



## **CONTROL DE SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS USANDO ALGORITMOS EVOLUTIVOS**

**Proyecto de Ingeniería**

**CRISTIAN LEONARDO RÍOS LÓPEZ  
CÓDIGO 0842139  
[cristian.rios@correounivalle.edu.co](mailto:cristian.rios@correounivalle.edu.co)**

Director  
**Ing. Angel de la E. García Baños, Ph.D.**  
Profesor de la Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación  
[angel.garcia@correounivalle.edu.co](mailto:angel.garcia@correounivalle.edu.co)

**Universidad del Valle  
Facultad de ingeniería  
Escuela de ingeniería de sistemas y computación  
Santiago de Cali  
2013**

# Tabla de Contenido

<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	6
1.2. Justificación . . . . .	7
1.3. Objetivos . . . . .	9
1.3.1. Objetivo general . . . . .	9
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	9
<b>2. Marco Referencial</b>	<b>10</b>
2.1. Sistema . . . . .	10
2.2. Sistemas Dinámicos . . . . .	11
2.3. Estabilidad en los Sistemas . . . . .	12
2.4. Fractales . . . . .	12
2.4.1. Dimensión Fractal . . . . .	12
2.5. Teoría del Caos . . . . .	13
2.5.1. Bifurcación . . . . .	14
2.5.2. Autosimilitud . . . . .	14
2.5.3. Atractores Extraños . . . . .	14
2.6. Coeficiente de Hurst . . . . .	15
2.7. Teorema de Whitney y Takens . . . . .	15
2.8. Teoría de Control . . . . .	16
2.9. Algoritmos Evolutivos . . . . .	17
2.10. Conclusiones del Capítulo . . . . .	18
<b>3. Antecedentes</b>	<b>19</b>
3.1. Control inteligente de sistemas dinámicos caóticos . . . . .	19
3.2. An Evolutionary Algorithm for Controlling Chaos: The Use of Multi-objective Fitness Functions . . . . .	19
3.3. Control of a kind of Chaotic System Using Genetic Algorithm and Fuzzy Logic . . . . .	19
3.4. Evolutionary Techniques for Deterministic Chaos Control . . . . .	20
3.5. Conclusiones del Capítulo . . . . .	20
<b>4. Comportamientos Caóticos</b>	<b>21</b>
4.1. Ecuación Logística . . . . .	21
4.2. Sistema de Hénon . . . . .	23
4.3. Sistema de Tinkerbell . . . . .	26
4.4. Sistema de Ikeda . . . . .	29
4.5. Sistema de Lorenz . . . . .	32
4.6. Conclusiones del Capítulo . . . . .	38

<b>5. Proceso de Control</b>	<b>40</b>
5.1. Controlador . . . . .	40
5.2. Algoritmo Evolutivo . . . . .	41
5.2.1. Codificación . . . . .	42
5.2.2. Población Inicial . . . . .	42
5.2.3. Selección . . . . .	42
5.2.4. Reproducción . . . . .	42
5.2.5. Función Objetivo . . . . .	43
<b>6. Pruebas y Resultados</b>	<b>44</b>
6.1. Ecuación Logística . . . . .	46
6.2. Sistema de Hénon . . . . .	52
6.3. Sistema de Tinkerbell . . . . .	61
6.4. Sistema de Ikeda . . . . .	68
<b>7. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>77</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	77
7.2. Trabajos Futuros . . . . .	77
<b>8. Anexos</b>	<b>79</b>
<b>9. Bibliografía</b>	<b>80</b>

# Índice de figuras

1.	Esquema general de un sistema controlado. . . . .	16
2.	Propiedades de un algoritmo evolutivo . . . . .	17
3.	Funcionamiento general de un algoritmo evolutivo . . . . .	18
4.	Diagrama de bifurcación de la Ecuación Logística . . . . .	22
5.	Sensibilidad a las condiciones iniciales de la Ecuación Logística . . . . .	22
6.	Separación entre las órbitas de la Ecuación Logística . . . . .	23
7.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Hénon . . . . .	24
8.	Sensibilidad a las condiciones iniciales del Sistema de Hénon . . . . .	25
9.	Separación entre las órbitas del Sistema de Hénon . . . . .	25
10.	Atractor del Sistema de Hénon . . . . .	26
11.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Tinkerbell . . . . .	27
12.	Sensibilidad a las condiciones iniciales del Sistema de Tinkerbell . . . . .	28
13.	Separación entre las órbitas del Sistema de Tinkerbell . . . . .	28
14.	Atractor del Sistema de Tinkerbell . . . . .	29
15.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Ikeda . . . . .	30
16.	Sensibilidad a las condiciones iniciales del Sistema de Ikeda . . . . .	31
17.	Separación entre las órbitas del Sistema de Ikeda . . . . .	31
18.	Atractor del sistema de Ikeda . . . . .	32
19.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Lorenz $x : 100$ . . . . .	34
20.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Lorenz $x : 300$ . . . . .	34
21.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Lorenz $x : 500$ . . . . .	34
22.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Lorenz $z : 100$ . . . . .	35
23.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Lorenz $z : 300$ . . . . .	35
24.	Diagrama de bifurcación del Sistema de Lorenz $z : 500$ . . . . .	36
25.	Sensibilidad a las condiciones iniciales del Sistema de Lorenz . . . . .	37
26.	Separación entre las órbitas del Sistema de Lorenz . . . . .	37
27.	Atractor del sistema de Lorenz . . . . .	38
30.	Comportamiento sin control - Ecuación Logística . . . . .	46
31.	Control órbita de periodo uno - Ecuación Logística . . . . .	47
32.	Control órbita de periodo dos - Ecuación Logística . . . . .	47
33.	Control órbita de periodo cuatro - Ecuación Logística . . . . .	48
34.	Control órbita de periodo uno con ruido - Ecuación Logística . . . . .	49
35.	Control órbita de periodo dos con ruido - Ecuación Logística . . . . .	50
36.	Control órbita de periodo cuatro con ruido - Ecuación Logística . . . . .	51
37.	Control órbita de periodos uno, dos y cuatro con ruido - Ecuación Logística	52
38.	Comportamiento sin control - Sistema de Hénon . . . . .	53
39.	Control órbita de periodo uno - Sistema de Hénon . . . . .	54
40.	Control órbita de periodo dos - Sistema de Hénon . . . . .	55
41.	Control órbita de periodo cuatro - Sistema de Hénon . . . . .	56
42.	Control órbita de periodo uno con ruido - Sistema de Hénon . . . . .	57
43.	Control órbita de periodo dos con ruido - Sistema de Hénon . . . . .	58
44.	Control órbita de periodo cuatro con ruido - Sistema de Hénon . . . . .	59

45.	Control órbita de periodo uno, dos y cuatro con ruido - Sistema de Hénon	60
46.	Comportamiento sin control - Sistema de Tinkerbell . . . . .	61
47.	Control órbita de periodo uno - Sistema de Tinkerbell . . . . .	62
48.	Control órbita de periodo dos - Sistema de Tinkerbell . . . . .	63
49.	Control órbita de periodo cuatro - Sistema de Tinkerbell . . . . .	64
50.	Control órbita de periodo uno con ruido - Sistema de Tinkerbell . . . . .	65
51.	Control órbita de periodo dos con ruido - Sistema de Tinkerbell . . . . .	66
52.	Control órbita de periodo cuatro con ruido - Sistema de Tinkerbell . . . . .	67
53.	Comportamiento sin control - Sistema de Ikeda . . . . .	68
54.	Control órbita de periodo uno - Sistema de Ikeda . . . . .	69
55.	Control órbita de periodo dos - Sistema de Ikeda . . . . .	70
56.	Control órbita de periodo cuatro - Sistema de Ikeda . . . . .	71
57.	Control órbita de periodo uno con ruido - Sistema de Ikeda . . . . .	72
58.	Control órbita de periodo dos con ruido - Sistema de Ikeda . . . . .	73
59.	Control órbita de periodo cuatro con ruido - Sistema de Ikeda . . . . .	74
60.	Control órbita semiperiodica - Sistema de Ikeda . . . . .	76

## Indice de tablas

1.	Valores de los parámetros del algoritmo evolutivo y el proceso de control . .	45
----	-------------------------------------------------------------------------------	----

## Resumen

En el presente trabajo se plantea el desarrollo de un proyecto en torno a la siguiente pregunta: ¿Es posible mantener estable un sistema dinámico que a pesar de ser determinista, puede llegar a presentar comportamientos impredecibles? Para dar respuesta a este interrogante se definen un conjunto de objetivos que permiten abordar el estudio de sistemas dinámicos, sistemas caóticos y técnicas de control existente para este tipo de sistemas. Teniendo esta información, finalmente se plantea el uso de algoritmos evolutivos como una técnica que puede ser usada en el control de sistemas dinámicos caóticos.

# 1. Introducción

Desde que la humanidad tuvo el ingenio para crear sistemas artificiales se dió cuenta que éstos, en algún momento, debían de permanecer estables en un punto deseado, como por ejemplo, al querer que el nivel de agua en un tanque permaneciera constante. Fue por este deseo, el deseo de la estabilidad, que nació y se ha ido perfeccionando la teoría de control.

Pero no todos los sistemas son tan simples como lo es un tanque de agua. Existen sistemas cuyos modelos matemáticos son deterministas, pero bajo ciertas condiciones y conforme transcurre el tiempo, comienza a presentar comportamientos erráticos haciendo que se pierda el determinismo. Se dice entonces que son sistemas caóticos.

A pesar de que la teoría de control ha avanzado mucho, aún presenta problemas para realizar control sobre sistemas caóticos. Es por ese motivo que se está tratando de realizar este control por otros medios. En ciencias de la computación se estudia un tipo de algoritmos llamados algoritmos evolutivos, los cuales están basados en el concepto de la evolución y son muy buenos candidatos para tratar este tipo de problemas.

## 1.1. Planteamiento del Problema

La ciencia siempre se ha preocupado por conocer el mundo, su funcionamiento, porque una vez conociendo el cómo funciona se puede controlar, se puede predecir y se pueden crear cosas nuevas a partir de este conocimiento. Pero ¿qué sería de la ciencia sin un lenguaje que permita expresar y manipular el conocimiento adquirido?. Aquí entra en juego las matemáticas.

A lo largo de la historia se han ido creando y optimizando ecuaciones para casi todos los fenómenos físicos, y aunque estas ecuaciones son simplificaciones de la realidad, para nuestros propósitos han funcionado satisfactoriamente. Gracias a que estas ecuaciones se pueden resolver, debido a avances matemáticos como el cálculo diferencial, es que se pueden construir máquinas, obras civiles e incluso se ha podido viajar fuera del planeta.

Se pensaría que una vez se tengan las ecuaciones que modelan un sistema tendremos dominado por completo el sistema, por lo que conociendo su estado de partida podríamos saber su pasado y su futuro, pero no ocurre de esta manera. Por ejemplo, en mecánica celeste la iteración de dos cuerpos no presenta problemas, pero la de tres está llena de desastres [2]. Si consideramos un universo que consistiera solamente en la Tierra y el Sol este sería periódico: sus movimientos se repetirían una y otra vez por siempre. Este estado nos es proporcionado por la ley de la Gravitación Universal de Newton. Pero si le agregamos un cuerpo más al sistema, la Luna por ejemplo, podríamos pensar que las ecuaciones de Newton siguen siendo válidas, y lo son en cierto sentido, pero lo único que obtendremos serán aproximaciones que pasado un tiempo se alejarán tanto de la realidad que perderemos la capacidad de predecir la posición de dichos cuerpos.

Así como ocurre con este sistema, muchos otros presentan igual comportamiento, comportamientos caóticos. Tal es el caso de sistemas electrónicos, mecánicos, de fluidos y biológicos por sólo mencionar algunos. Pero el caos no es aleatoriedad, no es un desorden, es un comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista [2].

No es sólo cuestión de predicción por lo que la aparición del caos nos perturba, sino también, y quizás más importante, el hecho de que deseamos que un sistema permanezca estable, bien sea que tenga una órbita determinista o que se mantenga en un punto fijo. No deseamos que pasado un tiempo el sistema comience a comportarse de manera extraña. Si un sistema no es estable normalmente carece de todo interés y utilidad [3]. Esto nos lleva a preguntarnos, ¿será posible mantener estable un sistema dinámico que, a pesar de ser determinista, presenta comportamientos impredecibles?

## 1.2. Justificación

Existen muchos problemas de ingeniería donde es de vital importancia controlar el estado de alguna de las variables del sistema modelado, esto debido a que bajo ciertas circunstancias el sistema puede tomar valores no deseados y difícilmente predecibles ya que las ecuaciones que gobiernan el sistema son caóticas.

Como ejemplos de sistemas caóticos que se aplican a situaciones prácticas podemos encontrar los siguientes:

**Ecuación del péndulo:** Uno de los problemas más simples en robótica es el de controlar la posición de una junta de robot usando un motor ubicado en el punto de giro. Matemáticamente esto no es más que un péndulo. Su ecuación de movimiento en la dirección tangencial se puede escribir, usando la segunda ley de Newton como:

$$m l \ddot{\theta} = -m g \sin \theta - k l \dot{\theta}$$

donde  $m$  es la masa de la bola,  $l$  es la longitud del brazo,  $\theta$  es el ángulo entre la vertical y el brazo,  $g$  es la aceleración de la gravedad, y  $k$  es el coeficiente de fricción. Para más información de este sistema puede consultar [6].

**Sistemas Masa-Resorte:** Combinando un resorte duro con un amortiguamiento lineal y una fuerza externa periódica se obtiene la ecuación de Duffing:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

donde  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\omega$  son constantes. Si desea mayor información de este sistema puede consultar [6].

Adicionalmente, también pueden existir sistemas que, si bien en la práctica es casi imposible controlarlos, este control se puede realizar teóricamente con fines académicos. El siguiente sistema es un ejemplo de ello.

**Glicólisis:** Es la secuencia de reacciones que convierte la glucosa en piruvato y posteriormente en ATP (Adenosin Trifosfato), la unidad de intercambio energético en el ámbito metabólico. Un modelo simplificado que describe la cinética de este proceso donde se usan sólo dos encimas de las diez que intervienen en el proceso es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d[F6P]}{dt} &= V_0 + A\sin(\omega_c t) - V_{PKF} \\ \frac{d[PEP]}{dt} &= V_0 + A\sin(\omega_c t) - V_{PK} \\ \frac{d[ADP]}{dt} &= V_{PKF} - V_{PK} \\ \frac{d[ATP]}{dt} &= V_{PK} - V_{PKF}\end{aligned}$$

En estas ecuaciones las reacciones cinéticas se expresan en términos de las velocidades de reacción de las dos enzimas  $V_{PKF}$  y  $V_{PK}$ , donde PFK es Fosfofructokinasa y PK es Piruvato Kinasa, además, F6P es Fructosa-6-Fosfato, PEP es Fosfoenolpiruvato y ADP es Adenosin Difosfato [4]. Para una ampliación de detalles de este sistema puede consultar [4].

En estos casos, las técnicas tradicionales de control no funcionan, por lo que sería de mucho interés poder realizar ese control a pesar de que el sistema, en el caso general, sea caótico.

Como técnica alternativa para realizar control en este tipo de sistemas se postulan los algoritmos evolutivos ya que estos presentan ciertas características que los hace funcionar muy bien para hallar soluciones a problemas complejos como lo es el control. Como característica a destacar se encuentra el hecho de que los algoritmos evolutivos operan simultáneamente con múltiples candidatos a soluciones y no de manera secuencial como hacen los algoritmos tradicionales permitiendo encontrar de manera más rápida la solución deseada. Además, por el hecho de manipular varias soluciones en simultáneo tiene la capacidad de ir mejorando la solución final paulatinamente por lo que al finalizar el algoritmo tendremos la mejor solución posible del conjunto de soluciones. Otra característica favorable de los algoritmos evolutivos es que son perfectos para operar con sistemas que no tengan una solución analítica, tal es el caso de los sistemas caóticos, ya que éstos son sistemas no lineales difíciles de resolver.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

Diseñar e implementar un algoritmo utilizando técnicas de computación evolutiva para realizar control en sistemas dinámicos caóticos.

### 1.3.2. Objetivos específicos

1. Definir los sistemas dinámicos que se tratarán de controlar realizando una investigación sobre su dinámica en el tiempo para corroborar su comportamiento caótico. Elegir dos de estos sistemas.
2. Definir el modelo del algoritmo que se usará para realizar el control en los sistemas dinámicos caóticos.
3. Desarrollar una aplicación computacional que implemente el algoritmo modelado anteriormente y permita mostrar el control realizado sobre los sistemas propuestos.
4. Evaluar la efectividad del algoritmo.

## 2. Marco Referencial

Es de vital importancia que el lector tenga una visión general tanto de la teoría de control como de la teoría de sistemas y en particular de los sistemas caóticos, así como de algunas de las características relacionadas a éstos últimos como lo son la estabilidad y la sensibilidad a las condiciones iniciales. Con todo ello se tendrán las bases adecuadas y suficientes que permitirán comprender el desarrollo del presente trabajo.

### 2.1. Sistema

Un sistema es un grupo de componentes que interactúan, interrelacionados o interdependientes que forman un todo complejo y unificado [5]. Además estos componentes poseen una finalidad común.

Los sistemas presentan ciertas características esenciales, entre las que podemos encontrar las siguientes:

- Las partes de un sistema deben estar todas presentes para que el sistema realice su propósito de manera óptima.
- Las partes de un sistema se deben arreglar de una manera específica para que el sistema realice su propósito.
- Los sistemas tienen propósitos específicos dentro de un sistema mayor.
- Los sistemas mantienen su estabilidad por medio de fluctuaciones y ajustes.

Los sistemas pueden ser clasificados según algún criterio de la siguiente manera [5]:

Por su comportamiento:

- Un sistema abierto es un sistema en continuo intercambio de materia, energía e información con su medio. Es vital el conocer el medio que lo rodea.
- Un sistema cerrado no tiene relaciones con su medio (no existen sistemas completamente cerrados).

Por su cambio a través del tiempo:

- Un sistema dinámico es el que muestra cambios en su estructura o en las relaciones entre sus elementos a través del tiempo.
- Un sistema estático es aquel cuya estructura y relaciones entre sus elementos pueden considerarse permanentes a través del tiempo.

Algunos sistemas presentan realimentación. Esto significa que el sistema está influenciado por su propio comportamiento, dicho de otra manera, las salidas del sistema afectan las entradas del mismo. La realimentación dada puede ser negativa o positiva: si es negativa el

sistema tiende a estabilizarse; por el contrario, si la realimentación es positiva se ve reforzada la tasa de cambio interno del sistema haciendo que el sistema no llegue a estabilizarse.

Es muy importante tener presente el tipo de sistema con el que estamos tratando, ya que de esto depende si el sistema presentará comportamientos caóticos o no.

## 2.2. Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es, según Kuznetsov [5], la representación matemática de un proceso determinístico. Si se conoce la ley que gobierna su evolución y su estado inicial se puede predecir cualquier estado futuro del sistema (luego se verá que esto no es del todo correcto). Dicho de otra manera, las variables de estado del sistema siguen una serie de reglas temporales.

Todos los posibles estados del sistema se pueden representar por puntos en algún conjunto  $X$  llamado espacio de estados de esta forma:

$$X = \{x : x \text{ es un estado del sistema dinámico}\}$$

Según la manera en que avance el tiempo, los sistemas se pueden clasificar en dos grandes grupos, estos son, los sistemas continuos y los sistemas discretos.

**Sistemas Continuos:** En estos tipos de sistemas el tiempo avanza de manera continua. El tiempo es una variable que toma valores en el conjunto de los números reales. Estos sistemas se expresan utilizando ecuaciones diferenciales.

**Sistemas Discretos:** En estos tipos de sistemas el tiempo avanza de manera discreta. El tiempo es una variable que toma valores en el conjunto de los números enteros. Estos sistemas se expresan utilizando ecuaciones de diferencias, también conocidos como mapas iterados.

Si ignoramos el tiempo por un momento y nos concentraremos sólo en las entradas y salidas del sistema y la relación entre éstas, podemos clasificar a los sistemas como lineales y no lineales. El dominio de las entradas del sistema determina el dominio propio del sistema, mientras el rango de las salidas determina los límites del sistema.

En los **sistemas lineales** la relación entre las entradas y las salidas del sistema es lineal, esto quiere decir que para una variación en la entrada, la salida variará de forma proporcional.

En los **sistemas no lineales**, una variación en la entrada representa una variación en la salida en una proporción variable.

## 2.3. Estabilidad en los Sistemas

La estabilidad es una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos a la que cabe considerar como la más importante de todas. Ello es debido a que, en la práctica, en productos de ingeniería, habitualmente deseamos que todo sistema sea estable [3].

Según Lyapunov [6], un sistema es estable si dado un punto de equilibrio, todas las soluciones que inician en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio. Matemáticamente, se puede ver de la siguiente manera:

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua y  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Ahora un punto  $x_0$  es estable si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que

$$\|x(x_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

En lenguaje cotidiano la estabilidad de un sistema se refiere a si estando éste en reposo o en movimiento no cambia mucho bajo el efecto de pequeñas perturbaciones. El que exista o no un estado particular de reposo o movimiento puede estudiarse sencillamente observando dicho estado.

Teóricamente, los estados estables e inestables son soluciones de las mismas ecuaciones dinámicas básicas: a la matemática le resulta tan sencillo hallar una como la otra. Pero, experimentalmente, un estado de reposo inestable nunca se observará del todo, porque pequeñas influencias externas lo destruirán. Un estado de movimiento inestable puede observarse, pero únicamente como un fenómeno transitorio, mientras el sistema está en ruta desde su estado inestable original hasta donde quiera que acabe finalmente [2].

## 2.4. Fractales

Un fractal, según Mandelbrot [7], es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. Un fractal es demasiado irregular para describirlo en términos geométricos tradicionales, además de ser autosimilar y de tener dimensión fractal [8].

### 2.4.1. Dimensión Fractal

La dimensión fractal es un número real que representa el espacio dimensional ocupado por un fractal [9]. Para calcularla existen varios algoritmos, el más conocido y sencillo es box-counting [10].

**Box-counting:** Para calcular la dimensión de un fractal  $S$ , este se pone en una rejilla igualmente espaciada y posteriormente se cuentan cuantos cuadros se requirieron para cubrir el conjunto  $S$ . Este procedimiento se repite para diferentes dimensiones de la rejilla

pero haciéndola cada vez más fina. Si suponemos que  $N(\epsilon)$  es la cantidad de cajas con lados de longitud  $\epsilon$  requeridas para cubrir el conjunto  $S$ , entonces la dimensión box-counting está definida como:

$$\dim_{\text{box}}(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log (1/\epsilon)}$$

## 2.5. Teoría del Caos

La definición de sistema caótico que considero más acertada fue dada por R. Devaney en 1989 [11] y es la siguiente:

Un sistema dinámico definido por  $f : X \rightarrow X$  se dice caótico si verifica las tres propiedades siguientes:

1. Los puntos periódicos de  $f$  son densos en  $X$ .
2. Es sensible a las condiciones iniciales.
3. Tiene la propiedad de mezcla o es topológicamente transitivo.

donde  $X$  es un cierto conjunto definido en algún espacio de  $R^n$  que recibe el nombre de espacio de fases o espacio de estados.

Para una mejor explicación de cada propiedad y de manera más formal se puede consultar [11, p. 169] para la propiedad uno, [11, p. 153] para la propiedad dos y [11, p. 159] para la propiedad tres.

Puede ser que muchas de estas cosas parezcan muy extrañas, pero el caos no es un concepto alejado de la realidad cotidiana: el corazón, sin ir más lejos, responde a un sistema caótico, no regular, al contrario de lo que normalmente se cree [4].

En nuestra vida cotidiana la palabra caos tiene un significado muy distinto ya que se entiende como la completa ausencia de orden, pero matemáticamente se refiere a la falta de certidumbre que se produce al tratar de determinar los estados futuros de algunos sistemas [12]. Esta falta de certidumbre se da debido a la sensibilidad que presentan este tipo de sistemas a las condiciones iniciales, como resultado, si se parte de dos estados que difieren infinitesimalmente uno de otro, los estados futuros pueden llegar a divergir sustancialmente. Es por este motivo que la única manera de saber el estado futuro exacto de un sistema caótico es conocer con infinita precisión las condiciones iniciales de éste, pero en la práctica eso es absolutamente imposible.

Además de las propiedades mencionadas en la definición, los sistemas caóticos presentan otras propiedades igualmente interesantes, algunas de estas propiedades son:

### 2.5.1. Bifurcación

La razón por la que llamamos a un sistema caótico es porque al momento de buscarle soluciones éstas pueden ser o no deterministas. El que se obtenga una u otra dependerá del valor de los parámetros del sistema. En la mayoría de los casos no existe una secuencia específica en los valores de los parámetros que indiquen en qué momento las soluciones dejan de ser deterministas y se vuelve no deterministas, muy por el contrario, estos valores se pueden encontrar mezclados.

Este comportamiento se puede observar si comenzamos a variar el valor de alguno de los parámetros del sistema y graficamos este valor contra el espacio de fases de alguna de las componentes del sistema. El resultado que se obtiene es un diagrama dónde se puede observar, en a mayoría de los casos, cómo se empieza a bifurcar el periodo hasta llegar al caos, aunque dentro de ese caos se pueden observar zonas periódicas [2].

Este tipo de diagramas se conocen con el nombre de diagramas de Feigenbaum ya que fue el físico Mitchell Feigenbaum quién los desarrolló, aunque su trabajo estaba enfocado sólo a una cierta familia de funciones por lo que habla de duplicación del periodo y no de manera general de bifurcación del periodo [11].

### 2.5.2. Autosimilitud

La autosimilitud se refiere al hecho del parecido que puedan llegar a tener las partes de un objeto a diferentes escalas, en especial con la escala original, bien sea que se expanda o se contraiga el espacio de observación [7]. Los fractales, ya sean naturales, artificiales o matemáticos son un claro ejemplo de objetos donde se presenta esta propiedad.

La autosimilitud puede ser exacta, también llamada invariancia de escala y se da cuando al amplificar el tamaño, el objeto obtenido se repite idénticamente al original, como por ejemplo en el triángulo de Sierpinski. La autosimilaridad aproximada o cuasautosimilaridad es muy común en la naturaleza, en este caso, al amplificar el tamaño, el objeto obtenido no se repite del todo perfecto, pero aún se pueden identificar rasgos del objeto original. El brócoli es un ejemplo de esto. Por último tenemos la autosimilaridad estadística, donde sólo se conservan ciertas propiedades estadísticas si se cambia de escala, por ejemplo en las líneas costeras [13].

### 2.5.3. Atractores Extraños

Un atractor para un sistema dinámico, en lenguaje coloquial, es el estado hacia donde tiende el sistema en el espacio de fases conforme pasa el tiempo. Un espacio de fases es una representación de las relaciones entre las variables dinámicas del sistema, pero no incluye la relación de dichas variables con el tiempo. Los sistemas dinámicos no caóticos tienden a sumideros, ciclos límites, sillas de montar o fuentes [2, p. 104-108] que son atractores comunes y ampliamente estudiados. En cambio los sistemas caóticos tienden a atractores sin una forma determinada o “extraños”.

Los atractores extraños no poseen una estructura geométrica común y harán ver como si una partícula se moviera erráticamente por el espacio de fases. Estos atractores suelen implicar una estructura geométrica fractal y por tanto tienen una dimensión fractal, además siempre suelen estar asociados a una dinámica caótica.

## 2.6. Coeficiente de Hurst

El coeficiente de Hurst permite cuantificar la memoria o dependencia a largo plazo de un sistema y esto es una forma de distinguir si una serie es fractal, y por tanto autosimilar aunque de manera estadística, o si por el contrario, esta serie pertenece a un proceso aleatorio [14].

