

Λύσεις ασκήσεων

Οι κλάσεις \mathcal{P} και \mathcal{NP}

- Αποδείξτε ότι αν $L_1 \in \mathcal{NP}$ και $L_2 \in \mathcal{P}$, τότε και $L_1 - L_2 \in \mathcal{NP}$.

Απάντηση:

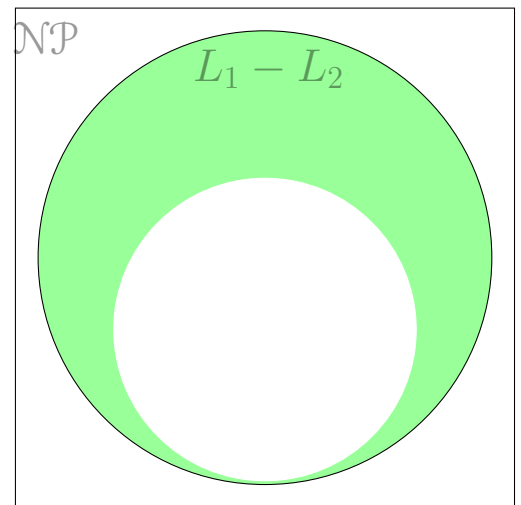
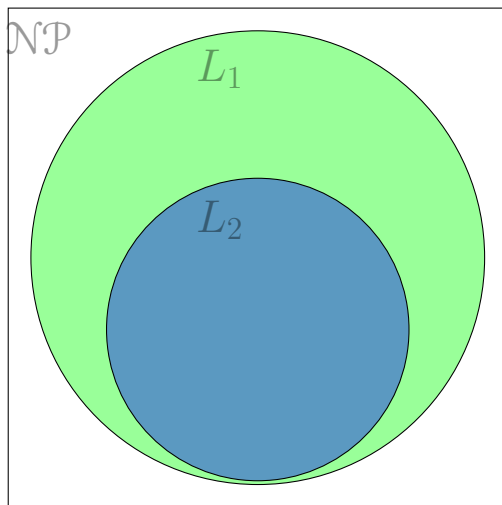
Γενικά ισχύει η παρακάτω ιεραρχία κλάσεων:

$$\Pi\Gamma \subset \text{ΚΓ} \subset \text{ΝΓΧΣ} \subset \text{ΓΧΣ} \subset \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq \text{ΕΧΠ} \subset \text{ΑΓ} \subset \text{Απ.ΑΓ}$$

$\Pi\Gamma \rightarrow$ Πεπερασμένες Γλώσσες	$\text{ΚΓ} \rightarrow$ Κανονικές Γλώσσες
$\text{ΝΓΧΣ} \rightarrow$ Ντετερμινιστικές Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα	$\text{ΓΧΣ} \rightarrow$ Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα
$\mathcal{P} \rightarrow$ Κλάση \mathcal{P}	$\mathcal{NP} \rightarrow$ Κλάση \mathcal{NP}
$\text{ΕΧΠ} \rightarrow$ Κλάση ΕΧΠ	$\text{ΑΓ} \rightarrow$ Αναδρομικές Γλώσσες
$\text{Απ.ΑΓ} \rightarrow$ Απαριθμήσιμες Αναδρομικές Γλώσσες	

Βάση της ιεραρχίας $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$, θα ισχύει πώς $L_2 \in \mathcal{NP}$.

Στο παρακάτω διάγραμμα, έστω με πράσινο χρώμα θα μπορούσε να θεωρηθεί η γλώσσα $L_1 \in \mathcal{NP}$ με μπλέ η γλώσσα $L_2 \in \mathcal{NP}$.



Παρατηρούμε πώς για το συγκεκριμένο παράδειγμα, η $L_1 - L_2$ ανήκει στην \mathcal{NP} . Το ίδιο θα ισχύει και στην περίπτωση $L_1 = L_2$, όπου θα οδηγούσε στο κενό σύνολο, το οποίο ανήκει στην κλάση \mathcal{NP} .

- Δείξτε ότι το πρόβλημα 2021-SAT (ικανοποιησιμότητα λογικής πρότασης σε μορφή CNF με ακριβώς 2021 στοιχεία ανά συνθήκη) ανήκει στην κλάση \mathcal{NP} .

Απάντηση:

Θα ξεκινήσουμε, τονίζοντας ότι το 3-SAT ανήκει στην κλάση \mathcal{NP} δηλαδή υπάρχει μη ντετερμινιστική μηχανή Turing M που αποφασίζει στιγμιότυπα του 3-SAT σε πολυωνυμικό χρόνο. Μέσω πολυωνυμικών αναγωγών μπορούμε να πάμε από το 3-SAT στο κ -SAT με $\kappa = 2021$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

Άρα και το 2021-SAT ανήκει στην κλάση \mathcal{NP} .

