Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
3^{η} Εργαστηριακή Αναφορά

Εργαστηριακή Ομάδα *0*

Γιουμερτάκης Απόστολος, 2017030142
Κατσούπης Ευάγγελος, 2017030077

1^{η} Άσκηση

Σε αυτή την άσκηση, μας ζητήθηκε η κατασκευή ενός βαθυπερατού φίλτρου, τύπου Butterworth, με τις παρακάτω παραμέτρους:

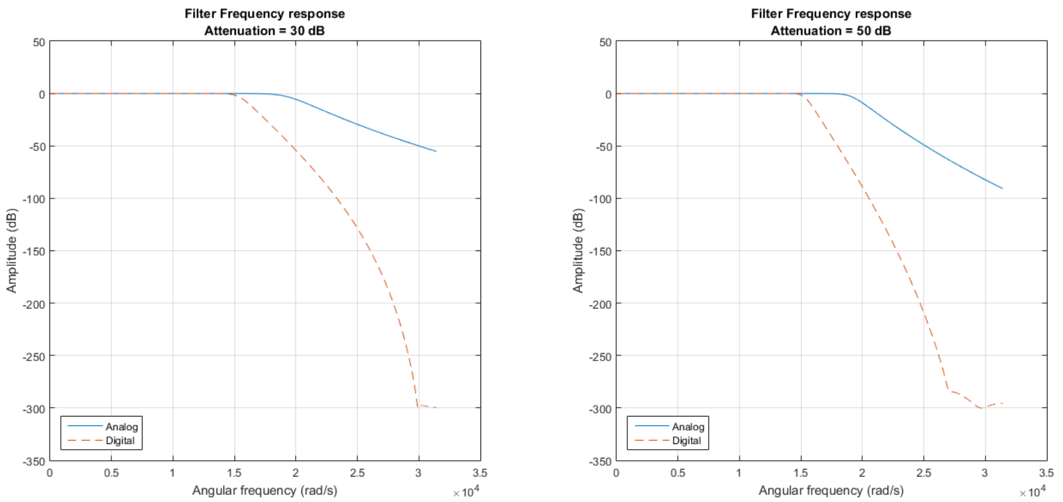
1. Ζώνη Passband: 0-3 kHz
2. Ζώνη Stopband: 4-5 kHz
3. Ripple: 3 dB
4. Attenuation: 30 dB

Για την κατασκευή του φίλτρου χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση ’buttord(Wp, Ws, Rp, Rs, ’s’)¨, η οποία δέχεται ως όρισμα τις παραπάνω παραμέτρους και το όρισμα ’s’ που αντιστοιχεί σε *αναλογικό* φίλτρο. Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει την τάξη του φίλτρου n και την συχνότητα αποκοπής w_c.
Στην συνέχεια, με χρήση της συνάρτησης ’[z,p,k] = buttap(n)’ παίρνουμε τους πόλους, τα μηδενικά και το κέρδος του φίλτρου, με μόνη είσοδο την τάξη του φίλτρου. Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται ως ορίσματα στην συνάρτηση ’[num, den] = zp2tf(z,p,k)’ η οποία επιστρέφει τον αριθμητή και το παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Για την απεικόνιση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος χρησιμοποιήθηκαν οι συναρτήσεις ’[numt,dent] = lp2lp(num,den,Wc)’ , η οποία μετατέπει το πρότυπο φίλτρο που αποτελείται από πολυώνυμα και ’H_s = freqs(numt, dent, 2*pi*f)’ η οποία επιστρέφει την απόκριση συχνότητας του αναλογικού φίλτρου.

Για την μετατροπή του φίλτρου από αναλογικό σε ψηφιακό, χρησιμοποιήθηκαν οι συναρτήσεις ’[numd,dend] = bilinear(numt,dent,fs)’ για διγραμμικό μετασχηματισμό και ’H_z = freqz(numd, dend, f, fs)’ η οποία επιστρέφει την απόκριση συχνότητας του αναλογικού φίλτρου.

