

---

## Αναφορά 1ης άσκησης

---

### Στοιχεία Ομάδας

Αλέξανδρος Σεργάκης: 2017030199

Ευάγγελος Κατσούπης: 2017030077

---

Θ.1 (10) Να υπολογίσετε αναλυτικά και να σχεδιάσετε τη συνάρτηση αυτοομοιότητας της

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τι παρατηρείτε;

Γενικά ισχύει ότι η συνάρτηση αυτοομοιότητας της  $\phi(t)$  ορίζεται ως εξής:

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t+\tau) \phi(t) dx \quad \forall t \in R.$$

Επίσης το  $\phi(t+\tau)$  ορίζεται ως εξής:

$$\phi(t+\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } |t+\tau| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί η συνάρτηση αυτοομοιότητας μπορεί να χαρακτηριστεί και ως η συνέλιξη του  $\phi(t)$  με το  $\phi(-t)$  :

$$\begin{aligned} \phi(t) \circledast \phi(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau-t) \phi(t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau-t) \phi(-t) dx = \\ &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau+t) \phi(t) dx = R_{\phi\phi}(\tau) \end{aligned}$$

Ακολουθώντας τα βήματα της συνέλιξης καταλήγουμε στα εξής χωρία του χρόνου και με τις παρακάτω περιπτώσεις:

1<sup>η</sup>: Αν  $(\frac{T}{2} - \tau < -\frac{T}{2})$ :

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in (T, +\infty)$$

2<sup>η</sup>: Αν  $(\frac{T}{2} - \tau \geq -\frac{T}{2})$  και  $(\frac{T}{2} - \tau \leq \frac{T}{2})$ :

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t + \tau) \phi(t) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2-\tau} 1 dx = \\ &= \frac{1}{T} \left[ t \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{T}{2} - \tau - \left(-\frac{T}{2}\right) \right) = -\frac{\tau}{T} + 1 \end{aligned}$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = -\frac{\tau}{T} + 1 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

3<sup>η</sup>: Αν  $(-\tau - \frac{T}{2} \geq -\frac{T}{2})$  και  $(-\tau - \frac{T}{2} \leq \frac{T}{2})$ :

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi}(\tau) &= \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \phi(t + \tau) \phi(t) dx = \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dx = \frac{1}{T} \left[ t \right]_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1}{T} \left( \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) + \tau = \frac{1}{T} (T + \tau) = \frac{\tau}{T} + 1 \end{aligned}$$

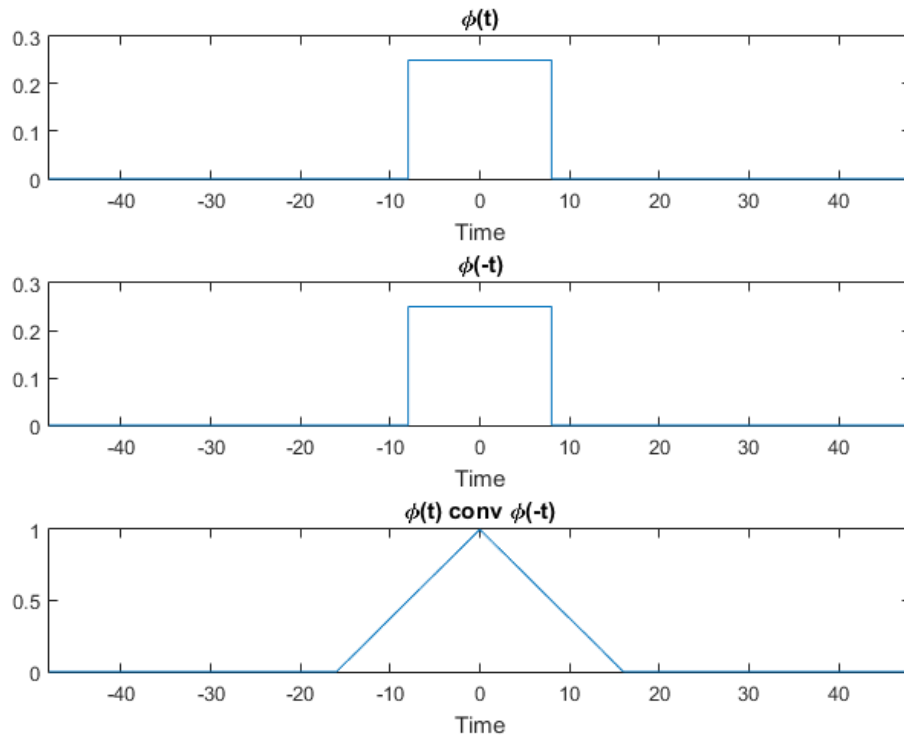
$$R_{\phi\phi}(\tau) = \frac{\tau}{T} + 1 \quad \forall \tau \in [-T, 0].$$

4<sup>η</sup>: Αν  $(-\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2})$ :

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in (-\infty, -T)$$

Άρα, η συνάρτηση αυτοομοιότητας της  $\phi(t)$  είναι η εξής:

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{T} + 1, & \text{αν } -T \leq \tau < 0, \\ -\frac{\tau}{T} + 1, & \text{αν } 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



Θ.2 (10) Να επαναλάβετε για την  $\phi(t - 10)$ .