Πολυωνυμικές αναγωγές

Έστω το παρακάτω στιγμιότυπο του SAT (ικανοποιησιμότητα λογικής πρότασης σε CNF):

$$(x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_6})$$

- Βάσει της πολυωνυμικής αναγωγής από το SAT στο 3-SAT (ακριβώς 3 στοιχεία ανά συνθήκη), δώστε το στιγμιότυπο του 3-SAT στο οποίο ανάγεται το παραπάνω στιγμιότυπο του SAT.

Απάντηση:

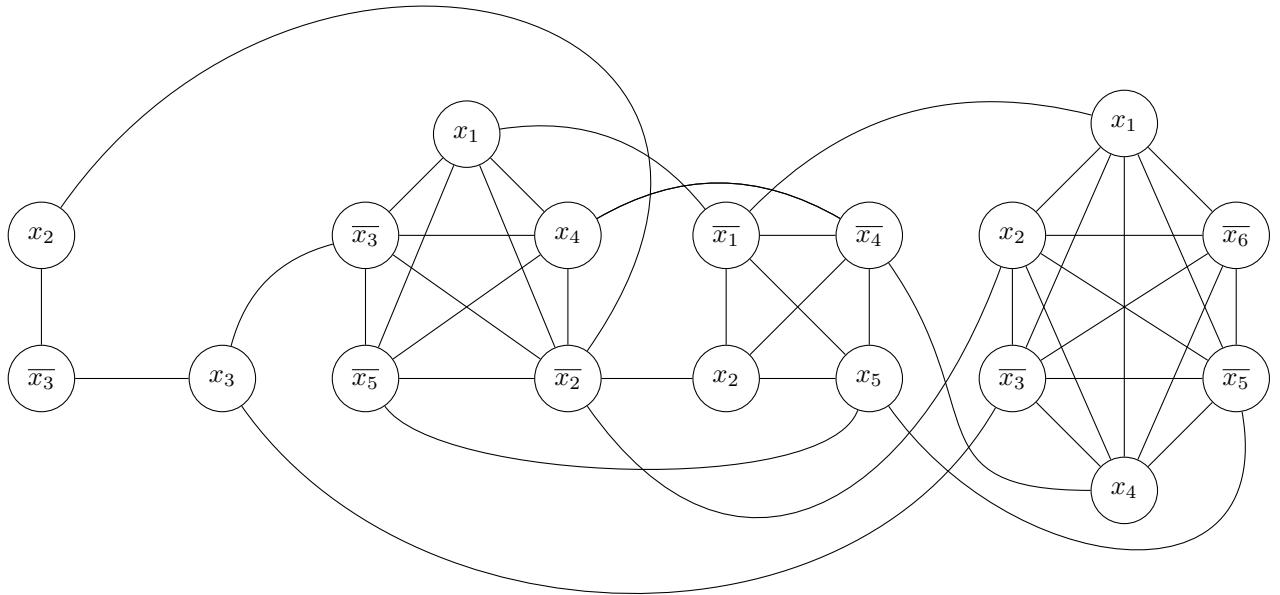
Η ζητούμενη πρόταση 3-SAT είναι η εξής:

$$\begin{aligned} & (x_2 \vee \overline{x_3} \vee z) \wedge (\overline{z} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \\ & \wedge (x_3 \vee k_1 \vee k_2) \wedge (x_3 \vee \overline{k_1} \vee k_2) \wedge (x_3 \vee k_1 \vee \overline{k_2}) \wedge (x_3 \vee \overline{k_1} \vee \overline{k_2}) \\ & \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee y_1) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_3} \vee y_2) \wedge (\overline{y_2} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \\ & \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee s) \wedge (\overline{s} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ & \wedge (x_1 \vee x_2 \vee l_1) \wedge (\overline{l_1} \vee \overline{x_3} \vee l_2) \wedge (\overline{l_2} \vee x_4 \vee l_3) \wedge (\overline{l_3} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_6}) \end{aligned}$$

- Εάν κάνατε αναγωγή απευθείας από το SAT στο INDEPENDENTSET, ποιο θα ήταν το στιγμιότυπο (G, K) του INDEPENDENTSET στο οποίο θα αναγόταν το αρχικό στιγμιότυπο του SAT;

Απάντηση:

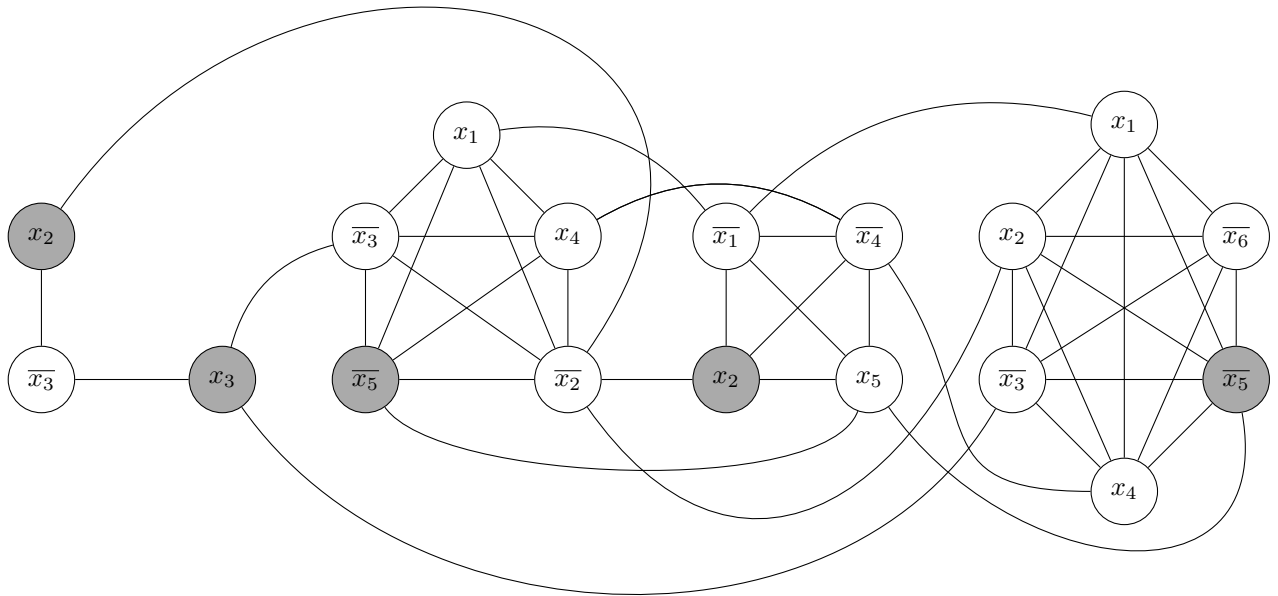
Κάθε στιγμιότυπο του INDEPENDENTSET περιλαμβάνει έναν γράφο G και έναν αριθμό K (το επιθυμητό μέγεθος του ανεξάρτητου συνόλου). Το ζητούμενο στιγμιότυπο έχει $K = 5$ και ο γράφος G είναι ο εξής:



- Μπορείτε να βρείτε μία λύση (ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 5) για το στιγμιότυπο (G, K) του ερωτήματος (β') και την αντίστοιχη ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές x_i που ικανοποιεί το αρχικό στιγμιότυπο του SAT (λογική πρόταση σε (CNF));

Απάντηση:

Μία λύση (ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 5) για το στιγμιότυπο του παραπάνω ερωτήματος είναι οι πέντε κορυφές που σημειώνονται με γκρι χρώμα στο γράφο παρακάτω:



Η ισοδύναμη ανάθεση τιμών αληθείας σε μεταβλητές που ικανοποιεί το αρχικό στιγμιότυπο του SAT είναι η εξής:

$$x_2 = \text{TRUE}, \quad x_3 = \text{TRUE}, \quad x_5 = \text{FALSE}$$

Άσκηση Bonus

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα 2021-SAT (ικανοποιησιμότητα λογικής πρότασης σε μορφή CNF με ακριβώς 2021 στοιχεία ανά συνθήκη) είναι NP-πλήρες.

Απάντηση:

Για να δείξουμε ότι το 2021-SAT είναι NP-πλήρες, αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι το είναι NP-hard.

Γνωρίζουμε πως το 3-SAT είναι NP-hard και άρα, και το 2021-SAT θα είναι NP-hard καθώς θα φτάσουμε σε αυτό με πολυωνυμική αναγωγή και ποιο συγκεκριμένα με μετατροπή συνθηκών σε 2021 στοιχεία.

Τέλος αρκεί να δείξουμε ότι το πρόβλημά μας ανήκει στην κλάση NP, για το οποίο θα επικαλεστούμε το θεώρημα του Cook το οποίο αποδεικνύει ότι το πρόβλημα SAT \in NP και άρα, πάλι με πολυωνυμική αναγωγή, και το 2021-SAT \in NP.

Άρα με μπορούμε να πούμε ότι το 2021-SAT είναι NP-πλήρες.