Οπότε επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω και για εξασθένιση 50 dB και απεικονίζοντας τα H_s, H_z που υπολογίσαμε, προκύπτουν οι παρακάτω γραφικές:



Σχήμα 1: Starting System

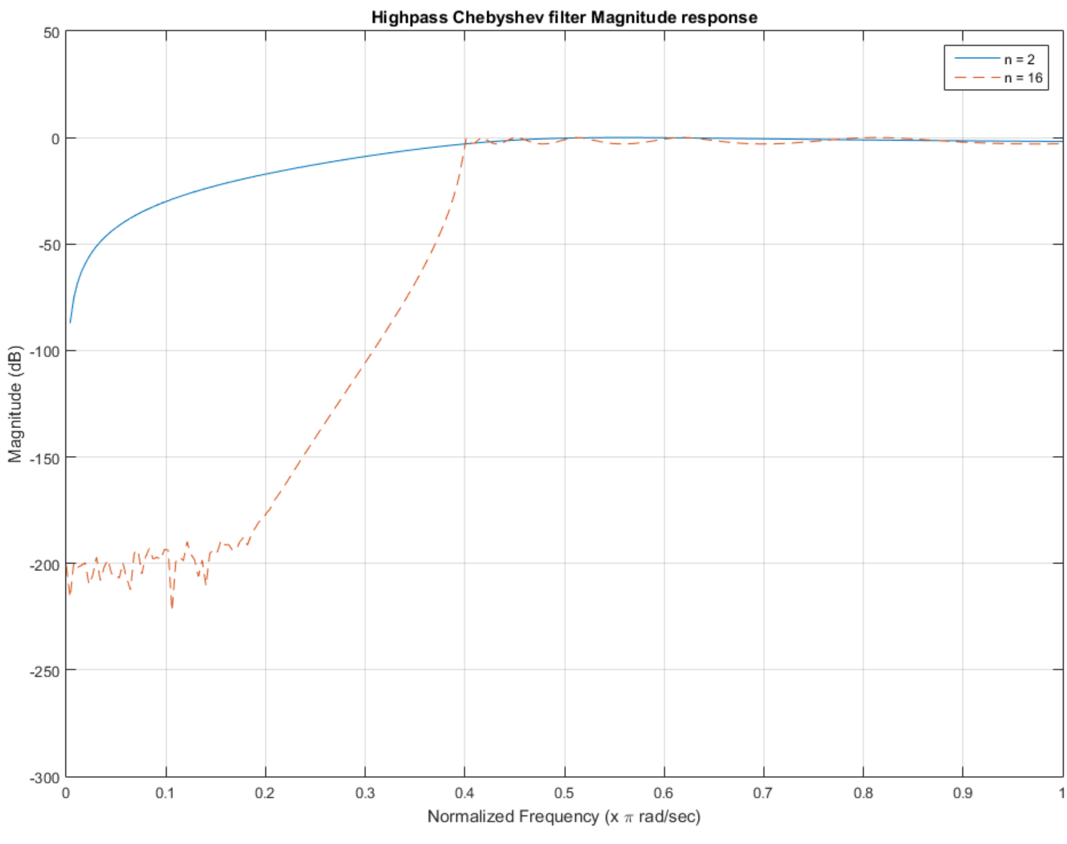
Παρατηρούμε ότι το πλάτος του ψηφιακού φίλτρου μειώνεται γρηγορότερα από το πλάτος του αναλογικού, όσο αυξάνεται η συχνότητα. Συγκεκριμένα για γωνιακή συχνότητα μεγαλύτερη των $1.5 * 10^4 rad/s$ αρχιζεί και μειώνεται το πλάτος του ψηφιακού φίλτρου ενώ το πλάτος του αναλογικού για $1.9 * 10^4 rad/s$,

οπότε η ζώνη μετάβασης του αναλογικού είναι μεγαλύτερη από το ψηφιακό. Υπενθυμίζεται ότι η συχνότητα αποκοπής είναι $19269.57 rad/s \simeq 3066.8 Hz$ για $30dB$ και $19107 rad/s \simeq 3040.97 Hz$ για $50dB$.
Επίσης παρατηρείται πως για εξασθένιση (Attenuation) $50dB$, το πλάτος και των δύο (2) φίλτρων μειώνεται με γρηγορότερο ρυθμό σε σχέση με την περίπτωση των $30dB$, το οποιό είναι αναμενόμενο.