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την συνάρτηση  $\phi(t)$  προωθημένο κατά 10, δηλαδή την:

$$\phi(t - 10) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } 10 + \frac{T}{2} \leq t \leq 10 + \frac{T}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

και η συνάρτηση αυτοομοιότητας αυτής θα ορίζεται ως εξής:

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t + \tau - 10) \phi(t - 10) dx \quad \forall t \in R.$$

Αντίστοιχα με το Θ.1 θα ακολουθήσουμε τα εξής βήματα για τον υπολογισμό της συνέλιξης:

1<sup>η</sup>: Αν  $(\frac{T}{2} - \tau + 10 < -\frac{T}{2})$ :

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in (T, +\infty)$$

2<sup>η</sup>: Αν  $(\frac{T}{2} - \tau + 10 \geq -\frac{T}{2})$  και  $(\frac{T}{2} - \tau + 10 \leq \frac{T}{2})$ :

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t+\tau) \phi(t) dx = \int_{10-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau+10} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dx = \frac{1}{T} [t]_{10-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau+10} \\ &= \frac{1}{T} (\frac{T}{2} - \tau + 10 - (-\frac{T}{2} + 10)) = \frac{1}{T} (\frac{T}{2} - \tau + \frac{T}{2}) = -\frac{\tau}{T} + 1 \end{aligned}$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = -\frac{\tau}{T} + 1 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

3<sup>η</sup>: Αν  $(-\tau + 10 - \frac{T}{2} \geq -\frac{T}{2})$  και  $(-\tau + 10 - \frac{T}{2} \leq \frac{T}{2})$ :

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi}(\tau) &= \int_{-\frac{T}{2}-\tau+10}^{\frac{T}{2}+10} \phi(t+\tau) \phi(t) dx = \int_{-\frac{T}{2}-\tau+10}^{\frac{T}{2}+10} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{T}} dx = \frac{1}{T} [t]_{-\frac{T}{2}-\tau+10}^{\frac{T}{2}+10} \\ &= \frac{1}{T} (\frac{T}{2} + 10 - (-\frac{T}{2} - \tau + 10)) = \frac{1}{T} (T + \tau) = \frac{\tau}{T} + 1 \end{aligned}$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \frac{\tau}{T} + 1 \quad \forall \tau \in [-T, 0].$$

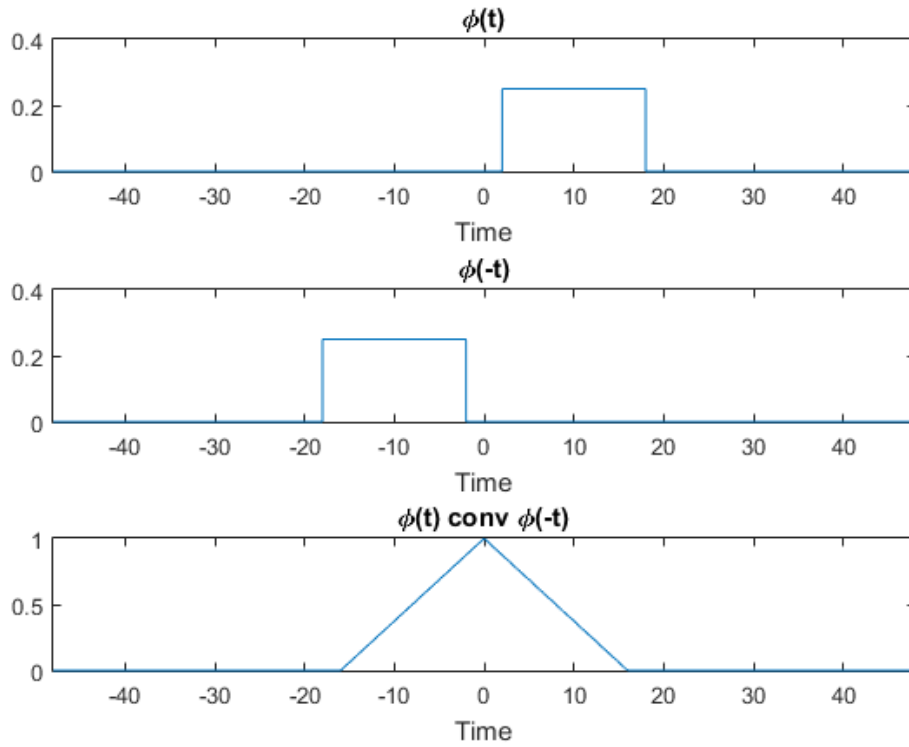
4<sup>η</sup>: Αν  $(-\tau + 10 - \frac{T}{2} > \frac{T}{2})$ :

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in (-\infty, -T)$$

Άρα, η συνάρτηση αυτοομοιότητας της  $\phi(t-10)$  είναι η εξής:

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{T} + 1, & \text{αν } -T \leq \tau < 0, \\ -\frac{\tau}{T} + 1, & \text{αν } 0 \leq \tau \leq T, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε πως οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των ερωτημάτων Θ.1 και Θ.2 είναι πανομοιότυπες. Λόγου αυτού, εύκολα βγαίνει το συμπέρασμα πως η  $R_{\phi\phi}(\tau)$  δεν επηρεάζεται από τις χρονικές μετατοπίσεις της  $\phi(t)$ .



Θ.3 (10) Να επαναλάβετε για την

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } \frac{T}{2} \leq t \leq T, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αντίστοιχα θα κινηθούμε και για το Θ.3 με:

$$\phi(t + \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } 0 \leq t + \tau < \frac{T}{2}, \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{αν } \frac{T}{2} \leq t + \tau \leq T, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Όμοια θα έχουμε τις εξείς περιπτώσεις:

1<sup>η</sup>: Αν  $(T - \tau < 0)$ :

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in (T, +\infty)$$

2<sup>η</sup>: Αν  $(T - \tau \leq \frac{T}{2})$  και  $(T - \tau \geq 0)$ :

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi}(\tau) &= \int_0^{T-\tau} \phi(t+\tau) \phi(t) dx = \int_0^{T-\tau} \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \frac{1}{\sqrt{T}} dx = -\frac{1}{T} [t]_0^{T-\tau} \\
&= -\frac{1}{T} (T - \tau) = -1 + \frac{\tau}{T}
\end{aligned}$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = -1 + \frac{\tau}{T} \quad \forall \tau \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$$

3<sup>n</sup>:  $\text{Av} \left(T - \tau \geq \frac{T}{2}\right) \text{ xal } (T - \tau \leq T)$ :

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi}(\tau) &= \int_0^{T-\tau} \phi(t+\tau) \phi(t) dx = \int_0^{\frac{T}{2}-\tau} \phi(t+\tau) \phi(t) dx + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} \phi(t+\tau) \phi(t) dx \\
&\quad + \int_{\frac{T}{2}}^{T-\tau} \phi(t+\tau) \phi(t) dx \\
&= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \tau\right) - \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \tau\right) + \frac{1}{T} \left(T - \tau - \frac{T}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\tau}{T} - \frac{\tau}{T} + \frac{1}{2} - \frac{\tau}{T} = 1 - \frac{3\tau}{T}
\end{aligned}$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 1 - \frac{3\tau}{T} \quad \forall \tau \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$$

4<sup>n</sup>:  $\text{Av} \left(T - \tau \geq T\right) \text{ xal } \left(\frac{T}{2} - \tau \leq \frac{T}{2}\right)$ :

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi}(\tau) &= \int_{-\tau}^T \phi(t+\tau) \phi(t) dx = \int_{-\tau}^{\frac{T}{2}} \phi(t+\tau) \phi(t) dx + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} \phi(t+\tau) \phi(t) dx \\
&\quad + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^T \phi(t+\tau) \phi(t) dx \\
&= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} + \tau\right) - \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - \tau - \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{T} \left(T - \frac{T}{2} + \tau\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\tau}{T} + \frac{\tau}{T} + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{T} = 1 + \frac{3\tau}{T}
\end{aligned}$$

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 1 + \frac{3\tau}{T} \quad \forall \tau \in \left(-\frac{T}{2}, 0\right)$$

5<sup>n</sup>:  $\text{Av} \left(-\tau \geq \frac{T}{2}\right) \text{ xal } (-\tau \leq T)$ :

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi}(\tau) &= \int_{-\tau}^T \phi(t+\tau) \phi(t) dx = \int_{-\tau}^T \left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \frac{1}{\sqrt{T}} dx = -\frac{1}{T} [t]_{-\tau}^T \\
&= -\frac{1}{T} (T + \tau) = -1 - \frac{\tau}{T}
\end{aligned}$$

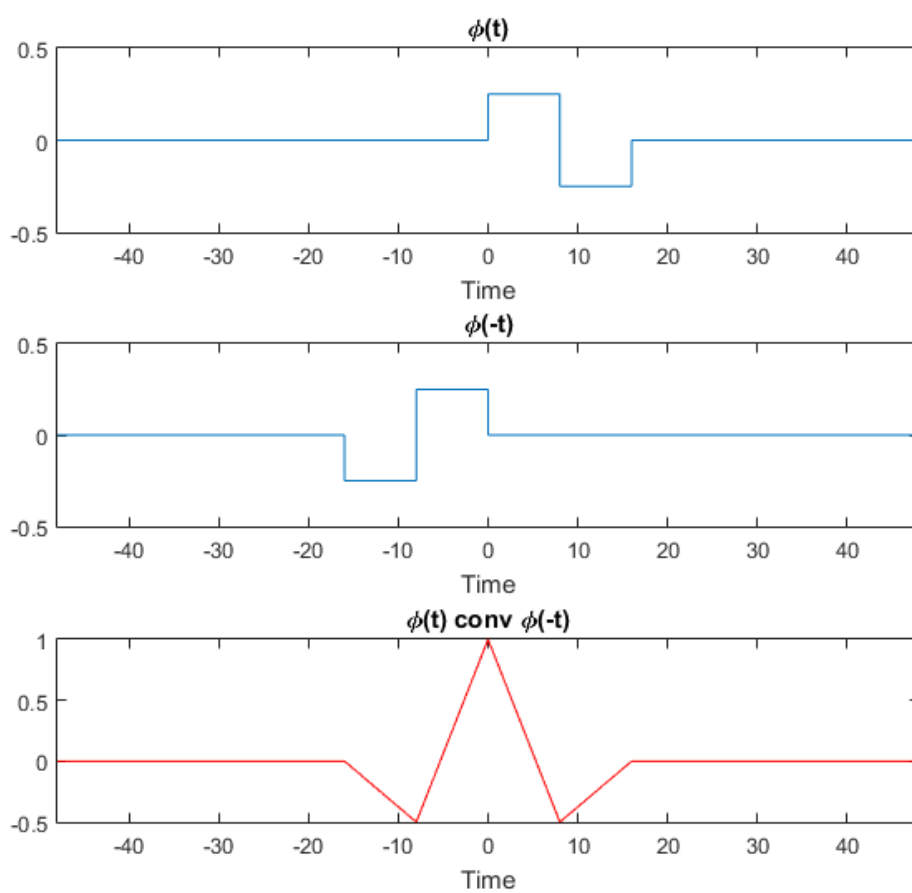
$$R_{\phi\phi}(\tau) = -1 - \frac{\tau}{T} \quad \forall \tau \in \left(-T, -\frac{T}{2}\right)$$

6<sup>n</sup>:  $\text{Av} \left(-\tau > T\right)$ :

$$R_{\phi\phi}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \in \left(-\infty, -T\right)$$

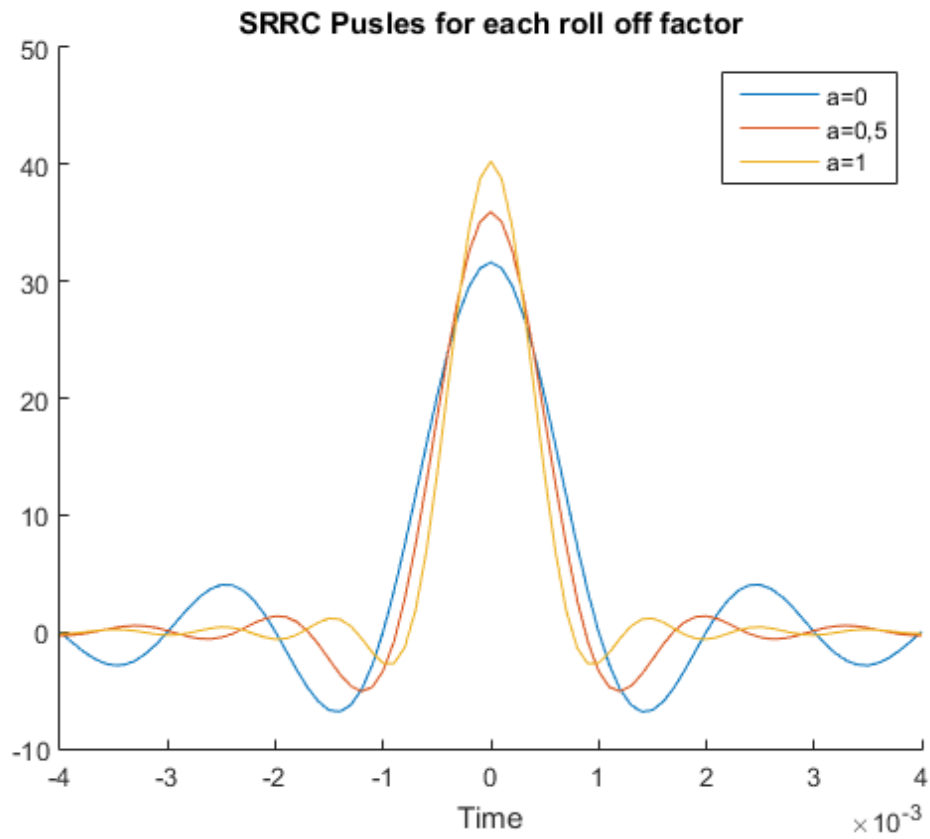
Άρα, η συνάρτηση αυτοομοιότητας της  $\phi(t - 10)$  είναι η εξής:

$$R_{\phi\phi}(\tau) = \begin{cases} -1 - \frac{\tau}{T}, & \text{αν } -T \leq \tau < \frac{T}{2}, \\ 1 + \frac{3\tau}{T}, & \text{αν } -\frac{T}{2} \leq \tau \leq 0, \\ 1 - \frac{3\tau}{T}, & \text{αν } 0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ -1 + \frac{\tau}{T}, & \text{αν } -\frac{T}{2} \leq \tau \leq T, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



A.1 Να δημιουργήσετε παλμούς SRRC  $\phi(t)$ .

(α) Να σχεδιάσετε σε **κοινό** plot τους παλμούς, στον κατάλληλο άξονα του χρόνου, για  $T = 10^{-3}$  sec,  $\text{over} = 10$ ,  $A = 4$  και  $a = 0, 0.5, 1$ .





(β) Τι παρατηρείτε σχετικά με το ρυθμό “μείωσης” του πλάτους των παλμών, όσο αυξάνεται η απόλυτη τιμή του χρόνου, σε σχέση με τις τιμές του  $a$ ;

Είναι εύκολα αντιληπτό πως παλμοί με μικρότερο roll-off factor έχουν μικρότερο ρυθμό μείωσης από αυτούς με μεγαλύτερο roll-off factor. Άρα, ο ρυθμός μείωσης του πλάτους είναι αντιστρόφως ανάλογος με τον roll-off factor του κάθε σήματος.

Κώδικας Ερωτήματος A.1

```
%Exercise A1
close all;
clear all;

T = 0.001;      %Given Period
over = 10;      %Oversampling factor
A = 4;          %Half duration of the pulse in symbol periods
a = [0, 0.5, 1]; %Roll-off factor

Ts = T / over; %sampling period
phi = {}; %Initialization of truncated SRRC pulse
t = 0; %Initialization of time

%Set vars for each roll-of factor
for i=1:length(a)
    [phi{i}, t] = srrc_pulse(T, over, A, a(i));
end

% SRRC pulse's
figure('Name','SRRC.rollOffFactor');
hold on;
for i=1:length(a)
    % p = plot(t,phi{i});
    plot(t,phi{i});
end
title('SRRC Pusles for each roll off factor');
xlabel('Time')
```

```

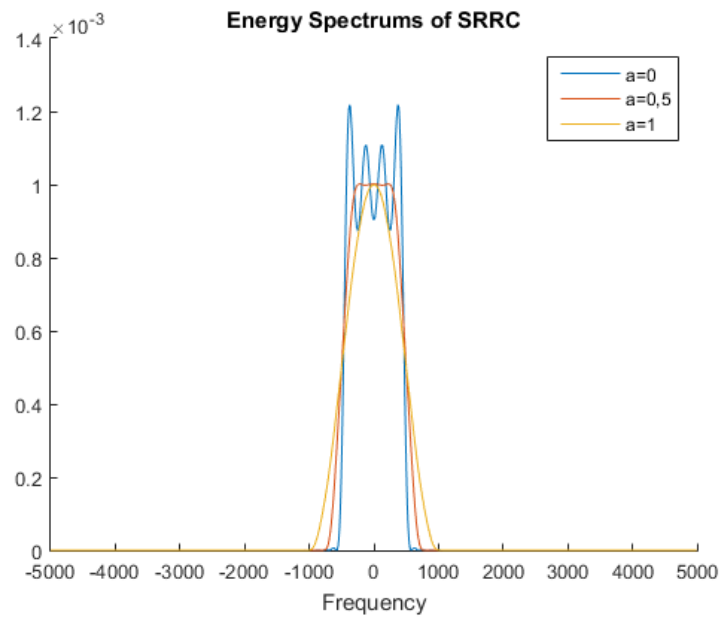
xlim([-A*T A*T]);

legend('a=0', 'a=0,5', 'a=1');
%legend(p, sprintf('a=%d', a(1)), sprintf('a=%.1f', a(2)),
    sprintf('a=%d', a(3)));
%title(x,'rol')
hold off;

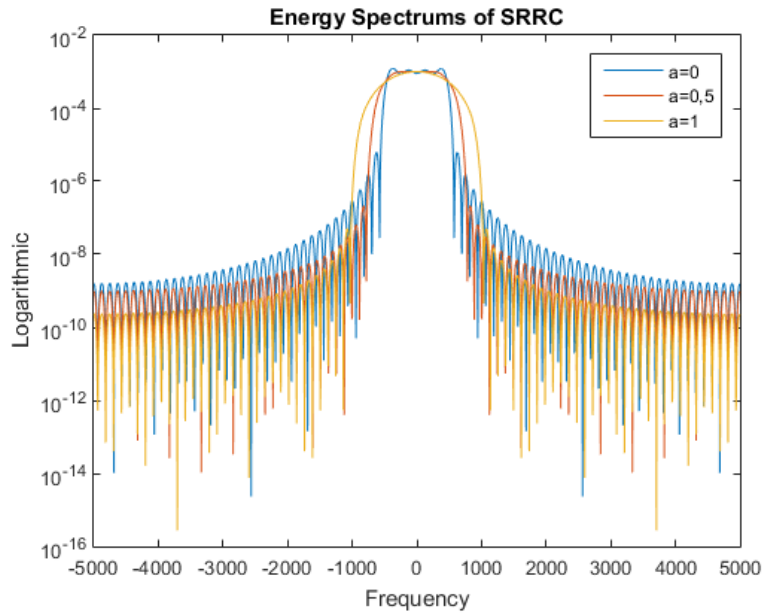
```

A.2 Μέσω των συναρτήσεων *fft* και *fftshift*, να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς Fourier  $\Phi(F)$  των παλμών που σχεδιάσατε στο προηγούμενο βήμα, σε  $N_f$  ισ-  
 απέχοντα σημεία στον άξονα συχνοτήτων  $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})$  ( $N_f = 1024, 2048$ ). Να  
 σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας  $|\Phi(F)|^2$  αυτών των παλμών

(α) κοινό plot



( $\beta$ ) σε κοινό *semilogy*



Κώδικας Ερωτήματος A.2

*%Exercise A2*

*Fs = 1/Ts; % Sampling Frequency*

*%Nf = 1024;% Step*

*Nf = 2048;*

*phi\_F = {}; % Initialization of fourier of truncated SRRC*

*pulse*

*Energy\_phi = {}; %*

*f\_axis = linspace(-Fs/2,(Fs/2-Fs/Nf), Nf); % Frequency range*

*% Set Energy Spectrums*

*for i=1:length(a)*

*phi\_F{i} = fftshift(fft(phi{i}, Nf)\*Ts);*

*Energy\_phi{i} = power(abs(phi\_F{i}),2);*

*end*

*figure('Name','Energy.SRRC');*

*hold on;*

*for i=1:length(a)*

```

%      pF = plot(f_axis,Energy_phi{i});
      plot(f_axis,Energy_phi{i});
end

title('Energy Spectrums of SRRC');
xlabel('Frequency');
xlim([-Fs/2 Fs/2]);

legend('a=0', 'a=0,5', 'a=1');

%legend(pF, sprintf('a=%d', a(1)), sprintf('a=%.1f', a(2)),
      sprintf('a=%d', a(3)));
%title(x,'rol')
hold off;

figure('Name','Energy.SRRC.logScale');
for i=1:length(a)
    semilogy(f_axis,Energy_phi{i});
    hold on;
end

title('Energy Spectrums of SRRC');
xlabel('Frequency');
ylabel('Logarithmic');
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
legend('a=0', 'a=0,5', 'a=1');
hold off;

```

A.3 Το θεωρητικό εύρος φάσματος των παλμών άπειρης διάρκειας είναι  $BW = \frac{1+a}{2T}$ .

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του θεωρητικού εύρους φάσματος για καθένα από τους τρεις παλμούς.

a	0	0.5	1
BW	500	750	1000

(β) Στην πράξη, αφού οι αποκομμένοι παλμοί έχουν θεωρητικά άπειρο εύρος φάσματος, χρειάζεται ένας πιο πρακτικός ορισμός για το εύρος φάσματος. Στο κοινό *semilog* του 2 ερωτήματος A.2, να σχεδιάσετε μία οριζόντια γραμμή με τιμή  $c$  (ενδεικτικά  $c = \frac{T}{10^3}$ ) και να θεωρήσετε ότι οι τιμές οι οποίες βρρίσκονται κάτω από αυτή τη γραμμή είναι “πρακτικά μηδέν.” Σε αυτή την περίπτωση, ποιο είναι προσεγγιστικά το εύρος φάσματος των τριών παραπάνω παλμών. Ποιος παλμός είναι πιο αποδοτικός ως προς το εύρος φάσματος;