En geometría fractal, el coeficiente de Hurst ha sido denotado por  $H$  en honor a Harold Edwin Hurst y Ludwig Otto Hölder por Benoît Mandelbrot. El valor del coeficiente de Hurst se encuentra en el intervalo  $[0, 1]$  y según su valor puede dar lugar a cuatro casos [14]:

1. Si  $0 \leq H < 0,5$  la serie es antipersistent, esto significa que si la serie en un periodo ha estado sobre (o bajo) un valor de referencia, lo más probable es que para el siguiente periodo se encuentre bajo (o sobre) dicho valor de referencia. Este tipo de series son comunes en procesos naturales y contienen lo que se conoce como ruido rosa o ruido  $1/f$ .
2. Si  $H = 0,5$  no existe correlación alguna por lo que los datos son independientes y se dice que el proceso es completamente aleatorio. La aleatoriedad también se conoce como ruido blanco.
3. Si  $0,5 < H < 1$  la serie es persistente, esto significa que si la serie en un periodo ha estado sobre (o bajo) un valor de referencia, lo más probable es que para el siguiente periodo siga estando sobre (o bajo) de dicho valor de referencia. Este tipo de series son comunes en procesos cíclicos, como la creciente de los ríos.
4. Si  $H = 1$  la serie es determinista.

## 2.7. Teorema de Whitney y Takens

Según Whitney y Takens [15] es posible reconstruir el atractor de un sistema teniendo únicamente una serie temporal de dicho sistema sin importar a qué componente del sistema pertenezca dicha serie. Para ello usa un procedimiento llamado Delay Coordinate Embedding con lo que se producirá una imagen del sistema original. Esta imagen es el atractor reconstruido y tendrá las mismas propiedades matemáticas que el sistema original. Su definición matemática se encuentra a continuación:

Sea  $M$  un variedad <sup>1</sup> compacta de dimensión  $d$ ,  $\phi$  un campo vectorial suave y  $X$  una función suave sobre  $M$ . Es una propiedad genérica que

$$\Phi_{(\phi,X)}(m) : M \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$$

es un embebimiento, donde  $\phi$  es el flujo sobre  $M$  y

$$\Phi_{\phi,X} = \langle X(m), X(\phi(m)), X(\phi^2(m)), \dots, X(\phi^{2d}(m)) \rangle$$

Matemáticamente puede ser un poco difícil de entender y hasta puede parecer un poco extraño que esto se pueda dar, pero en cierto modo tiene sentido, ya que todas las componentes de un sistema están relacionadas entre sí de alguna manera. Gracias a esto, si un sistema posee varias componentes y se desea realizar algún estudio del sistema, es entonces razonable que pueda utilizar sólo una de las componentes disponibles y obtener el mismo resultado.

## 2.8. Teoría de Control

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes interacutantes de un sistema en una configuración que proporcione a un comportamiento deseado. La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de realimentación, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento [6].

La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente son lineales, aunque estrictamente hablando, los sistemas lineales no existen en la práctica. Todos los sistemas físicos son no lineales en algún sentido. Pero los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles.

De manera general, el control se realiza usando un sistema realimentado negativamente para de esta manera mantener las salidas del sistema a estabilizar en un valor deseado. Este proceso se puede observar en la Figura 1.

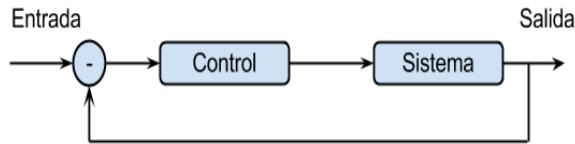


Figura 1: Esquema general de un sistema controlado.

Existen dos técnicas de control comúnmente usadas, incluso en control de sistemas caóticos. Para estos últimos el control normalmente se realiza en torno a Órbitas Periódicas

---

<sup>1</sup>manifold[16]

Inestables o UPOs (Unstable Periodic Orbits por sus siglas en inglés). Estas dos técnicas de control son: el método OGY y el método Pyragas. El método OGY fué propuesto por Ott, Grebogi y Yorke y estabiliza los sistemas caóticos en torno a UPOs conocidas de antemano aplicando pequeñas perturbaciones discontinuas a alguno de los parámetros del sistema [17]. El método Pyragas es un método de control continuo que se basa en la autosincronización dada por realimentación, donde la señal de control es determinada dependiendo de la diferencia entre el estado actual y el estado retrasado un tiempo  $\tau$  (que es igual al período de la UPO a estabilizar). Debido a esto, este método de control necesita estimar el período de la órbita a estabilizar [18] [19].

## 2.9. Algoritmos Evolutivos

Los algoritmos evolutivos son técnicas de búsqueda de soluciones a problemas complejos (incluido el diseño automático de software) basadas en el concepto de la evolución. Actualmente existen varias técnicas como son los Algoritmos Genéticos, la Programación Genética, las Estrategias Evolutivas y la Programación Evolutiva, entre otros.

Los algoritmos evolutivos forman parte de la inteligencia artificial, y son usados principalmente en problemas con espacios de búsqueda extensos y no lineales. Para estos problemas no existen algoritmos deterministas que los solucionen en un tiempo razonable.

Al momento de diseñar un algoritmo se busca que sea robusto y eficiente, desgraciadamente, los algoritmos muy eficientes son poco genéricos y viceversa, pero afortunadamente los algoritmos evolutivos pueden ubicarse en la mitad de las dos cualidades, como se muestra en la Figura 2.

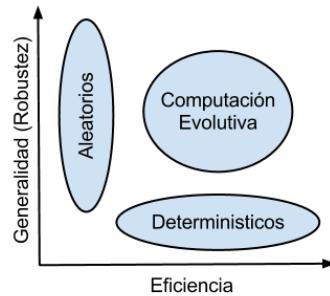


Figura 2: Propiedades de un algoritmo evolutivo [1].

De manera general, el funcionamiento de un algoritmo evolutivo se puede observar en la Figura 3. Un algoritmo evolutivo consiste en una población de individuos, donde cada individuo representa una posible solución al problema que se esté tratando. De esta población se seleccionan algunos individuos usando alguna función de aptitud o de costo, ésta nos indica que tan buena solución representa dicho individuo. Con los individuos seleccionados se forma lo que se conoce como Mating Pool y a estos se les aplican operadores de reproducción que pueden cambiar ligera o drásticamente al individuo pero con miras a

mejorar la población. Después de esto, los nuevos individuos obtenidos por este proceso se insertan en la población. Cada vez que esto sucede se dice que hemos pasado a la siguiente generación y el proceso continua hasta una cantidad de generaciones fijadas o hasta que se haya encontrado una solución satisfactoria.

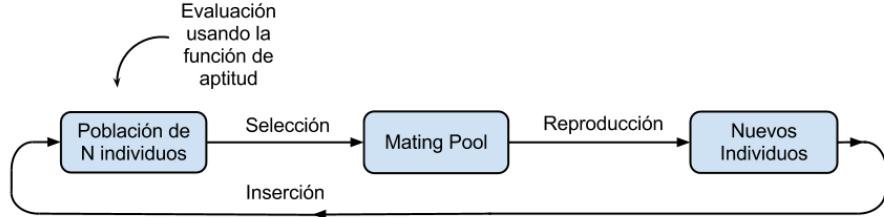


Figura 3: Funcionamiento general de un algoritmo evolutivo [1].

## 2.10. Conclusiones del Capítulo

Una vez llegado a este punto, se tienen las bases necesarias para seguir abordando el desarrollo del presente trabajo. Ahora conocemos un poco el lugar que tienen el tipo de sistemas que vamos a tratar y en particular algunas de las propiedades y comportamientos inherentes a los sistemas caóticos. Por otro lado se tiene una idea de qué es el control, para qué sirve y a grandes rasgos las técnicas más comúnmente empleadas para llevarlo a cabo. Por último, el lector ahora conoce a grandes rasgos el tipo de algoritmo computacional que se pretende usar para dar solución al problema planteado.

### 3. Antecedentes

#### 3.1. Control inteligente de sistemas dinámicos caóticos

Es una tesis doctoral presentada en la universidad Politécnica de Madrid cuyo objetivo principal es el de diseñar redes neuronales que se puedan usar para la estabilización de órbitas periódicas inestables [20], este tipo de órbitas se presentan en los sistemas dinámicos caóticos.

El control que se aplica se puede efectuar en cualquier punto, lo que significa que se puede aplicar sin importar si el sistema se encuentra cerca o no del punto de control deseado, además se puede aplicar teniendo pocos datos del sistema y permanece más tiempo estable en presencia de ruido aleatorio dinámico.

Los sistemas dinámicos que controla son el de Henón, el de Lozi, el de Tinkerbell, y el de Lorenz. Además controlan sistemas con múltiples atractores como lo es el sistema de Gumowski y Mira. Finalmente, aplican control a dos señales caóticas distintas simultáneamente.

#### 3.2. An Evolutionary Algorithm for Controlling Chaos: The Use of Multi-objective Fitness Functions

Es una investigación realizada en el Instituto Fraunhofer de Ingeniería de Fabricación y Automatización en Alemania [21]. El objetivo principal de este trabajo es el estudio de las mejoras realizadas a un algoritmo evolutivo previo que realiza control local de caos. La principal mejora realizada es el uso de una función de aptitud multiobjetivo que mejora la velocidad de convergencia del algoritmo. En particular, usa algoritmos evolutivos porque estos son muy útiles cuando la función objetivo que desean optimizar no se puede escribir como una expresión matemática o cuando ésta posee propiedades matemáticas desconocidas como la continuidad o la existencia de derivadas.

En este artículo sólo se presenta el sistema de Henón como sistema caótico al que aplican el algoritmo evolutivo de control enfocándose únicamente en evaluar la velocidad de convergencia del algoritmo, olvidándose del control como tal, es más, lo dan por hecho.

#### 3.3. Control of a kind of Chaotic System Using Genetic Algorithm and Fuzzy Logic

Es una propuesta realizada en el departamento de Ingeniería eléctrica de China Textile University y publicado en la Conferencia Internacional de Tecnología Industrial realizada por la IEEE en 1996 [22].

La técnica de control empleada es llamada FLC(Controlador de Lógica Fuzzy), un FLC está formado por una interfaz de fuzificación, una conjunto de reglas, un tomador de decisiones lógicas y una interfaz de defuzificación. El tomador de decisiones es el que emula

la toma de decisiones de los humanos usando conceptos de lógica fuzzy y un conjunto de reglas disponibles, estas últimas son creadas usando algoritmos genéticos.

El control es aplicado únicamente al sistema de Lozi, obteniendo resultados satisfactorios, lo que indica que la técnica propuesta puede ser adecuada para realizar control.

### **3.4. Evolutionary Techniques for Deterministic Chaos Control**

Es una investigación realizada en la Facultad de Informática Aplicada de Tomas Bata University en República Checa [23]. Se realiza control de sistemas dinámicos caóticos usando algoritmos evolutivos pero sin presentar detalles respecto a estos, por el contrario prestan especial atención a la función de costo.

El sistema al que aplican el algoritmo de control es la Ecuación Logística, pero la evaluación está enfocada al comportamiento del algoritmo dependiendo de la función objetivo que se seleccione.

### **3.5. Conclusiones del Capítulo**

Ya antes se había mencionado lo difícil que es realizar control en sistemas no lineales y ni hablar de sistemas caóticos. En estos trabajos se puede ver como se han usado técnicas alternativas a las usuales como son las redes neuronales, la lógica fuzzy y los algoritmos evolutivos para realizar control en este tipo de sistemas, obteniéndose resultados satisfactorios.

Aunque en dos de los trabajos mencionados no se muestra el control realizado como tal, sino el cómo se comporta el algoritmo en ciertas situaciones, se sobre entiende que el control del sistema ya se ha realizado y que debido a esto los autores se enfocan en otros menesteres.

Personalmente creo que en la mayoría de los trabajos presentados falta realizar más pruebas en otros sistemas, la mayoría sólo realizan pruebas usando un sistema y esto puede llevar a pensar que el algoritmo está afinado sólo para dicho sistema y no es tan general como podría esperarse ya que no indican lo contrario en ningún sitio.

En la mayoría de los casos, la estabilización se realiza en torno a UPOs, lo que me hace pensar que es muy difícil estabilizar el sistema en torno a otros puntos u órbitas debido a la sensibilidad de este tipo de sistemas a las perturbaciones, siendo así, se hace necesario encontrar dichas órbitas y esto no es una tarea para nada sencilla.

## 4. Comportamientos Caóticos

En la literatura se puede encontrar una buena cantidad de sistemas cuya dinámica ha sido estudiada, llegando a la conclusión de que son sistemas con comportamientos caóticos. En el presente capítulo encontraremos algunos de estos sistemas y la corroboración de algunas de sus propiedades anteriormente mencionadas, con lo que nos atreveremos a decir que efectivamente son sistemas dinámicos caóticos.

Para todos los casos donde sea necesario usar una serie temporal del sistema para estudiar alguna propiedad se usa sólo una componente del sistema, por ejemplo la componente  $x$ , esto es válido debido al teorema de Takens.

Todas las imágenes del presente capítulo son de mi autoría y el software para realizarlas se encuentra adjunto a este documento.

### 4.1. Ecuación Logística

En realidad debe de llamarse la parábola logística de May, ya que fue el biólogo Robert May quien en 1976 publicó en un seminal paper esta ecuación como un modelo demográfico alternativo en tiempo discreto al propuesto por Pierre François Verhulst en 1838 [24], con el objeto de estudiar una población de insectos en un ecosistema cerrado teniendo en cuenta los efectos de saturación del ecosistema [11]. Lo anterior es importante ya que hace que el sistema se expanda y se contraiga continuamente y es este comportamiento el que puede dar lugar al caos. La Ecuación (1) muestra la definición de este sistema.

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n) \quad (1)$$

donde  $k$  es el parámetro del sistema.

Este sistema comienza a presentar bifurcación del periodo a partir de  $k = 3$  y más allá de  $k = 3,56995$  presenta, en general, un comportamiento caótico con algunas zonas periódicas[24]. Para el estudio realizado, los valores del parámetro y de la condición inicial que se usan son  $k = 3,9$  y  $x = 0,1$  respectivamente.

#### 1. Bifurcación

El diagrama de bifurcación del periodo para la Ecuación Logística se puede apreciar en la Figura 4. Para este caso, el sistema es unidimensional y cuenta sólo con una componente que en el gráfico se encuentra en el eje de las ordenadas, mientras que en el eje de las abscisas se encuentra el parámetro del sistema, que toma valores entre  $2,4 < k < 4,0$ .

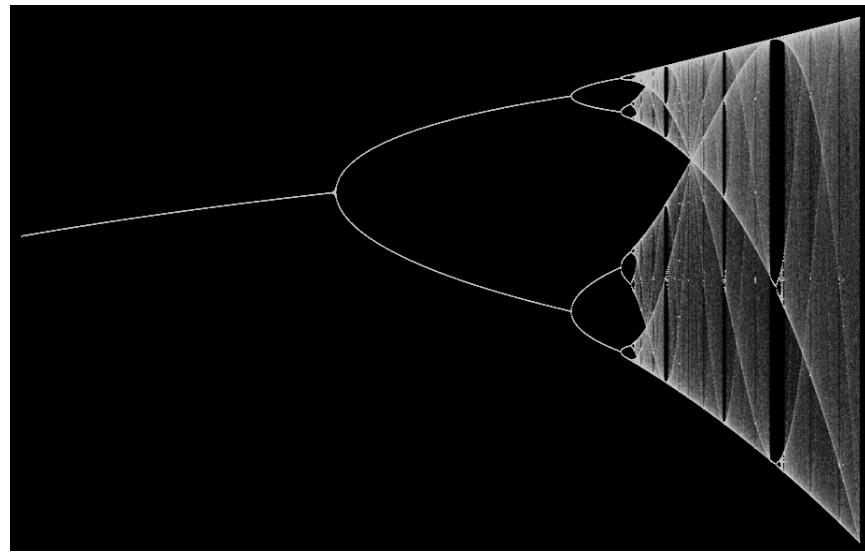


Figura 4: Diagrama de bifurcación.

## 2. Sensibilidad

En la Figura 5 se pueden observar dos órbitas de la Ecuación Logística, una de color rojo y la otra de color azul, cuyos puntos de inicio difieren en  $0,000001$ . Este sistema es muy sensible a las condiciones iniciales pues alrededor de las 20 iteraciones sus órbitas comienzan a divergir. Para una mejor idea de ello, se ha graficado el error o diferencia entre dichas órbitas, esto se puede observar en la Figura 6.

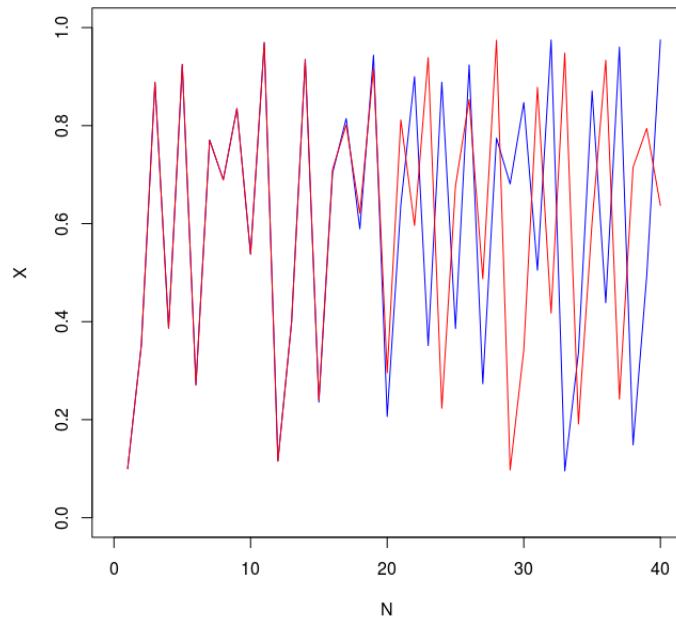


Figura 5: Sensibilidad a las condiciones iniciales.

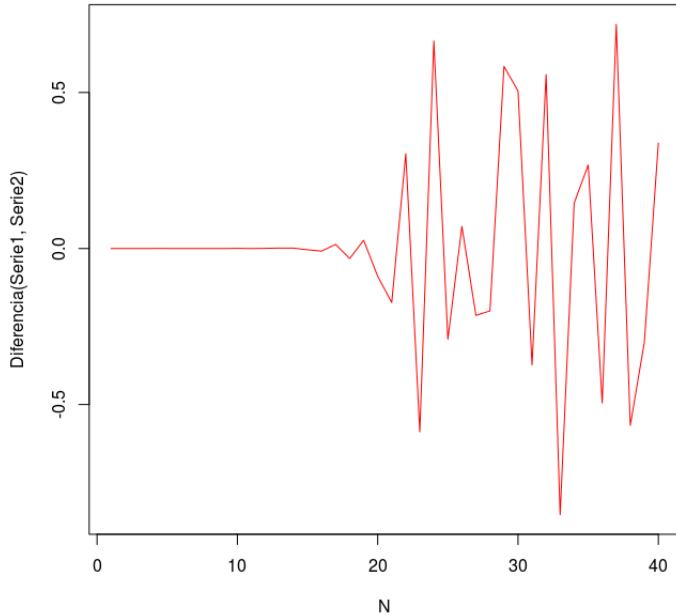


Figura 6: Separación entre las órbitas.

### 3. Autosimilitud

Para encontrar un indicador de autosimilitud se calculó el coeficiente de Hurst usando una serie temporal de 10000 datos y 1000 iteraciones de estabilización dada por la Ecuación (1) y obteniendo como resultado  $H = 0,5172342$ .

### 4. Dimensión

La estimación de la dimensión del sistema se realizó usando el algoritmo boxcount, obteniéndose como resultado  $d = 0,9942281$ . Se puede observar que su dimensión está cerca de ser la de una línea pero no llega a serlo.

## 4.2. Sistema de Hénon

El sistema de Hénon fue propuesto por Michel Hénon como un modelo simplificado de la sección de Poincaré del modelo del clima de Lorenz, con el fin de obtener resultados similares a los obtenidos por Lorenz pero de manera más simple computacionalmente hablando [25]. El sistema está definido por las Ecuaciones (2) y (3).

$$x_{n+1} = y_n - ax_n^2 + 1 \quad (2)$$

$$y_{n+1} = bx_n \quad (3)$$

donde  $a$  y  $b$  son los parámetros del sistema.

El llamado sistema clásico de Hénon, que es caótico, se obtiene con  $a = 1,4$  y  $b = 0,3$  [25]. Para el estudio realizado se usan los anteriores valores y como condiciones iniciales  $x = -0,1$  y  $y = 0,1$ .

## 1. Bifurcación

El diagrama de bifurcación del periodo para el sistema de Hénon, puede apreciarse en la Figura 7. El sistema de Hénon es bidimensional por lo que tiene dos componentes, para el gráfico se usó la componente  $x$  para el eje de las ordenadas, mientras que en el eje de las abscisas se encuentra el parámetro  $a$  del sistema, que toma valores entre  $0 < a < 10$ .

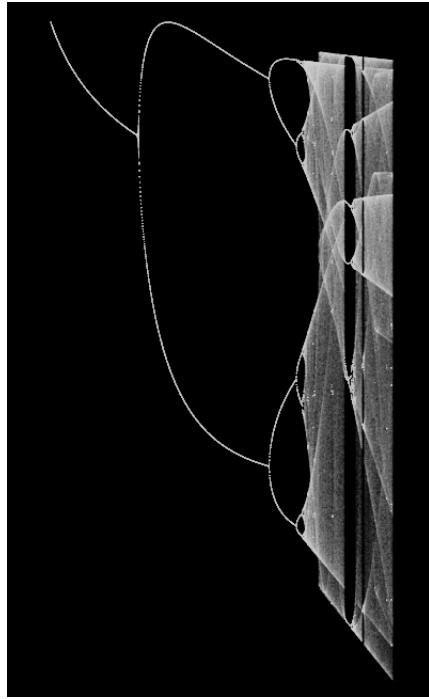


Figura 7: Diagrama de bifurcación.

## 2. Sensibilidad

En la Figura 8 se pueden observar dos órbitas de la componente  $x$  del sistema de Hénon, una de color rojo y la otra de color azul, cuyos puntos de inicio difieren en  $0,000001$ . En la Figura 9 se puede observar el error o diferencia entre dichas órbitas. Para este sistema también se puede observar la gran sensibilidad a las condiciones iniciales que presenta, ya que los valores de las órbitas comienzan a divergir aproximadamente a las 35 iteraciones.

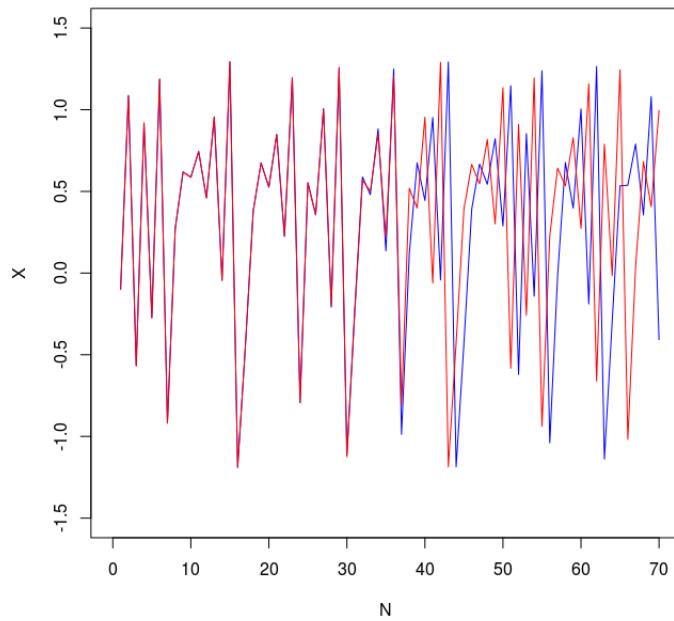


Figura 8: Sensibilidad a las condiciones iniciales.

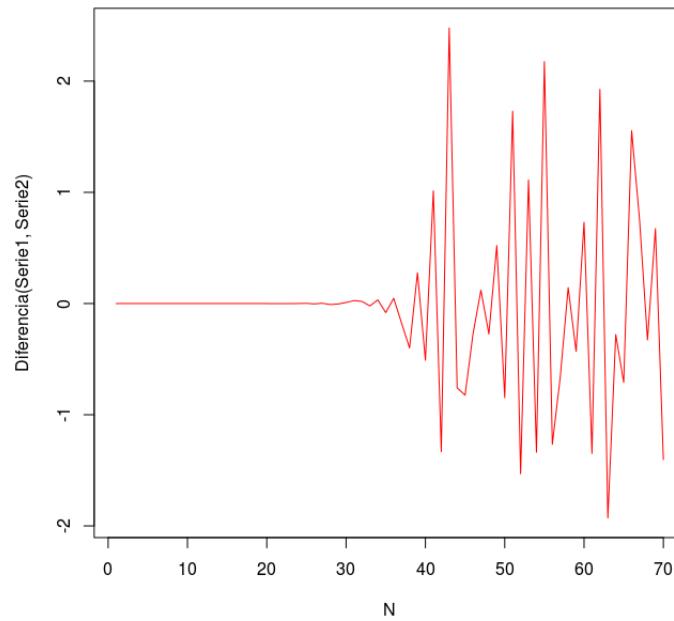


Figura 9: Separación entre las órbitas.

### 3. Autosimilitud

Como indicador de autosimilitud se calculó el coeficiente de Hurst obteniendo un valor de  $H = 0,5155154$ . Para el cálculo se usó una serie temporal de 10000 datos y 1000 periodos de estabilización dada por la Ecuación (2).

#### 4. Atractor

El atractor del sistema de Hénon a simple vista parece ser muy simple pero presenta comportamientos suaves en una dirección y comportamientos cantorianos en la dirección opuesta [25]. El atractor se puede observar en la Figura 10.

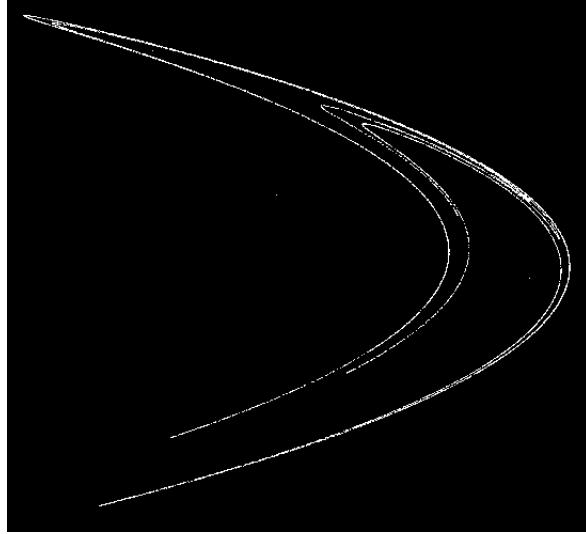


Figura 10: Atractor

#### 5. Dimensión

La estimación de la dimensión del atractor del sistema se realizó usando el algoritmo boxcount obteniendo un valor de  $d = 1,147951$ . Lo que lo ubica mucho más cerca de una recta que de un plano.

### 4.3. Sistema de Tinkerbell

El origen de este sistema es desconocido, al parecer fue creado con fines académicos, sin embargo, la gráfica del sistema tiene cierto parecido al movimiento que realiza el personaje de Disney llamado Tinker Bell, mientras realiza su vuelo [26] y quizás a esto se deba su nombre. El sistema está definido por las Ecuaciones (4) y (5).

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + ax_n + by_n \quad (4)$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + cx_n + dy_n \quad (5)$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son los parámetros del sistema.

Este sistema presenta comportamientos caóticos para varios valores de sus parámetros según diferentes investigadores[26], para el estudio realizado se utilizan los siguientes valores:  $a = 0,5$ ;  $b = -0,6$ ;  $c = 2,2$  y  $d = 0,5$  y como condiciones iniciales  $x = 0,1$  y  $y = 0,1$ .

