Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

1^{η} Εργαστηριακή Αναφορά

Εργαστηριακή Ομάδα *0*

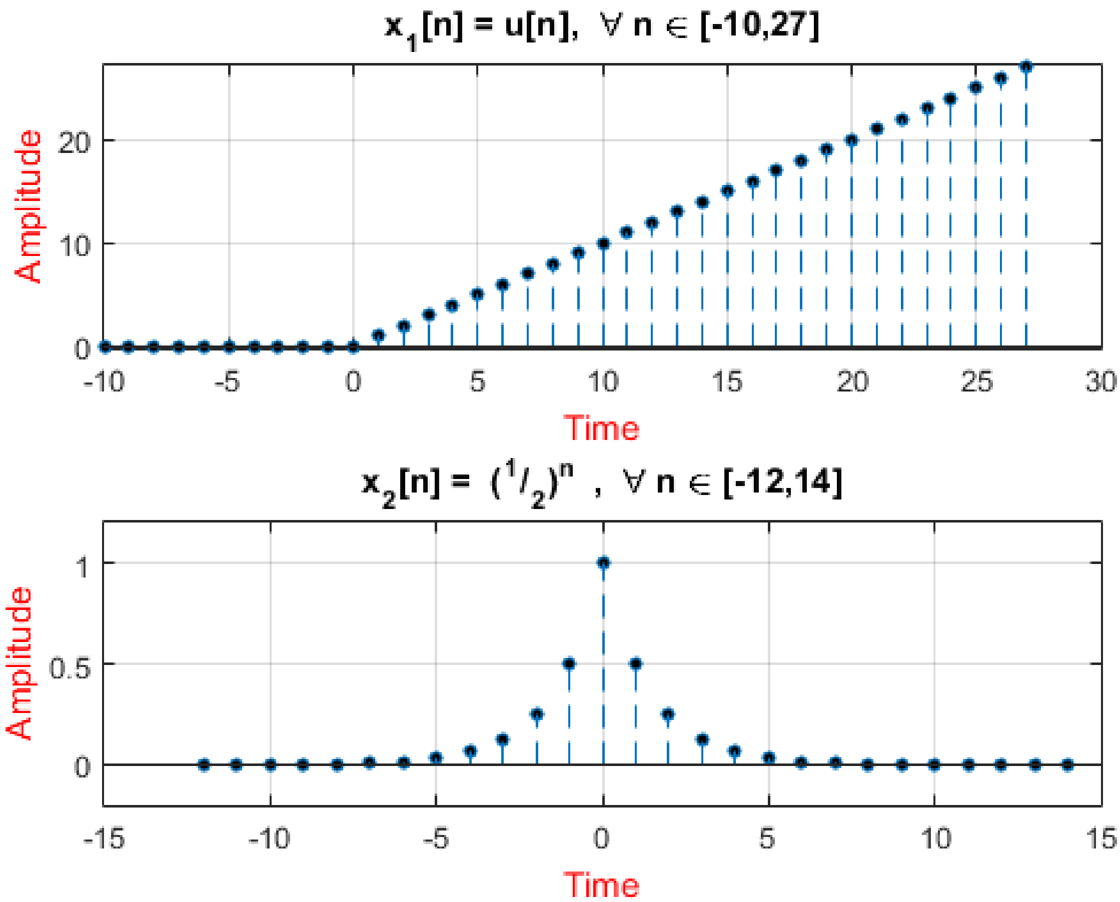
Γιουμερτάκης Απόστολος, 2017030142
Κατσούπης Ευάγγελος, 2017030077

1^{η} Άσκηση

A) Αρχικά υλοποιήθηκαν οι συναρτήσεις αναφοράς:

$$u[n] = \begin{cases} n & \forall\ n \in [0, 27] \\ 0 & \forall\ n \in [-10, 0] \end{cases} \qquad\qquad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \forall\ \ n \in [-12, 14]$$

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω σημάτων:



Σχήμα 1: Σήματα εισόδου

Για να υπολογιστεί η συνέλιξη των δύο σημάτων, έστω $y[n]$, χωρίς την χρήση έτοιμης συνάρτησης, δημιουργήθηκε μια νέα συνάρτηση, my_conv, η οποία:

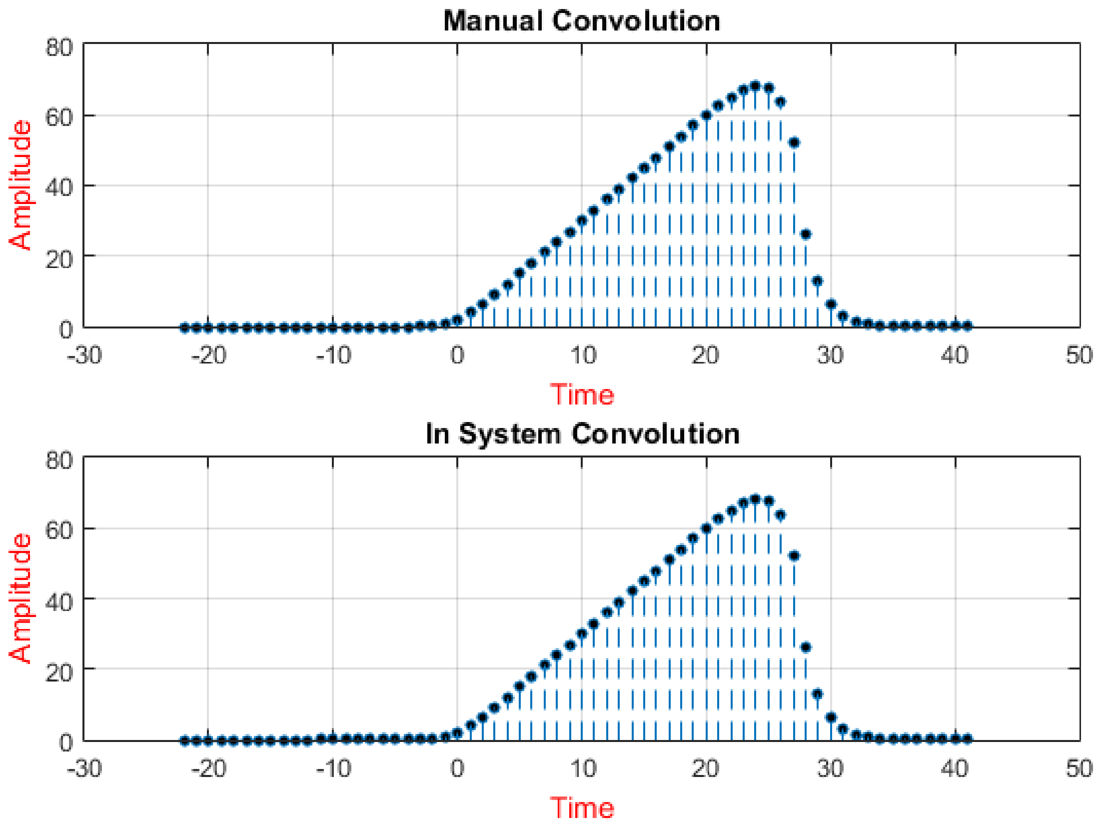
- Δέχεται σαν ορίσματα τις τιμές των σημάτων εισόδου (u, h) και τις τιμές των χρόνων αυτών (t_u,t_h).
- Υπολογίζει την διάρκεια της συνέλιξης, προστέθοντας τα όρια των χρόνων των σημάτων εισόδου (conv_time $= t_u(first) + t_h(first)$ to $t_u(last) + t_h(last)$)
- Υπολογίζει την συνέλιξη αυτών, έστω $y(t)$.
- Τέλος, επιστρέφει τις τιμές της συνέλιξης και την χρονική διάρκεια αυτής.

Για τον υπολογισμό της συνέλιξης, αρχικά γίνεται zero padding σε κάθε σήμα εισόδου, ώστε να αποκτήσουν το πλάτος της συνέλιξης, χωρίς να χάσουν την πληροφορία τους.
Έπειτα πραγματοποιούνται τα βήματα της συνέλιξης:

1. Αντιστροφή του σήματος, έστω το $h[n]$ (αντιστροφή των τιμών αυτού αλλά και του άξονα του χρόνου του).
2. Χρονική μετατόπιση του πλέων $h[-n]$ για κάθε χρονική τιμή της συνέλιξης (πραγματοποιείται με την χρήση της συνάρτησης circshift, η οποία μετατοπίζει κυκλικά τις τιμές του σήματος)
3. Πολλαπλασιασμός των τιμών του αντεστραμένου και μετατοπισμένου σήματος με τις τιμές του σήματος εισόδου (για κάθε τιμή της μετατόπισης).
4. Άθροισμα του παραπάνω πολλαπλασιαμού και αποθήκευση της τιμής αυτής (αποτέλεσμα συνέλιξης για κάθε τιμή).

Αξίζει να σημειωθεί πώς τα βήματα 2, 3 και 4 πραγματοποιούνται παράλληλα και για κάθε μετατοπισμένη τιμή.

Στην συνέχεια, απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της συνέλιξης, όπου υπολογίστηκε με την χρήση της my_conv(), αλλά και αυτή με την χρήση της έτοιμης συνάρτησης conv().



Σχήμα 2: Συνελίξεις

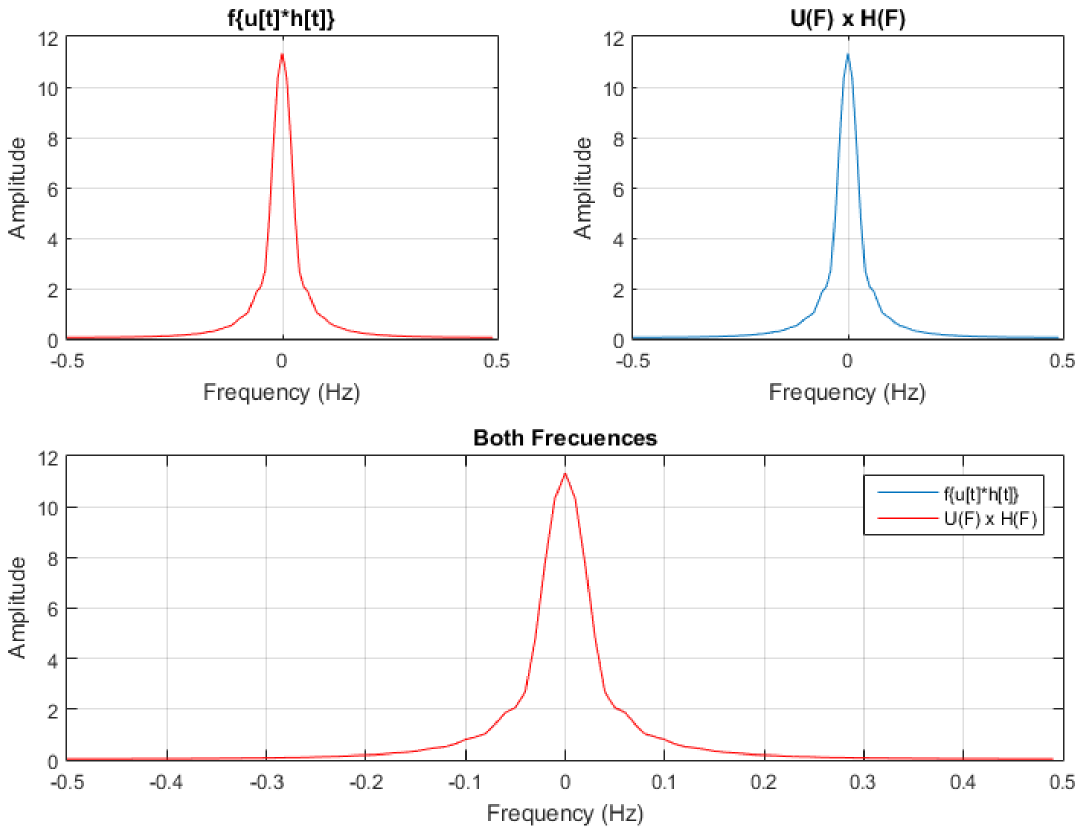
Παρατηρείται, πως οι διαφορές των δύο συνελίξεων είναι αμελητέες.

B) Για την γραφική απόδειξη της ιδιότητας

$$h[n] * u[n] = H(f) \cdot U(f)$$

υπολογίστηκε ο μετασχηματισμός Fourier του καθε σήματος εισόδου αλλά και της συνέλιξης αυτών (έγινε χρήση των συναρτήσεων fftshift() και fft()).

Για την απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της συνέλιξης των σημάτων ($fu[t] * h[t]$) αλλά και του πολλαπλασιασμού των μετασχηματισμών τους ($U(f) \cdot H(f)$).



Σχήμα 3: Γραφική απόδειξη ιδιότητας

Τέλος έγινε ο υπολογισμός του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των τιμών των δυο σημάτων (MSE), όπου με αποτέλεσμα ~ 0.0006, παρατηρείται πως η παραπάνω ιδιότητα ισχύει (η διαφορά αυτή οφείλεται στις τιμές του σήματος εισόδου).

2^{η} Άσκηση

Το σήμα αναφοράς:

$$x(t) = 5cos(24\pi t) - 2sin(1.5\pi t), \quad \forall \;\; t \in (0, 0.5)$$

Παρατηρείτε πώς η $x(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T_0 = 4/3$. Όμως για $t \in (0, 0.5)$ το σήμα χάνει την περιοδικότητά του. Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ ορίζεται ως:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi Ft}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 5cos(24\pi t)e^{-j2\pi Ft}dt}_{\text{A}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 2sin(1.5\pi t)e^{-j2\pi Ft}dt}_{\text{B}}$$

Θα λυθούν τα A και B ξεχωριστά:

- $$A \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 5cos(2\pi 12t)e^{-j2\pi Ft}dt = 5 \cdot \mathcal{F}\big\{cos(2\pi 12t)\big\} = \frac{5}{2} \cdot \big(\delta(F-12) + \delta(F+12)\big)$$

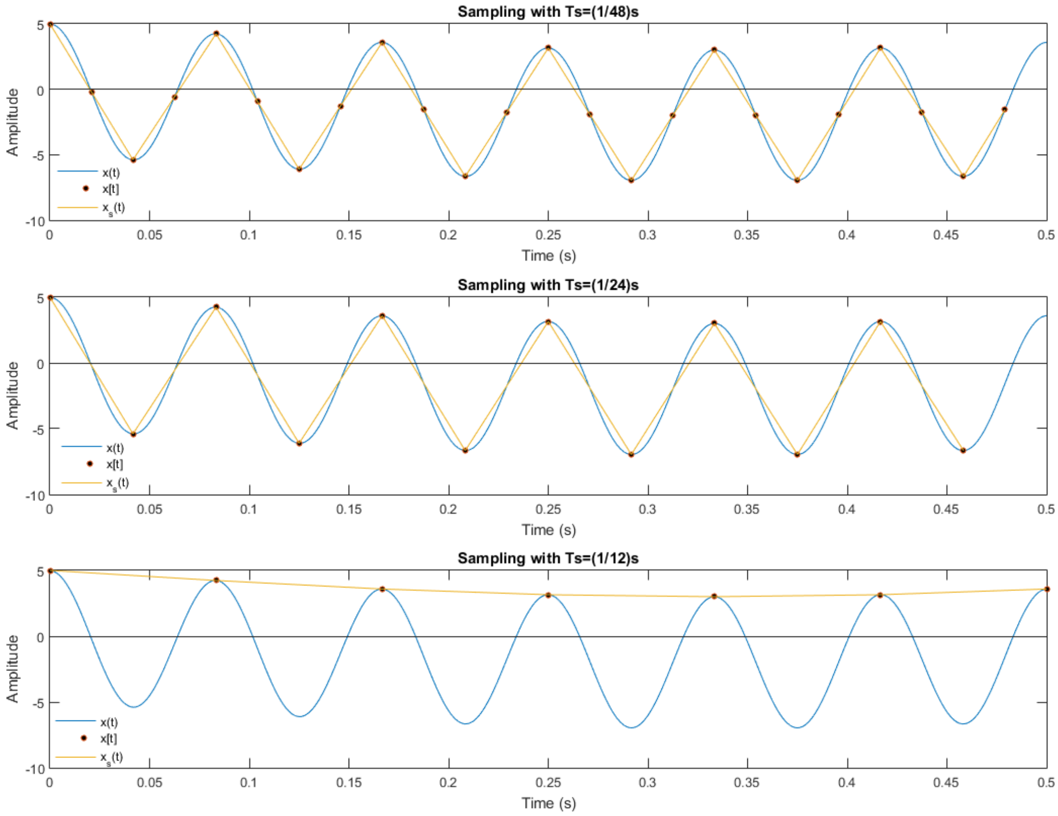
- $$B \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 2sin(2\pi \frac{3}{4}t)e^{-j2\pi Ft}dt = 2 \cdot \mathcal{F}\big\{sin(2\pi \frac{3}{4}t)\big\} = \frac{2}{2j}\delta(F-\frac{3}{4}) - \frac{2}{2j}\delta(F+\frac{3}{4}) = j\delta(F+\frac{3}{4}) - j\delta(F-\frac{3}{4})$$

Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$:

$$X(F) = \frac{5}{2} \cdot \delta(F-12) + \frac{5}{2} \cdot \delta(F+12) - j\delta(F+\frac{3}{4}) + j\delta(F-\frac{3}{4})$$

Η ελάχιστη συχνότητα Nyquist, όπου ορίζεται ως $f_{\text{Nyquist}} = 2 \cdot f_{\text{max}}$, ισούται με $f_{\text{Nyquist}} = 24\text{Hz}$

Σε συνέχεια προχωράμε στην δειγματοληψία του παραπάνω σήματος με τις δοθείσες περιόδους δειγματοληψίας:



Σχήμα 4: Δειγματοληψία

Παρατηρείται πως, για τις περιόδους $T_s = \frac{1}{48}$ και $T_s = \frac{1}{24}$, όπου η συχνότητα δειγματοληψίας είναι μεγαλύτερη στην μία περίπτωση και ίση στην άλλη, με την συχνότητα Nyquist, τα σημεία δειγματοληψίας είναι αρκετά, ώστε να αναπαραστήσουν το σήμα. Για περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{12}$, που είναι μικρότερη από την περίοδο Nyquist, τα σημεία δειγματοληψίας δεν αρκούν ώστε να αναπαραστήσουν το σήμα και παρατηρείται το φαινόμενο allizing.

Τέλος, για περίοδο δειγματοληψίας $T = \frac{1}{\#\text{ομάδας}}$, δεν μπορούσε να απεικονιστεί η δειγματοληψία μιας και ο αριθμός ομάδας είναι 0. Σε κάθε περίπτωση όμως, αν $\#\text{ομάδας} \geq 24$Hz τα σημεία δειγματοληψίας είναι αρκετά για την αναπαράσταση τυ σήματος. Όσο μεγαλύτερος ο αριθμός, τόσο ποίο κοντά στο αρχικό σήμα θα είναι το δειγματοληπτημένο.

3^η Άσκηση

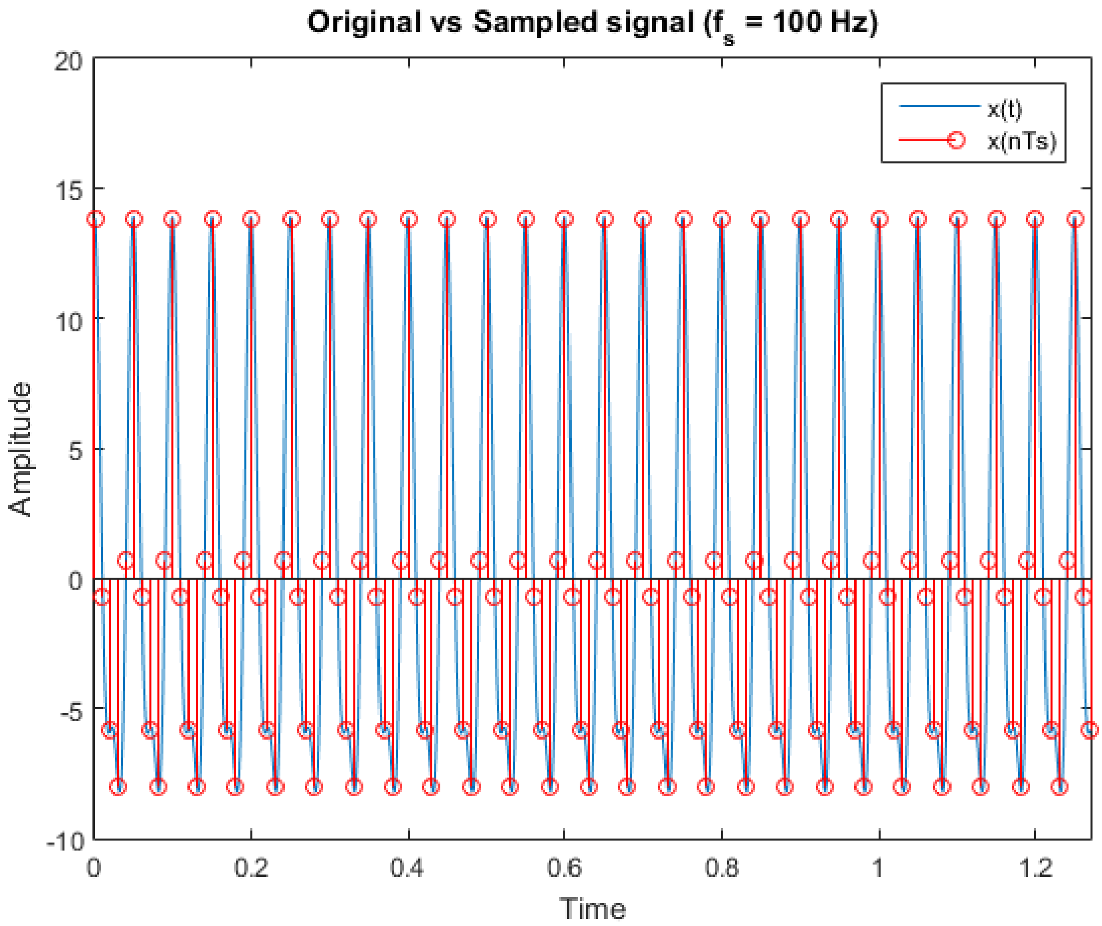
A) Για το σήμα

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 20t) - 4 \cdot \sin(2\pi \cdot 40t + 5)$$

Παρατηρείται πώς η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι τα 40 Hz, οπότε, για να μην εμφανιστεί aliasing, πρέπει να επιλεχθεί συχνότητα δύο φορές μεγαλύτερη, βάσει θεωρήματος Nyquist. Επιλέγεται η συχνότητα των 100 Hz καθώς έτσι λαμβάνουμε περισσότερη πληροφορία σε σύγκριση με την συχνότητα Νιχυιστ (80HZ).

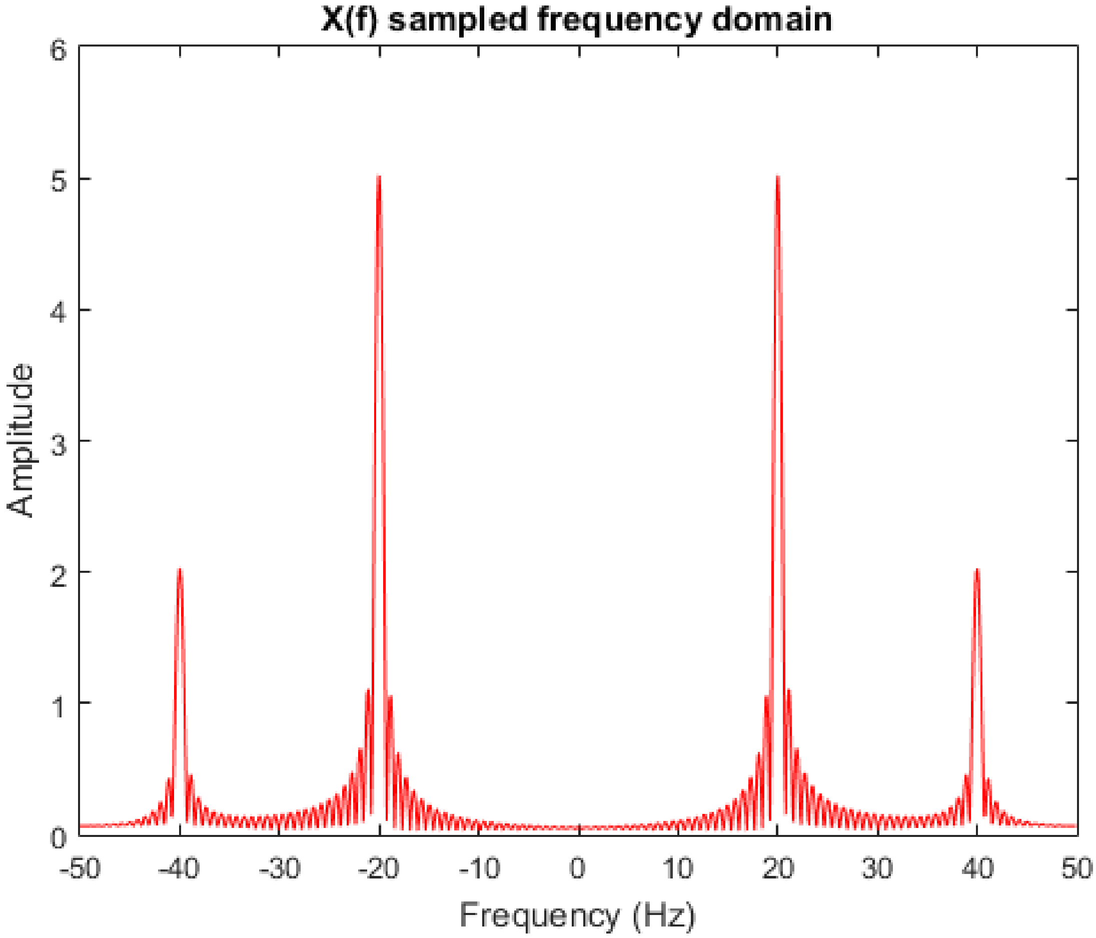
Στην συνέχεια, με το όριο των $N = 128$ δειγμάτων και με βάση την συχνότητα δειγματοληψίας προκύπτει η διάρκεια του δειγματοληπτημένου σήματος ίση με $t = \frac{N}{F_s} = \frac{128}{100} = 1,28s$. Για την γραφική απεικόνιση της παραπάνω διαδικασίας, αξίζει να σημειωθεί πως για δειγματοληψία με μεγαλύτερη διάρκεια από 1,28 s χωρίς το φαινόμενο της επικάλυψης, θα χρειαστεί μεγαλύτερος αριθμός δειγμάτων.

Επιπλέον, με μεγαλύτερη συχνότητα δειγματοληψίας, με τον ίδιο αριθμό δειγμάτων, η διάρκεια του σήματος θα μειώνεται.



Σχήμα 5: Δειγματοληψία

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Fourier στο δειγματοληπτημένο σήμα, προκύπτει η παρακάτω γραφική:



Σχήμα 6: Δειγματοληψία

B) Για το σήμα: $x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \phi)$ για συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8$ KHz και για $\phi = 0$ δημιουργείτε το διακριτό σήμα:

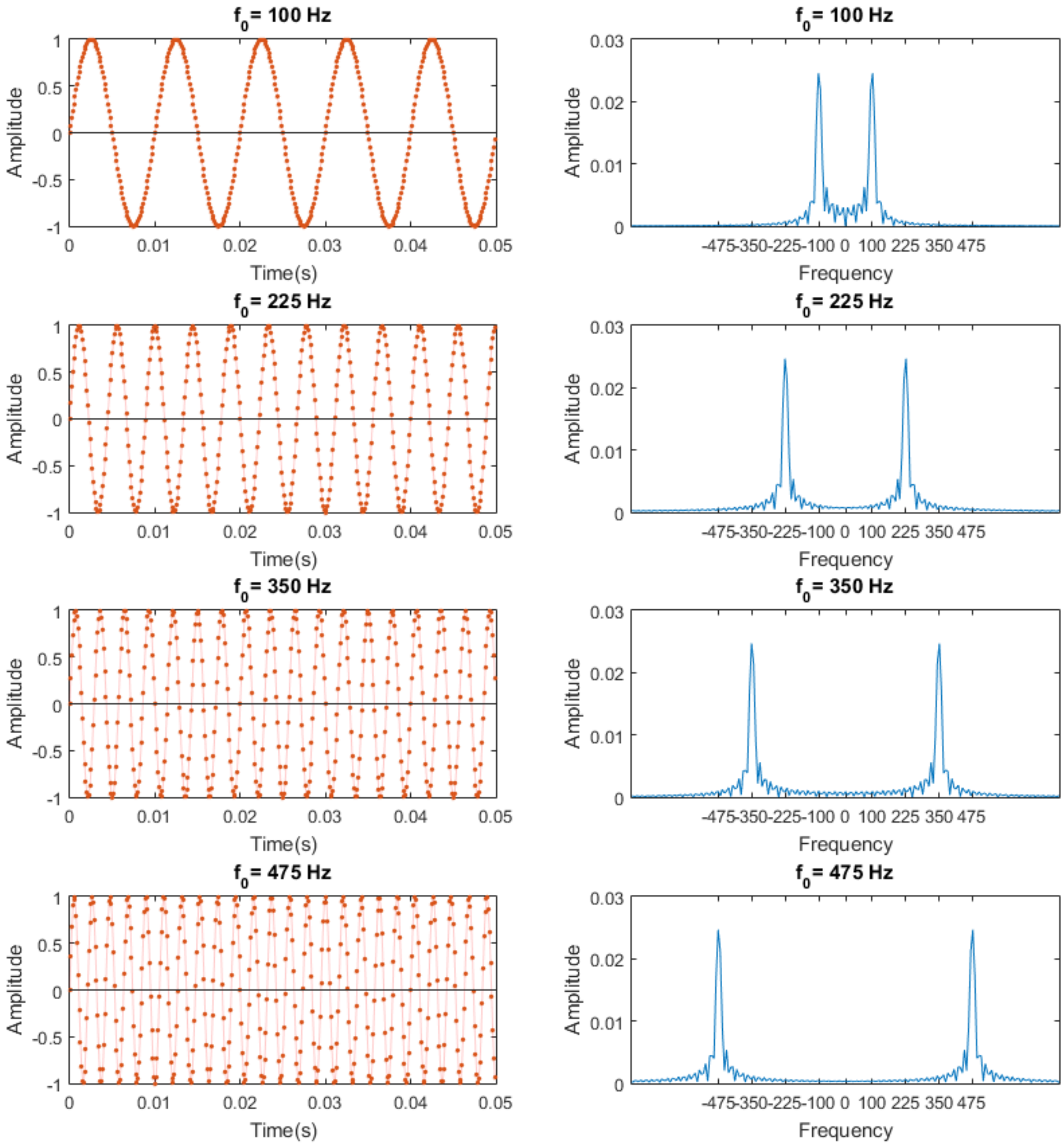
$$x[n] = \sin\left(2\pi\left(\frac{f_0}{f_s}\right)n\right)$$

.

Το παράπανω ισχύει μιας και από το συνεχές σήμα $x(t)$ δημιουργείτε το δειγματοληπτημένο σήμα $x_a(nT_s) = x_a(\frac{n}{f_s}) = \sin(2\pi f_0 \left(\frac{n}{f_s}\right)) = x[n]$

Αξίζει να σημειωθεί πώς η συχνότητα δειγματοληψίας είναι αρκετά μεγαλύτερη από την συχνότητα των 475 Hz οπότε δεν θα εμφανιστεί το φαινόμενο allizing σε καμία περίπτωση.

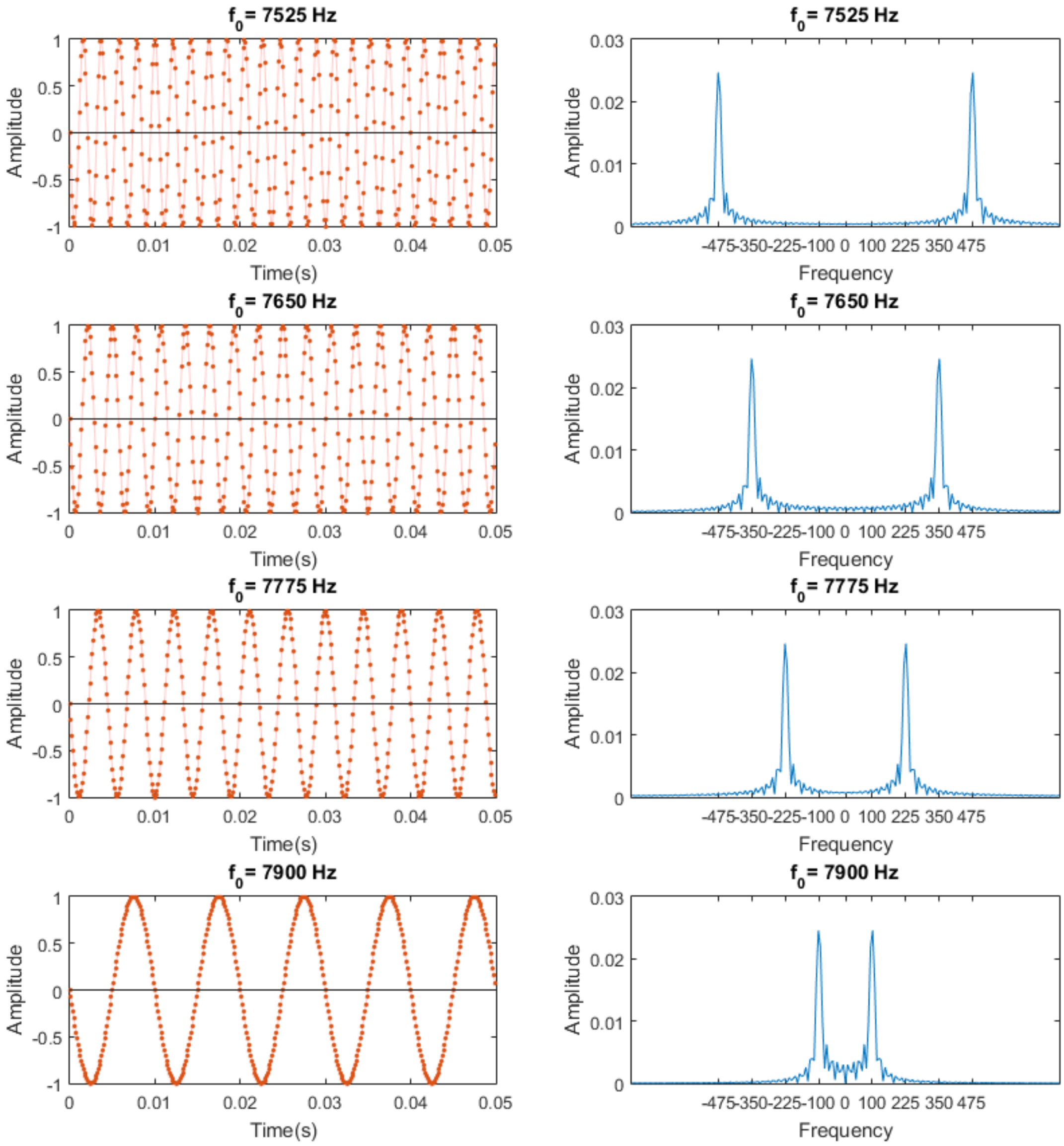
Για $f_0 \in [100, 225, 350, 475]$ Hz αναπαριστώνται γραφικά τα δειγματοληπτημένα σήματα και οι αντίστοιχες φασματικές παραστάσεις τους, για κάθε f_0.



Σχήμα 7: $x[n]$ και Φασματικές παραστάσεις $\forall f_0$

Παρατηρείται πως σε αυτήν την περίπτωση δεν εμφανίζεται το φαινόμενο της επικάλυψης (αλιασινγ) καθώς οι συχνότητες (spikes στα $-f_0$ και $+f_0$) που απεικονίζονται στο φάσμα των δειγματοληπτημένων σημάτων, συμπίπτουν με την συχνότητα f_0 των αρχικών σημάτων.

Αντίθετα στην περίπτωση όπου $f_0 \in [7525, 7650, 7775, 7900]$ $Hz \simeq f_s$ παρατηρείται τεράστια η επίδραση της συχνότητας δειγματοληψίας στο δειγματοληπτημένο σήμα. Γραφικά:



Σχήμα 8: $x[n]$ και Φασματικές παραστάσεις $\forall f_0$

Παρατηρούνται, το φαινόμενο της επικάλυψης, μιας και το δειγματοληπτημένο σήμα,είναι ένα συνημίτονο με συχνότητα $(f_s - f_0) \ll f_0$.

Τέλος με την εναλλαγή του ϕ δεν παρατηρείται κάποια μετατόπιση στις συχνότητες τους σήματος, μια και η διαφορά φάσης επηρεάζει το σήμα, εμφανά, στον χρόνο. Θα μπορούσε να σημειωθεί μια πολύ μικρή διαφορά στο πλάτος των συχνοτήτων.