Θεωρία Υπολογισμού
Assignment 3

Κατσούπης Ευάγγελος
2017030077

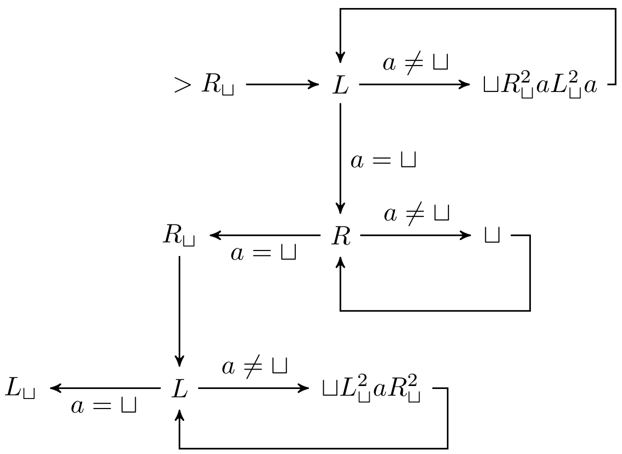
Λύσεις ασκήσεων

Μηχανές Turing

Σχεδιάστε γραφικά (με βασικές μηχανές εγγραφής, μετακίνησης και ανεύρεσης) από μια πρότυπη μηχανή Turing (μία ταινία, μία κεφαλή) που μετασχηματίζει τις παρακάτω εισόδους:

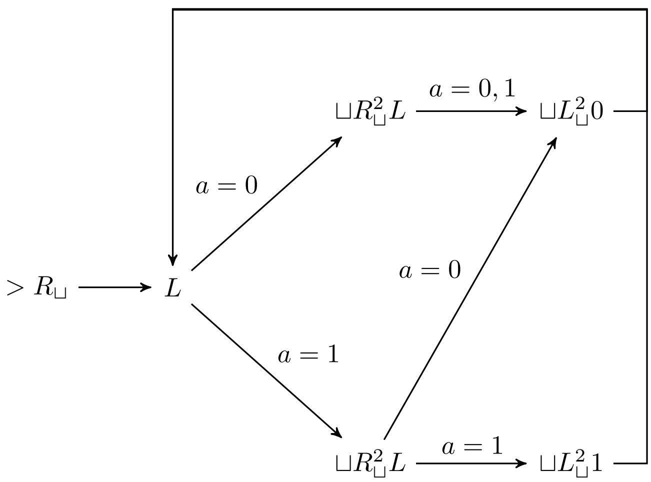
- $\triangleright\underline{\sqcup}w\sqcup$ σε $\triangleright\underline{\sqcup}w^{\mathbf{R}}\sqcup$ όπου $w \in \{a,b\}^*$

  Απάντηση:



- $\triangleright\underline{\sqcup}x\sqcup y\sqcup$ σε $\triangleright\underline{\sqcup}z\sqcup$ όπου $x,y,z \in \{0,1\}^*, |x| = |y| = |z|$ και $z = x\&y$.

  Απάντηση:



Αναδρομικές και αναδρομικά απαριθμήσιμες γλώσσες

- Αποφανθείτε αν ο παρακάτω ισχυρισμός είναι σωστός ή λανθασμένός και αιτιολογήστε:

  Το συμπλήρωμα μιας αναδρομικής γλώσσας είναι πάντα λεξικογραφικά Turing-απαριθμήσιμη γλώσσα.

  Απάντηση:
  Γνωρίζουμε πώς λόγο κλειστότητας ως πρός την συμπλήρωση, το συμπλήρωμα μιας αναδρομική γλώσσας (L) μπορεί να χαρακτηριστεί αναδρομική γλώσσα. Τέλος, μια γλώσσα είναι λεξικογραφικά Turing-απαριθμήσιμη αν και μόνο αν είναι αναδρομική.

  Άρα ο παραπάνω ισχυρισμός είναι **ορθός**.

- Για κάθε μηχανή ημιαπόφασης Turing μπορεί να κατασκευασθεί ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο στοίβας.