## 1. Bifurcación

El sistema de Tinkerbell tiene dos componentes. Para realizar el diagrama de bifurcación del periodo se usó la componente  $x$  del sistema, en el diagrama esta componente corresponde al eje de las ordenadas mientras que en el eje de las abscisas se encuentra el parámetro  $a$  del sistema, que toma valores entre  $-0,7 < a < 1$ . Dicho gráfico se puede apreciar en la Figura 11.

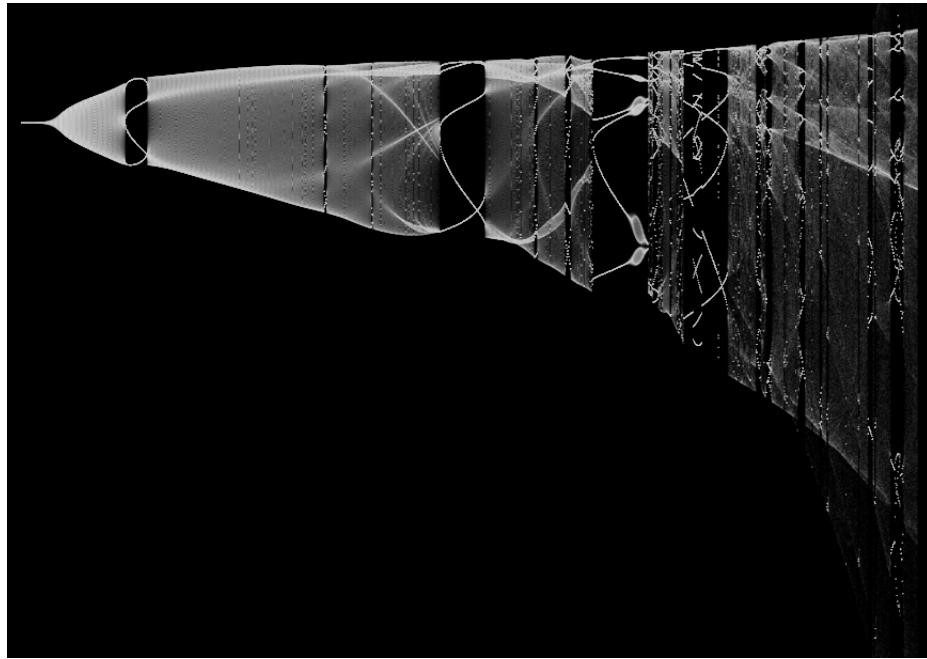


Figura 11: Diagrama de bifurcación.

## 2. Sensibilidad

Para mostrar la sensibilidad a las condiciones iniciales se grafican dos órbitas de la componente  $x$  del sistema de Tinkerbell con una diferencia de  $0,000001$  como condición inicial de la componente del sistema. Esto se puede observar en la Figura 12. Las órbitas se presentan una de color rojo y la otra de color azul, además, en la Figura 13 podemos ver la diferencia o distancia entre las órbitas para tener una mejor idea de la separación de éstas conforme transcurre el tiempo.

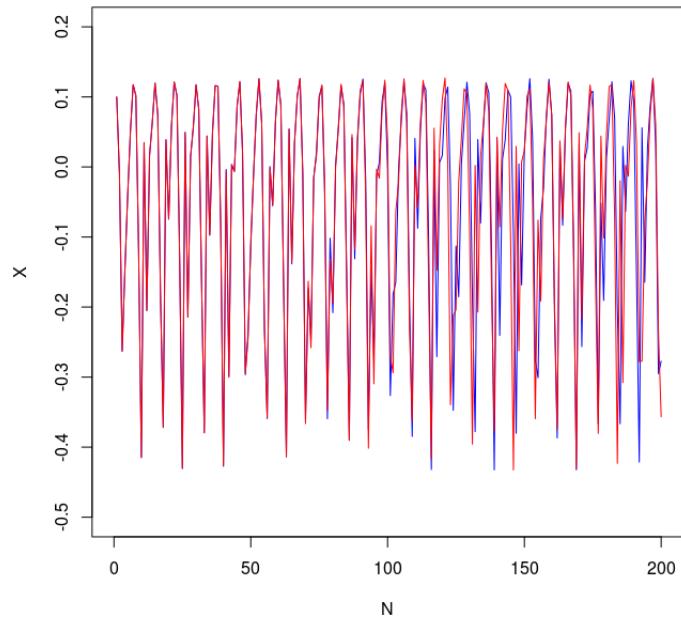


Figura 12: Sensibilidad a las condiciones iniciales.

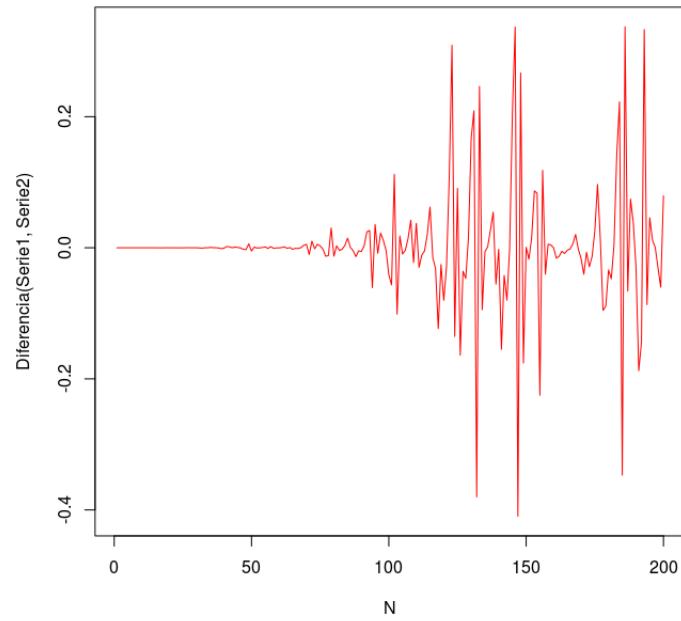


Figura 13: Separación entre las órbitas.

### 3. Autosimilitud

Para buscar algún indicio de autosimilitud se calcula el coeficiente de Hurst usando una serie temporal de 10000 datos y 1000 iteraciones de estabilización dada por la Ecuación (4) obteniendo como resultado  $H = 0,215532$ .

#### 4. Atractor

El atractor del sistema de Tinkerbell, que a mi parecer es uno de los más agradables, se puede apreciar en la Figura 14

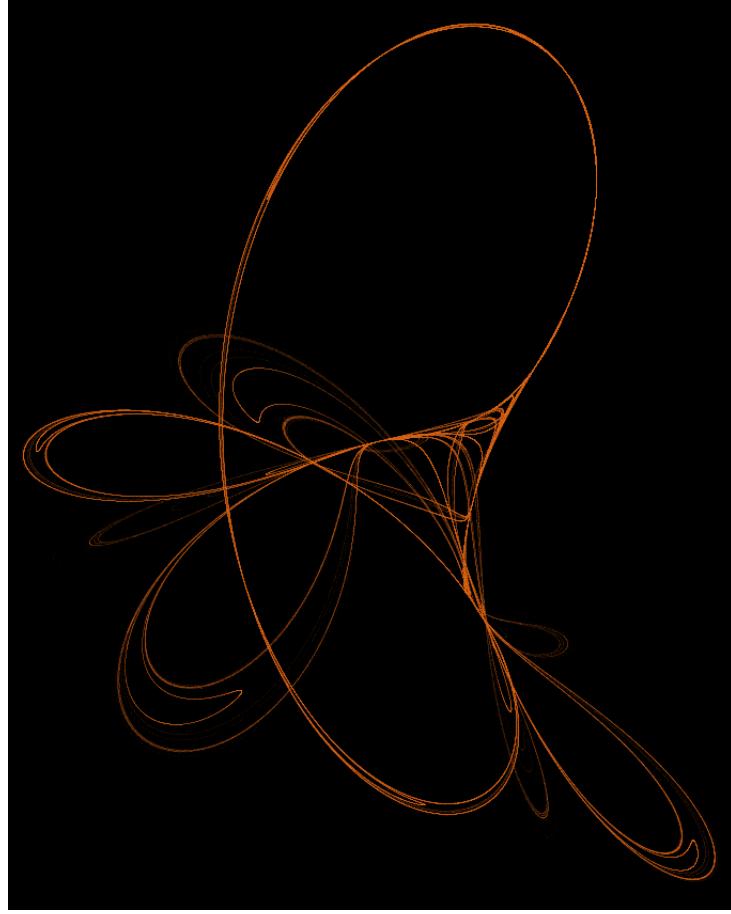


Figura 14: Atractor.

#### 5. Dimensión

La dimensión del atractor del sistema es estimada usando el algoritmo boxcount con el que se obtiene un valor de  $d = 1,085137$ . Esta dimensión es coherente con la gráfica del atractor ya que como se puede observar el espacio que cubre es poco.

#### 4.4. Sistema de Ikeda

El sistema de Ikeda es propuesto como un modelo de la luz que viaja dando vueltas a través de un resonador óptico no lineal [27]. El sistema de Ikeda originalmente fue desarrollado para el plano complejo pero existe una versión para el plano real. Este sistema se encuentra definido por las Ecuaciones (6) y (7).

$$x_{n+1} = a + b(\cos(u)x_n - \sin(u)y_n) \quad (6)$$

$$y_{n+1} = b(\sin(u)x_n + \cos(u)y_n) \quad (7)$$

donde  $u = c - \frac{d}{1+x_n^2+y_n^2}$  y  $a, b, c$  y  $d$  son los parámetros del sistema.

Según [28], este sistema presenta comportamientos caóticos si los parámetros tiene los valores  $a = 1$ ;  $b = 0, 9$ ;  $c = 0, 4$  y  $d = 6$ . Para el estudio realizado se usan los anteriores valores y como condiciones iniciales  $x = 0, 1$  y  $y = 0, 1$ .

### 1. Bifurcación

El diagrama de bifurcación del periodo para el sistema de Ikeda se puede apreciar en la Figura 15. Es interesante poder observar en este diagrama las transiciones entre caos y orden, ya que el sistema se encuentra en un estado caótico, pasa luego por estados periódicos y regresa nuevamente al caos. Para realizar el gráfico se usó la componente  $x$  del sistema que se grafica en el eje de las ordenadas mientras que el parámetro  $a$  del sistema que toma valores entre  $-1,5 < a < 1,5$  se encuentra en el eje de las abscisas.

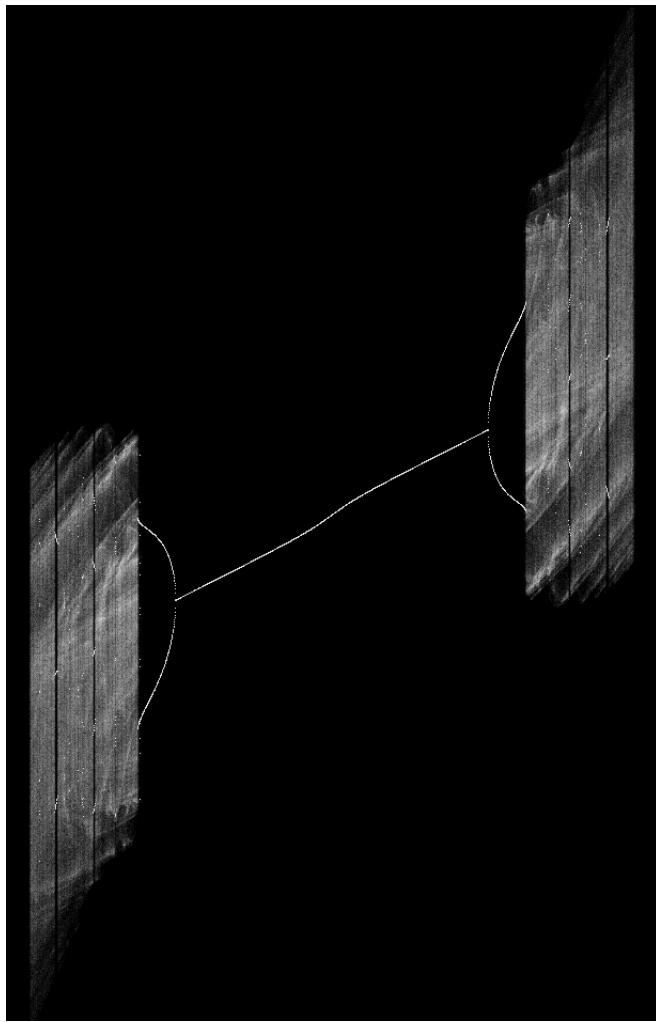


Figura 15: Diagrama de bifurcación.

## 2. Sensibilidad

En la Figura 16 se aprecian dos órbitas de la componente  $x$  del sistema de Ikeda, una de color rojo y la otra de color azul. Como podemos observar el sistema comienza a divergir rápidamente a pesar de que las condiciones iniciales solo difieren en 0,000001 en la componente  $x$  del sistema. Para tener una mejor idea de lo anterior se grafica la diferencia entre estas dos órbitas, dicha gráfica se puede apreciar en la Figura 17.

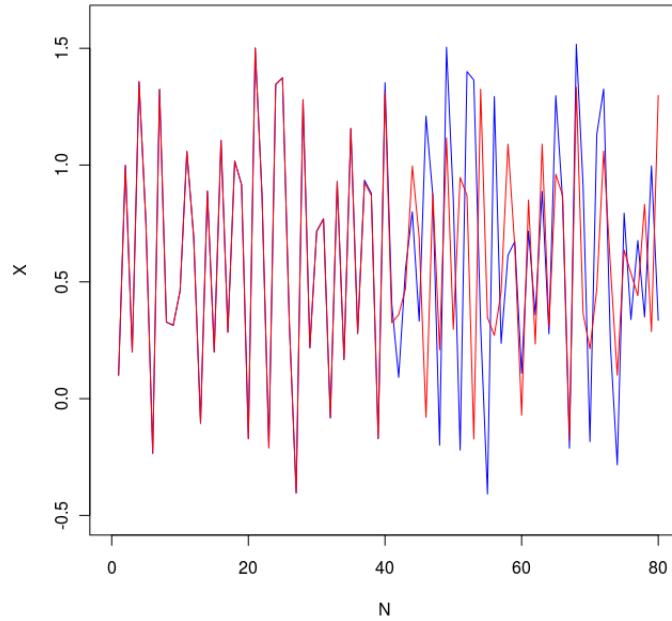


Figura 16: Sensibilidad a las condiciones iniciales.

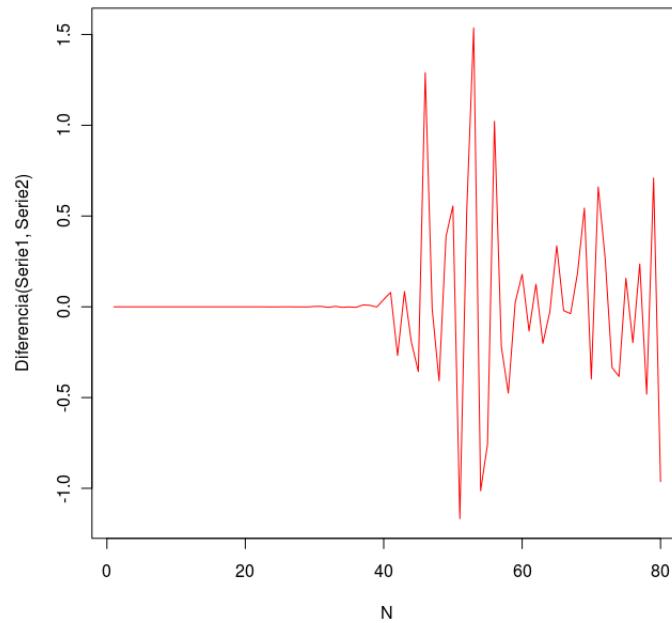


Figura 17: Separación entre las órbitas.

### 3. Autosimilitud

Como indicador de autosimilitud se realizó el cálculo del coeficiente de Hurst obteniendo como resultado  $H = 0,3706288$ . Para llevar esto a cabo se usó una serie temporal de 10000 datos y 1000 iteraciones de estabilización dada por la Ecuación (6).

### 4. Atractor

En la Figura 18 se puede observar el atractor del sistema de Ikeda. En este se pueden observar pequeñas zonas “hueca” por donde no pasa la órbita del sistema, además de tener cierto parecido a la imagen que se da cuando se mezcla crema de leche en una taza de café.



Figura 18: Atractor.

### 5. Dimensión

El valor estimado de la dimensión del atractor del sistema es  $d = 1,294413$  y se obtuvo usando el algoritmo boxcount.

#### 4.5. Sistema de Lorenz

El sistema de Lorenz consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, siendo el primer sistema en tiempo continuo que se cita en el capítulo. Fue desarrollado por Edward Lorenz en 1963 como un modelo de la convección atmosférica o dicho de otra manera, como un modelo matemático para el clima. Históricamente fue el primer sistema

donde se vio manifiesta la sensibilidad a las condiciones iniciales de un sistema dinámico, y posiblemente por ser uno de los sistemas más antiguos en esta área sea uno de los más estudiados. El sistema está definido por el conjunto de Ecuaciones (8), (9) y (10).

$$\frac{dx}{dt} = \delta(y - x) \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x - y - xz \quad (9)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z \quad (10)$$

donde  $\delta$ ,  $\gamma$  y  $\beta$  son los parámetros del sistema.

Para el estudio realizado se usan los valores  $\delta = 10$ ;  $\gamma = 28$  y  $\beta = 8/3$  ya que para éstos el sistema presenta comportamientos caóticos. Como condiciones iniciales se usan los valores  $x = y = z = 0, 3$ .

### 1. Bifurcación

La bifurcación del periodo para el sistema de Lorenz no se manifiesta de la misma forma como ocurre para los sistemas discretos anteriormente mencionados. Para éstos se veía claramente cómo ocurría la bifurcación del periodo y conforme se aumentaban la cantidad de puntos que se graficaban cada vez que se iba variando el parámetro del sistema lo que sucedía era que el gráfico se ponía más oscuro debido a la superposición de puntos, aunque es de aclarar que esto no se muestra en los gráficos ya que es irrelevante para el estudio realizado.

En el caso del sistema de Lorenz, la bifurcación no es clara y al aumentar la cantidad de puntos que se grafican lo que se obtiene es algo parecido a diagramas superpuestos. Los diagramas del sistema de Lorenz usando 100, 300 y 500 puntos respectivamente se pueden apreciar en las Figuras 19, 20 y 21 para el caso de la componente  $x$ , y en las Figuras 22, 23 y 24 para el caso de la componente  $z$ .

Este fenómeno puede deberse a que los puntos que se obtienen no son exactos, sino que son obtenidos al usar métodos numéricos para aproximar la solución del sistema de ecuaciones. Además, dada la forma en que el sistema evoluciona (esto se puede observar en el atractor) las órbitas del sistema tienden a pasar una y otra vez por puntos muy cercanos, lo que puede ocasionar que al graficar esta trayectoria se obtengan imágenes superpuestas un poco corridas una de otra, por decirlo de alguna manera.

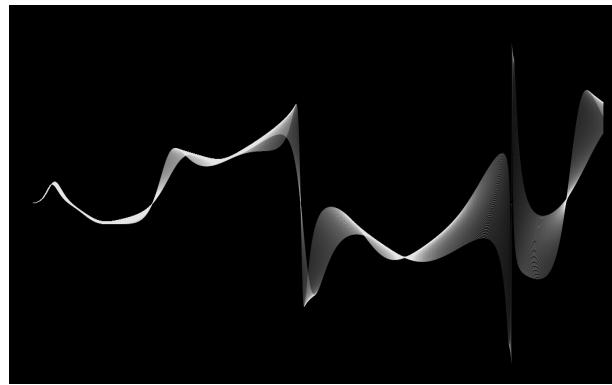


Figura 19: Diagrama de bifurcación de la componente  $x$  con 100 puntos.

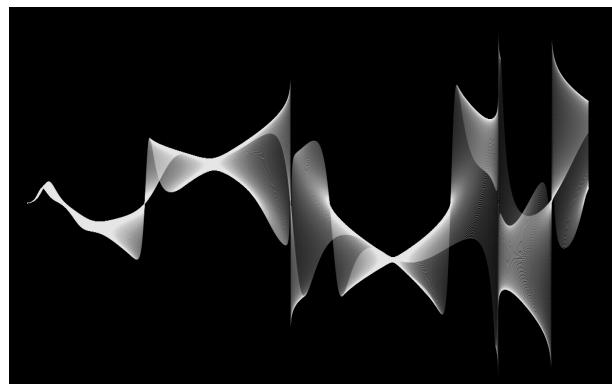


Figura 20: Diagrama de bifurcación de la componente  $x$  con 300 puntos.

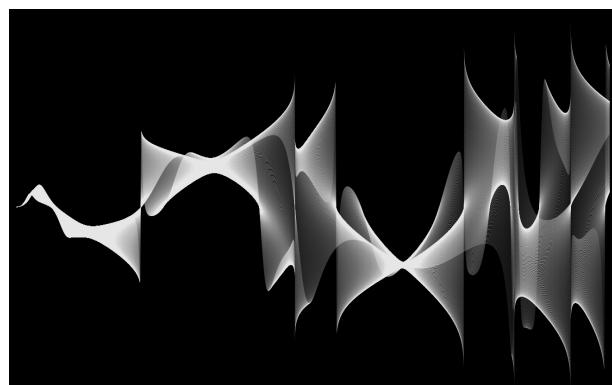


Figura 21: Diagrama de bifurcación de la componente  $x$  con 500 puntos.

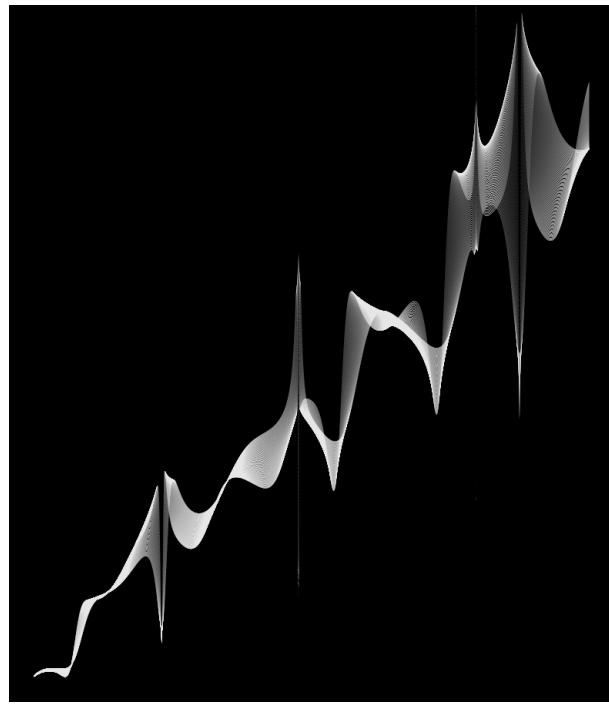


Figura 22: Diagrama de bifurcación de la componente  $z$  con 100 puntos.

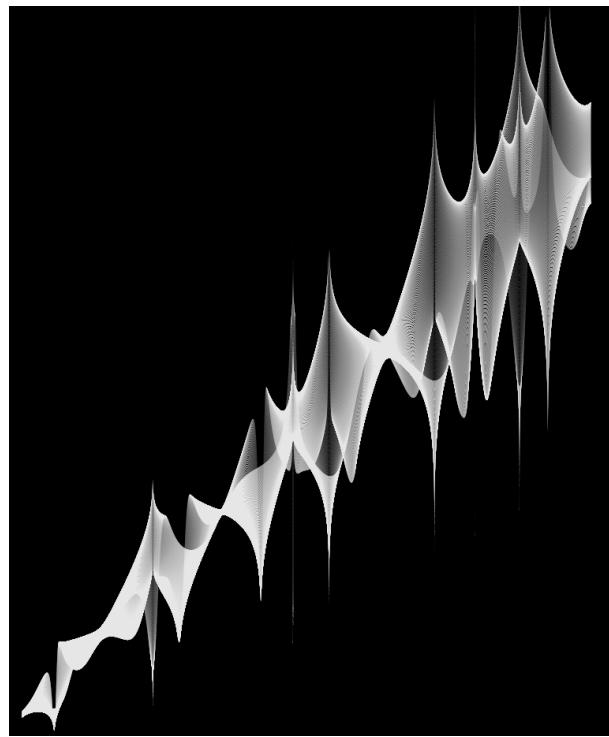


Figura 23: Diagrama de bifurcación de la componente  $z$  con 300 puntos.

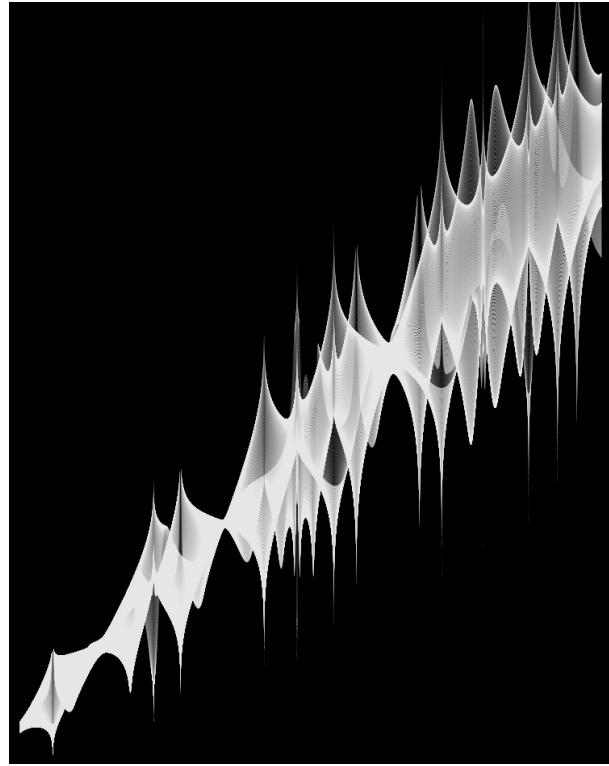


Figura 24: Diagrama de bifurcación de la componente  $z$  con 500 puntos.

## 2. Sensibilidad

Para observar la sensibilidad a las condiciones iniciales se han graficado dos órbitas de la componente  $x$  del sistema de Lorenz, una de color rojo y la otra de color azul, con una diferencia de 0,000001 en la componente como condición inicial del sistema. Es notable ver que a diferencia de los sistemas discretos, el sistema de Lorenz pareciera que comienza a divergir en un punto muy alto, alrededor de los 3000 puntos, pero esto se debe a que los puntos son aproximaciones y para obtener una buena aproximación se usa un paso pequeño, en este caso de 0,001 por lo que se recorre un pequeño espacio usando muchos puntos. Lo anteriormente descrito se puede apreciar en la Figura 25. Además de esto se ha graficado la diferencia entre las dichas órbitas, para tener una mejor idea del suceso ocurrido, como se puede apreciar en la Figura 26.

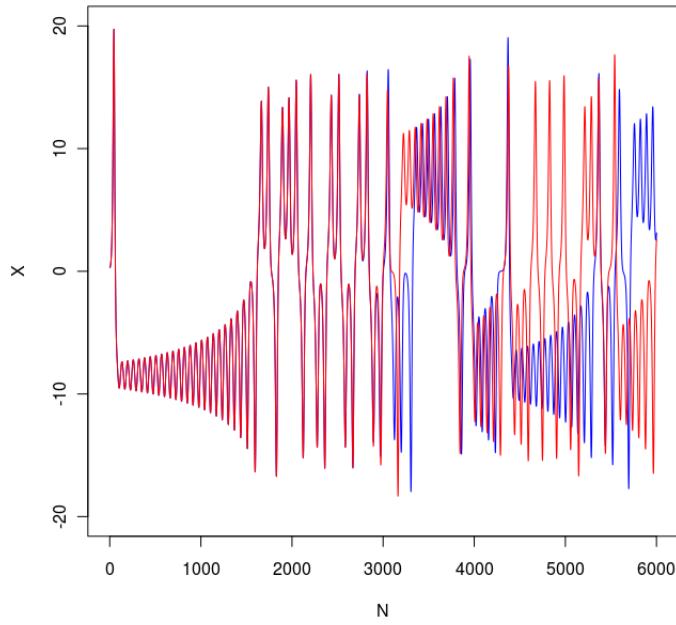


Figura 25: Sensibilidad a las condiciones iniciales.

