Θεωρία Υπολογισμού
Assignment 1

Κατσούπης Ευάγγελος
2017030077

Συνεργασία με
Αντώνιο-Ραφαήλ Ελληνιτάκη 2017030118

Λύσεις ασκήσεων

Κανονικές εκφράσεις

Γράψτε κανονικές εκφράσεις για τις παρακάτω γλώσσες:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* :$ η w περιέχει 1 ακριβώς εμφάνιση του b και άρτιο αριθμό από $a\}$

  Απάντηση:

  $$((aa)^* b (aa)^* \cup (aa)^* aba (aa)^*)$$

- $L = \{w \in \{a, b\}^* :$ η w αρχίζει και τελείωνει με διαφορετικό σύμβολο και το 1^o έχει άρτιο πλήθος$\}$

  Απάντηση:

  $$\underbrace{(ab^*a)^+}_{\text{άρτιο } \#a} b^+ \cup \underbrace{(ba^*b)^+}_{\text{άρτιο } \#b} a^+$$

- $L = \{w \in \{a, b\}^* :$ το πλήθος των b στην w είναι $3\kappa + 2 \;\; \forall \;\; \kappa \geq 0$ και δεν εμφανίζονται συνεχόμενα $b\}$

  Απάντηση:

  $$a^* \underbrace{(ba^+ba^+ba^+)^*}_{3\kappa} \underbrace{(ba^+b)}_{2} a^*$$

Πεπερασμένα αυτόματα

Κατασκευάστε πεπερασμένα αυτόματα για τις παρακάτω γλώσσσες (#καταστάσεων μονοψήφιος).

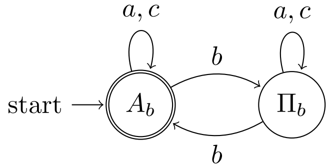
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* :$ οι εμφανίσεις των b είναι άρτιες και οι εμφανίσεις των c είναι περιττές$\}$

  Απάντηση:
  Αρχικά θα σπάσουμε το πρόβλημα σε 2 υποπροβλήματα:

  1. Το αυτόματο το οποίο δέχεται άρτιο αριθμό από b
     Έτσι θα έχουμε τις εξείς περιπτώσεις:

Άρτιο πλήθος από b	A_b
Περιττό πλήθος από b	Π_b

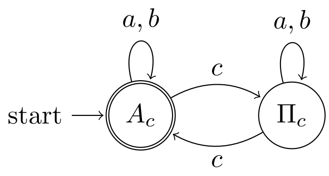
     Το αυτόματο για την παραπάνω περίπτωση θα είναι το εξής:



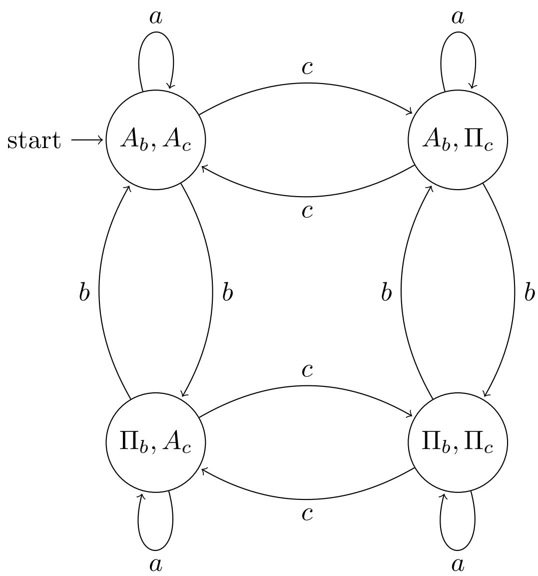
2. Το αυτόματο το οποίο δέχεται περιττό αριθμό από c
   Έτσι θα έχουμε τις εξείς περιπτώσεις:

Άρτιο πλήθος από c	A_c
Περιττό πλήθος από c	Π_c

   Το αυτόματο για την παραπάνω περίπτωση, αντίστοιχα θα είναι το εξής:



Άρα μπορούμε να φτιάξουμε το παρακάτω αυτόματο πεπερασμένων καταστάσεων:



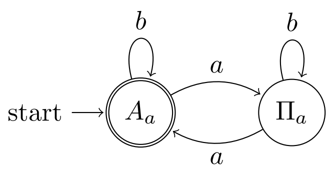
- $L = \{w \in \{a, b\}^* :$ η w περιέχει 2κ εμφανίσεις του α $(\kappa \geq 0)$ και $3m + 2$ εμφανίσεις του β $(m \geq 0)\}$

  Απάντηση:
  Όμοια και εδώ θα σπάσουμε τοπρόβλημα σε 2 επιμέρους προβλήματα.

  1. Το αυτόματο το οποίο δέχεται 2κ εμφανίσεις του a:
     Μπρούμε έυκολα να μεταφράσουμε το παραπάνω, στο ότι το αυτόματό μας δέχεται συμβολοσειρές με άρτιο αριθμό εμφανίσεων του a. Έτσι θα έχουμε τις εξείς καταστάσεις για το πλήθος των συμβόλων στην εκάστοτε συμβολοσειρά εισόδου:

Άρτιο πλήθος από a	A_a
Περιττό πλήθος από a	Π_a

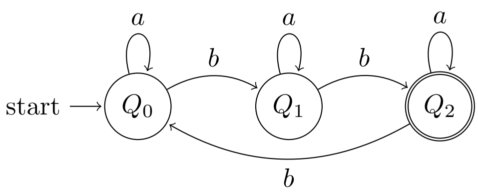
     Το παραπάνω αυτόματο:



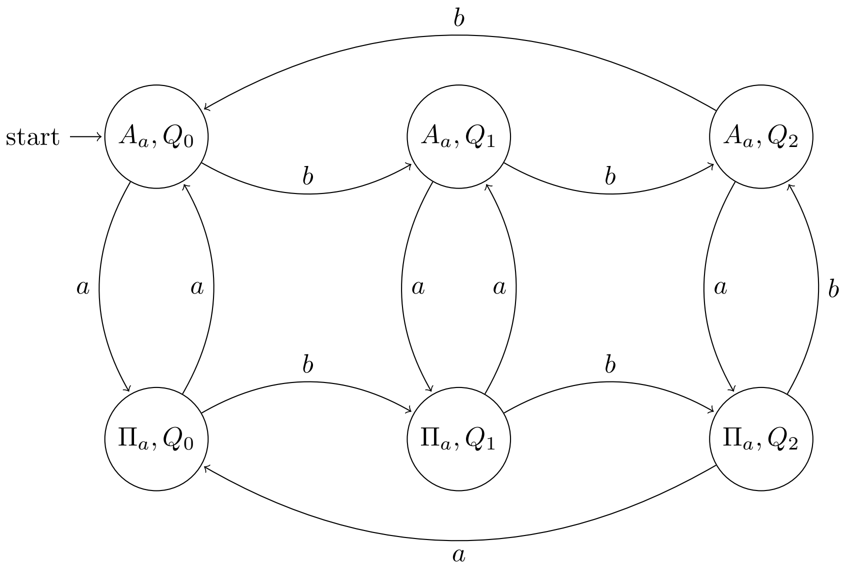
2. Το αυτόματο το οποίο δέχεται $3m+2$ εμφανίσεις του b:
Η αρχική κατάσταση δεν θα αποτλείτε από b. Αν συμβολο εισόδου είναι b τότε η επόμενη κατασταση θα αποτελείτε από 1 b. Με το επόμενο ίδιο σύμβολο θα φτάσουμε στην 3^{η} κατάσταση όπου θα σηματοδοτεί ότι θα υπάρχουν 2 b στην συμβολοσειρά. Αυτή είναι και μια τελική κατάσταση μιας και για $m=0$ αρκούν 2 b στην λέξη μας.Σε περίπτωση που έρθει ένα ακόμα b θα χρειαστεί να πάμε στην 1^{η} κατάσταση ώστε η μηχανή μας να χρειαστεί να αναγνωρίσει 2 ακόμα b ώστε να φτάσει σε τελική αποδεκτή κατάσταση.
Άρα θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

0 ή $3m$ b	Q_0
1 b	Q_1
2 b	Q_2

και το αυτόματο αυτής της περίπτωσης:

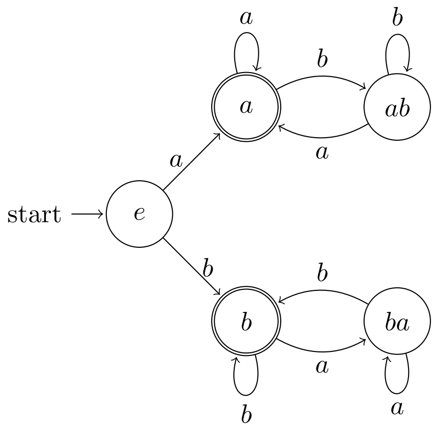


Τέλος με την χρήση των παραπάνω μπορούμε να φτίαξουμε το ολοκληρωτικό αυτόματο το οποίο είναι:

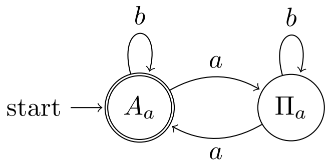


- $L = \{w \in \{a,b,c\}^* :$ η w αρχίζει και τελείνει με το ίδιο σύμβολο και το αριθμός των a στην w είναι άρτιος$\}$

  Απάντηση:
  Για το πρώτο μέρος έχουμε το αυτόματο:



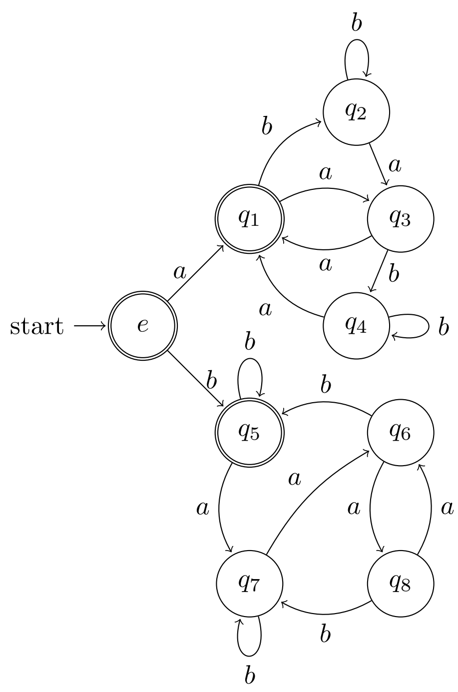
  Ενώ για το δεύτερο μέρος έχουμε το εξής:



  Άρα το αυτόματο θα έχει τις παρακάτω καταστάσεις:

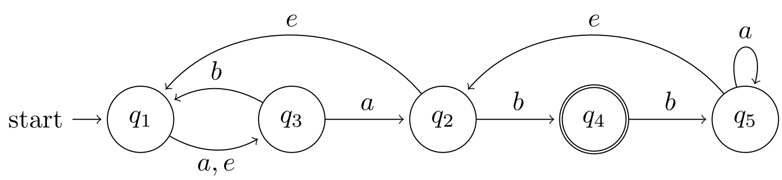
Κενή συμβολοσειρά (e) με 0 a (άρτιο)	e
$a...a$ και άρτιο πλήθος a	q_1
$a...b$ και άρτιο πλήθος a	q_2
$a...a$ και περιττό πλήθος a	q_3
$a...b$ και περιττό πλήθος a	q_4
$b...b$ και άρτιο πλήθος a	q_5
$b...a$ και άρτιο πλήθος a	q_6
$b...b$ και περιττό πλήθος a	q_7
$b...a$ και περιττό πλήθος a	q_8

και θα είναι το εξής:



Μη ντετερμινισμός και κανονικότητα αυτομάτων

Έστω το παρακάτω μη ντετερμινιστικό αυτόματο M:



- Κατασκευάστε αναλυτικά ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο M'.

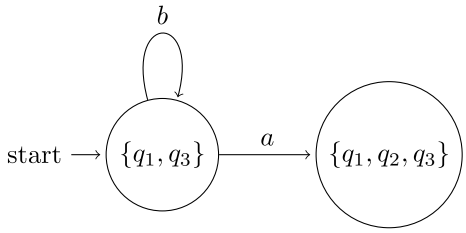
  Αρχικά υπολογίζουμε τα σύνολα $E(q)\ \forall\ q \in M$.

  - $E(q_1) = \{q_1, q_3\}$
  - $E(q_2) = \{q_1, q_2, q_3\}$
  - $E(q_3) = \{q_3\}$
  - $E(q_4) = \{q_4\}$
  - $E(q_5) = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$

  Η αρχική κατάσταση του αυτομάτου M' θα είναι η $E(q_1) = \{q_1, q_3\}$.Θα βρούμε τις μεταβάσεις από την αρχική κατάσταση:

$$q_1 \xrightarrow{a} E(q_3) = \{q_3\}$$
$$q_3 \xrightarrow{a} E(q_2) = \{q_1, q_2, q_3\}$$
$$q_1 \xrightarrow{b} \{\}$$
$$q_3 \xrightarrow{b} E(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

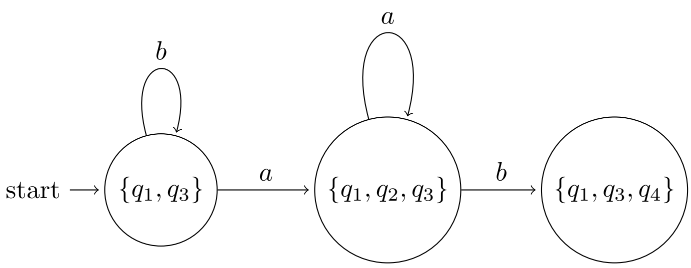
Άρα από την αρχική κατάσταση $\{q_1, q_3\}$ καταλύγουμε στην $E(q_3) \cup E(q_2) = \{q_1, q_2, q_3\}$ για είσοδο a και στην $E(q_1) = \{q_1, q_3\}$ για είσοδο b.



Από την νέα κατάσταση $\{q_1, q_2, q_3\}$ θα έχουμε τις εξείς μεταβάσεις:

$$
\begin{aligned}
&q_1 \xrightarrow{a} E(q_3) = \{q_3\} \\
&q_2 \xrightarrow{a} \{\} \\
&q_3 \xrightarrow{a} E(q_2) = \{q_1, q_2, q_3\} \\
&q_1 \xrightarrow{b} \{\} \\
&q_2 \xrightarrow{b} E(q_4) = \{q_4\} \\
&q_3 \xrightarrow{b} E(q_1) = \{q_1, q_3\}
\end{aligned}
$$

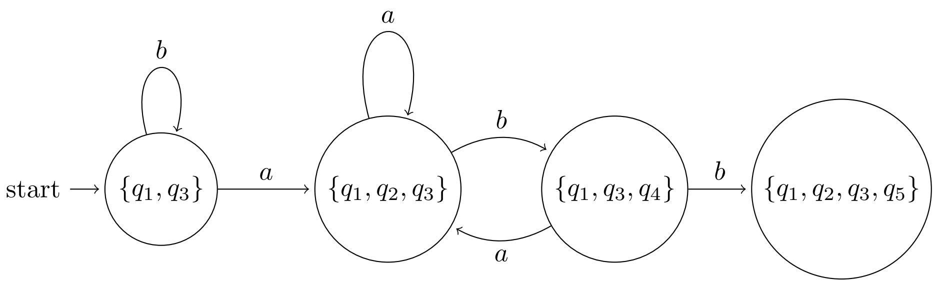
Άρα από την κατάσταση $\{q_1, q_2, q_3\}$ καταλύγουμε στην $E(q_2) \cup E(q_3) = \{q_1, q_2, q_3\}$ για είσοδο a και στην $E(q_1) \cup E(q_4) = \{q_1, q_3, q_4\}$ για είσοδο b.



Αντίστοιχα για την $\{q_1, q_2, q_4\}$ θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&q_1 \xrightarrow{a} E(q_3) = \{q_3\} \\
&q_3 \xrightarrow{a} E(q_2) = \{q_1, q_2, q_3\} \\
&q_4 \xrightarrow{a} \{\} \\
&q_1 \xrightarrow{b} \{\} \\
&q_3 \xrightarrow{b} E(q_1) = \{q_1, q_3\} \\
&q_4 \xrightarrow{b} E(q_5) = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}
\end{aligned}
$$

Από την κατάσταση $\{q_1, q_2, q_4\}$ καταλύγουμε στην $E(q_2) \cup E(q_3) = \{q_1, q_2, q_3\}$ για είσοδο a και στην $E(q_1) \cup E(q_5) = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$ για είσοδο b.

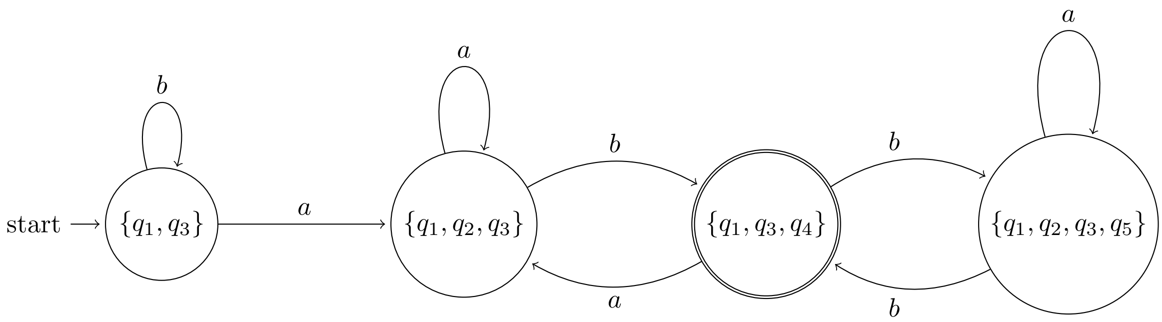


Τέλος από την $\{q_1, q_2, q_3, q_5\}$, έχουμε όμοια τα εξής:

$$
\begin{aligned}
&q_1 \xrightarrow{a} E(q_3) = \{q_3\} \\
&q_2 \xrightarrow{a} \{\} \\
&q_3 \xrightarrow{a} E(q_2) = \{q_1, q_2, q_3\} \\
&q_5 \xrightarrow{a} E(q_5) = \{q_1, q_2, q_3, q_5\} \\
&q_1 \xrightarrow{b} \{\} \\
&q_2 \xrightarrow{b} E(q_4) = \{q_4\} \\
&q_3 \xrightarrow{b} E(q_1) = \{q_1, q_3\} \\
&q_5 \xrightarrow{b} E(q_5) = \{\}
\end{aligned}
$$

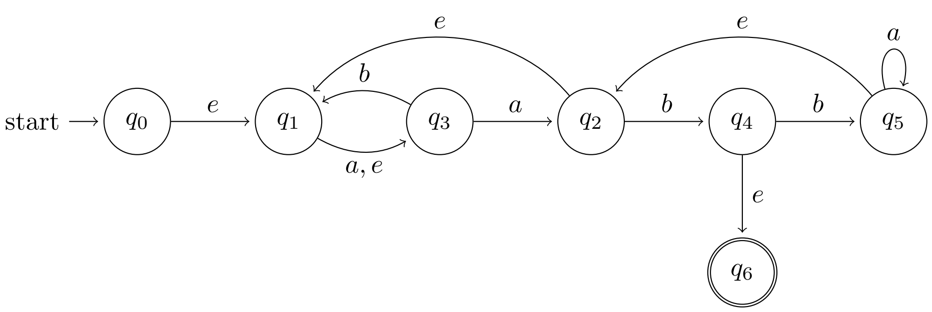
Άρα με είσοδο a θά καταλύγουμε στην $E(q_2) \cup E(q_3) \cup E(q_5) = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$ και με b στην κατάσταση $E(q_1) \cup E(q_4) = \{q_1, q_3, q_5\}$.

Άρα το πλήρες ντετερμινιστικό αυτόματο μαζί με την τελική κατάσταση (δηλαδή να περιέχει την q_4) είναι το εξής θα είναι το εξής:



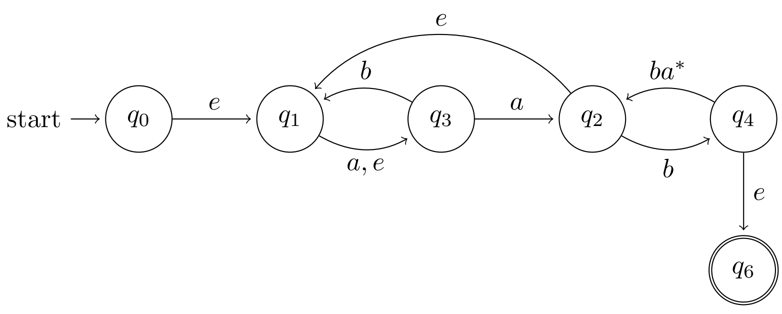
- Κατασκευάστε αναλυτικά την κανονική έκφραση για την $L(M)$ με σειρά απαλοιφής q_5, q_4, q_3, q_2, q_1.

  Για την υπολοποίηση, θα θέσουμε 2 νέες κενές καταστάσεις, μία στην αρχή του αυτομάτου και μία στην αποδεκτή κατάσταση για να διευκολύνουμε την κατάσταση.
  Έτσι έχουμε το αυτόματο:

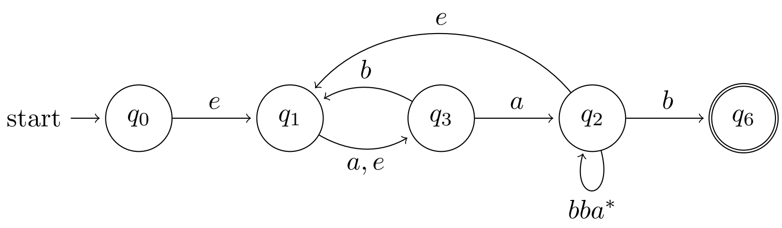


Η διαδικασία κατασκευής της κανονικής έκφρασης με διαδοχική απαλοιφή των q_5, q_4, q_3, q_2, q_1 φαίνεται παρακάτω:

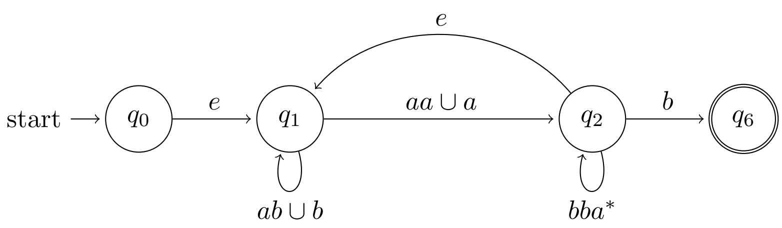
q_5 :



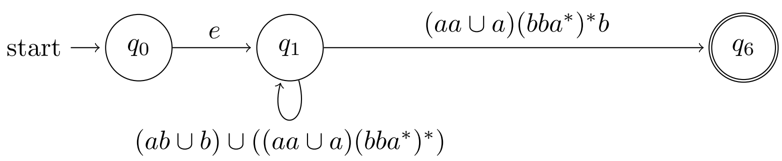
q_4 :



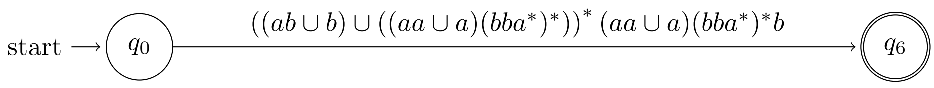
q_3 :



q_2 :



q_1 :



Η ζητούμενη κανονική έκφραση είναι η:

$$\big((ab \cup b) \cup ((aa \cup a)(bba^*)^*)\big)^*(aa \cup a)(bba^*)^*b$$

Κανονικές γλώσσες

Αποφανθείτε αν ιο παρακάτω ισχυρισμοί είναι σωστοί ή λανθασμένοί και αιτιολογήστε:

- *Κάθε πεπερασμένη γλώσσα αναγνωρίζεται από κάποιο μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο.*

  Απάντηση:
  Αρχικά από μια πεπερασμένη γλώσσα μπορεί να παραγεί πεπερασμένος αριθμός συμβολοσειρών (χρήση της ένωσης $\cup$) πράγμα που συμαίνει ότι η γλώσσα μας είναι κανονική.
  Σύμφωνα με το θεώρημα Myhill-Nerode υπάρχει ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που δέχεται μια κανονική γλώσσα L.
  Επίσεις ισχύει ότι για κάθε μή ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο υπάρχει ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτομάτο πράγμα που συμαίνει ότι ισχύει και το αντίστρωφο.

  Άρα ο παραπάνω ισχυρισμός είναι **ορθός**.

- *Σε κάθε πρότυπο αυτόματο M, οι σχέσεις $\sim_M$ και $\approx_{L(M)}$ έχουν το ίδιο πλήθος κλάσεων ισοδυναμίας.*

  Απάντηση:
  Βάση του θεωρήματος Myhill-Nerode ισχύει |κλάσεις ισοδυναμίας $\approx_{L(M)}$ | $\leq$ |κλάσεις ισοδυναμίας $\sim_M$ |.
  Για πρότυπα αυτόματα[1], όπως και στην περίπτωσή μας, ισχύει η ισότητα.

  Άρα ο παραπάνω ισχυρισμός είναι **ορθός**.

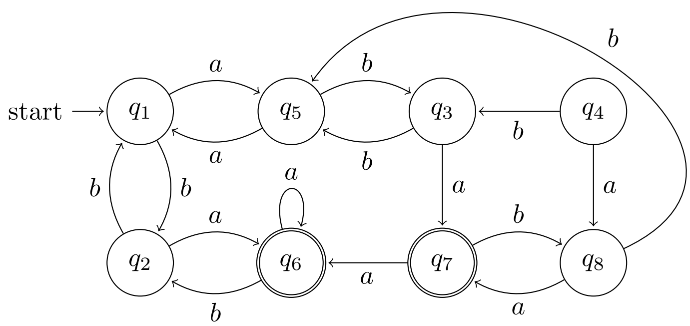
- *Υπάρχουν κανονικές γλώσσες που περιέχουν μη μετρήσιμο πλήθος συμβολοσειρών.*

  Απάντηση:
  Κάθε γλώσσα (κανονική ή μη) είναι υποσύνολο του Σ^* το οποίο είναι μετρήσιμα άπειρο σύνολο.

  Άρα ο παραπάνω ισχυρισμός είναι **λανθασμένος**.

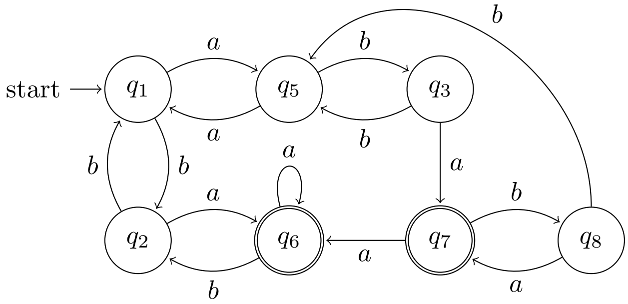
Ελαχιστοποίηση καταστάσεων

Έστω το παρακάτω ντετερμινιστικό αυτόματο M:



[1] Τα πεπερασμένα αυτόματα τα οποία έχουν τις ελάχιστες δυνατές καταστάσεις.

Παρατηρούμε πως η κατάσταση q_4 είναι απρόσητη κατάσταση και μπορεί να παραληφθεί. Επομένος έχουμε το εξής αυτόματο:



- Κατασκευάστε αναλυτικά το ισοδύναμο πρότυπο αυτόματο M'.
  Επαναληπτικά βρίσκουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\equiv_\kappa$ για $\kappa = 0, 1, 2, ...$ έως ότου συγκλίνουν.

$\equiv_0$: $\{q_6, q_7\}$ $\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_8\}$

$$q_1 \xrightarrow{a} q_5,\ q_1 \xrightarrow{b} q_2 \ (1)$$
$$q_2 \xrightarrow{a} q_6,\ q_2 \xrightarrow{b} q_1 \ (2)$$
$$q_3 \xrightarrow{a} q_7,\ q_3 \xrightarrow{b} q_5 \ (3)$$
$$q_5 \xrightarrow{a} q_1,\ q_5 \xrightarrow{b} q_3 \ (4)$$
$$q_8 \xrightarrow{a} q_7,\ q_8 \xrightarrow{b} q_5 \ (5)$$
$$q_6 \xrightarrow{a} q_6,\ q_6 \xrightarrow{b} q_2 \ (6)$$
$$q_7 \xrightarrow{a} q_6,\ q_7 \xrightarrow{b} q_8 \ (7)$$

Άρα μπορούμε να πούμε ότι από $\{2, 3, 5\}$ οι κατάστασεις $\{q_2, q_3, q_8\}$ θα είναι μαζί και από $\{1, 4\}$ θα είναι μαζί οι κατάστασεις $\{q_1, q_5\}$. Από $\{6, 7\}$ παρατειρούμε πως οι $\{q_6, q_7\}$ θα είναι και αυτές όμοια μαζί.

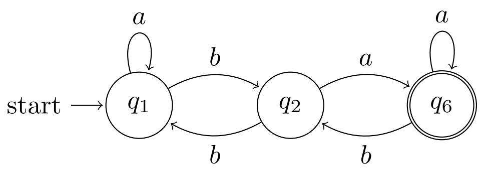
Άρα θα έχουμε την $\equiv_1$: $\{q_2, q_3, q_8\}$ $\{q_6, q_7\}$ $\{q_1, q_5\}$.

$\equiv_1$: $\{q_2, q_3, q_8\}$ $\{q_1, q_5\}$ $\{q_6, q_7\}$
Όμοια με πρίν μπορούμε να δούμε τις νέες καταστάσεις. Τα $\{q_2, q_3, q_8\}$ θα παραμείνουν ως έχει μιάς και οι καταστάσεις που καταλήγουν είναι κοινές. Το ζεύγος $\{q_1, q_5\}$ δεν θα μεταβληθούν μιας και αυτά καταλήγουν σε κοινές καταστάσεις.
Τέλος και τα $\{q_6, q_7\}$ δεν θα σπάσουν για τους ίδιους λόγους.

Άρα θα έχουμε $\equiv_1$=$\equiv_2$: $\{q_2, q_3, q_8\}$ $\{q_6, q_7\}$ $\{q_1, q_5\}$ η οποία θα είναι και η οριστική.

$\equiv_2$: $\{q_2, q_3, q_8\}$ $\{q_1, q_5\}$ $\{q_6, q_7\}$

Επομένος το πρότυπο αυτόματο θα είναι το εξής (οι καταστάσεις είναι η μικρότερες καταστάσεις από τις κοινές):



- Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας έχει κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$\sim_M$:

Απάντηση:
Θα έχει 7 κλάσεις ισοδυναμίας, δηλαδή ώσες και οι κατασάσεις του M.

$\sim_{M'}$:

Απάντηση:
θα έχει 3 κλάσεις εισοδυναμίας, όμοια, μία για κάθε κατάσταση.

$\approx_{L(M)}$:

Απάντηση:
Θα έχει όσες κλάσεις έχει και το πρότυπο $\sim_{M'}$, δηλαδή 3.

$\approx_{L(M')}$:

Απάντηση:
Το M' είναι πρότυπο άρα δεν μπορέι να απλοποιηθεί άλλο.Για να υπολγίσουμε τον αριθμό των κλάσεων της $\approx_{L(M')}$ θα πρέπει να απλοποιηθεί το πρότυπο, πράγμα το οπόιο δεν γίνεται περαιτέρω. Άρα θα έχει όσες κλάσεις όσες και το πρότυπο, δηλαδή 3 κλάσεις ισοδυναμίας.

- Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\approx_{L(M)}$ συναρτήσει των κλάσεων της σχέσης $\sim_M$.

Απάντηση:
Γνωρίζουμε πως $\approx_{L(M)}=\sim_{M'}$ με $\sim_{M'}$ να είμαι εκλέπτυνση της $\sim_M$.Άρα η $\approx_{L(M)}$ θα έχει 3 κλάσεις ισοδυναμίας ενώ η $\sim_M$ όσες και καταστάσεις της, δηλαδή 7 κλάσεις.
Άρα θά έχουμε:

$$E_{q_1}^{L(M)} = E_{q_1}^{M'} = E_{q_1}^{M} \cup E_{q_5}^{M}$$
$$E_{q_2}^{L(M)} = E_{q_2}^{M'} = E_{q_2}^{M} \cup E_{q_3}^{M} \cup E_{q_8}^{M}$$
$$E_{q_6}^{L(M)} = E_{q_6}^{M'} = E_{q_6}^{M} \cup E_{q_7}^{M}$$