Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Σετ Ασκήσεων 1 – Αθροίσματα, Ασυμπτωτικά, Αναδρομές, Διαίρει & Κυρίευε

Παράδοση: Παρασκευη 3 Δεκεμβρίου 2021, έως 18:00

Απαντήστε όλες τις παρακάτω ερωτήσεις σε χαρτί. Μπορείτε να τις δακτυλογραφήσετε αν θέλετε, αλλά δεν είναι απαραίτητο και μπορεί να ταλαιπωρηθείτε. Οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι ΚΑΘΑΡΟΓΡΑΜΜΕΝΕΣ, διότι θα αφαιρεθούν βαθμοί για ασαφείς και ακατάληπτες απαντήσεις. Μπορείτε να θεωρήσετε ως δεδομένα οποιονδήποτε αλγόριθμο και αποτέλεσμα έχετε διδαχθεί στο μάθημα. Θα πρέπει να παραδώσετε τις απαντήσεις σας στους βοηθούς του μαθήματος.

ΠΡΟΣΟΧΗ. Στην παράδοση της άσκησης, οι βοηθοί θα σας κάνουν κάποιες ερωτήσεις ώστε να διαπιστώσουν κατά πόσον έχετε πραγματικά δουλέψει την άσκηση και καταλαβαίνετε τις λύσεις που παραδίδετε. Η προφορική αυτή εξέταση θα μετρήσει για το 30% του βαθμού της άσκησης (δηλ., όποιος δεν θέλει να εξεταστεί θα βαθμολογηθεί με άριστα το 70/100). Δεδομένης της κατάστασης με την πανδημία, η εξέταση αυτή θα οργανωθεί μέσω τηλεδιάσκεψης (π.χ., zoom).

Η αντιμετώπισή φαινομένων αντιγραφής θα είναι αυστηρή.

Ασκήσεις

1. (15 ΜΟΝΑΔΕΣ) Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα.

α. $\sum_{1\le k\le n} k^2$ β. $\sum_{1\le k\le n} k^3$

γ. $\sum_{1\le k\le n} 2^{k/3}$ δ. $\sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k(k+1)}$

ε. $\sum_{1\le k\le n} k(k+1)$ στ. $\sum_{1\le k\le n} \log k$

ζ. $\sum_{1\le i\le n}\sum_{i<j\le n} (j-i)$ η. $\sum_{1\le k\le n} k\cdot k!$

θ. $\sum_{1\le k\le n}\sum_{k\le j\le n}\sum_{1\le i\le n-j} 1$ ι. $\sum_{1\le k\le n} k^2\cdot 2^k$

2. (15 ΜΟΝΑΔΕΣ) Ορίζουμε τον επανειλημένο λογάριθμο $\log^* n$ ως τον ελάχιστο ακέραιο $i \geq 0$ για τον οποίο:

$$\underbrace{\log\log\ldots\log}_{i\ \text{φορές}} n \leq 1.$$

Ποια από τις συναρτήσεις $\log(\log^* n)$ και $\log^*(\log n)$ είναι ασυμπτωτικά μεγαλύτερη; Αποδείξτε την απαντήση σας.

3. (15 ΜΟΝΑΔΕΣ) Δώστε (ασυμπτωτικές) λύσεις (με απόδειξη) για τις παρακάτω αναδρομές. Εάν χρησιμοποιήσετε δένδρο αναδρομής, ΔΕΝ είναι απαραίτητη η επαγωγική απόδειξη.

α.$T(n) = 4T(n/8) + \Omega(n^{2/3})$	β.$T(n) = T(\lfloor 3n/5 \rfloor) + \Theta(n^{1/(e-1)})$
γ.$T(n) = 8T(n/16) + O(n^{3/5})$	δ.$T(n) = 32T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n^5 \log^4 n)$
ε.$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2 \log^3 n)$	στ.$T(n) = 4T(n/2) + \Omega(n^2\sqrt{n})$
ζ.$T(n) = 2T(n/3) + T(n/5) + O(n^2)$	η.$T(n) = T(n/2) + T(n/3) + T(n/6) + \Theta(n)$
ϑ.$T(n) = T(n/3) + 3T(n/6) + \Theta(n)$	ι.$T(n) = T(n/2) + 2T(n/3) + \Theta(n)$

4. (15 ΜΟΝΑΔΕΣ) Περιγράψτε μια παραλλαγή του Δ& Κ αλγορίθμου Karatsuba για τον πολλαπλασιασμό δύο n-bit ακεραίων η οποία στηρίζεται στην διάσπαση των ακεραίων σε τρία ίσα blocks ψηφίων. ΕΞΗΓΗΣΤΕ την λογική κάθε βήματος της Δ&Κ λύσης που προτείνετε. Ο αλγόριθμος σας θα πρέπει να έχει ασυμπτωτική πολυπλοκότητα καλύτερη από την $O(n^2)$ πολυπλοκότητα του απλοϊκού πολλαπλασιασμού ακεραίων. Αποδείξτε το παραπάνω αναλύοντας την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

5. (20 ΜΟΝΑΔΕΣ) Το πρόβλημα 'εύρεσης μέγιστης υπακολούθίας' ορίζεται ως εξής: Δίνεται ένα array A ακεραίων αριθμών (θετικών ή αρνητικών) μήκους n, και ζητείται να βρείτε το sub-array με το μέγιστο άθροισμα: δηλ. δύο αριθμούςi, j, με $0 \leq i \leq j < n$, τέτοιους ώστε να μεγιστοποιείται το άθροισμα:

$$A[i:j] = \sum_{k=i}^{j} A[k]$$

Δώστε ένα Δ&Κ αλγόριθμο για το πρόβλημα με πολυπλοκότητα $\Theta(n \log n)$.

6. (20 ΜΟΝΑΔΕΣ) Τα k-οστά ποσοστημόρια (percentiles) μιας ακολουθίας $< x_i >, 0 \leq i < n$ είναι τα $k-1$ στοιχεία της που χωρίζουν την ταξινομημένη ακολουθία σε k περίπου ίσου μήκους τμήματα (± 1 στοιχείο). Για παράδειγμα, τα 3-percentiles της παρακάτω ταξινομημένης ακολουθίας φαίνονται μέσα σε κουτιά:

$$2\ 5\ \boxed{7}\ 10\ 17\ \boxed{21}\ 34\ 48$$

   (α′) (5 ΜΟΝΑΔΕΣ) Δώστε ένα κλειστό τύπο που να υπολογίζει τη θέση του i-οστού k-percentile σε μια ταξινομημένη ακολουθία μήκους n (για $1 \leq i < k$).

   (β′) (15 ΜΟΝΑΔΕΣ) Δώστε έναν αλγόριθμο με μέση πολυπλοκότητα χρόνου $O(n \log k)$ που να υπολογίζει τα k-οστά percentiles μιας αταξινόμητης ακολουθίας εισόδου μήκους n.