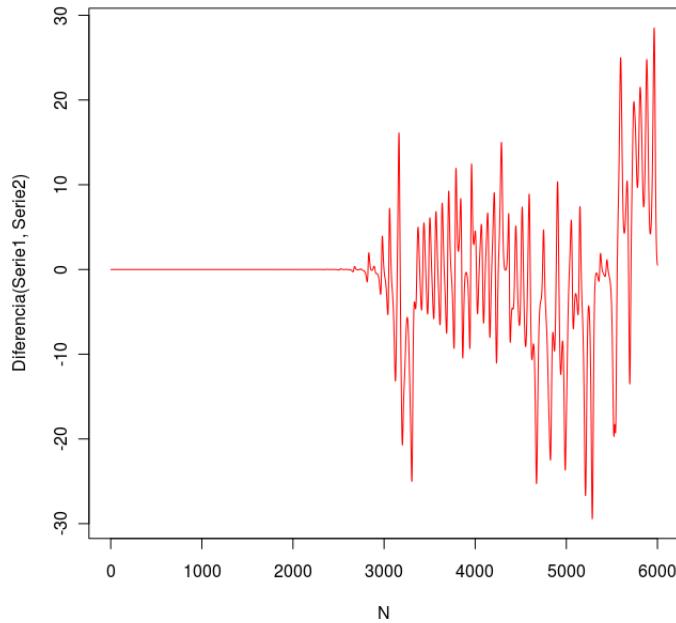


Figura 26: Separación entre las órbitas.

### 3. Autosimilitud

Como estimador de la autosimilitud del sistema de Lorenz se ha calculado el coeficiente de Hurst obteniendo un valor de  $H = 0,8251877$  usando una serie de tiempo de 10000 datos con un periodo de estabilización de 1000 iteraciones dada por la Ecuación (8).

#### 4. Atractor

El atractor del sistema de Lorenz muestra un movimiento complejo y además muy particular ya que tiene cierto parecido a las alas de una mariposa, y fué quizás esta forma la que inspiró a Lorenz para llamar efecto mariposa a la sensibilidad frente a pequeños cambios en las condiciones iniciales. El atractor puede observarse en la Figura 27.

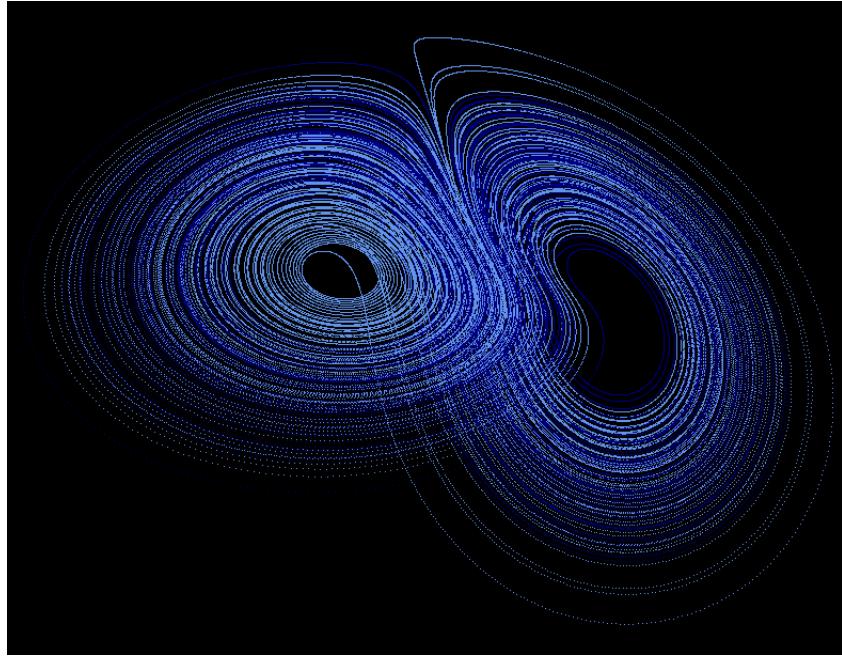


Figura 27: Atractor.

#### 4.6. Conclusiones del Capítulo

Los sistemas estudiados sólo presentan la característica de ser caóticos si se escogen adecuadamente los valores de los parámetros de dichos sistemas, es de aclarar que el estudio sólo estaba enfocado al caso en que fueran caóticos y las conclusiones dadas sólo se refieren a dichos casos.

Todos los sistemas estudiados presentan una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, dado que si se aplica una pequeña perturbación al sistema, las órbitas que éste describe se tornaran rápidamente muy distintas a lo que hubieran sido si no se hubiera aplicado dicha perturbación.

En cuanto al atractor del sistema, para los que existen en el plano o en el espacio se pudo observar su extraño y complejo comportamiento, y se ve claramente que no tienen una geometría a la que estemos acostumbrados. Además, estos atractores no tienen una dimensión euclídea, por el contrario, la ecuación logística no llega a ser una recta y los sistemas de Hénon, Tinkerbell e Ikeda no llegan a ser un plano aunque tampoco son una

recta, son algo intermedio, tienen dimensión fractal.

Exceptuando el caso del sistema de Lorenz, todos los demás sistemas presentan un claro diagrama de bifurcación del periodo. Para ser un poco más exactos, los sistemas de Hénon, Ikeda y la ecuación logística presentan una duplicación del periodo mientras que el sistema de Tinkerbell presenta otro tipo de bifurcación. Además, como ya se había mencionado antes, en todos estos sistemas se observa claramente la coexistencia del caos y el orden. Por otro lado, me es intrigante el comportamiento del sistema de Lorenz, dado que usando el mismo procedimiento que en los demás casos no se llegó a resultados similares, y considero que el hecho de que el sistema sea continuo no es determinante para que se presente dicho comportamiento.

Para el estudio de la autosimilitud se usó el coeficiente de Hurst, pero dado que este es una estimación no podemos ser concluyentes en nuestras afirmaciones. Para los sistemas de Hénon, la ecuación logística y el sistema de Lorenz se obtuvieron coeficientes mayores que 0,5 por lo que existe algún índice de fractalidad, aunque para los dos primeros sistemas se obtuvieron valores muy cercanos a 0,5 por lo que se podemos decir que están al borde de la aleatoriedad. Para dos de los sistemas estudiados, el sistema de Tinkerbell y el sistema de Ikeda, se obtuvieron coeficientes menores que 0,5 lo que nos indica una autocorrelación negativa, pero no me atrevo a concluir que no poseen autosimilitud.

## 5. Proceso de Control

En el presente capítulo se detalla el proceso realizado para lograr el control de sistemas dinámicos caóticos. En la Figura 28 podemos apreciar el esquema general planteado para dicho proceso.

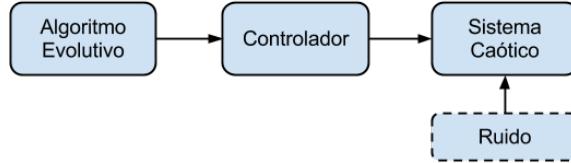


Figura 28: Esquema general del proceso de control.

En el proceso interactúan tres componentes, estos son: el Algoritmo Evolutivo, el Controlador y el Sistema Caótico. Como se puede ver, el algoritmo evolutivo no es quien realiza el control pues este en ningún momento tiene contacto directo con el sistema caótico. El algoritmo evolutivo se encarga de encontrar la mejor configuración posible para el sistema de control y de esta manera dicho sistema puede lograr la adecuada estabilización del sistema caótico. El ruido puede estar o no presente en un sistema, aunque de manera teórica, porque en la práctica, siempre existirá alguna perturbación externa que afecte al sistema.

Ya se ha hablado lo suficiente de los sistemas caóticos, por lo que en lo que resta del capítulo se hablará del controlador y del algoritmo evolutivo.

### 5.1. Controlador

El método seleccionado para realizar control está inspirado en el método Delayed Feedback Control de Pyragas [18], también llamado Time Delay Auto Synchronization(TDAS).

Este método fue desarrollado para estabilizar el sistema en torno a UPOs e implementa el concepto de realimentación negativa por lo que aplica pequeñas perturbaciones al sistema de manera continua usando estados anteriores del propio sistema. El esquema general de funcionamiento de este método se puede observar en la Figura 29.

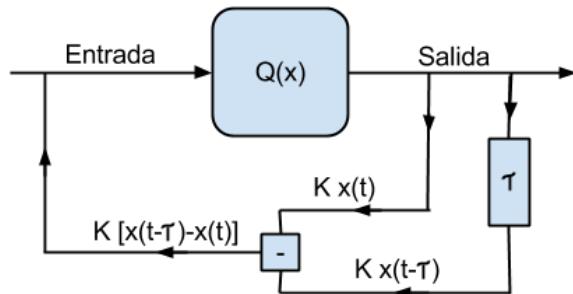


Figura 29: Funcionamiento del Sistema de Control.

Este método se puede modelar usando la Ecuación (11). En esta se tiene un sistema  $Q$  descrito por la variable  $x$  y una fuerza externa controlable  $F$  que depende del tiempo. Esta fuerza es la perturbación que se le inyecta al sistema y sería cero en ausencia de control.

$$\frac{dx}{dt} = Q(x) + F(t) \quad (11)$$

Si se toma una órbita del sistema de periodo  $\tau$  esta debe de cumplir la condición  $x(t) = x(t + \tau)$  por lo que la ley de control está dada por la Ecuación (12)

$$F(t) = K[x(t - \tau) - x(t)] \quad (12)$$

donde la constante  $K$  es la intensidad de la perturbación.

El trabajo al usar este método consiste en encontrar el valor adecuado de  $K$  con el cual se logra la estabilización. El valor de  $K$  debe ser limitado ya que puede hacer que el valor de la fuerza  $F$  llegue a ser tal que haga divergir el sistema que se trata de controlar. Normalmente, el valor de  $K$  es hallado usando algún tipo de procedimiento matemático.

TDAS presenta dos inconvenientes que impide se tengan buenos resultados para órbitas con un periodo superior a uno (punto fijo).

El primer inconveniente se refiere al hecho de que mientras el proceso evoluciona el valor de  $F$  puede ser grande, pero una vez se logre la estabilización, este se hace muy pequeño o incluso nulo. Debido a la sensibilidad que presentan los sistemas caóticos, la intensidad de la fuerza  $F$  debe ser muy pequeña pero si se hace nula se puede llegar a dar una estabilización pobre y en el peor de los casos ningún tipo de estabilización. El segundo inconveniente es que entre más se retroceda en los estados del sistema para calcular  $F$  peores resultados se obtendrán debido al rápido cambio que presenta este tipo de sistemas.

Como se puede ver, lo que intenta hacer Pyragas es que el valor de  $F$  siempre tienda a cero, ya que los estados anteriores que toma del sistema para calcular  $F$  tendrán el mismo valor si  $\tau$  es igual al periodo de la órbita buscada. Otra forma de verlo es pensar en  $F$  como un sistema con una órbita de periodo uno.

Para solucionar los inconvenientes que presenta este método de una manera simple, propongo que para calcular el valor de  $F$  siempre se usen los dos estados anteriores del sistema sin importar el periodo de las órbitas que se buscan. De esta manera, la estabilización del sistema se logrará si  $F$  tiene el mismo periodo de la órbita deseada. La determinación del periodo de la órbita que se desea correrá por cuenta de la función objetivo del algoritmo evolutivo, como se verá más adelante.

## 5.2. Algoritmo Evolutivo

El algoritmo evolutivo a usar es el conocido como Algoritmo Genético (GA). Fue el primer algoritmo evolutivo, propuesto por John Holland en 1975.

Los GA codifican las variables de decisión de un problema de búsqueda en una cadena de valores finita. Cada cadena es una candidata a solución al problema y es llamada cromosoma. Cada valor del cromosoma es llamado gen y cada posible valor del gen es llamado alelo. El conjunto de todos los cromosomas es llamado población. Para medir que tan buena solución es cada cromosoma se usa una función objetivo que puede ser un modelo matemático, una simulación o en general, cualquier cosa que indique si la solución es buena y permita al GA guiar la evolución hacia buenas soluciones [29].

### 5.2.1. Codificación

Los cromosomas serán arrays reales unidimensionales de un elemento. Este elemento representará el valor  $K$  que es el parámetro del sistema de control.

### 5.2.2. Población Inicial

Como se ha mencionado antes, el valor de  $K$  debe de encontrarse acotado, por este motivo, lo primero que se hace es encontrar un intervalo aunque de manera estimada y luego se genera la población inicial dentro de dicho intervalo.

Para hallar el intervalo en el que debe de encontrarse  $K$  se crea un intervalo donde se espera se encuentren los posibles valores de  $K$  y se va reduciendo por sus extremos. Esto se logra usando la función objetivo. Los extremos se evalúan y si son muy malos se reducen, hasta que se llegue a un valor razonablemente bueno. El intervalo encontrado no será perfecto pero asegurará que la mayor parte de la población sean buenos candidatos a solución.

Dada la naturaleza del sistema de control se sabe que el valor de  $K$  debe encontrarse cercano a cero. Por el anterior motivo, la población inicial se crea aleatoriamente generando números distribuidos normalmente con media 0 y desviación  $1 \sim N(0, 1)$  y tomando sólo los que caen dentro del intervalo encontrado en el paso anterior.

### 5.2.3. Selección

El tamaño del mating pool es el 10 % del total de la población. El método de selección usado para poblar el mating pool cada generación es el torneo. Este consiste en tomar de manera aleatoria el 3 % de la población y realizar una competencia entre ellos, esto es, aplicar a cada uno la función objetivo y seleccionar el que mejor puntaje obtenga. Este procedimiento se realiza tantas veces como individuos deba de tener el mating pool.

### 5.2.4. Reproducción

A pesar de que existen varios operadores de reproducción y muchos autores indican que se debe de usar al menos dos, por ejemplo la mutación y el cruce, en este caso sólo se aplica la mutación. Esto debido a que no tiene sentido hablar de cruce cuando los cromosomas sólo tienen un gen.

La mutación consiste en sumar a cada gen un número normalmente distribuido con media 0 y desviación  $0.06 \sim N(0, 0.06)$ . El número generado  $a$  se encuentra aproximadamente entre  $-0.2 \leq a \leq 0.2$ , con lo que se asegura que el cambio sea pequeño y que la solución no se va a dañar debido a la sensibilidad del sistema a controlar.

Los nuevos individuos generados en la reproducción son insertados en la población reemplazando a sus padres, por lo que tenemos una población de tamaño constante.

### 5.2.5. Función Objetivo

La función objetivo que se usará es la presentada en la Ecuación (13). En ésta se trata de minimizar el área creada por la diferencia entre el estado (ES) actual del sistema y el  $i$ -ésimo estado siguiente en todo el intervalo de estabilización( $\rho$ ), siendo  $i$  el periodo que se desea tenga la órbita del sistema una vez se estabilice.

$$FO = \sum_{t=0}^{\rho-i} |ES_{t+i} - ES_t| \quad (13)$$

## 6. Pruebas y Resultados

En el presente capítulo se encuentran los resultados obtenidos al aplicar el proceso de control a cuatro de los sistemas caóticos anteriormente estudiados. Para cada uno de los sistemas se realizan dos pruebas, una en donde el sistema está libre de ruido, tal como sus ecuaciones lo definen y otra donde se le inyecta ruido al sistema, algo más ajustado a la realidad. De esta manera se muestra lo robusto que puede llegar a ser el proceso de control implementado.

Dado que el dominio de cada sistema es distinto, no se le puede aplicar el mismo ruido a todos los sistemas. De manera general, el ruido seguirá una distribución Normal con media 0 y desviación  $1 \sim N(0, 1)$  pero de éste se obtendrá un porcentaje  $R$  dependiente del sistema, y el valor obtenido corresponderá al valor real de ruido para ese sistema en particular.

Para cada una de las pruebas realizadas se buscará estabilizar el sistema a órbitas de periodo uno (puntos fijos), dos y cuatro. Se ha de suponer que estas órbitas deberían ser UPOs, puesto que el algoritmo usado es una modificación del algoritmo TDAS de Pyragas, pero de esto no se tiene certeza. Una manera de probar que lo encontrado son UPOs es usar algún método que encuentre las UPOs de un sistema y comparar el resultado obtenido con las órbitas a las que se ha estabilizado el sistema que está siendo controlado, pero los métodos usados para encontrar UPOs pueden llegar a ser complejos y esto está fuera del alcance del presente trabajo.

El valor de los parámetros usados para configurar el algoritmo evolutivo y el proceso de control en cada uno de los casos se pueden encontrar en la Tabla 1.

El software que implementa el proceso de control y con el que se obtiene dichos resultados se encuentra adjunto a este documento.

Tabla 1: Valores de los parámetros del algoritmo evolutivo y el proceso de control. CE: Cantidad de Ejecuciones; CG: Cantidad de Generaciones; CI: Cantidad de Individuos;  $\rho$ : Periodo Estable; O: Órbita

Sistema	Sin Ruido					Con Ruido				
	CE	CG	CI	$\rho$	O	CE	CG	CI	$\rho$	O
Ecuación Logística	1	100	100	50	1	5	100	100	50	1
	1	100	100	50	2	5	100	100	50	2
	1	100	100	50	4	5	100	100	50	4
Sistema de Henon	1	100	100	50	1	5	100	100	50	1
	1	100	100	50	2	5	100	100	50	2
	1	100	100	50	4	5	100	100	50	4
Sistema de Tinkerbell	1	100	100	50	1	5	100	100	50	1
	1	100	100	50	2	5	100	100	50	2
	1	100	100	50	4	5	100	100	50	4
Sistema de Ikeda	10	100	100	50	1	30	100	100	50	1
	10	100	100	50	2	30	100	100	50	2
	10	100	100	50	4	30	100	100	50	4

## 6.1. Ecuación Logística

El único sistema unidimensional que tenemos. Su comportamiento se puede apreciar en la Figura 30 y está dado por la Ecuación (1). Para realizar el control se usó la Ecuación (14). Las condiciones iniciales del sistema son  $x = 0,1$  y  $r = 3,8$ . Los resultados obtenidos para la prueba sin ruido se puede observar en las Figuras 31, 32 y 33 para órbitas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente. Los resultados para la prueba con ruido se puede observar en las Figuras 34, 35 y 36 para órbitas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= rx_n(1 - x_n) + F(n) \\ F(n) &= K(x_{n-1} - x_n) \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $r$  es el parámetro del sistema.

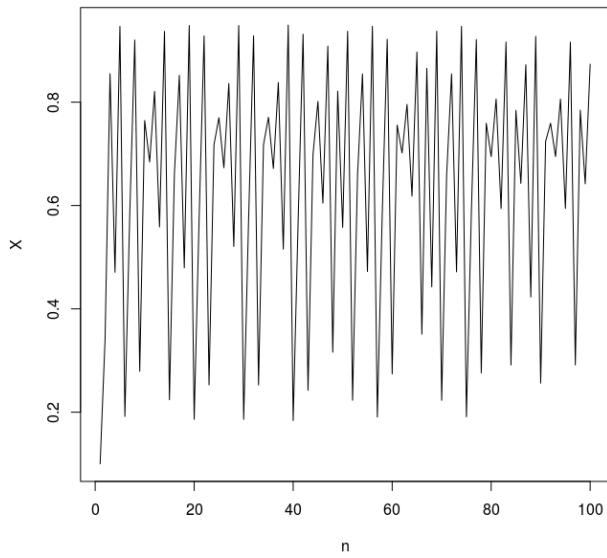


Figura 30: Comportamiento sin control.

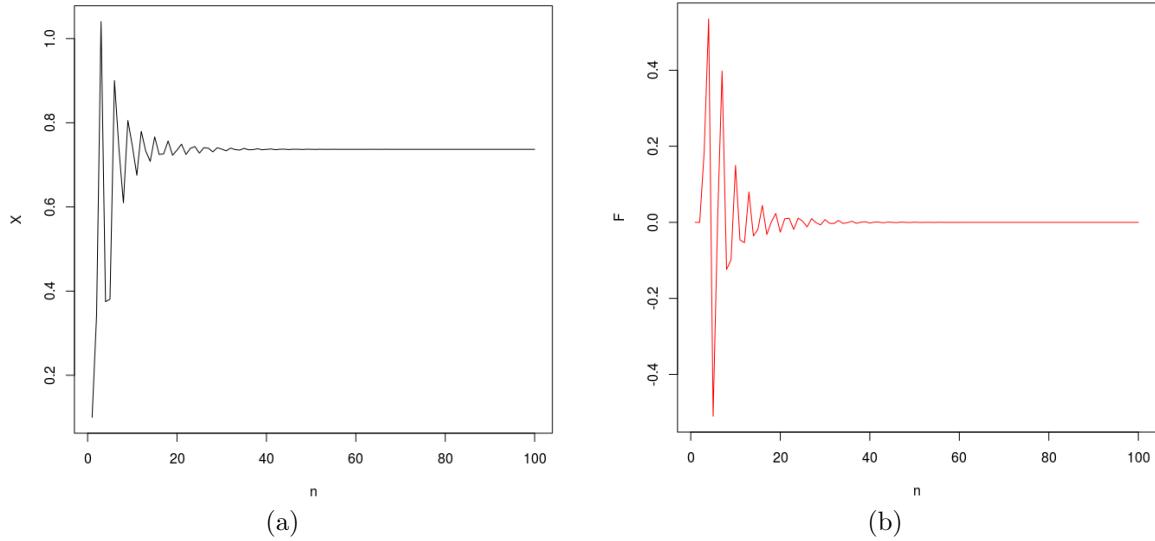


Figura 31: Control realizado para órbita de periodo uno. En 31a se observa la órbita obtenida al realizar el proceso de control y en 31b la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,765887$ ;  $-0,8 \leq K \leq 0,12$ .

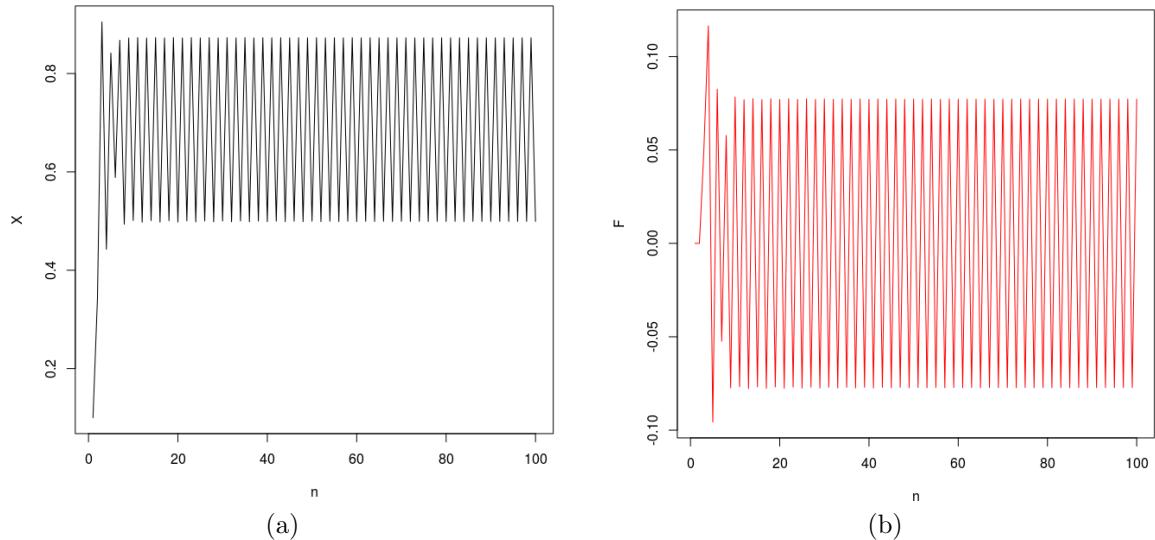


Figura 32: Control realizado para órbita de periodo dos. En 32a se observa la órbita obtenida al realizar el proceso de control y en 32b la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,206769$ ;  $-0,8 \leq K \leq 0,12$

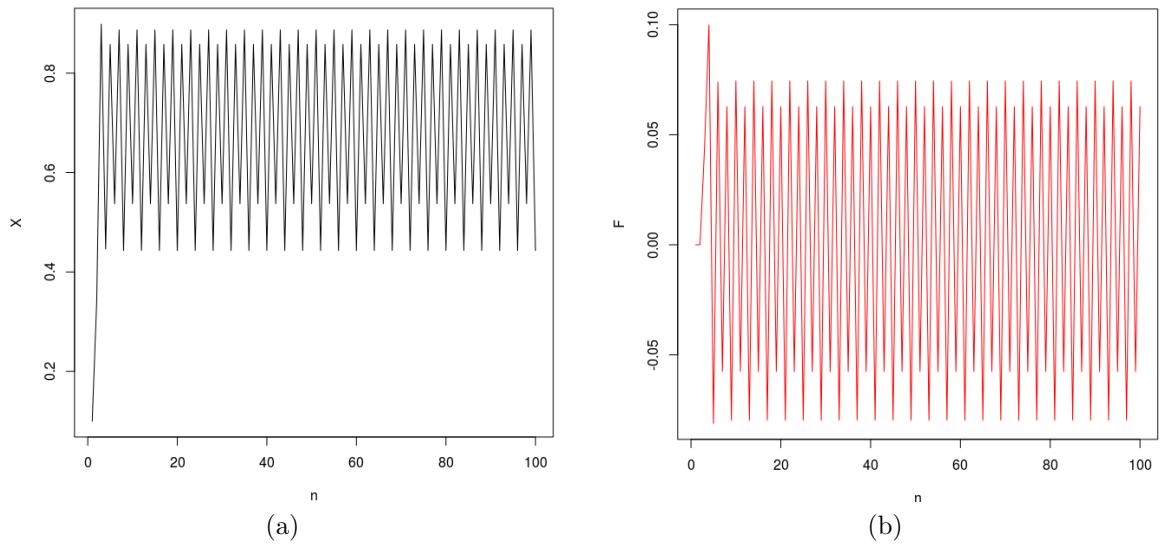
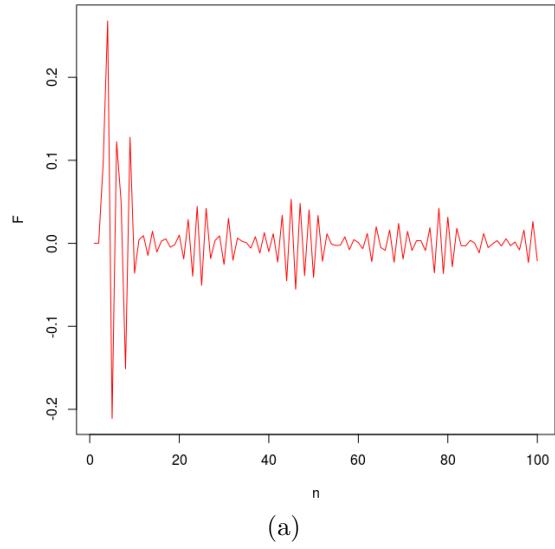
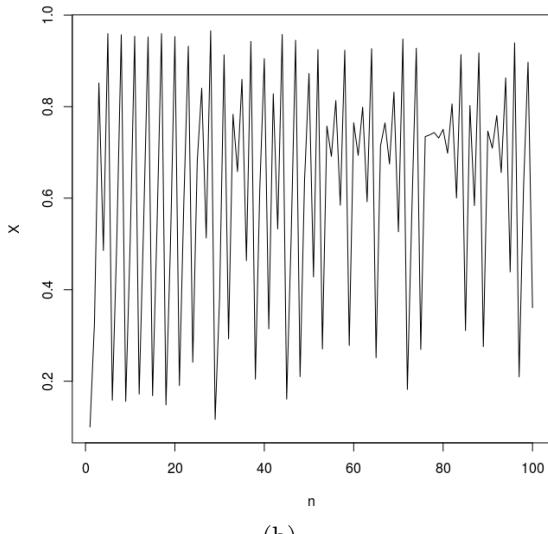


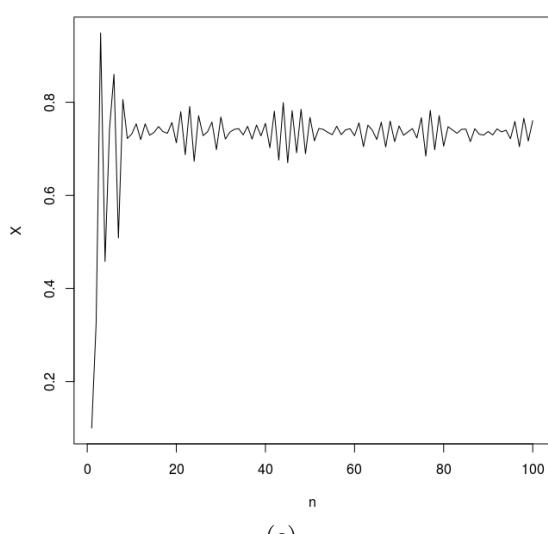
Figura 33: Control realizado para órbita de periodo cuatro. En 33a se observa la órbita obtenida al realizar el proceso de control y en 33b la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,179432$ ;  $-0,8 \leq K \leq 0,12$ .



(a)

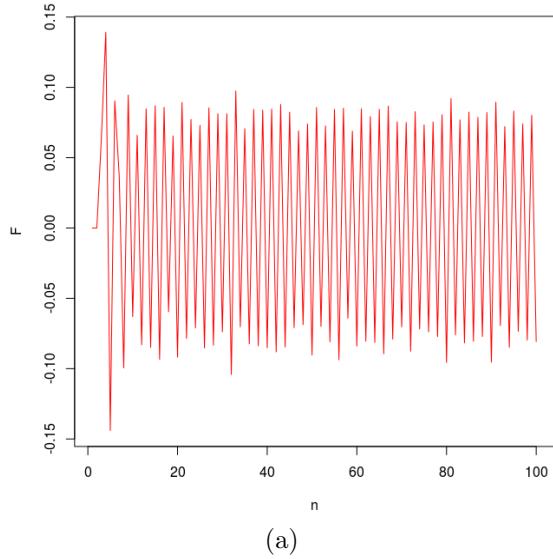


(b)

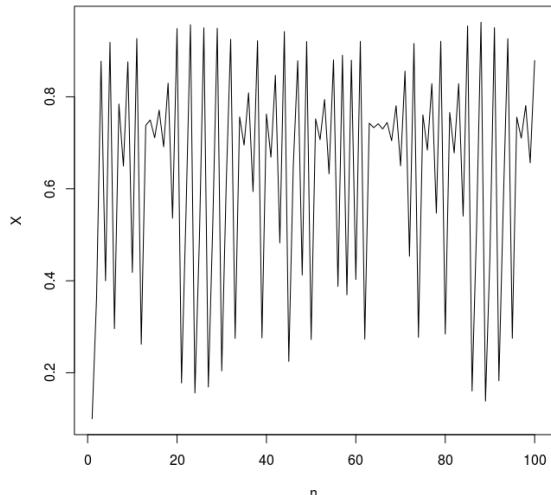


(c)

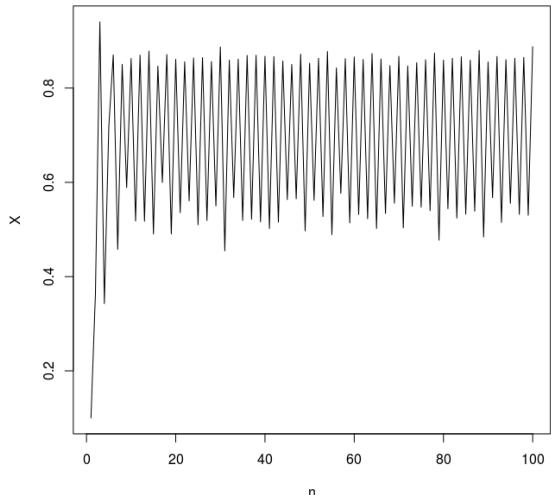
Figura 34: Control realizado para órbita de periodo uno con ruido. En 34b y 34c se observa la órbita del sistema con ruido y la órbita obtenida al realizar el proceso de control respectivamente. En 34a se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,42997$ ;  $-0,84 \leq K \leq 0,12$  y  $R = 0,01$



(a)

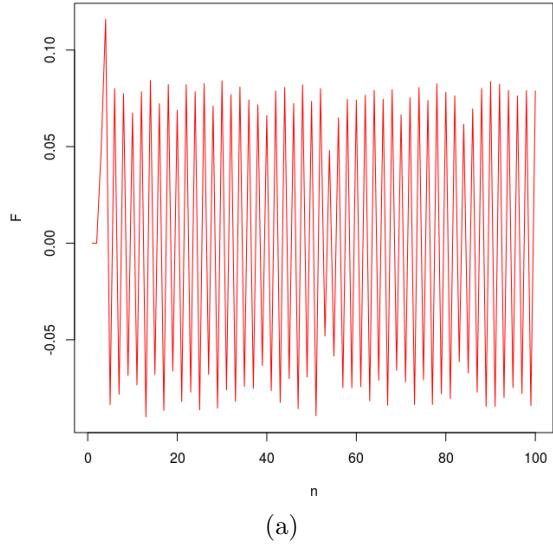


(b)

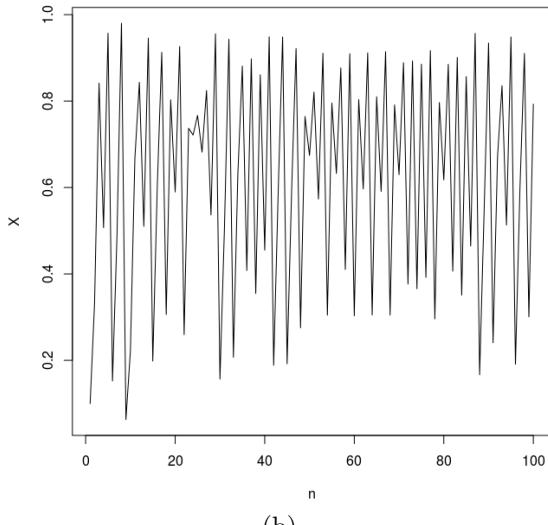


(c)

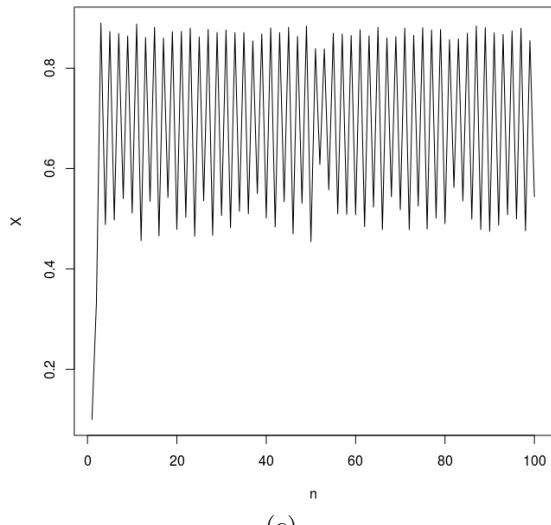
Figura 35: Control realizado para órbita de periodo dos con ruido. En 35b y 35c se observa la órbita del sistema con ruido y la órbita obtenida al realizar el proceso de control respectivamente. En 35a se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,240823$ ;  $-0,68 \leq K \leq 0,1$  y  $R = 0,01$



(a)



(b)



(c)

Figura 36: Control realizado para órbita de periodo cuatro con ruido. En 36b y 36c se observa la órbita del sistema con ruido y la órbita obtenida al realizar el proceso de control respectivamente. En 36a se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0.208122$ ;  $-0.86 \leq K \leq 0.12$  y  $R = 0.01$

Como se puede observar en las Figuras 31, 32 y 33 el proceso de control realizado para estabilizar el sistema sin ruido a órbitas de periodo uno, dos y cuatro ha sido completamente exitoso.

En la prueba con ruido el proceso de control trata de estabilizar el sistema a las órbitas indicadas, como se observa en las Figuras 34, 35 y 36. Si bien el periodo de las órbitas no es claro puesto que el ruido constantemente altera el sistema éstas se parecen mucho a las órbitas obtenidas en la prueba sin ruido.

Si aumentamos un poco más el ruido que se le inyecta al sistema el proceso de control comienza a tener problemas para lograr una estabilización, como se puede observar en la Figura 37. Para todas las órbitas que se buscan, el sistema tiende a estabilizarse a algo parecido a la órbita de periodo uno encontrada en la prueba sin ruido.

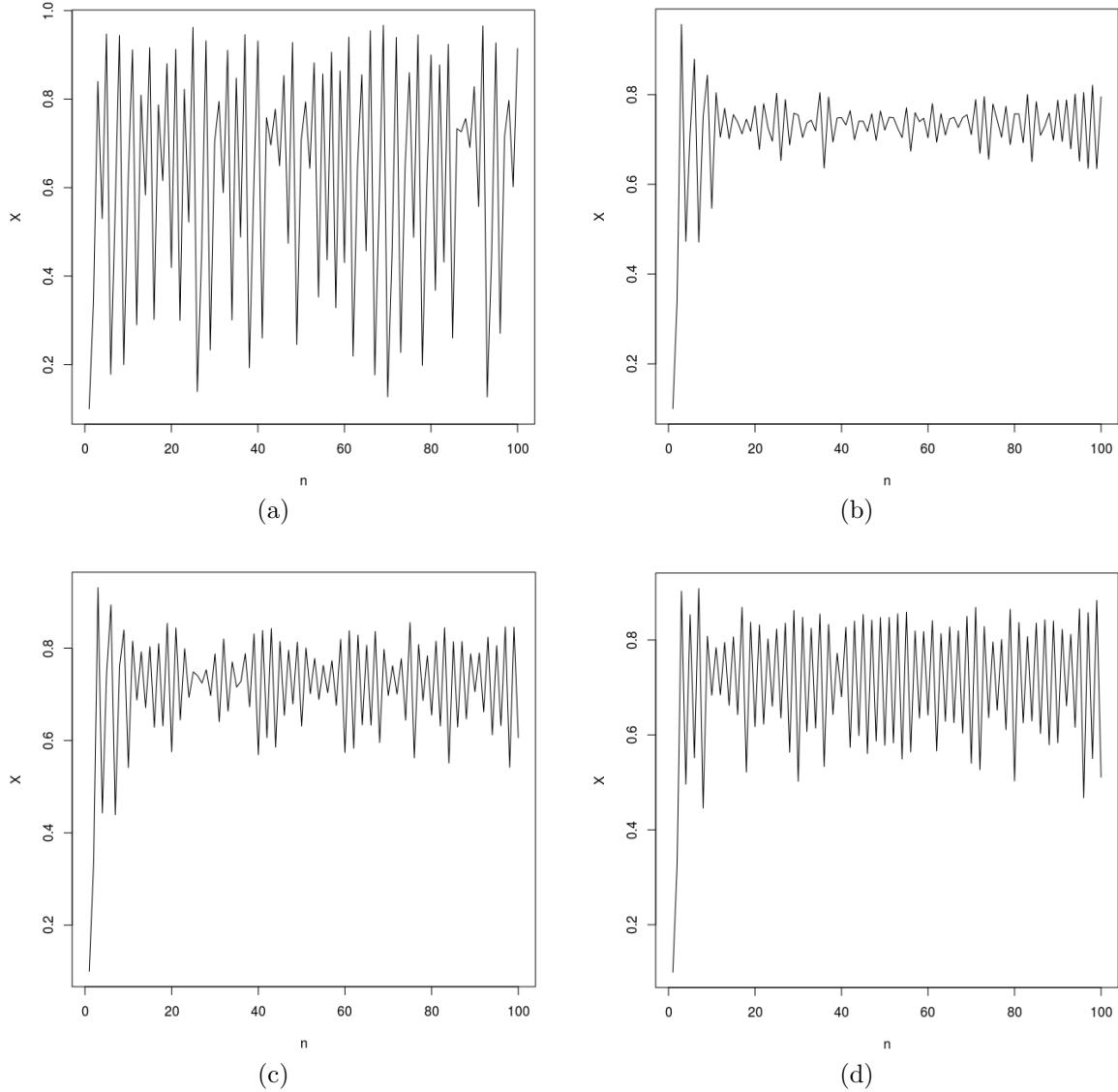


Figura 37: Control realizado para órbita de periodo uno, dos y cuatro con ruido. En 37a se observa la órbita del sistema con ruido y en 37b, 37c y 37d se observan las órbitas obtenidas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente al realizar el proceso de control. Esto se logra con  $R = 0,02$ .

## 6.2. Sistema de Hénon

Su comportamiento en el eje de las abscisas se puede apreciar en la Figura 38 y está dado por la Ecuación (2). Su comportamiento en el plano real se puede apreciar en la Figura

10. Para realizar el control se usó la Ecuación (15). Las condiciones iniciales del sistema son  $x = -0,1$ ;  $y = 0,1$ ;  $a = 1,2$  y  $b = 0,3$ . Los resultados obtenidos para la prueba sin ruido se pueden apreciar en las Figuras 39, 40 y 41 para órbitas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente. Los resultados obtenidos para la prueba con ruido se pueden apreciar en las Figuras 42, 43 y 44 para órbitas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n - ax_n^2 + 1 + F(n) \\ y_{n+1} &= bx_n \\ F(n) &= K(x_{n-1} - x_n) \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $a$  y  $b$  son los parámetros del sistema.

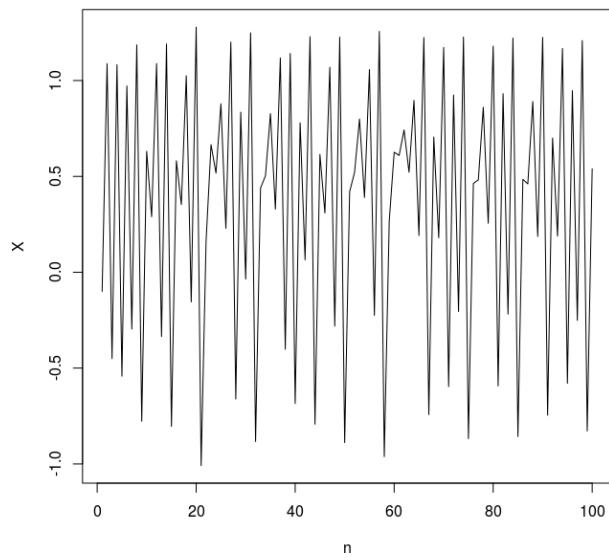


Figura 38: Comportamiento sin control.

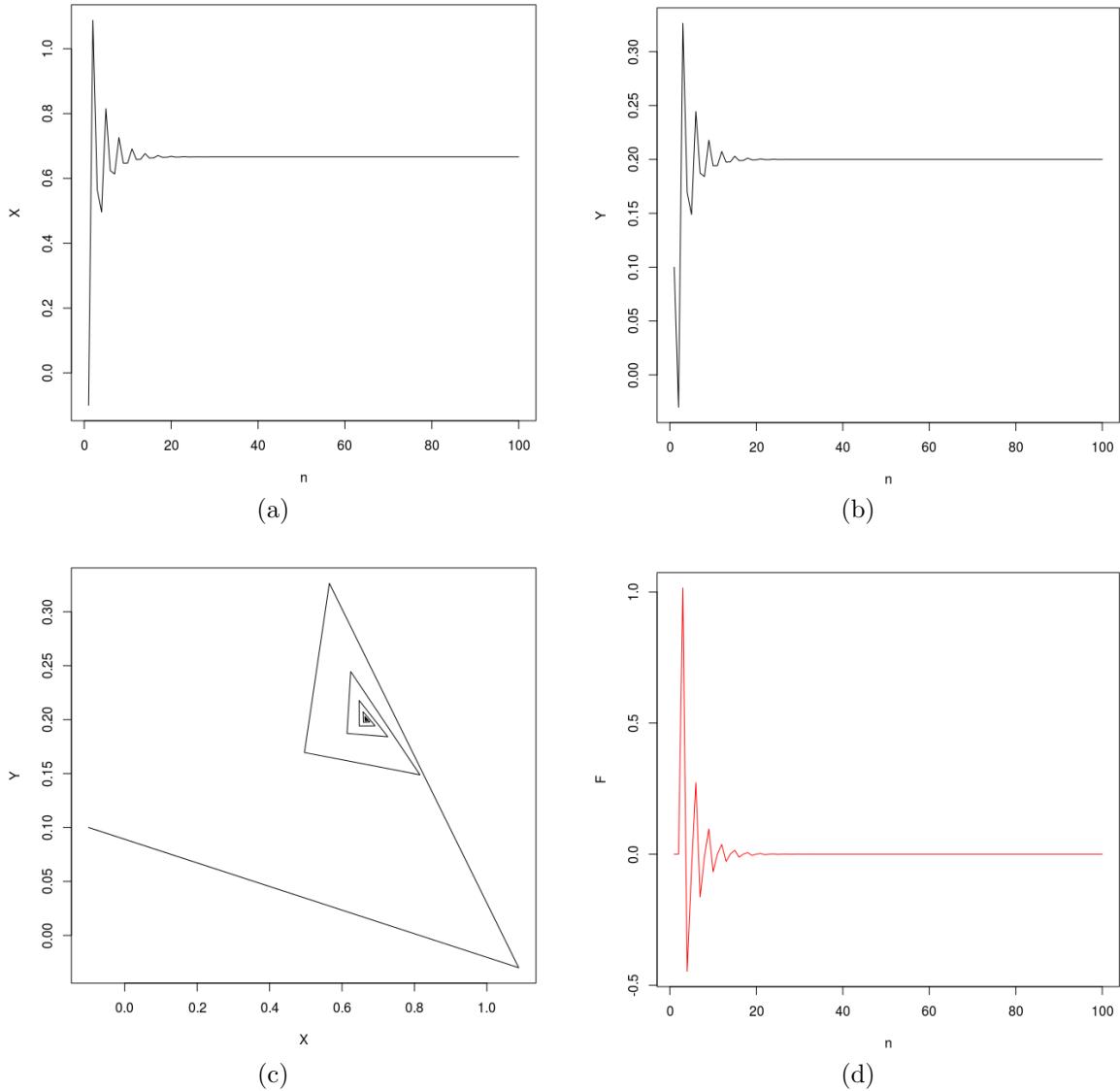


Figura 39: Control realizado para órbita de periodo uno. En 39a, 39b y 39c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 39d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,854827$ ;  $-1,24 \leq K \leq 0,16$ .

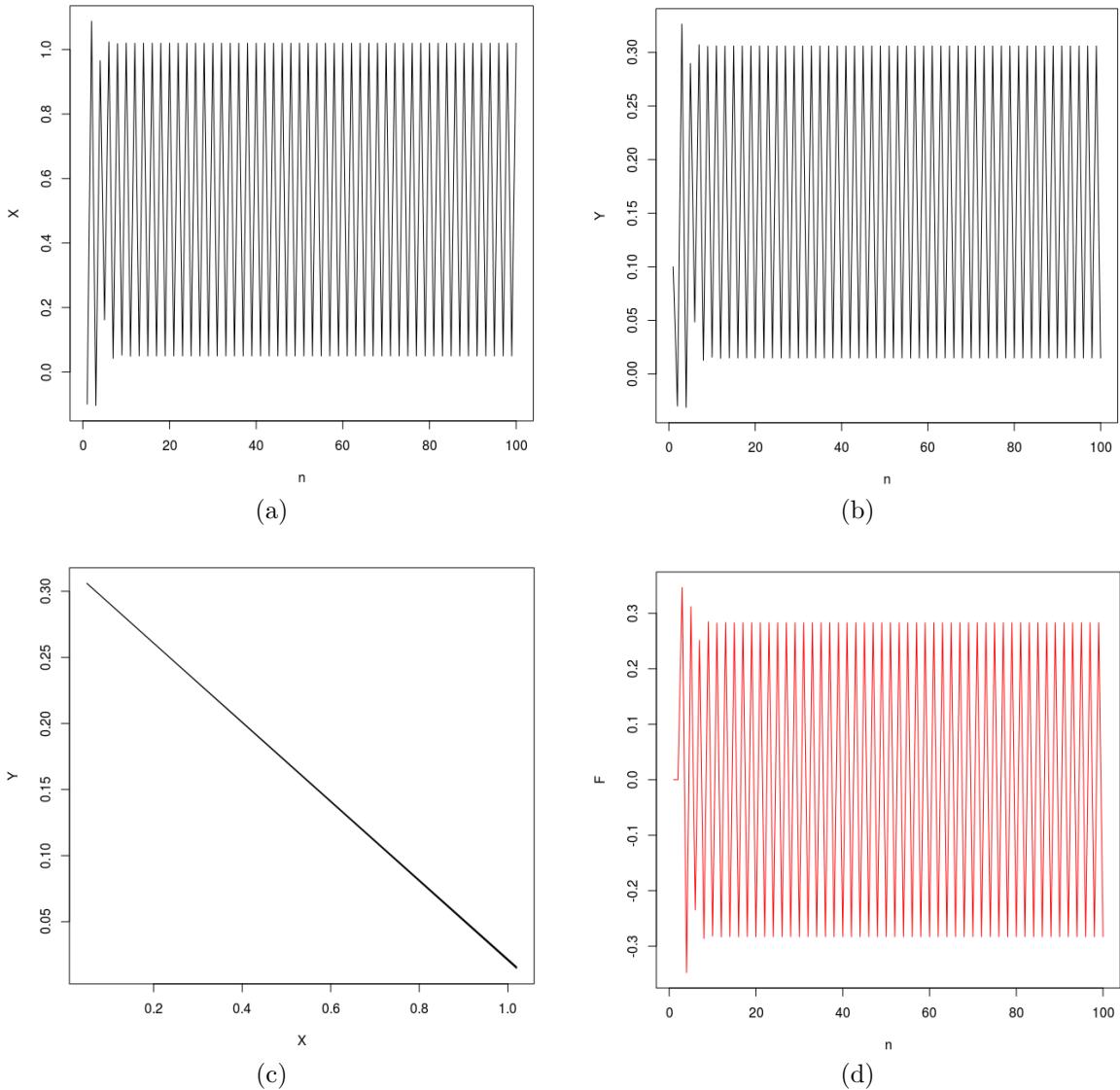


Figura 40: Control realizado para órbita de periodo dos. En 40a, 40b y 40c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 40d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,291749$ ;  $-1,24 \leq K \leq 0,16$ .

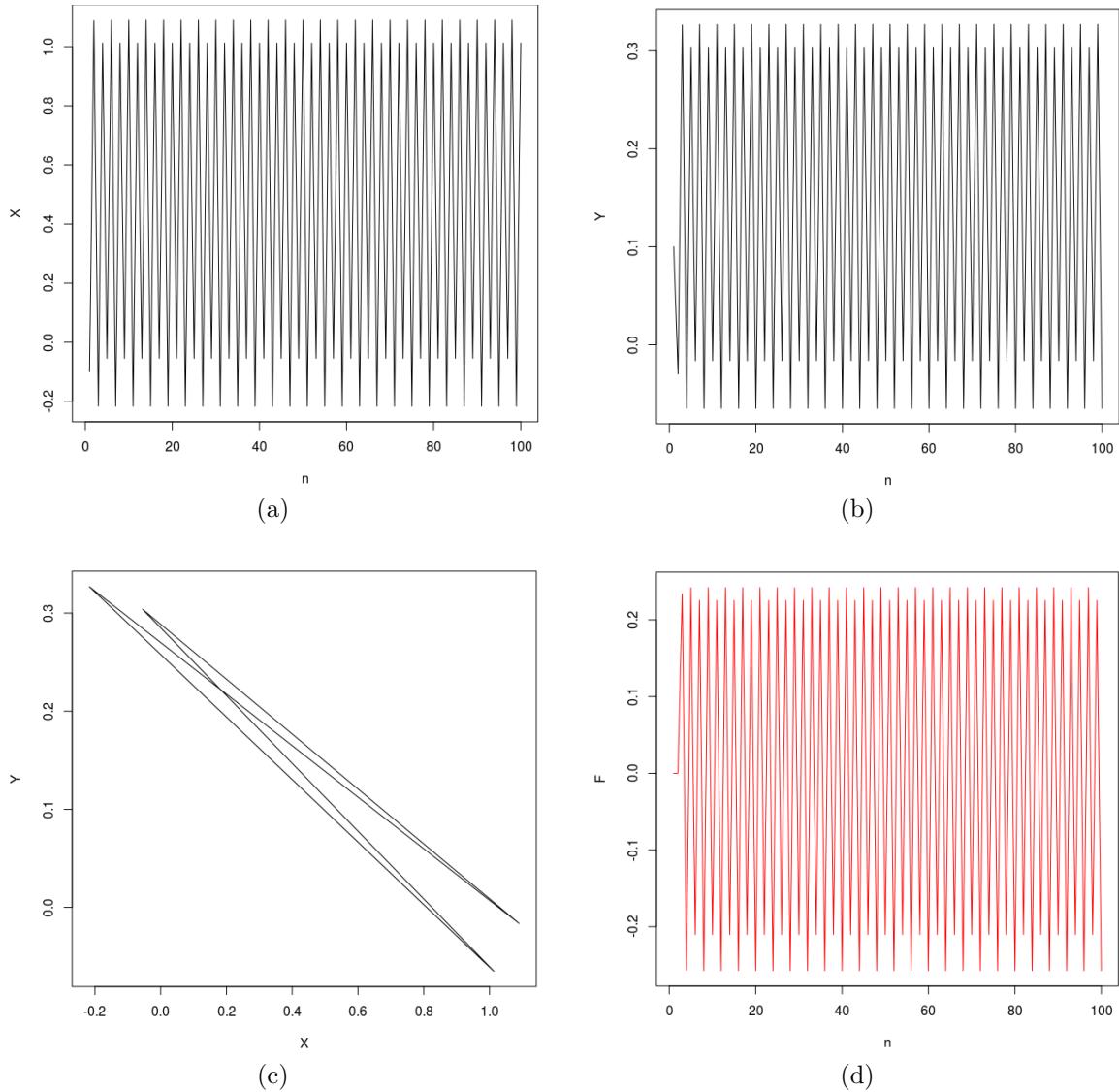


Figura 41: Control realizado para órbita de periodo cuatro. En 41a, 41b y 41c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 41d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,196889$ ;  $-1,24 \leq K \leq 0,16$ .

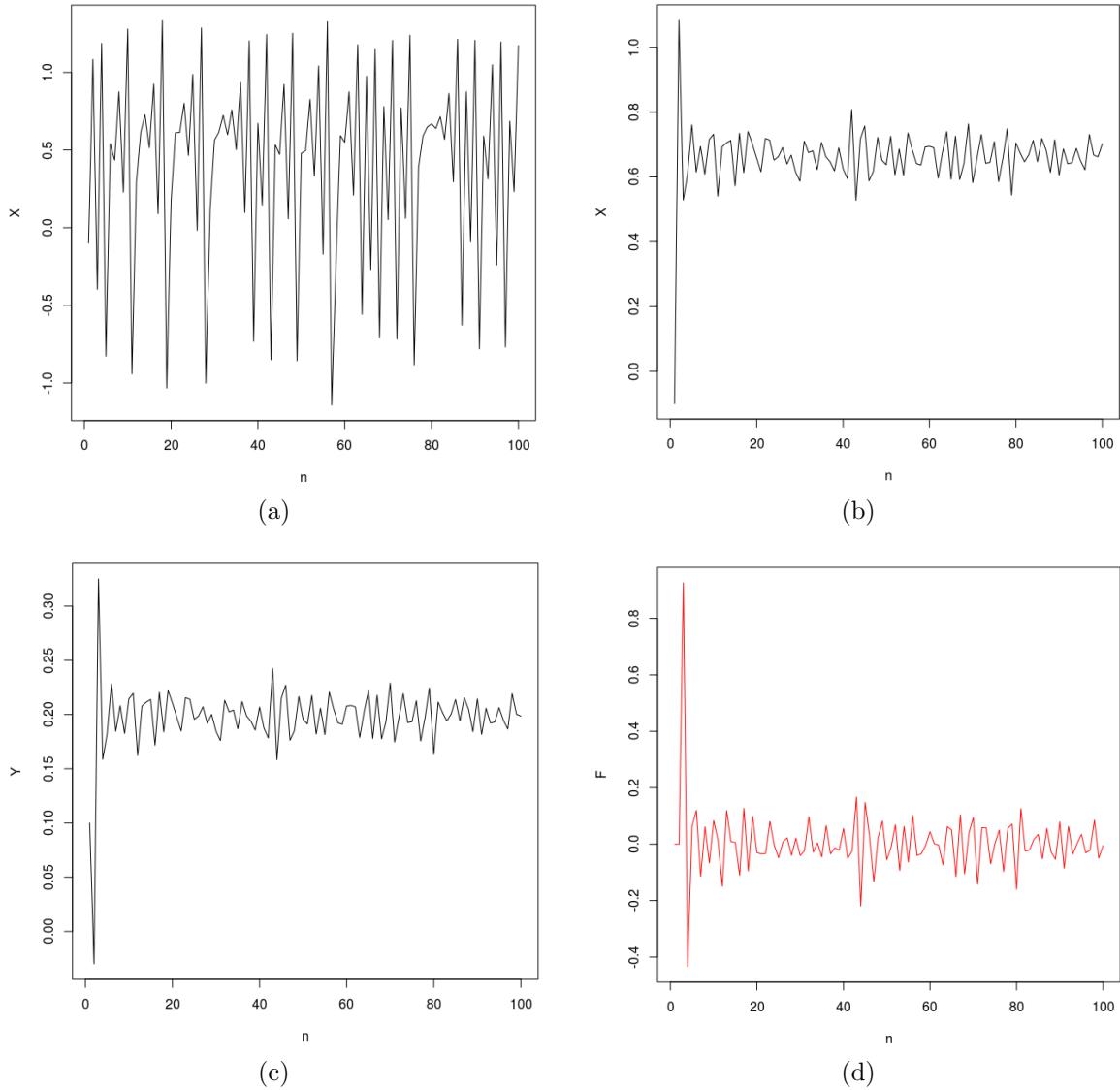


Figura 42: Control realizado para órbita de periodo uno con ruido. En 42a, 42b y 42c se observa la órbita del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En 42d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,78253$ ;  $-1,22 \leq K \leq 0,14$  y  $R = 0,04$ .

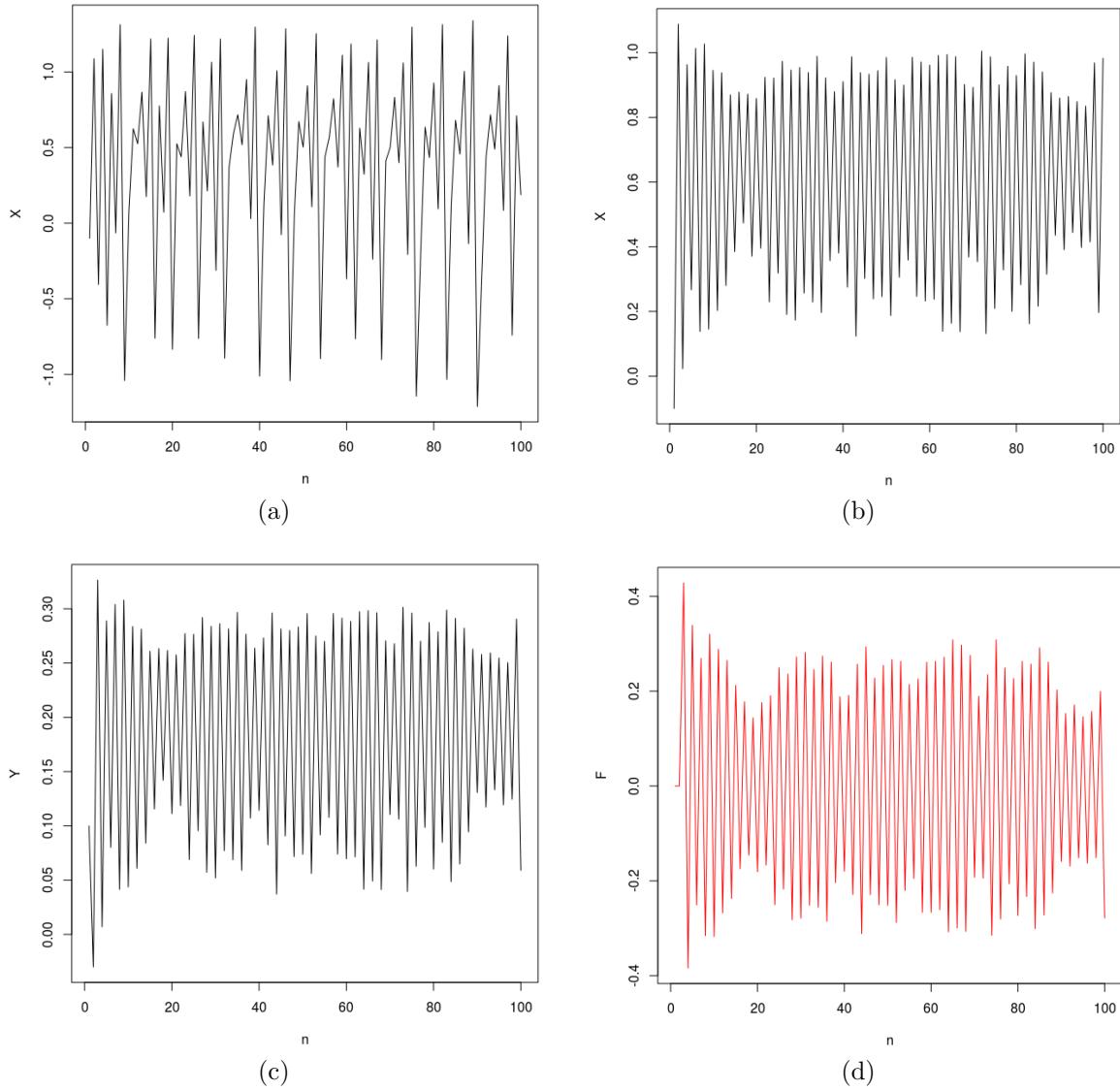


Figura 43: Control realizado para órbita de periodo dos con ruido. En 43a, 43b y 43c se observa la órbita del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En 43d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,360447$ ;  $-1,26 \leq K \leq 0,1$  y  $R = 0,04$ .

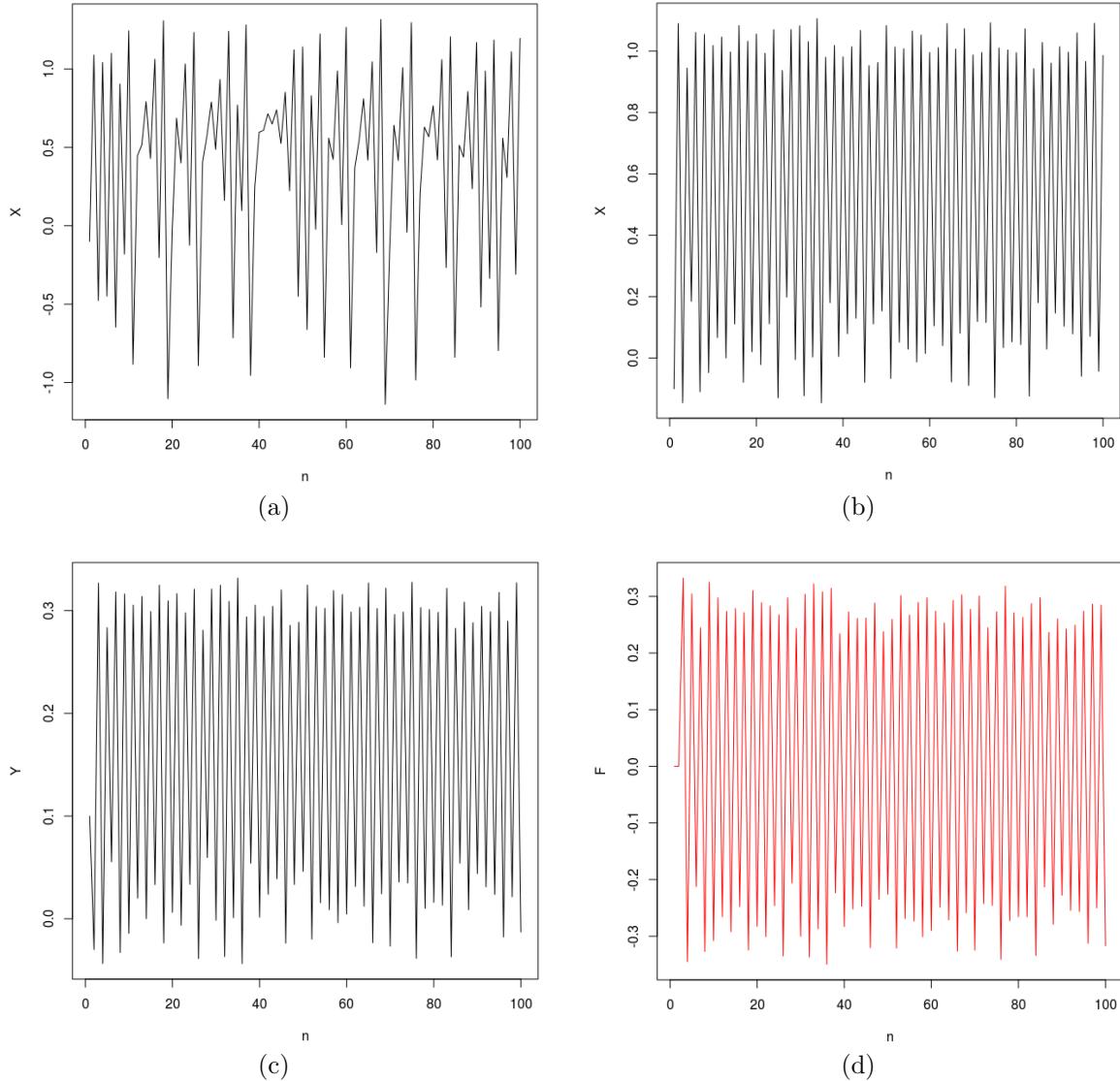


Figura 44: Control realizado para órbita de periodo cuatro con ruido. En 44a, 44b y 44c se observa la órbita del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En 44d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,279422$ ;  $-1,24 \leq K \leq 0,12$  y  $R = 0,04$ .

Como se puede observar en las Figuras 39, 40 y 41 el proceso de control realizado para el sistema sin ruido es completamente satisfactorio. Es interesante poder ver como el sistema converge a uno, a dos o cuatro puntos en el plano real.

En la prueba con ruido, cuyo resultado se puede apreciar en las Figuras 42, 43 y 44, encontramos que el proceso de control también logra estabilizar el sistema a las órbitas deseadas. Aunque éstas no son claramente apreciables debido al ruido que se le agrega al sistema, las órbitas obtenidas tienen mucha semejanza a las obtenidas en la prueba sin

ruido.

Si aumentamos la intensidad del ruido agregado al sistema se vuelve imposible estabilizar dicho sistema a órbitas de periodo alto. Todos los intentos por lograr una estabilización tienden a algo semejante a una órbita de periodo uno como la obtenida en la prueba sin ruido. Lo anterior se puede observar en la Figura 45. Pero con todo y esto, el caos es efectivamente disminuido. Puedo decir que para el sistema con ruido el proceso de control también tiene éxito.

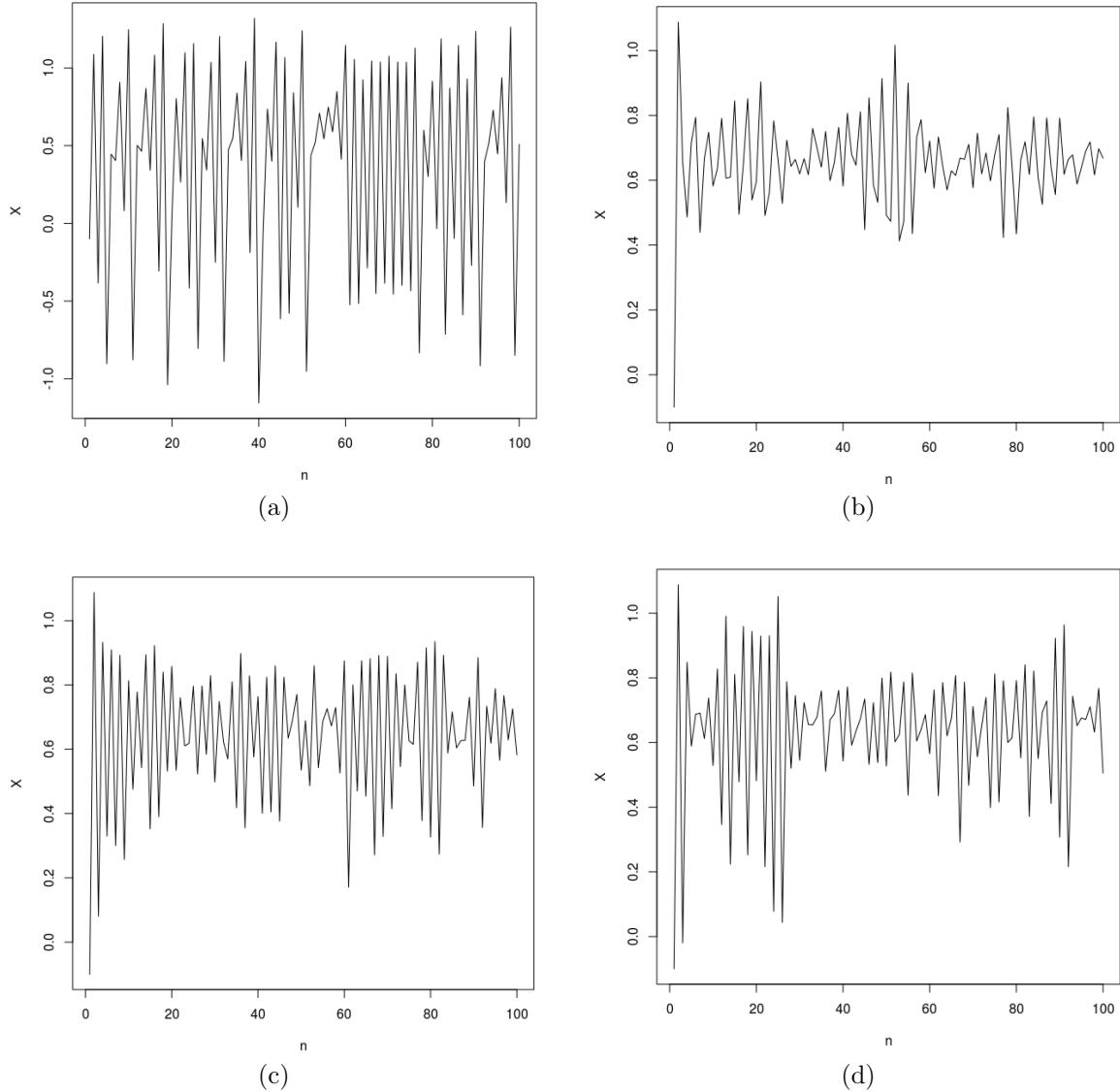


Figura 45: Control realizado para órbita de periodo uno, dos y cuatro con ruido. En 45a, 45b, 45c y 45d se observa la órbita del sistema con ruido y las órbitas obtenidas de periodo uno, dos y cuatro en el eje de las abscisas respectivamente al realizar el proceso de control. Esto se logra con  $R = 0,08$ .

### 6.3. Sistema de Tinkerbell

Su comportamiento en el eje de las abscisas se puede apreciar en la Figura 46 y está dado por la Ecuación (4). Su comportamiento en el plano real se puede apreciar en la Figura 14. Para realizar el control se usó la Ecuación (16). Las condiciones iniciales del sistema son  $x = 0,1$ ;  $y = 0,1$ ;  $a = 0,5$ ;  $b = -0,6$ ,  $c = 2,2$  y  $d = 0,5$ . Los resultados obtenidos para la prueba sin ruido se pueden apreciar en las Figuras 47, 48 y 49 para órbitas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente. Los resultados obtenidos para la prueba con ruido se pueden apreciar en las Figuras 50, 51 y 52 para órbitas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + ax_n + by_n + F(n) \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + cx_n + dy_n \\ F(n) &= K(x_{n-1} - x_n) \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son los parámetros del sistema.

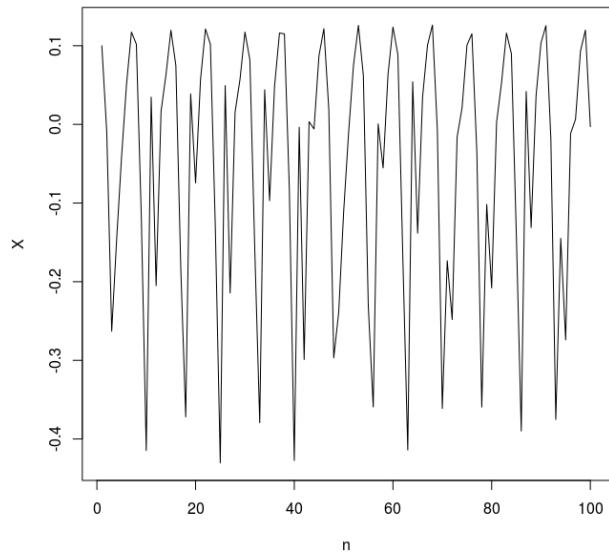


Figura 46: Comportamiento sin control.

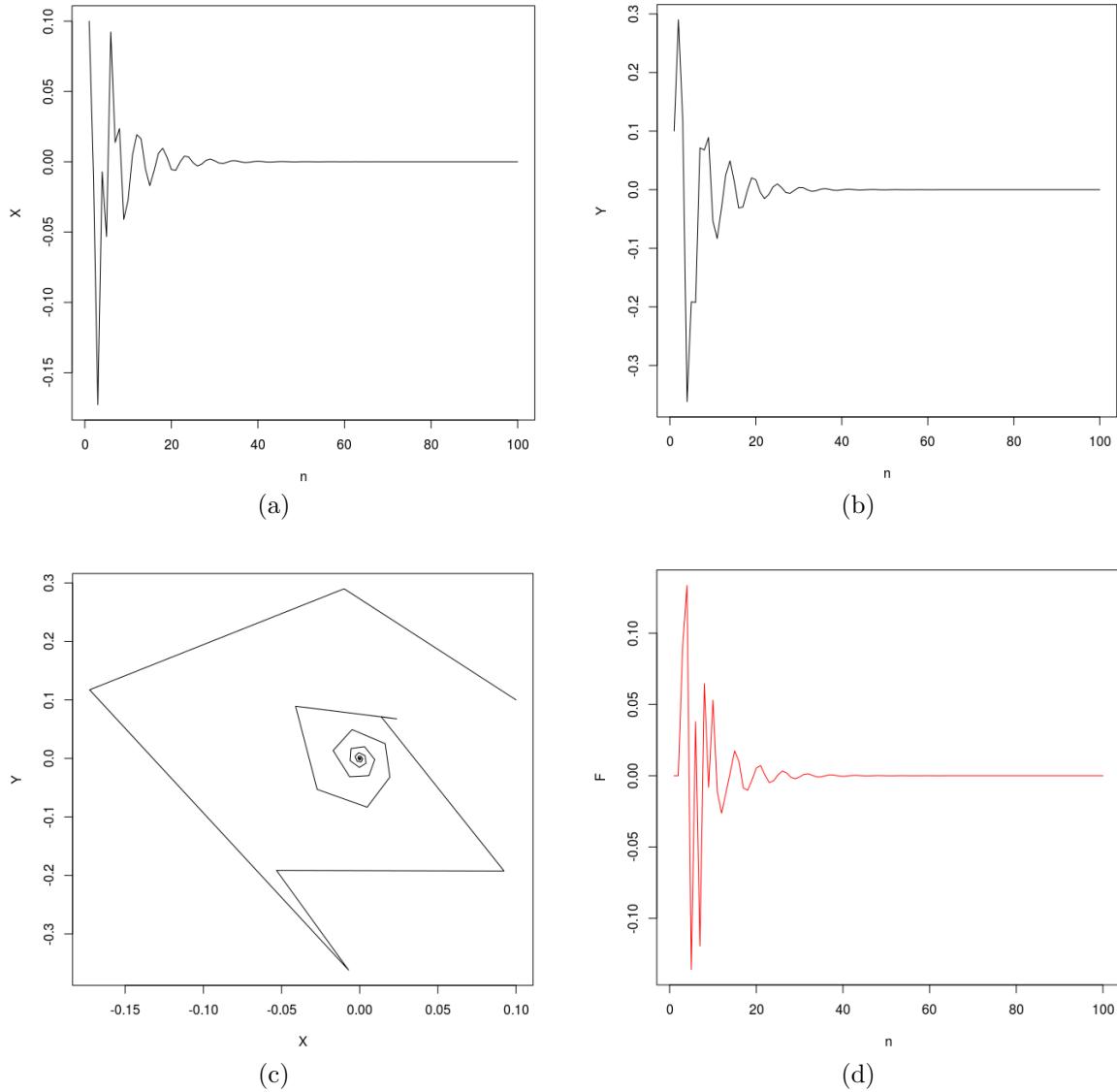


Figura 47: Control realizado para órbita de periodo uno. En 47a, 47b y 47c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 47d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = 0,820371$ ;  $-0,22 \leq K \leq 1,16$ .

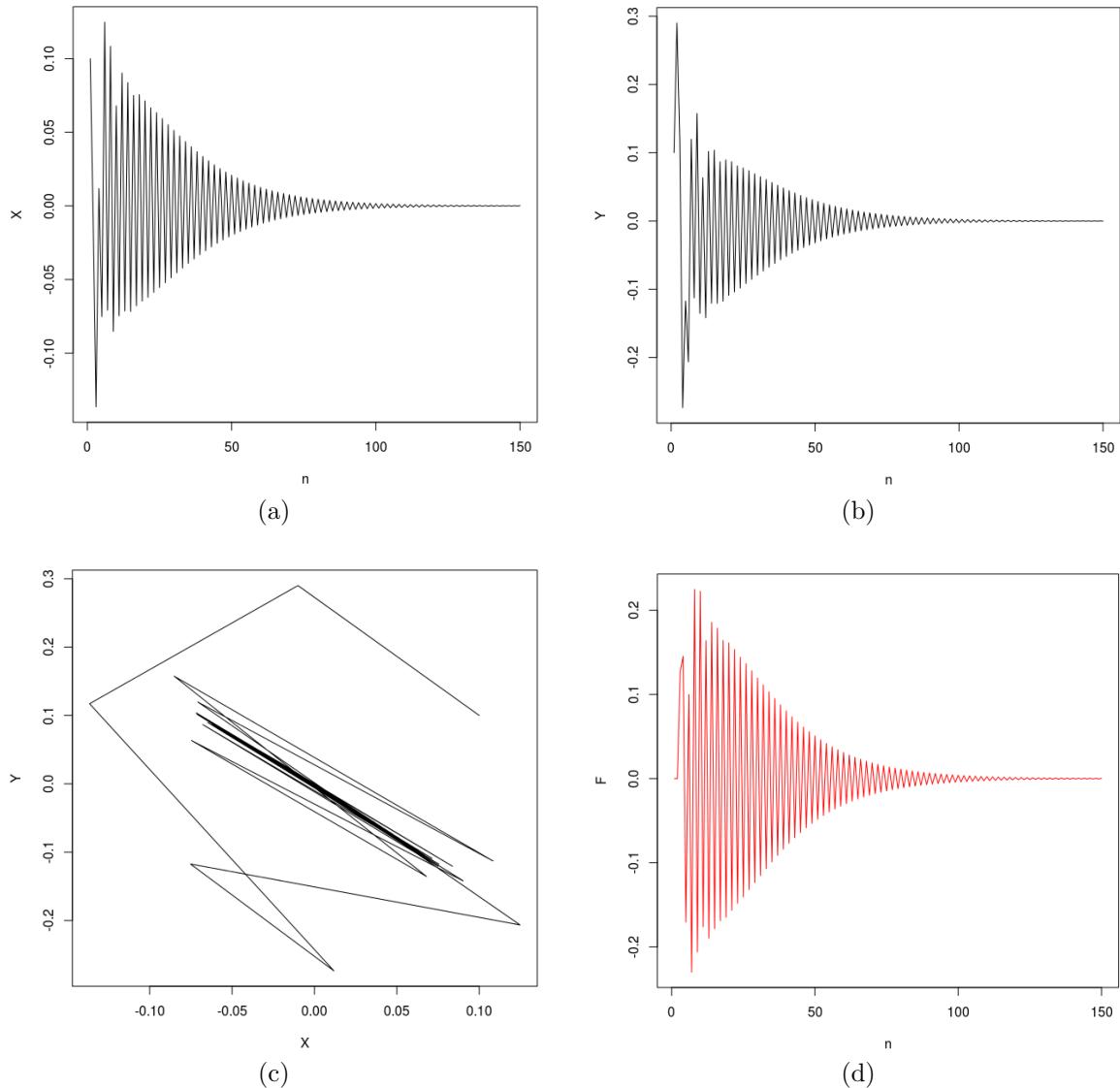


Figura 48: Control realizado para órbita de periodo dos. En 48a, 48b y 48c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 48d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = 1,15024$ ;  $-0,22 \leq K \leq 1,16$ .