2^{η} Άσκηση

Για την κατασκευή των Highpass Chebyshev φίλτρων, για συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 2\ rad/sec$, περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 0.2\ s$ και για passband ripple ίσο με $3dB$ έγινε χρήση της συνάρτησης cheby1() με ορίσματα την τάξη του φίλτρου, 2 και 16 αντίστοιχα, το passband ripple και την συγχνότητα αποκοπής. Για τον υπολογισμό της τελευταίας, έγινε μετατροπή, από αναλογική σε ψηφιακή σύμφωνα με την περίοδο δειγματοληψίας κανονικοποιημένη μιας και η χρήση της συνάρτησης cheby1() απέτέι το μισό της συγχνότητας. Τέλος, σαν όρισμα δόθηκε ο τύπος του φίλτρου (high) μιας και διαφέρει από το default της συνάρτησης.
Τα ορίσματα τα οποία επέστρεψε, δόθηκαν στην συνάρτηση freqz() η οποία, με την σειρά της επιστρέφει την απόκριση της συχνότητας σε διάστημα $[0, 1]$, το οποίο δόθηκε σαν όρισμα, εκφράζοντας το διάστημα των γωνιακών συχνοτήτων σε rad/sec και είναι ανάλογο του πλήθος των δειγμάτων.

Τα φίλτρα τα οποία δημιουργήθηκαν σε κοινό διάγραμμα:



Σχήμα 2: High pass filters

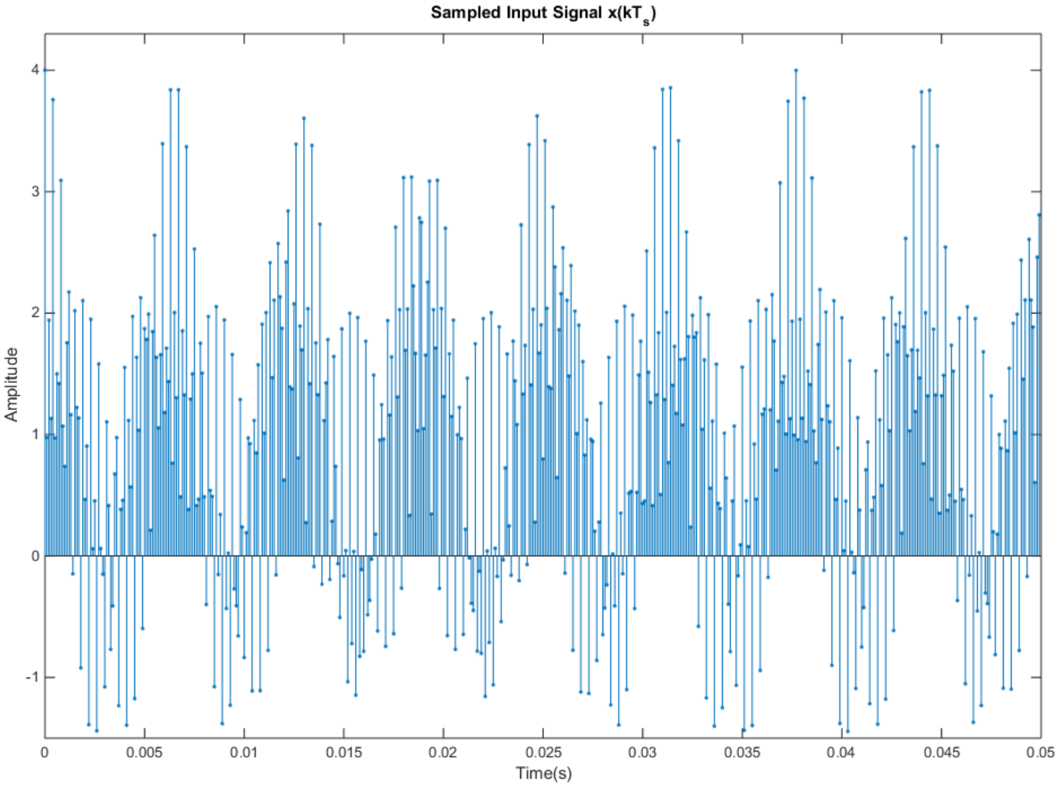
Ανάλογα με την τάξη του φίλτρου παρατηρούνται διαφορές σε όλες τις ζώνες του φίλτρου ανάλογα με την τάξη του. Ειδικότερα, για φίλτρου τάξης 16 παρατηρείται μικρότερη ζώνη μετάβασης με ταλαντώσεις στις ζώνες αποκοπής και διέλευσης.