  Απάντηση:
  Αρχικά, γνωρίζουμε πως κάθε μηχανή ημιαπόφασης Turing δέν έχει τερματική κατάσταση σε αντίθεση με τα ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας, τα οπόιο έχουν τερματική κατάσταση και τερματίζουν με το πέρας της ανάγνωσης της συμβολοσειράς εισόδου.

  Άρα ο παραπάνω ισχυρισμός είναι **λανθασμένος**.

Γραμματικές χωρίς περιορισμούς

Κατασκευάστε γραμματική (χωρίς περιορισμούς) για τη γλώσσα $L = \{www : w \in \{a, c\}^*\}$. Εξηγείστε συνοπτικά τη λογική της και δώστε όλα τα βήματα παραγωγής της συμβολοσειράς $ccaccacca \in L$.

Απάντηση:
Η ζυτούμενη γραμματική είναι η $G = \{V, \Sigma, R, S\}$ όπου:

$$V = \{S, S', T, A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3, a, c\}$$
$$\Sigma = \{a, c\}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{lll} S \to S' & S' \to A_1A_2A_3S' & S' \to C_1C_2C_3S' \\ A_3A_1 \to A_1A_3 & A_3A_2 \to A_2A_3 & A_3C_1 \to C_1A_3 \\ A_3C_2 \to C_2A_3 & C_3A_1 \to A_1C_3 & C_3A_2 \to A_2C_3 \\ C_3C_1 \to C_1C_3 & C_3C_2 \to C_2C_3 & A_2A_1 \to A_1A_2 \\ A_2C_1 \to C_1A_2 & C_2A_1 \to A_1C_2 & C_2C_1 \to C_1C_2 \\ S' \to T & T \to e & \\ A_3T \to Ta & A_2T \to Ta & A_1T \to Ta \\ C_3T \to Tc & C_2T \to Tc & C_1T \to Tc \end{array} \right\}$$

Η γραμματική αυτή με τους 3 πρώτους κανόνες εισάγει τα αρχικά συμβολα A_{1-3} και C_{1-3} καθώς η γλώσσα αποτελείτε από 3 αντίτυπα της ίδιας συμβολοσειράς. Με βάση το παραπάνω και με την χρήση των επόμενων 12 κανόνων, ταξινομείτε η συμβολοσειρά σε ομάδες με ίδιο αριθμό (πχ $A_1C_1A_2C_2A_3C_3S'$). Αυτό που καταφέραμε είναι, αρχικά να ορίσουμε ότι η L θα αποτελείτε από λέξεις ίδιου μήκους και στην συνέχεια, ίδιας ακολουθίας (sort σύμφωνα με το δείκτη). Έχοντας την συμβολοσειρά, η οποία έχει ταξινομημένα τα σύμβολα για κάθε λέξη (w) αρκέι να γίνει η μετάφραση αυτών.
Το παραπάνω πραγματοποιείτε με την χρήση του κανόνα $S' \to T$ όπου εισάγει στο τέλος, πλέον, της συμβολοσειράς το σύμβολο με το οποίο θα γίνει η μετάφραση του κάθε συμβόλου. Οι τελευταίοι 9 κανόνες υποδηλώνουν τον τρόπο με τον οποίο θα μεταφράζονται τα αρχικά σύμβολα στα επιθυμητά καθώς, το T θα μετακινείτε σειριακά (δεξειά -ˋ αριστερά) στην συμβολοσειρά.
Τέλος με την χρήση του κανόνα $T \to e$ αντικαθίσταται το T με το e για να πάρουμε την επιθυμητή συμβολοσειρά.

Για την συμβολοσειρά $ccaccacca \in L$ γίνονται τα εξής βήματα:

$$S \Rightarrow S' \Rightarrow C_1C_2C_3S' \Rightarrow C_1C_2C_3C_1C_2C_3S' \Rightarrow C_1C_2C_3C_1C_2C_3A_1A_2A_3S' \stackrel{\text{sort}}{\Rightarrow} C_1C_2\underline{C_1C_3}C_2\underline{A_1C_3}A_2A_3S'$$
$$\Rightarrow C_1C_2C_1C_3C_2A_1C_3A_2A_3S' \Rightarrow C_1\underline{C_1C_2}C_3\underline{A_1C_2}\ \underline{A_2C_3}A_3S' \Rightarrow C_1C_1C_2C_3A_1C_2A_2C_3A_3S' \Rightarrow C_1C_1A_1C_2C_2C_3A_2C_3A_3S'$$
$$\Rightarrow C_1C_1A_1C_2C_2A_2C_3C_3A_3S' \stackrel{\text{εισαγωγή μεταφραστή T}}{\Rightarrow} C_1C_1A_1C_2C_2A_2C_3C_3A_3T \stackrel{\text{μετάφραση συμβόλων}}{\Rightarrow} C_1C_1A_1C_2C_2A_2C_3C_3Ta$$
$$\Rightarrow C_1C_1A_1C_2C_2A_2C_3Tca \Rightarrow C_1C_1A_1C_2C_2A_2Tcca \Rightarrow \cdots \Rightarrow Tccaccacca \Rightarrow ccaccacca$$

Μη επιλυσιμότητα

Δείξτε ότι τα παρακάτω πρόβληματα είναι μη επιλύσιμα:

- Δεδομένης μιας μηχανής Turing M και δύο καταστάσεων p, q της M, υπάρχει υπολογισμός που οδηγεί την M από την κατάσταση p στην q;
  Απάντηση:
  Θα το αποδείξουμε με αναγωγή ένα γνωστό μη επιλύσιμο πρόβλημα που κωδικοποιείται με τη γλώσσα:

  $$L = \{'M' : \text{η μηχανή Turing M τερματίζει για κάποια είσοδο}\}$$

  Το δεδομένο πρόβλημα κωδικοποιείται με τη γλώσσα:

  $$L_a = \{'M''p''q' : \text{υπάρχει υπολογισμός της M που περιέχει μετάβαση από την p στην q}\}$$

  Έστω ότι το παρών πρόβλημα είναι επιλύσιμο, δηλαδή η γλώσσα L_a είναι αναδρομική. Τότε υπάρχει μηχανή Turing M_a η οποία αποφασίζει τη γλώσσα L_a. Μπορεί τότε να κατασκευαστεί μια μηχανή M_L η οποία αποφασίζει τη γλώσσα Λ, χρησιμοποιώντας την αναγωγή:

  $$\tau : M \to M'h_1h_2$$

  όπου M' είναι μια μηχανή ίδια με την M εκτός του ότι έχει τις επιπλέον καταστάσεις h_1, h_2 και έχει ως μοναδική κατάσταση τερματισμού την h_2. Επίσης, η συνάρτηση μετάβασης της M_0 έχει ενημερωθεί ώστε από τις καταστάσεις τερματισμού της M η M′ να μεταβαίνει στην h_1 και από την h_1 πρός την h_2. Λόγω κατασκευής, η M' τερματίζει αν και μόνο αν η M τερματίζει και μάλιστα κατά τον τερματισμό της η M′ κάνει μετάβαση από την h_1 στην h_2. Η μηχανή M_L υπολογίζει την αναδρομική απεικόνιση τ και κατόπιν τρέχει τη μηχανή Mα με είσοδο $M'h_1h_2$. Η μηχανή M_a αποδέχεται τη συμβολοσειρά $M'h_1h_2$ αν και μόνο αν υπάρχει υπολογισμός που περιέχει μετάβαση της M′ από την h_1 στην h_2, δηλαδή αν και μόνο αν η μηχανή M′ τερματίζει με κάποια είσοδο, δηλαδή αν και μόνο αν η μηχανή M τερματίζει με κάποια είσοδο, δηλαδή αν και μόνο αν η $M \in L$. Συνολικά δηλαδή, η M_L αποφασίζει τη γλώσσα L, το οποίο είναι άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι η γλώσσα L_a είναι μη αναδρομική και άρα το δεδομένο πρόβλημα μη επιλύσιμο.

- Δεδομένων δύο μηχανών Turing M_1 και M_2, είναι η τομή $L(M_1) \cap L(M_2)$ των γλωσσών $L(M_1)$, $L(M_2)$ που ημιαποφασίζουν γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα·

  Απάντηση: