ENSISA ASE/IR 1A
Projet maths S6
Année 2023/2024

Méthodes d'approximation numérique des solutions d'une équation différentielle

1 Présentation du sujet

Les équations différentielles, omniprésentes dans de nombreux domaines scientifiques, sont souvent difficiles à résoudre analytiquement, contrairement aux exemples simples étudiés durant le cours d'analyse générale. Pour pallier cette complexité, l'utilisation de méthodes numériques s'avère essentielle. Ce projet vise à explorer deux méthodes fondamentales, celle d'Euler pour sa simplicité didactique et celle de Runge-Kutta d'ordre 4 pour son compromis entre précision et facilité d'application.

Le travail attendu est détaillé dans les trois parties qui suivent.

2 Méthodes d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 4

Les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 4 sont des outils puissants pour approximer numériquement les solutions d'équations différentielles. Dans les deux cas, exposer brièvement la théorie sous-jacente, expliquer la conceptualisation mathématique (construction de la suite de points fournissant l'approximation), détailler l'algorithme de calcul, et fournir une estimation de l'erreur sans entrer dans des démonstrations formelles.

3 Application à une équation différentielle linéaire simple

On considère dans cette partie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + ky & = 0 \\ y(0) & = y_0. \end{cases}$$

Résoudre analytiquement ce problème, et représenter graphiquement la solution. Utiliser ensuite les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour calculer des approximations numériques de cette solution. Analyser les différences entre les résultats obtenus.

4 Application à une équation différentielle non linéaire : le pendule simple

On considère dans cette partie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) & = 0 \\ \theta(0) & = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) & = \dot{\theta_0}, \end{cases}$$

où g est l'accélération due à la gravité, et l est la longueur du pendule. Utiliser les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour calculer des approximations numériques de la solution à ce problème. Analyser les différences entre les résultats obtenus.

5 Consignes

Le travail attendu mêlera études mathématiques et numériques effectuées à l'aide de Python, et sera présenté dans un rapport synthétique de 10 pages maximum comportant des éléments de réponses aux questions des trois parties précédentes, ainsi qu'une introduction et une conclusion. Il sera à déposer sur Moodle au plus tard le 02/06/2024, accompagné de votre (vos) script(s).

Le travail est à réaliser par groupe de deux étudiants, et un seul rendu est attendu par groupe.

La citation des sources utilisées sera prise en compte lors de la notation.

Références.

— À venir. :-)