Προσεγγιστικά το εύρος φάσματος για κάθε  $\phi(t)$  είναι:

a	0	0.5	1
BW	776.4	756.8	986.3

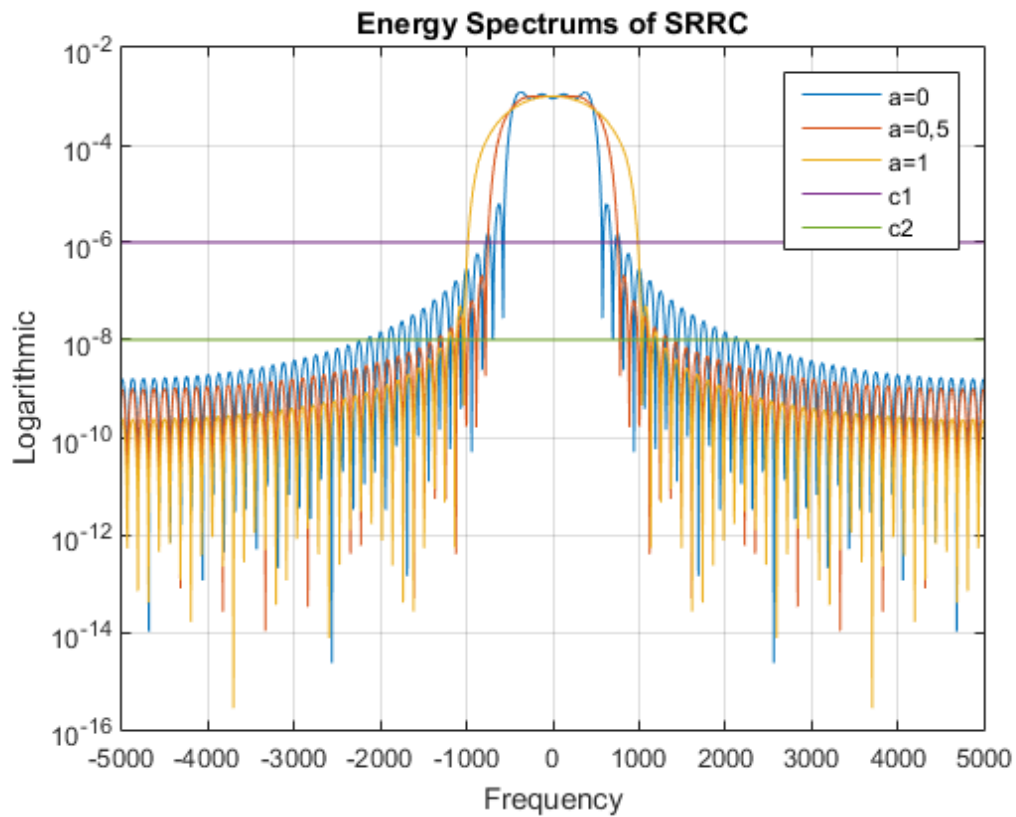
Έπειτα από την θεωρηση, πως σημεία “κάτω από” το  $c1 = \frac{T}{10^3}$  παρατηρούμε ότι ο παλμός με roll-off factor  $a = 0.5$  είναι πιο αποδοτικός μιάς και έχει το μικρότερο εύρος φάσματος συγκριτικά με τους άλλους.

(γ) Πώς μεταβάλλεται το εύρος φάσματος των παλμών αν  $c = \frac{T}{10^5}$ ; Στην περίπτωση αυτή, ποιος παλμός είναι πιο αποδοτικός;

Προσεγγιστικά το εύρος φάσματος για κάθε  $\phi(t)$  πλέον είναι:

a	0	0.5	1
BW	2140	1321	1213

Όμοια με το προηγούμενο παρατηρούμε πως ο παλμός με  $a = 1$  είναι πιο αποδοτικός αφού έχει το μικρότερο ευρος φάσματος.



Κώδικας Ερωτήματος Α.3, άξιο σημασίας είναι το κομμάτι σχεδίασης ευθείας καθώς τα semilogy είναι ίδια με αυτά του προηγούμενου ερωτήματος.

*% Exercise A3*

```
c1 = zeros(1,length(f_axis))+T/10^3; % Energy "limit" c1 = T/10^3
c2 = zeros(1,length(f_axis))+T/10^5; % Energy "limit" c2 = T/10^3
figure('Name','Energy.SRRC.logScale.c1_c2');
for i=1:length(a)
    semilogy(f_axis,Energy_phi{i});
    hold on;
end
grid on;
plot(f_axis,c1);
plot(f_axis,c2);
title('Energy Spectrums of SRRC');
```

```

xlabel('Frequency');
ylabel('Logarithmic');
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
legend('a=0', 'a=0,5', 'a=1', 'c1', 'c2');
hold off;

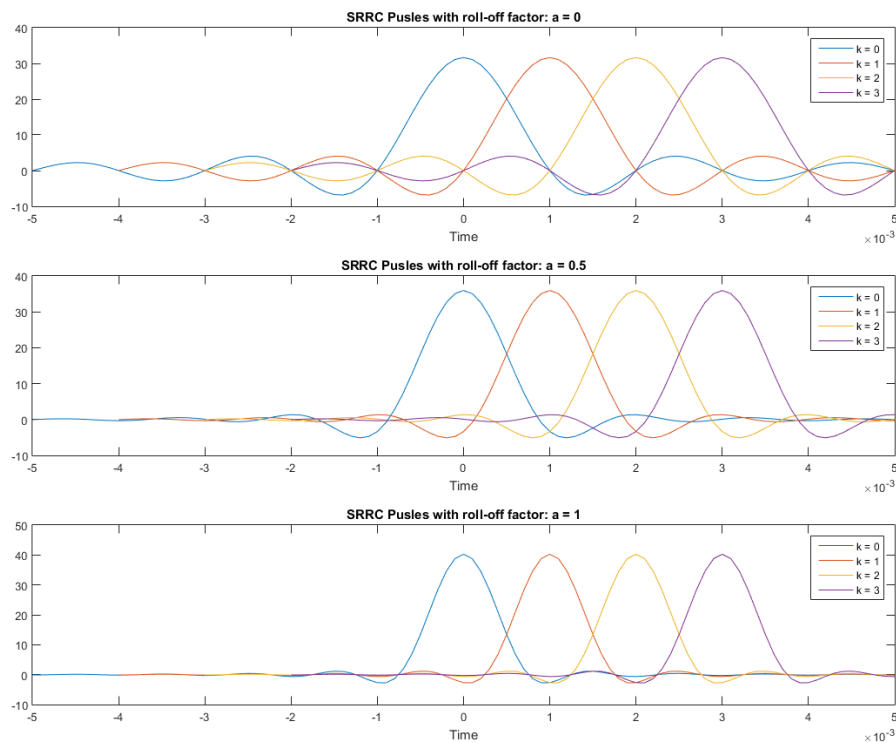
```

B.1 Για  $a = 0, 0.5, 1$ , και  $k = 0, 1, \dots, 2A$ , με  $A = 5$

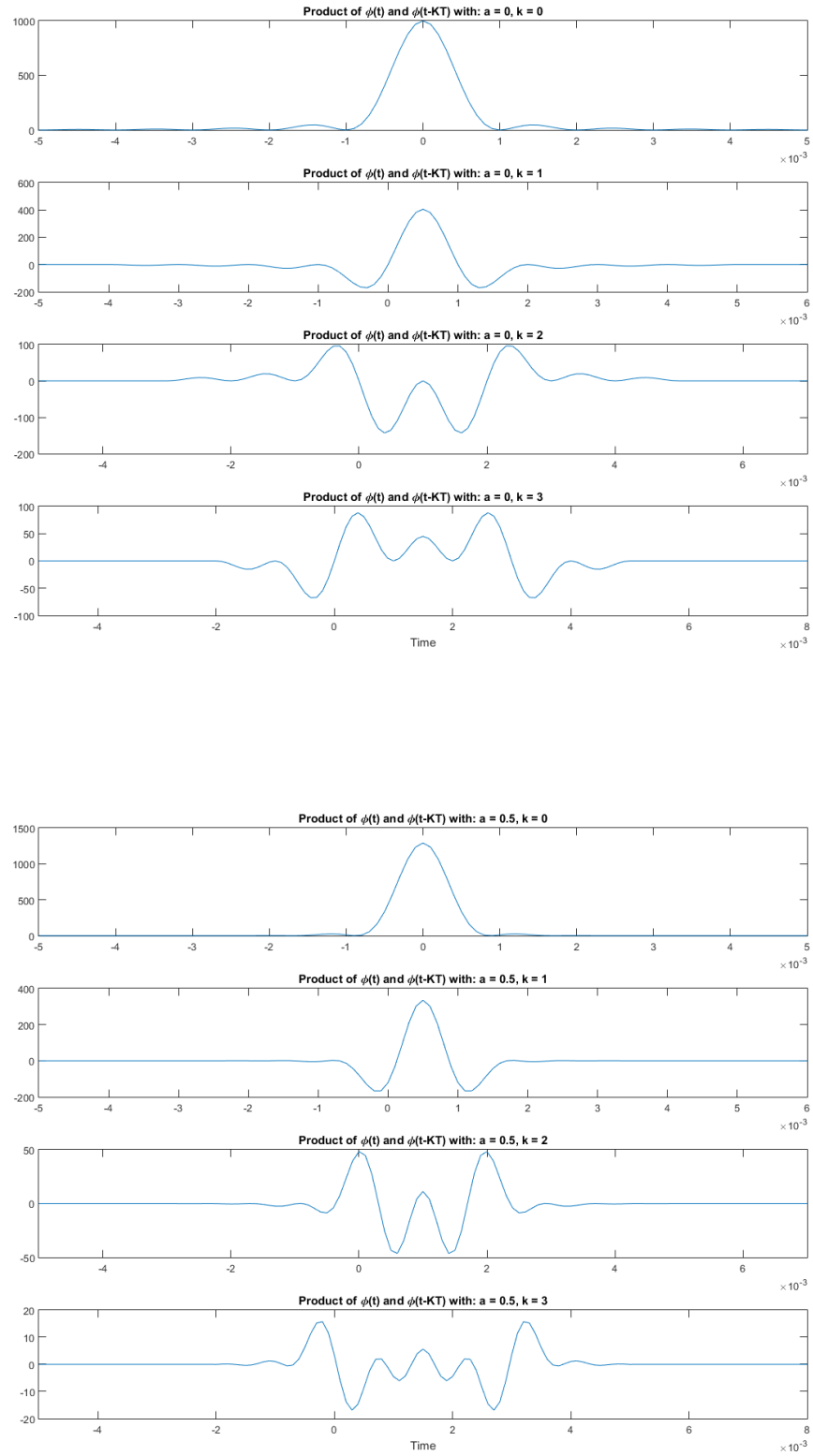
1. να δημιουργήσετε σε κοινό plot του παλμούς  $\phi(t)$  και  $\phi(t - kT)$ ,
2. να δημιουργήσετε το γινόμενο  $\phi(t) \phi(t - kT)$ ,
3. να προσεγγίσετε αριθμητικά το ολοκλήρωμα του γινομένου  $\phi(t) \phi(t - kT)$ ,  
με τη μέθοδο που αναφέραμε στο μάθημα.