3^{η} Άσκηση

- Έχουμε το παρακάτω σήμα:

$$x(t) = 1 + cos(1000t) + cos(16000t) + cos(30000t)$$

Γίνεται δειγματοληψία με N=500 δείγματα και συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 10kHz$ οπότε προκύπτει το παρακάτω σήμα στον χρόνο:



Σχήμα 3: Sampled signal $X(kT_s)$

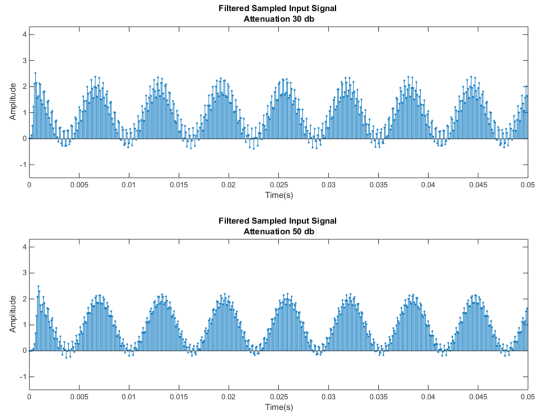
Παρατηρείται πως η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι τα 30000 rad/s $\simeq$ 4.78 kHz, οπότε, για να μην εμφανιστεί aliasing, πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι δύο φορές μεγαλύτερη, βάση θεωρήματος Nyquist. Οπότε στην περίπτωση μας δεν εμφανίζεται το φαινόμενο και δεν χάνεται πληροφορία.

Στην συνέχεια το δειγματοληπτημένο σήμα επεξεργάζεται με τα χαμηλοπερατά φίλτρα, τα οποία δημιουργήθηκαν. Με την χρήση της συνάρτησης filter() και με ορίσματα το κάθε φίλτρο (με την μορφή αριθμητή-παρανομαστή) αλλά και το σήμα αναφοράς το φιλτραρισμένα σήμα και για τις δύο περιπτώσεις είναι:

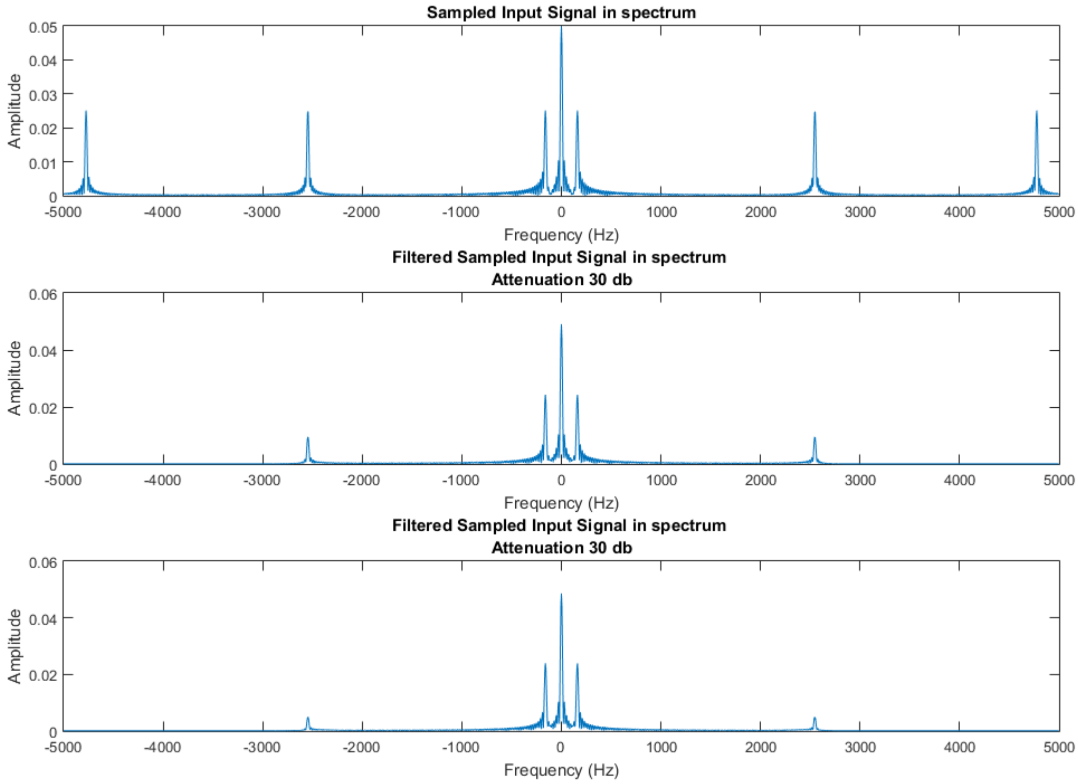
Λόγω το ότι η πληροφορία που μπορούμε να προσκομήσουμε από το πεδίο του χρόνου δεν είναι ξεκάθαρη, θα αναλυθεί το κάθε σήμα στο πεδίο της συχνότητας όπως φαίνεται παρακάτω:

Για το σήμα αναφοράς, παρατηρούνται οι κύριες συχνώτητές του στις τιμές:

$$f_1 = 0\ Hz, \quad f_2 \simeq 161\ Hz, \quad f_3 \simeq 2.55\ kHz, \quad f_4 \simeq 4.775\ kHz$$



Σχήμα 4: Filtered Signal for attenuation 30 db and 50 db

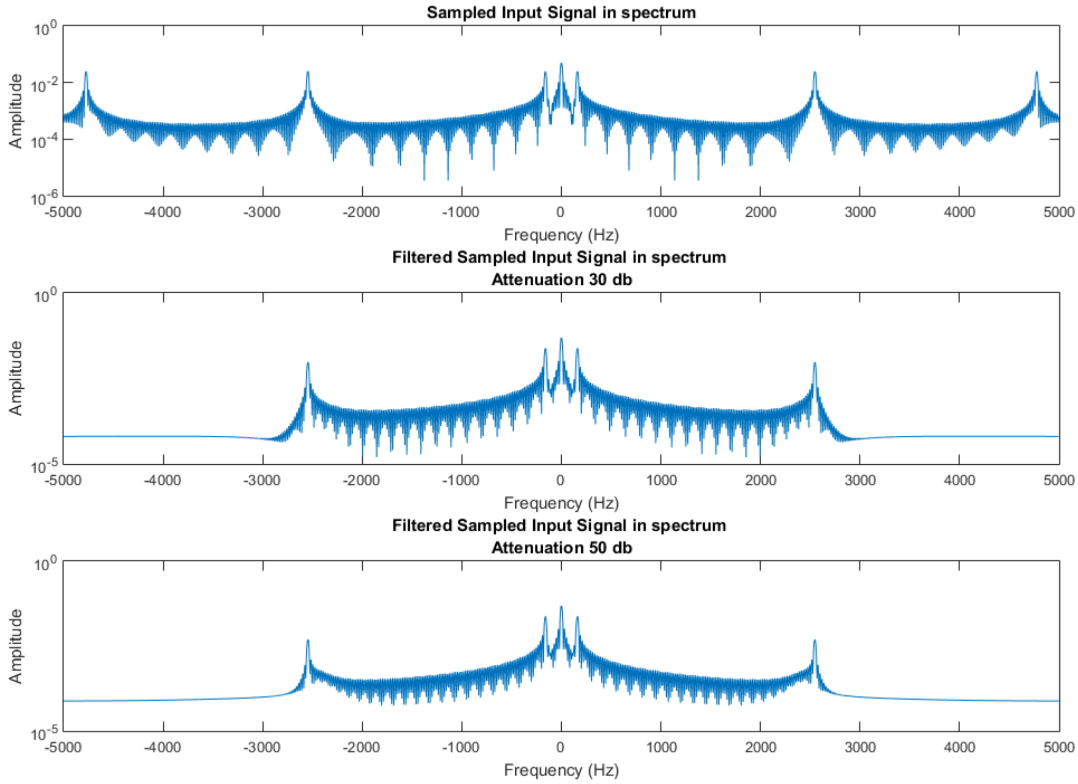


Σχήμα 5: Input and Filtered Signals in frequency field

Για το φιλτραρισμένο σήμα με Attenuation 30 dB παρατηρείται πως συχνότητες μεγαλύτερες της συχνότητας αποκοπής $\simeq$ 2.44 kHz, φθίνουν σημαντικά και για 4 kHz (έναρξης της ζώνης stopband) φαίνεται να αποκόπτονται τελειώς. Συγκεκριμένα η ακμή με συχνότητα 30000 rad/s $\simeq$ 4.78 kHz έχει εξαλειφθεί. Η ακμή με συχνότητα 2.55 kHz εξασθενεί σημαντικά αλλά δεν εξαλείφεται καθώς βρίσκεται μέσα στην ζώνη μετάβασης του φίλτρου (βλ. εικόνα 1).
Για το φιλτραρισμένο σήμα με Attenuation 50 db παρατηρείται ίδια συμπεριφορά για την ακμή με συχνότητα 4.78 kHz , ενώ στην συχνότητα 2.55 kHz η ακμή έχει εξασθενίσει σημαντικά, το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς η ζώνη μετάβασης είναι μικρότερη και το πλάτος φθίνει γρηγορότερα με

την αύξηση της συχνότητας (πιο απότομη κλίση, βλ. εικόνα 1).
Σε όλες τις περιπτώσεις, οι ¨χαμηλές' συχνότητες ($f_1 = 0\ Hz,\quad f_2 \simeq 161\ Hz$) δεν έχουν εξασθενίσει, αποτέλεσμα το οποίο είναι επιθυμητό καθώς το φίλτρο είναι βαθυπερατό.

Το παραπάνω φαίνεται και στην απεικόνιση του φάσματος σε λογαριθμική κλίματα.



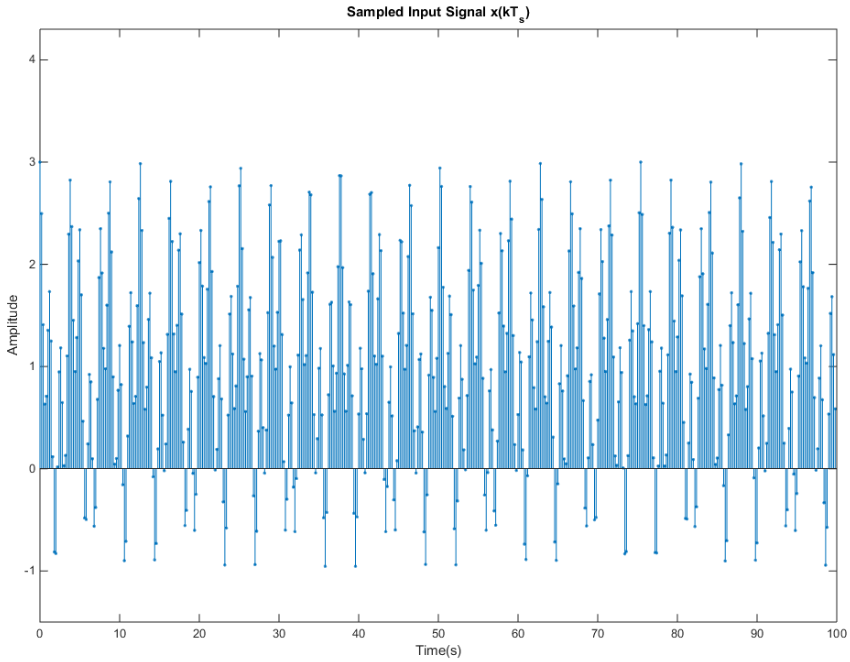
Σχήμα 6: Sampled Input Signal

- Για το σήμα:

$$x(t) = 1 + cos(1.5t) + cos(5t)$$

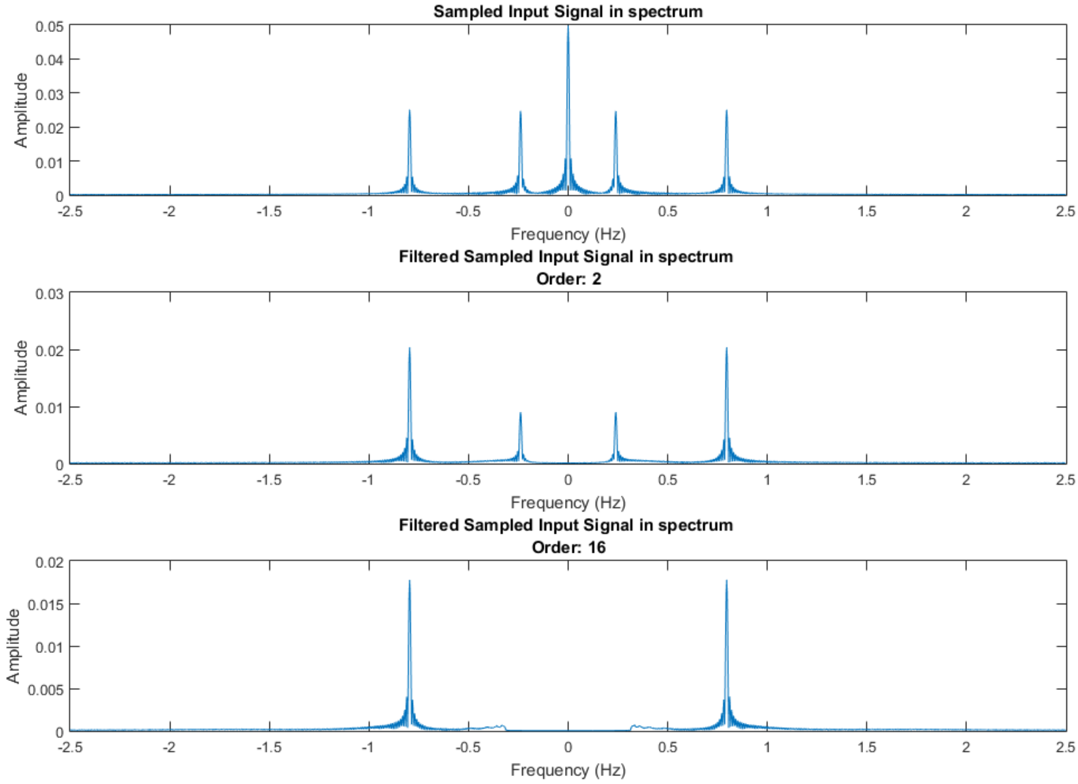
Γίνεται, όμοια δειγματοληψία με $N = 500$ δείγματα και συχνότητα δειγματοληψίας $F_S = 1/0.2 = 5\ Hz$. Παρατηρείται ότι και σε αυτή την περίπτωση δεν εμφανίζεται το φαινόμενο της επικάλυψης (aliasing), μιας και F_S είναι μεγαλύτερη από το όριο που θέτει το θεώρημα Nyquist ($F_c \geq 2f_{max} \simeq 2 \cdot 0.063\ Hz$).