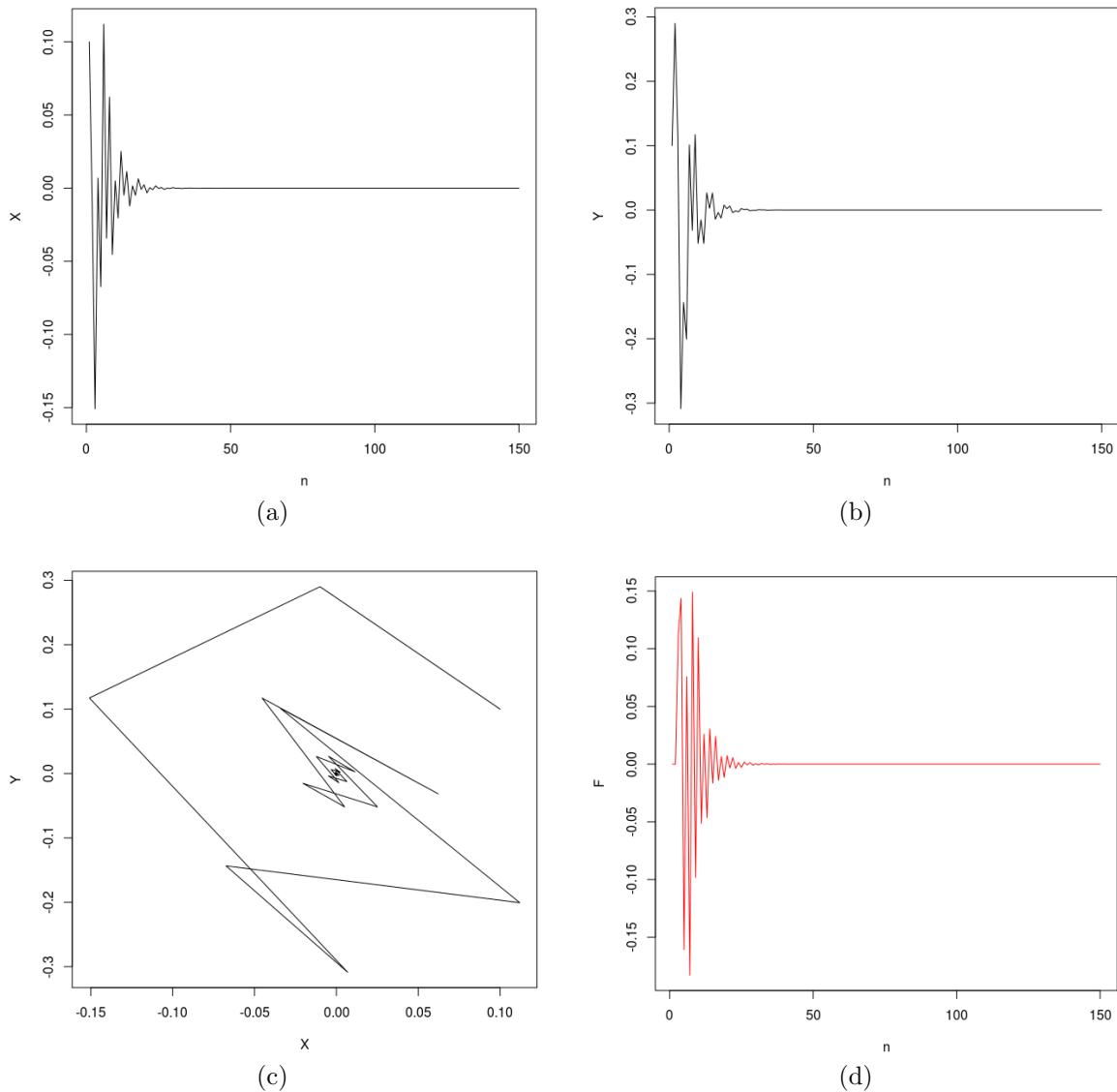


Figura 49: Control realizado para órbita de periodo cuatro. En 49a, 49b y 49c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 49d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = 1,01948$ ;  $-0,22 \leq K \leq 1,16$ .

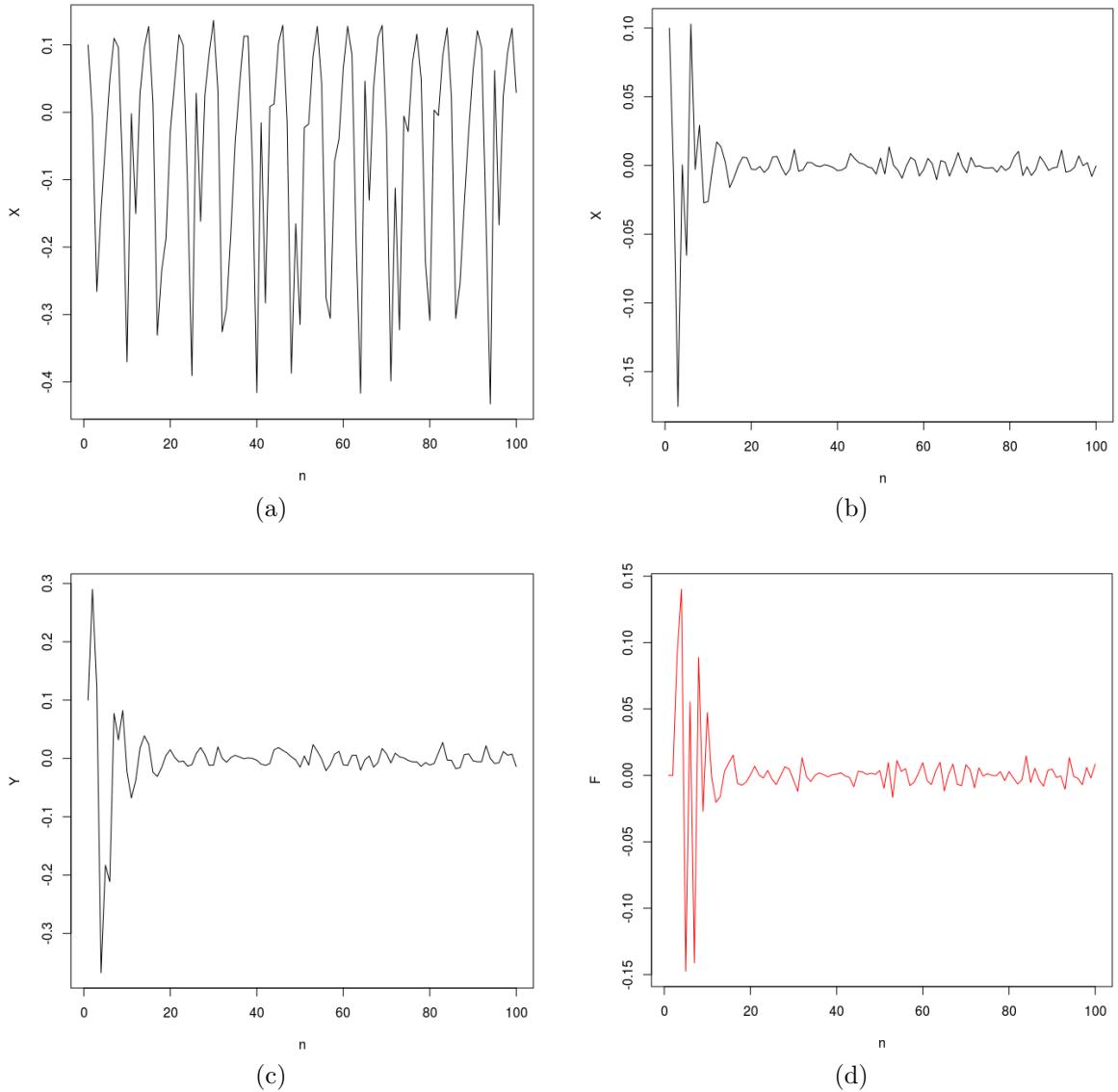


Figura 50: Control realizado para órbita de periodo uno con ruido. En 50a, 50b y 50c se observa el comportamiento del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En 50d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = 0,838537$ ;  $-0,22 \leq K \leq 1,14$  y  $R = 0,005$ .

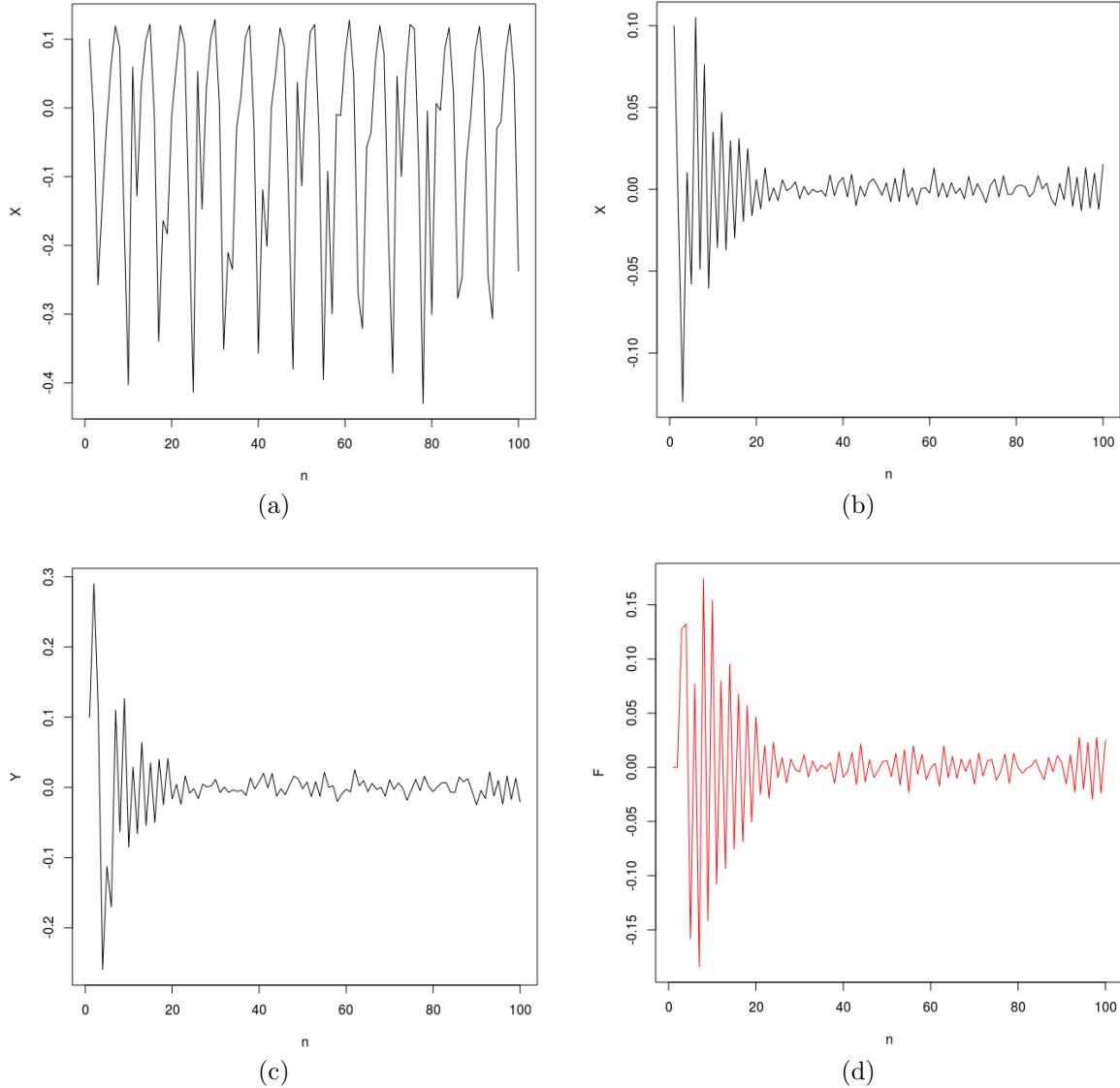


Figura 51: Control realizado para órbita de periodo dos con ruido. En 51a, 51b y 51c se observa el comportamiento del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En 51d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = 1,12989$ ;  $-0,2 \leq K \leq 1,14$  y  $R = 0,005$ .

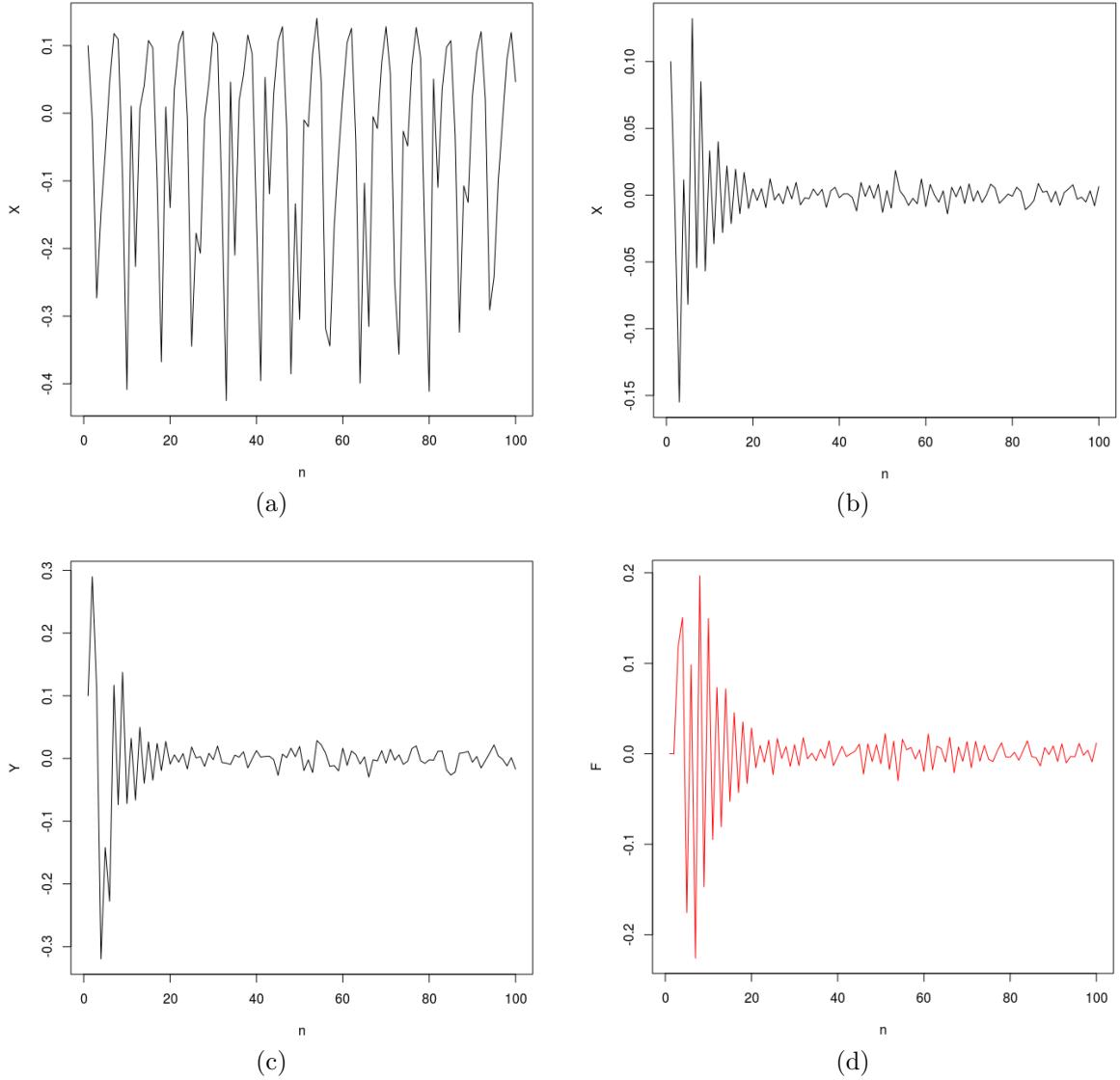


Figura 52: Control realizado para órbita de periodo cuatro con ruido. En 52a, 52b y 52c se observa la órbita del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En 52d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = 1,05484$ ;  $-0,18 \leq K \leq 1,16$  y  $R = 0,005$ .

Como podemos observar en las Figuras 47, 48, 49, 50, 51 y 52 no importa si el sistema tiene o no ruido siempre converge a una órbita de periodo uno. En el caso de la búsqueda de órbitas de periodo dos para la prueba sin ruido se observa que se tarda mucho más en converger hacia una órbita de periodo uno, pero al final termina en ese estado. A pesar de esto, el sistema se estabilizó en algún punto, por lo que el control fue exitoso. El hecho de que el sistema no se estabilice a órbitas de otros periodos puede indicar que el sistema no posee órbitas de más periodo o que se deba de usar otra técnica de control.

Dado que el sistema sólo converge a órbitas de periodo uno no vale la pena observar su comportamiento con más ruido. Además, este es el sistema al que menos ruido se le agrega, esto debido a que al agregarle más ruido rápidamente comienza a divergir.

#### 6.4. Sistema de Ikeda

Su comportamiento en el eje de las abscisas se puede apreciar en la Figura 53 y está dado por la Ecuación 6. Su comportamiento en el plano real se puede apreciar en la Figura 18. Para realizar el control se usó la Ecuación (17). Las condiciones iniciales del sistema son  $x = 0,1$ ;  $y = 0,1$ ;  $a = 1,0$ ;  $b = 0,9$ ,  $c = 0,4$  y  $d = 6,0$ . Los resultados obtenidos para la prueba sin ruido se pueden apreciar en las Figuras 54, 55 y 56 para órbitas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente. Los resultados obtenidos para la prueba con ruido se pueden apreciar en las Figuras 57, 58 y 59 para órbitas de periodo uno, dos y cuatro respectivamente.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + b(\cos(u)x_n - \sin(u)y_n) + F(n) \\ y_{n+1} &= b(\sin(u)x_n + \cos(u)y_n) \\ F(n) &= K(x_{n-1} - x_n) \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $u = c - \frac{d}{1+x_n^2+y_n^2}$  y  $a, b, c$  y  $d$  son los parámetros del sistema.

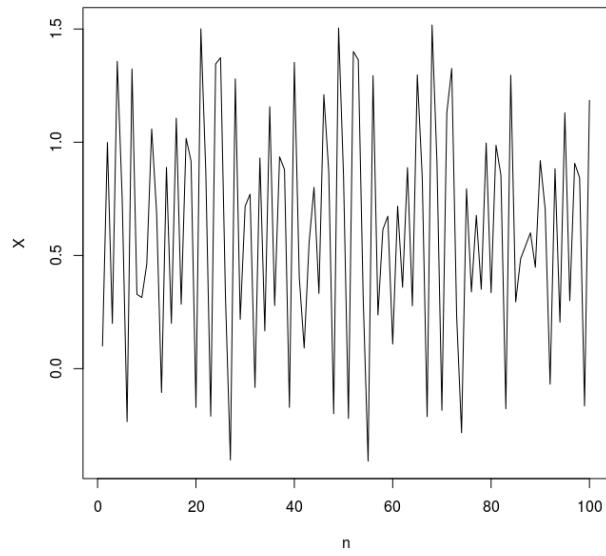


Figura 53: Comportamiento sin control.

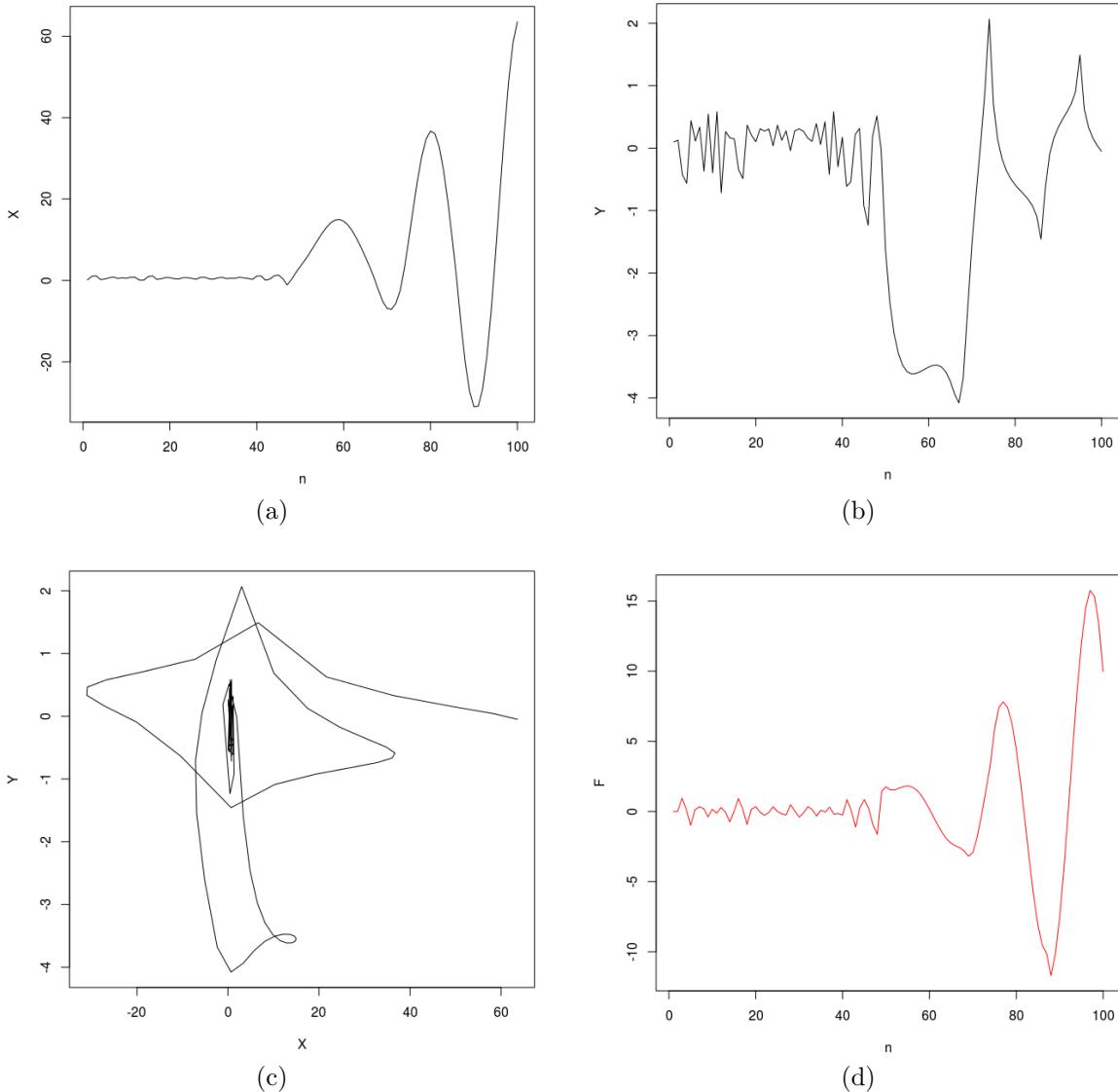


Figura 54: Control realizado para órbita de periodo uno. En 54a, 54b y 54c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 54d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -1,05136$ ;  $-2 \leq K \leq 2$ .

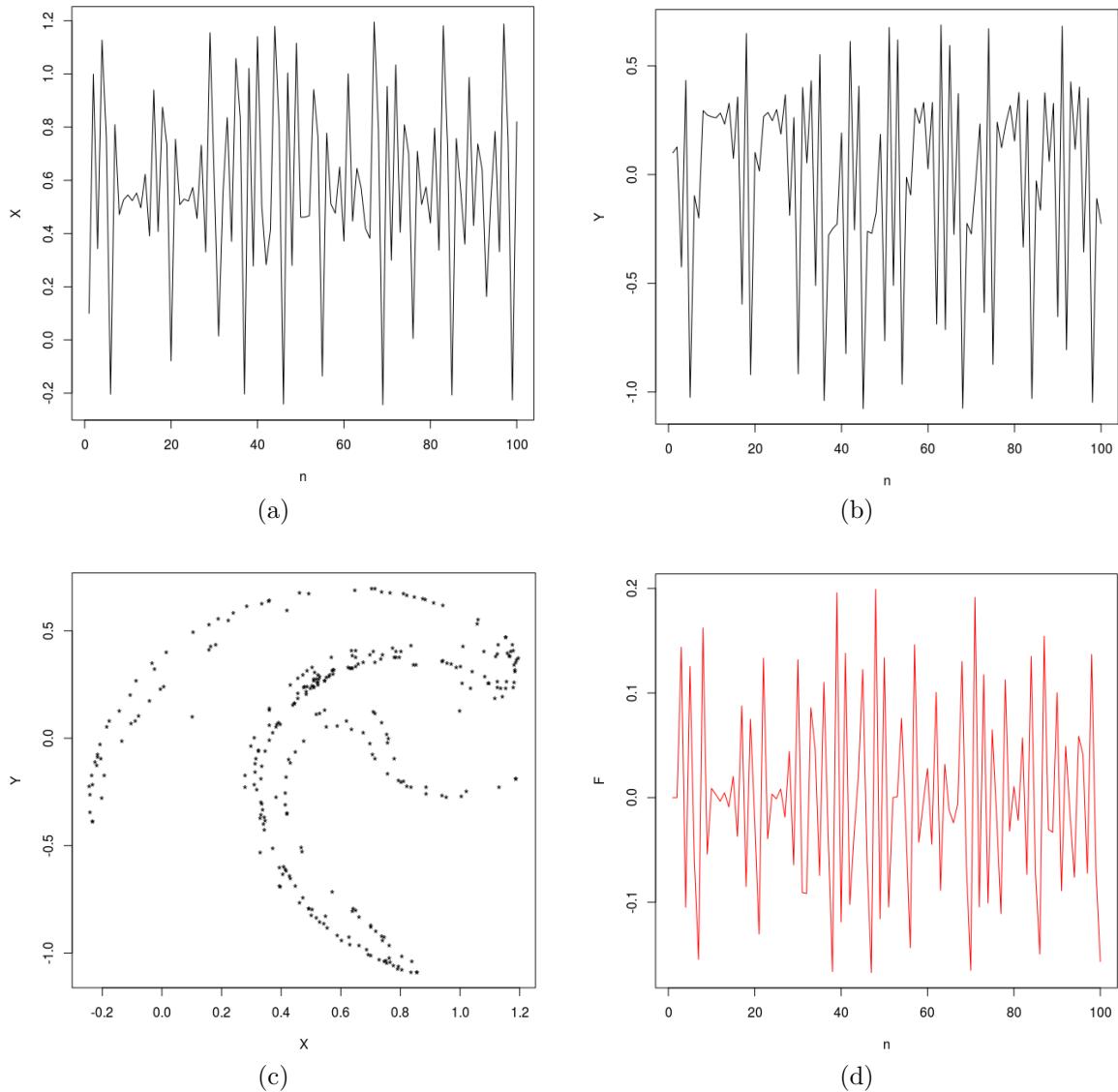


Figura 55: Control realizado para órbita de periodo dos. En 55a, 55b y 55c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 55d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,159932$ ;  $-2 \leq K \leq 2$ .

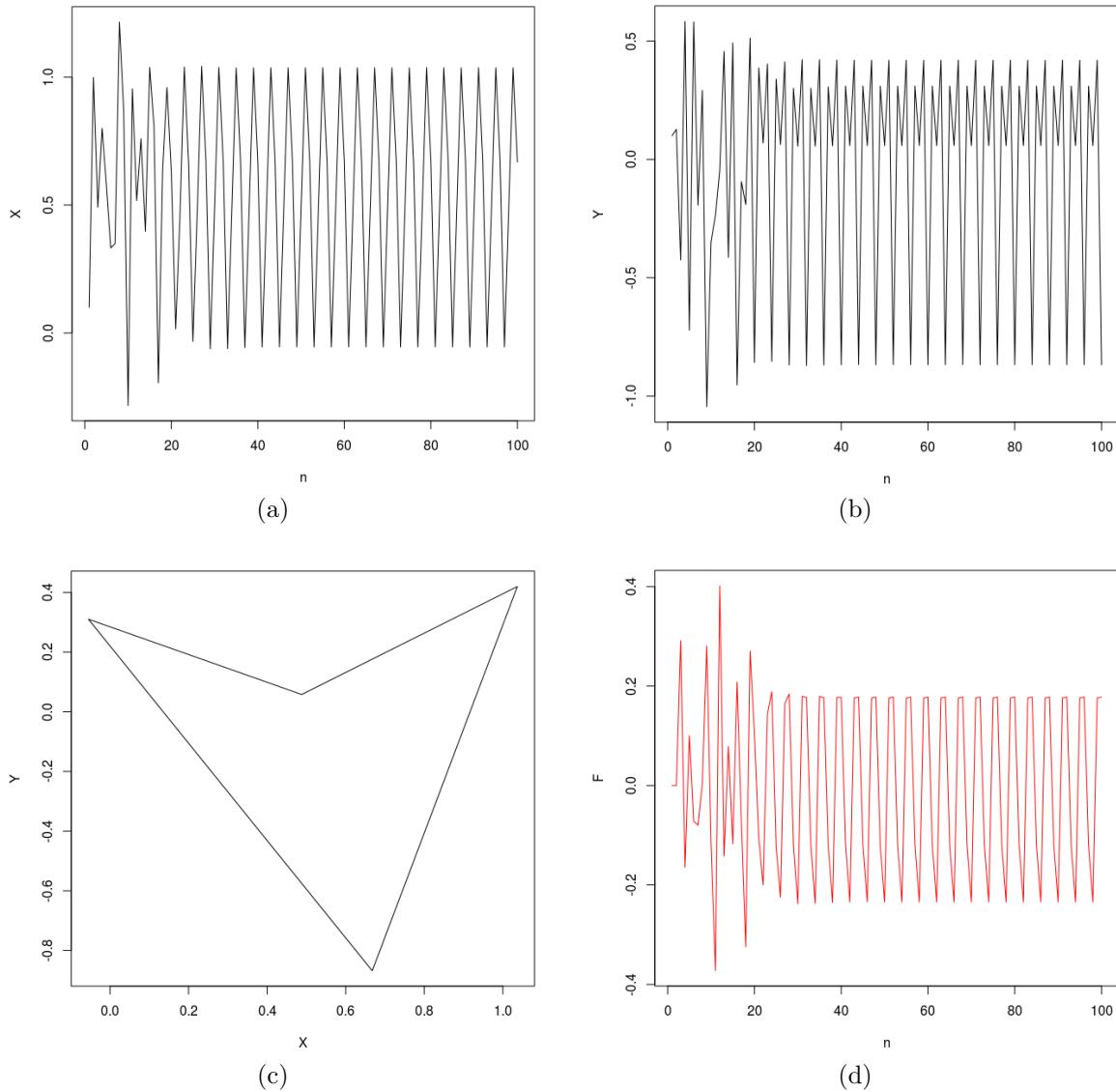


Figura 56: Control realizado para órbita de periodo cuatro. En 56a, 56b y 56c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 56d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,324299$ ;  $-2 \leq K \leq 2$ .

