\underline{i} = (0, (1,0,0)^T)$$

$$\underline{j} = (0, (0,1,0)^T)$$

$$\underline{k} = (0, (0,0,1)^T)$$

Vsak kvaternion $\mathcal{A}$ lahko zapišemo kot:

$$\mathcal{A} = (a_0, \underline{a}),\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ skalarni del },\ \underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \text{ vektorski del}$$

Na kvaternionih sta definirana seštevanje in množenje kot:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_0, \underline{a}) + (b_0, \underline{b}) = (a_0 + b_0, \underline{a} + \underline{b})$$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (a_0 \cdot b_0 - \underline{a} \cdot \underline{b}, a_0\underline{b} + b_0\underline{a} + \underline{a} \times \underline{b})$$

Konjugirana vrednost kvaretniona $\mathcal{A} = (a_0, \underline{a})$ je definirana kot $\overline{\mathcal{A}} = (a_0, -\underline{a})$. S pomočjo konjugirane vrednosti nato definiramo tudi normo kvaterniona kot

$$||\mathcal{A}|| = \sqrt{\mathcal{A} \cdot \overline{\mathcal{A}}} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Definicija

Preslikava $\chi : \mathbb{H} \backslash \{0\} \to SO_3$ oblike

$$Q \mapsto \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - \end{bmatrix}$$

Matirka $\chi(Q)$ je rotacijska matrika. Velja pa tudi obratno. Vsako rotacijsko matriko R lahko zapišemo v zgornji obliki, to je, lahko jo preslikamo v dva **antipodna kvaterniona** oblike

$$\pm Q = \pm(q_0, (q_1, q_2, q_3)^T),$$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

Kinematična preslikava poda korespondenco med 3D rotacijami in parom antipodnih točk na 4D enotski sferi $S^3 \subseteq R^4$.

Ker velja $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, so vrednosti $|q_i|;\ i = 0, 1, 2, 3$ na zaprtem interalu med 0 in 1. Vrednost q_0 in vektor $(q_1, q_2, q_3)^T$ lahko zato zapišemo v obliki:

$$q_0 = \cos(\frac{\phi}{2})$$

in

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \sin(\frac{\phi}{2}) \cdot \vec{r};\ \vec{r} \text{ enotski vektor}$$

Če kvaternion Q zapišemo v tej obliki, ima rotacija, prirejena temu kvaternionu lepo geometrijsko interpretacijo. Predstavlja namreč rotacijo za kot ϕ okrog osi $\vec{r}$.

Ker lahko vsako rotacijo zapišemo v tej obliki, lahko tako zapišemo tudi rotacijo iz poglavja **??**. Če imamo podano preslikavo M, poiščimo, kako za to preslikavo definiramo kvaternion Q. Priemerjajmo matriki $\mathbb{R}$ in poglavja **??** in $\mathbb{R}$, zapisanega s kvaternioni.

$$
\begin{aligned}
m_{0,0} + m_{1,1} + m_{1,2} + m_{3,3} &= 4q_0^2 \\
m_{3,2} - m_{2,3} = 2 \cdot (q_2q_3 - q_0q_1) - 2 \cdot (q_2q_3 + q_0q_1) &= 4q_0q_1 \\
m_{1,3} - m_{3,1} = 2 \cdot (q_1q_3 + q_0q_2) - 2 \cdot (q_1q_3 + q_0q_2) &= 4q_0q_2 \\
m_{2,1} - m_{1,2} = 2 \cdot (q_1q_2 + q_0q_4) - 2 \cdot (q_1q_2 + q_0q_4) &= 4q_0q_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{3,2} - m_{2,3} &= 4q_0q_1 \\
m_{0,0} + m_{1,1} - m_{1,2} - m_{3,3} &= 4q_1^2 \\
m_{2,1} + m_{1,2} &= 4q_1q_2 \\
m_{1,3} + m_{3,1} &= 4q_1q_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{1,3} - m_{3,1} &= 4q_0q_2 \\
m_{2,1} + m_{1,2} &= 4q_1q_2 \\
m_{0,0} - m_{1,1} + m_{1,2} - m_{3,3} &= 4q_2^2 \\
m_{3,2} + m_{2,3} &= 4q_2q_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{2,1} - m_{1,2} &= 4q_0q_3 \\
m_{1,3} + m_{3,1} &= 4q_1q_3 \\
m_{3,2} + m_{2,3} &= 4q_2q_3 \\
m_{0,0} - m_{1,1} - m_{1,2} + m_{3,3} &= 4q_0^2
\end{aligned}
$$

Opazimo, da v vsakem sklopu razmerja med vrednostmi enaka

$$q_0 : q_1 : q_2 : q_3$$

Ker q_0, q_1, q_2, q_3 niso hkrati enaki 0, bo vsaj eno izmed zgornjih razmerij različno od $0 : 0 : 0 : 0$. Tisto razmerje nato uporabimo kot razmerje $q_0 : q_1 : q_2 : q_3$. Skupaj z enakostjo $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ nato izračunamo kvaternion $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$ (bolj natančno sta v množici rešitev dva antipodna kvaterniona). Z uporabo kinematične preslikave lahko za konstrukcijo sferičnih gibanj uporabimo Bezierjeve krivulje. Izberemo kontrolne kvaternione $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$.

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} Q_i B_i^n(t)$$

Bezierjeva krivulja $Q(t)$ v času t opiše kvaternion, ki mu priredimo rotacijo $R(t)$:

$$\chi(Q(t)) = R(t)$$

Rotacija, ki je določena z Bezierjevo krivuljo $Q(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i B_i^n(t)$ stopnje n, je sferično razionalno gibanje stopnje $2n$.

Gibanje koordinatnega izhodišča zapišemo v obliki

$$\underline{c}(t) = \frac{w(t)}{||Q(t)||^2};\ w(t) := (w_1(t), w_2(t), w_3(t)).$$

Rigid body dynamics

- Coriolis acceleration

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \frac{{}^b d^2}{dt^2}\vec{r} + \boxed{2\vec{\omega}_{ib} \times \frac{{}^b d}{dt}\vec{r}} + \vec{\alpha}_{ib} \times \vec{r} + \boxed{\vec{\omega}_{ib} \times (\vec{\omega}_{ib} \times \vec{r})}$$

Rigid body dynamics

- Coriolis acceleration

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \frac{{}^b d^2}{dt^2}\vec{r} + \boxed{2\vec{\omega}_{ib} \times \frac{{}^b d}{dt}\vec{r}} + \vec{\alpha}_{ib} \times \vec{r} + \boxed{\vec{\omega}_{ib} \times (\vec{\omega}_{ib} \times \vec{r})}$$

- Transversal acceleration

Rigid body dynamics

- Coriolis acceleration

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \frac{{}^b d^2}{dt^2}\vec{r} + \boxed{2\vec{\omega}_{ib} \times \frac{{}^b d}{dt}\vec{r}} + \boxed{\vec{\alpha}_{ib} \times \vec{r}} + \boxed{\vec{\omega}_{ib} \times (\vec{\omega}_{ib} \times \vec{r})}$$

- Transversal acceleration
- Centripetal acceleration