Το δειγματοληπτημένο σήμα:



Σχήμα 7: Sampled Input Signal

Με την επίδραση των διαφορετικών φίλτρων, έχουμε τα εξής αποτελέσματα, στο πεδίο της συχνότητας:

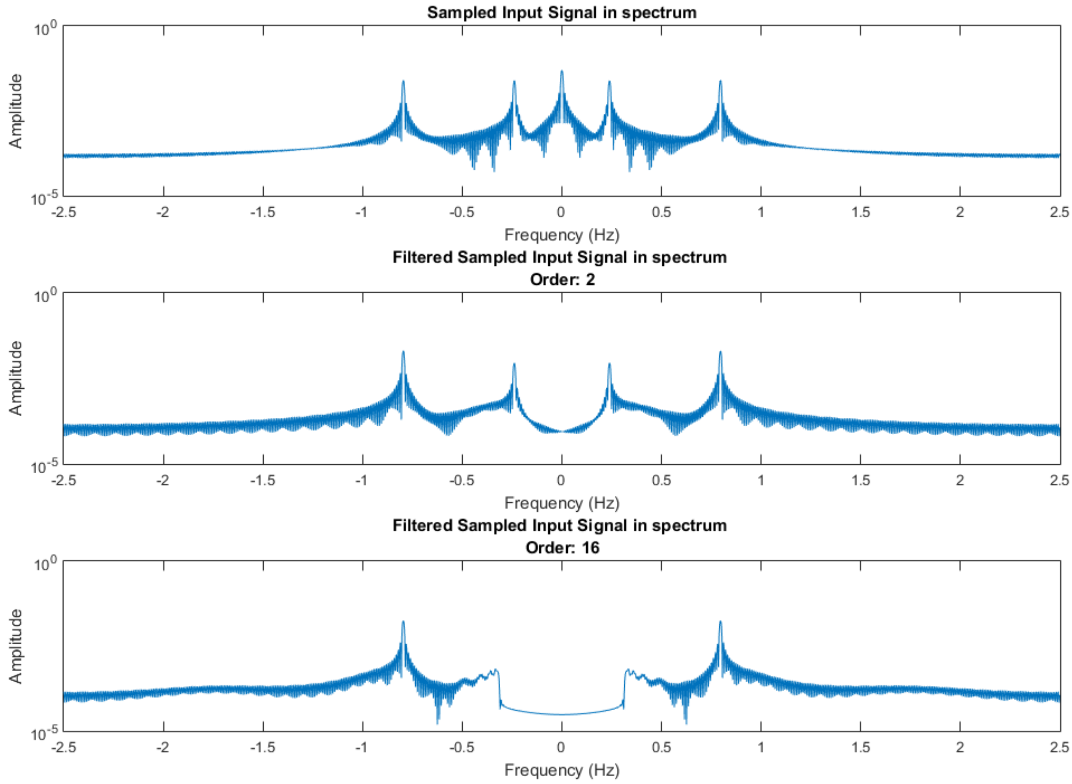


Σχήμα 8: Sampled and Filtered Signals in frequency field

Παρατηρείται πως οι συχνότητες μεγαλύτερες από την κανονικοποιημένη συχνότητα αποκοπής ($F_c \simeq 0\ Hz$) απορρίπτονται και στις δύο περιπτώσεις. Ειδικότερα στην περίπτωση φίλτρου τάξης 2 που ζώνη μετάβασης είναι αρκετά μεγαλύτερη και πιό ομαλή, σε σχέση με το φίλτρο τάξης 16, μηδενίζονται οι συχνότητες κοντά στο 0, αλλά παραμένουν οι συχνότητες των $f = 0.25\ Hz$ μειωμένες. Λόγω του ότι η ζώνη διέλευσης είναι αρκετά υψηλή, σε σχέση με αυτή της αποκοπής, η συχνότητα μειώνεται λιγότερο και επιδρά στο σήμα.

Σε αντίθετη περίπτωση, για χρήση φίλτρου τάξης 16, οι συχνότητες που είναι στην ζώνη διέλευσης επηρεάζονται σε μεγαλύτερο βαθμό και απορρίπτονται.

Το παραπάνω γίνεται εμφανέστερο, αν παρατηρηθούν οι συχνότητες σε λογαριθμική κλίμακα:



Σχήμα 9: Sampled Input Signal

Παρατηρείται πως αριστερά και δεξιά της συχνότητας αποκοπής, υπάρχει μείωση και ταλάντωση του φάσματος εως ότου σταματήσει η ζώνη διέλευσης.