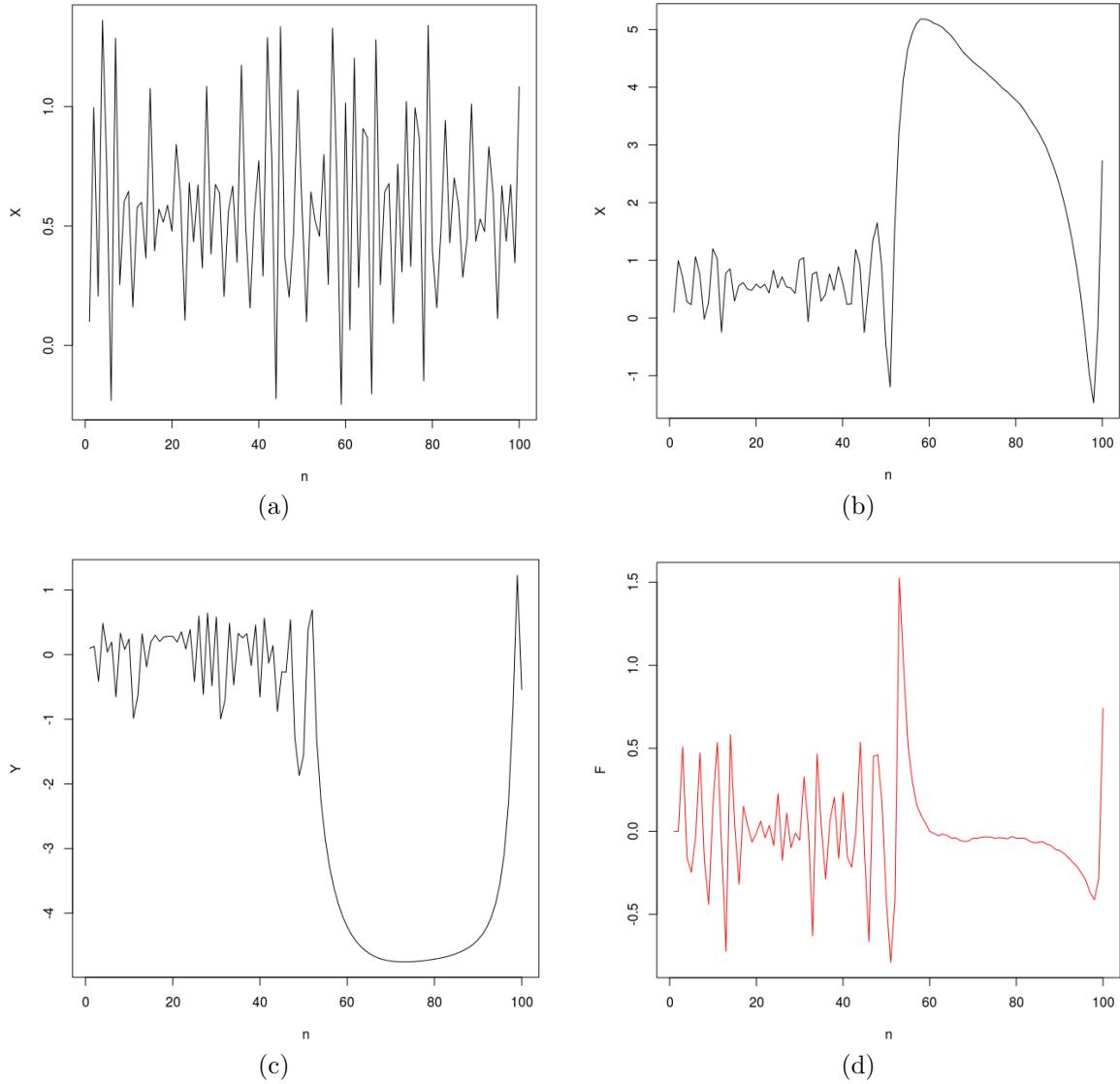


Figura 57: Control realizado para órbita de periodo uno con ruido. En 57a, 57b y 57c se observa la órbita del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En 57d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,569009$ ;  $-2 \leq K \leq 2$  y  $R = 0,015$ .

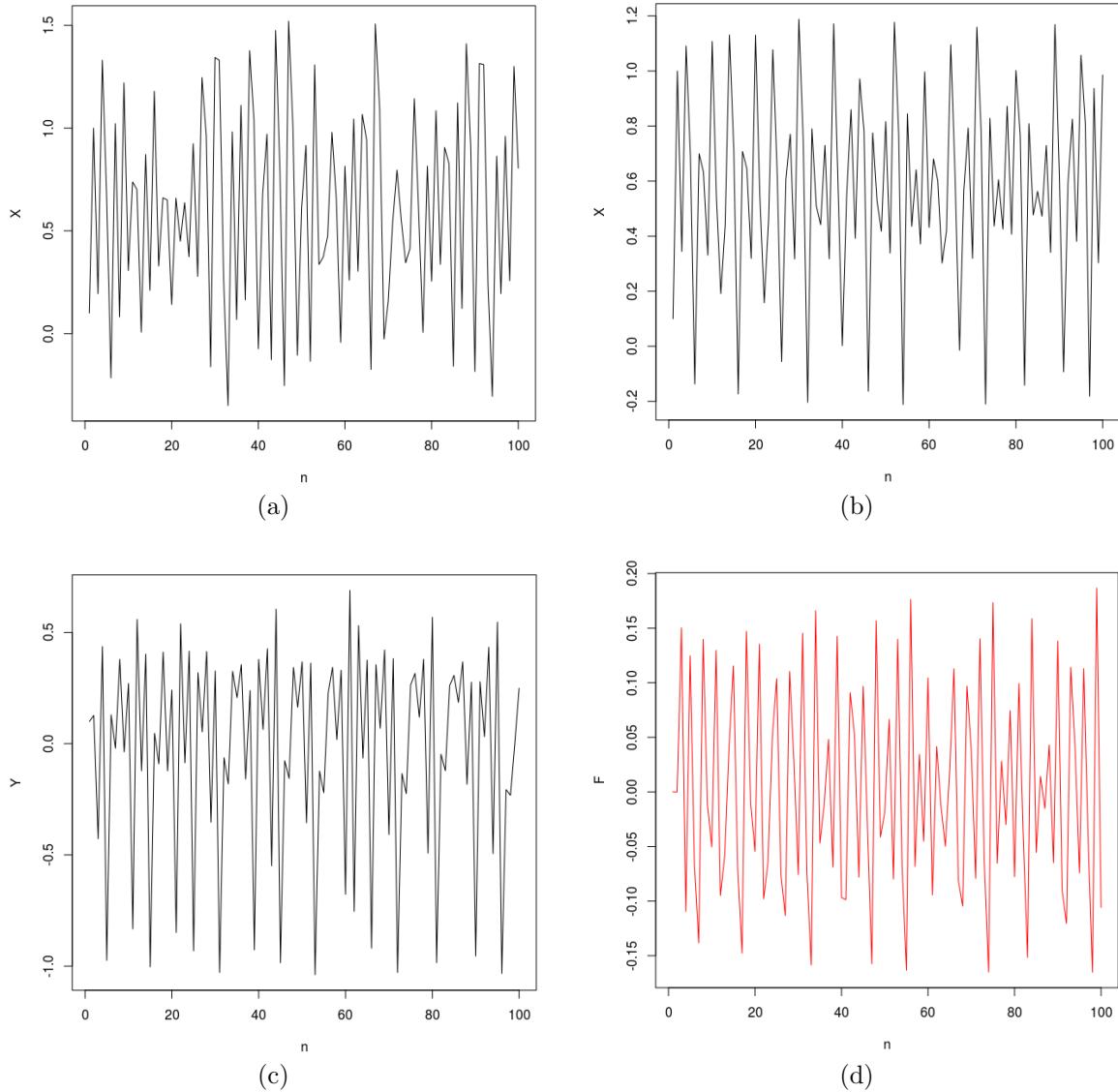


Figura 58: Control realizado para órbita de periodo dos con ruido. En 58a, 58b y 58c se observa la órbita del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En 58d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,166959$ ;  $-2 \leq K \leq 2$  y  $R = 0,015$ .

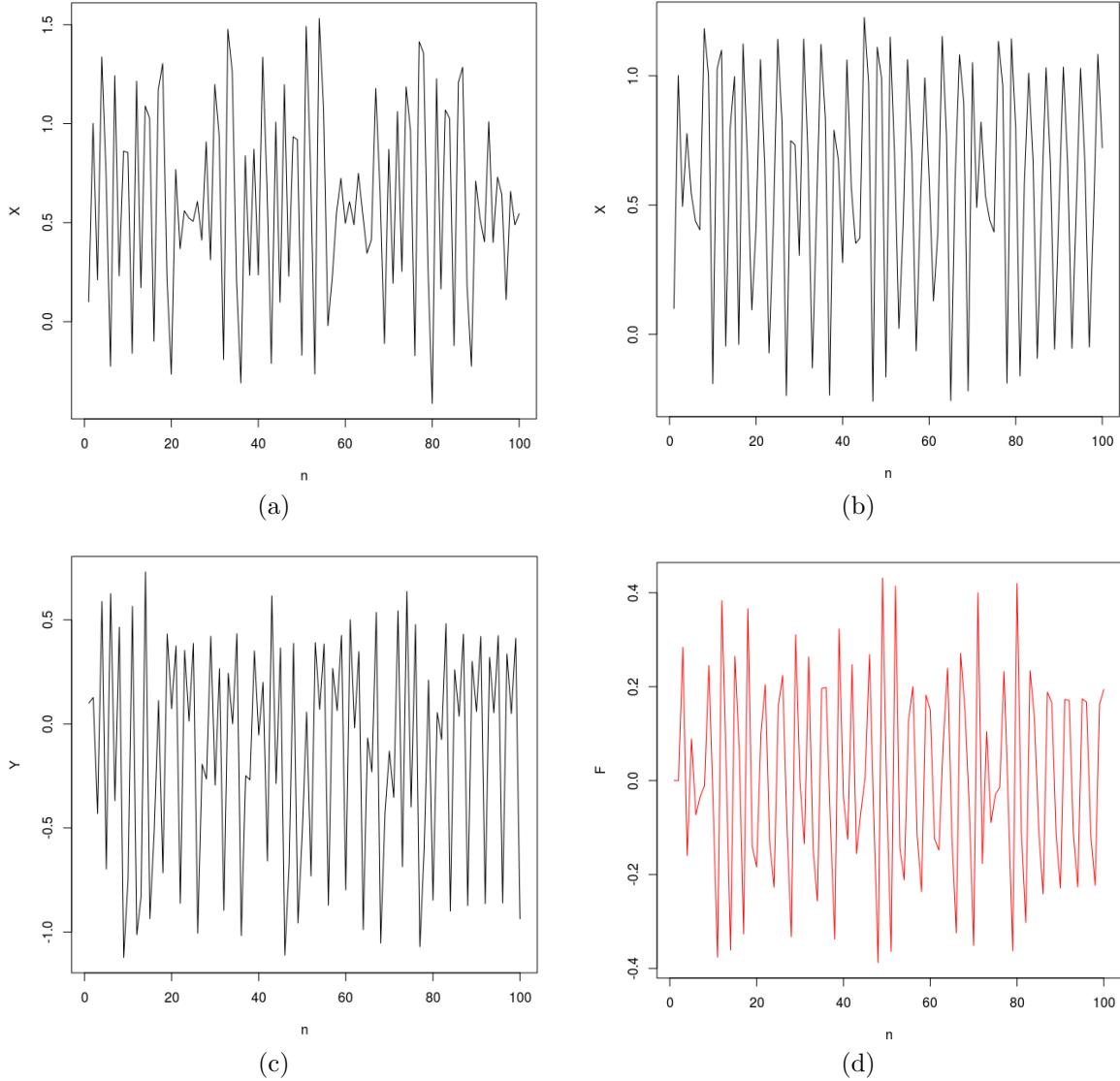


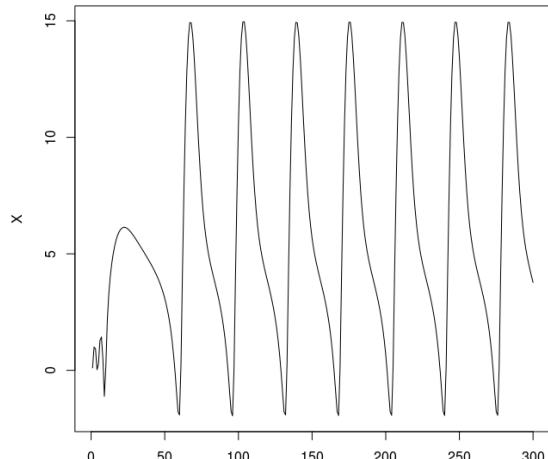
Figura 59: Control realizado para órbita de periodo cuatro con ruido. En 59a, 59b y 59c se observa la órbita del sistema con ruido en el eje de las abscisas y la órbita obtenida en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas respectivamente al realizar el proceso de control. En la Figura 59d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,315061$ ;  $-2 \leq K \leq 2$  y  $R = 0,015$ .

El proceso de control realizado para la prueba sin ruido ha arrojado buenos resultados sólo para la búsqueda de órbitas de periodo uno y cuatro, como se observa en las Figuras 54 y 56 respectivamente. Para el caso de la órbita de periodo dos el sistema no converge a nada, por el contrario, como se puede observar en la Figura 55, el resultado obtenido se parece mucho a su atractor (ver Figura 18). Para el caso de la órbita de periodo uno vemos como el sistema se estabiliza por un corto periodo de tiempo alrededor de una órbita, aproximadamente el tiempo dado en la función objetivo, pero a partir de allí se desestabiliza rápidamente. En un momento pensé que aumentando el periodo de estabilización el

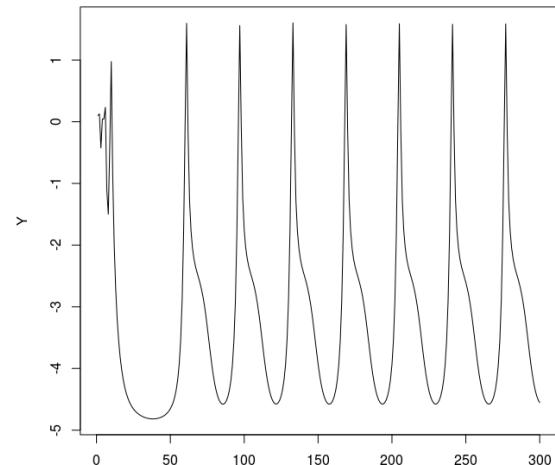
resultado obtenido podría mejorar, pero al hacerlo el resultado que se obtuvo fue el mismo.

En la prueba con ruido, para el caso de búsqueda de órbitas de periodo uno y dos, se obtuvieron los mismos resultados que en la prueba sin ruido, como se puede observar en las Figuras 57 y 58. En la órbita de periodo uno, el sistema se estabiliza por un corto periodo de tiempo y en la órbita de periodo dos no se logra ningún resultado, cosa que es de esperar, ya que si para el sistema sin ruido no se obtuvieron buenos resultados, mucho menos se obtendrán para el sistema con ruido. En el caso de la búsqueda de órbitas de periodo cuatro tampoco se obtuvieron buenos resultados, el proceso de control es incapaz de estabilizar el sistema, esto se puede observar en la Figura 59.

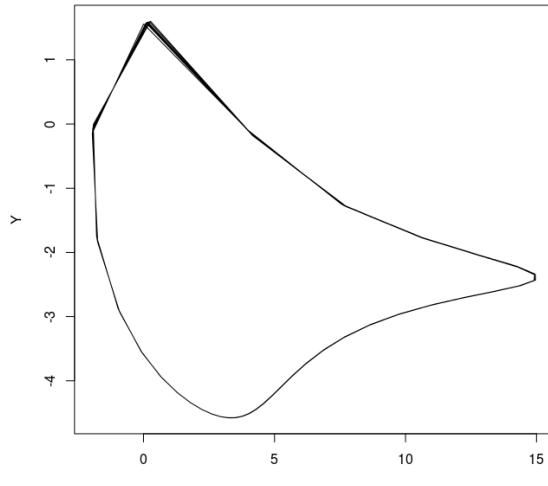
A mi parecer, este es uno de los sistemas más difíciles de controlar ya que para poder encontrar los resultados anteriormente mostrados se tuvo que ejecutar muchas más veces el algoritmo, más que para los otros sistemas estudiados. Por otro lado, también me parece uno de los más interesantes, debido a que por esas cosas del no determinismo característico de los algoritmos evolutivos, se pudo encontrar una órbita muy distinta a cualquiera de las anteriormente encontradas, como se puede observar en la Figura 60.



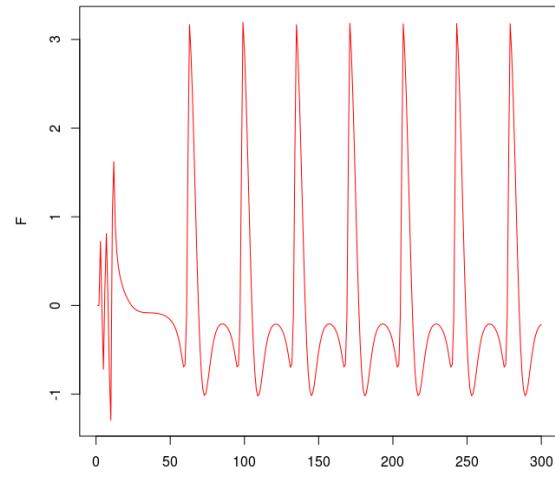
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 60: Control realizado para órbita semiperiodica. En 60a, 60b y 60c se observa la órbita obtenida en el eje de las abscisas, en el eje de las ordenadas y en el plano real respectivamente al realizar el proceso de control. En 60d se observa la acción de control aplicada. Esto se logra con  $K = -0,803969$ ;  $-2 \leq K \leq 2$ .

## 7. Conclusiones y Trabajos Futuros

### 7.1. Conclusiones

1. Los algoritmos evolutivos son completamente efectivos para ayudar a estabilizar sistemas dinámicos caóticos. Incluso algoritmos tan simples como el implementado dan buenos resultados.
2. La modificación propuesta al algoritmo TDAS de Pyragas es efectiva para estabilizar el sistema a órbitas de un mayor periodo, venciendo la limitación inherente del algoritmo original.
3. Tratar de estabilizar el sistema caótico a órbitas de periodos altos hace más complicado el proceso de control ya que el sistema es aún más sensible a cualquier perturbación y puede salirse del estado estable más fácilmente.
4. Estabilizar un sistema con ruido no es tarea sencilla y si el ruido es demasiado sólo se podrá estabilizar el sistema a órbitas de periodo uno en el mejor de los casos.
5. A diferencia de la mayoría de los trabajos presentados como antecedentes, no se necesitaron los valores de las UPOs para lograr estabilizar el sistema, lo que representa una gran ventaja pues minimiza la cantidad de información que se necesita del sistema y por tanto el esfuerzo requerido para realizar control.
6. El algoritmo propuesto presenta una gran robustez ya que logra estabilizar el sistema incluso cuando éste presenta ruido. Además, en el caso sin ruido, logra la estabilidad del sistema por un largo periodo de tiempo.

### 7.2. Trabajos Futuros

1. Para dar respuesta al primer objetivo específico, se pensó en un principio buscar alguna técnica que nos dijera si el sistema es o no caótico. Para ello se empezó a estudiar el coeficiente de Hurst, y aunque ese trabajo no se encuentra en este documento, se encontró que el coeficiente de Hurst no es un buen indicador de la caoticidad de un sistema. A pesar de que fue un camino “fallido” para los propósitos del presente trabajo, sirvió para mostrarnos que en realidad no existe ningún procedimiento sistemático para demostrar que un sistema es o no caótico. Un muy buen trabajo futuro es desarrollar alguna técnica que permita identificar si un sistema es realmente caótico. Actualmente existen algunas demostraciones rigurosas para la caoticidad de algunos sistemas [11], pero es un proceso complejo y no tiene generalidad.
2. En los resultados obtenidos en el estudio de bifurcación del periodo, se observó que usando la misma técnica no se obtienen los mismos resultados para sistemas discretos y sistemas continuos. Un trabajo futuro consistiría en continuar este estudio al usar o desarrollar otro tipo de técnicas que permitan obtener mejores resultados para los sistemas continuos.

3. El sistema de control usado ya se había propuesto y el trabajo consistió en encontrar la adecuada configuración de este. Un trabajo futuro consistiría en usar técnicas evolutivas como la programación por expresión genética y crear de manera evolutiva el propio sistema de control. Quizás de esta manera se pueda lograr un mejor control para aquellos sistemas que son difíciles de controlar usando el proceso propuesto en este trabajo o para sistemas que se deseen estabilizar en órbitas de periodo más altas.
4. Ya se mencionó que las órbitas a las que se estabilizaron los sistemas pueden o no ser UPOs. Un trabajo futuro consistiría en verificar que las órbitas a las que el sistema se ha estabilizado efectivamente sean UPOs y de ser así se podría usar el control como proceso inverso para hallar UPOs. En la mayoría de los trabajos que he revisado sobre control de sistemas caóticos primero hallan las UPOs y luego éstas son usadas para realizar el control, pero se podría ver de manera inversa, esto es, se realiza el control y con esto se encuentran las UPOs del sistema. Esto permitiría ahorrar mucho trabajo, pues considero que es mucho más fácil realizar el proceso de control que el proceso para hallar una UPO.

## 8. Anexos

Los anexos se encuentran en un soporte físico adjunto al presente documento y son los siguientes:

1. **atractores:** Directorio que contiene el código del software que permite realizar las gráficas de los atractores usadas en el capítulo 4.
2. **bifurcacion:** Directorio que contiene el código del software que permite realizar los diagramas de bifurcación usados en el capítulo 4.
3. **boxcount.R:** Código para lenguaje R que permite realizar el cálculo de la dimensión fractal. Este cálculo es usado en el capítulo 4.
4. **control:** Directorio que contiene el código del software que implementa el proceso de control.
5. **control.pdf:** Copia digital del actual documento.
6. **control.R:** Código para lenguaje R que permite realizar las gráficas que muestran la efectividad del proceso de control usadas en el capítulo 6.
7. **coeficienteHurst3.R:** Código para lenguaje R que permite realizar el cálculo del coeficiente de Hurst. Este cálculo es usado en el capítulo 4 y en el artículo *¿Cuándo usar Hurst?*.
8. **cuandoUsarHurst.pdf:** Artículo que muestra los resultados obtenidos al realizar el estudio del coeficiente de Hurst.
9. **leame.txt:** Explica el procedimiento a seguir para compilar el código fuente de atractores, bifurcacion y control.
10. **sensibilidad.R:** Código para lenguaje R que permite realizar las gráficas de sensibilidad a las condiciones iniciales usadas en el capítulo 4.

## 9. Bibliografía

- [1] A. de la E. García Baños, “Apuntes de clase,” *Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación, Universidad del Valle*, 2012.
- [2] I. Stewart, *¿Juega Dios a los dados? La nueva Matemática del caos.* 1991.
- [3] D. I. de Sistemas y Automática, “Apuntes de control distribuido tema 6,” *Universidad de Sevilla*, 2006.
- [4] D. N. V. Torres, “Caos en sistemas biológicos,” *Departamento de Bioquímica y Biología Molecular, Universidad de la Laguna*, 2005.
- [5] I. Dyner and L. Rodrguez, “Dinámica de sistemas casos y aplicaciones en latino américa,” 2008.
- [6] M. M. Seron, “Sistemas no lineales,” *Departamento de Electrónica, Universidad Nacional de Rosario*, 2000.
- [7] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature.* H. B. Fenn and Company Ltd., 1977.
- [8] “Fractal.” <http://es.wikipedia.org/wiki/Fractal>, Agosto 2013.
- [9] “Dimensión fractal.” [http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensi%C3%B3n\\_fractal](http://es.wikipedia.org/wiki/Dimensi%C3%B3n_fractal), Agosto 2013.
- [10] “Minkowski–bouligand dimension.” [http://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski\\_E2%80%93Bouligand\\_dimension](http://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_E2%80%93Bouligand_dimension), Agosto 2013.
- [11] M. R. Miguel Ángel Martín, Manuel Morán, *Iniciación al Caos.* 1998.
- [12] “Teoría del caos.” [http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%A1tica\\_del\\_caos](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%A1tica_del_caos), Febrero 2013.
- [13] “Autosimilaridad.” <http://es.wikipedia.org/wiki/Autosimilaridad>, Febrero 2013.
- [14] J. F. M. T. Esperanza Ardila Romero, “Metodología e interpretación del coeficiente de hurst,” *Universidad Externado de Colombia*, 2010.
- [15] F. Takens, “Detecting strange attractors in turbulence(lecture notes in mathematics vol 898),” *Springer, Dynamical Systems and Turbulence*, 1981.
- [16] “Manifold.” <http://en.wikipedia.org/wiki/Manifold>, Agosto 2013.
- [17] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, “Controlling chaos,” *Physical Review Letters, Volumen 64, Number 11*, 1990.

- [18] K. Pyragas, “Continuous control of chaos by self-controlling feedback,” *Physical Review Letters, Volumen 170, Number 6*, 1992.
- [19] K. Pyragas, “Control of chaos via extended delay feedback,” *Physical Review Letters, Volumen 206*, 1995.
- [20] C. H. de lo Sota, *Control inteligente de sistemas dinámicos caóticos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, Facultad de Informática, 2004.
- [21] H. Richter, “An evolutionary algorithm for controlling chaos: The use of multi-objective fitness functions,” *Fraunhofer-Institut für Produktionstechnik und Automatisierung*, 2002.
- [22] E. M. H. Shihuang Shao, Jianan Fang, “Control of a kind of chaotic system using genetic algorithm and fuzzy logic,” *Dept. of Electrical Engineering, China Textile University*, 1996.
- [23] Z. O. Roman Senkerik, Ivan Zelinka, “Evolutionary techniques for deterministic chaos control,” *Tomas Bata University in Zlin*, 2010.
- [24] “Logistic map.” [http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map), Febrero 2013.
- [25] “Henón map.” [http://en.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9non\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9non_map), Febrero 2013.
- [26] Z. J. Shaoliang Yuan, Tao Jiang, “Bifurcation and chaos in the tinkerbell map,” *International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 21, No. 11*, 2011.
- [27] “Ikeda map.” [http://en.wikipedia.org/wiki/Ikeda\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Ikeda_map), Febrero 2013.
- [28] Z. Galias, “Rigorous investigations of ikeda map by means of interval arithmetic,” *Nonlinearity, Volumen 15, Number 6*, 2002.
- [29] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. 1989.