(α) Να σχεδιάσετε τα αποτελέσματα των βημάτων 1. και 2., για  $a = 0, 0.5, 1$   
και  $k = 0, 1, 2, 3$ .

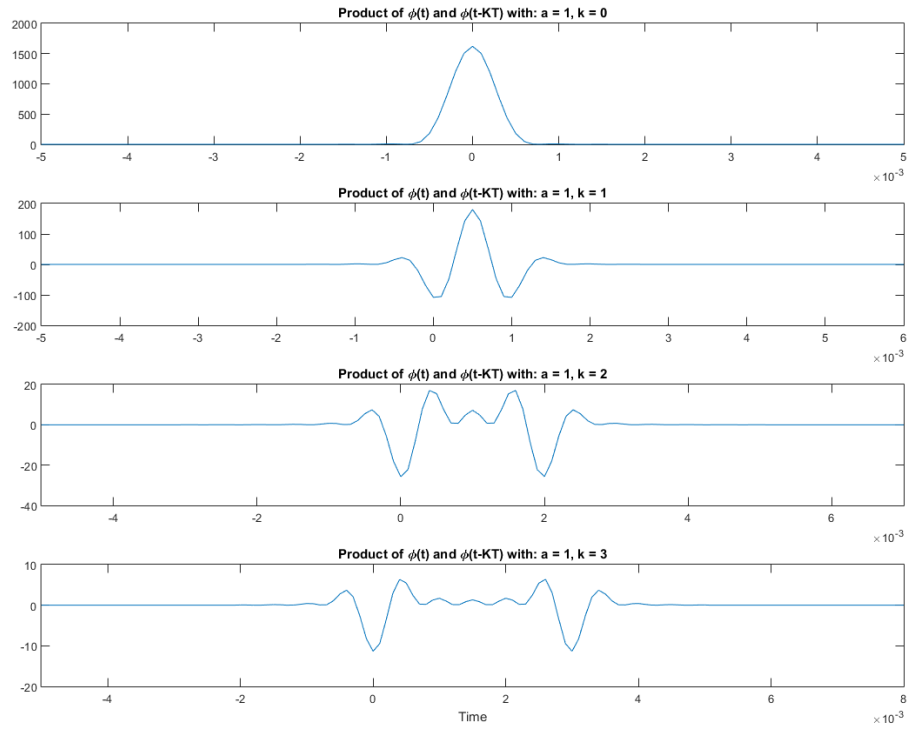
Βήμα 1.



Βήμα 2.







(β) Να αναφέρετε τις τιμές των ολοκληρωμάτων που υπολογίσατε στο βήμα 3., για  $a = 0, 0.5, 1$  και  $k = 0, 1, 2, 3$  και να προσπαθήσετε να τις εξηγήσετε.

Για  $a = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 0T) dx = 0.979776$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 1T) dx = 0.022552$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 2T) dx = -0.025789$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 3T) dx = 0.030774$$

Για  $a = 0.5$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 0T) dx = 0.999928$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 1T) dx = -0.000007$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 2T) dx = 0.000159$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 3T) dx = 0.000035$$

Για  $a = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 0T) dx = 0.999984$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 1T) dx = -0.000022$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 2T) dx = -0.000033$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(t - 3T) dx = 0.000058$$

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις διαφορετικές τιμές του  $a$  για  $k = 0$  οι τιμές των ολοκληρωμάτων είναι πάρα πολύ κοντά στο 1 διότι το ολοκλήρωμα της  $\phi(t)$  είναι ίσο με 1. Αντιθέτως, για  $k \neq 0$  έχουμε τιμές πάρα πολύ κοντά στο 0 αρα συμπεραίνουμε απο τα παραπάνω πως οι παλμοί που δημιουργήσαμε είναι κατα προσέγγιση ορθοκανονικοί.

#### Κώδικας Ερωτήματος B

```
% Exercise B1
close all;
clear;
T = 0.001;      %Given Period
A = 5;
a = [0, 0.5, 1]; %Roll-off factor
over = 10;      %Oversampling factor
kStep = 1;
k = [0, 1, 2, 3];
t_delay = k.*T;

Ts = T / over; %sampling period
phi = {}; % Initialization of truncated SRRC pulse

%Set vars for each roll-of factor
for i=1:length(a)
    [phi{i}, t] = srrc_pulse(T, over, A, a(i));
end

% SRRC pulse's
```

```

figure('Name','SRRC.a.Delay(k)');
for i=1:length(a)
    subplot(3,1,i);
    for j=1:length(k)
        p = plot(t+t_delay(j),phi{i});
        hold on;
    end
    title(['SRRC Pules with roll-off factor: a = ' num2str(a(i))
]);
    legend('k = 0', 'k = 1', 'k = 2', 'k = 3');
    xlabel('Time');
    xlim([-A*T A*T]);
end
hold off;

```

*% Exercise B2*

```

for i=1:length(a)
    figure('Name',['SRRC.a=' num2str(a(i)) '.Delay(k)']);
    for j=1:length(k)
        subplot(4,1,j);
        time = [-A*T:Ts:A*T+k(j)*T];
        phi_ext = [phi{i} zeros(1,k(j)*T/Ts)];
        phi_del = [zeros(1,k(j)*T/Ts) phi{i}];
        phi_product = phi_ext.*phi_del;
        plot(time, phi_product);
        xlim([-A*T A*T+k(j)*T]);
        title(['Product of \phi(t) and \phi(t-KT) with: a = '
num2str(a(i)) ', k = ' num2str(k(j))]);
    end
    xlabel('Time');
end

```

*% Exercise B3*

```

for i=1:length(a)
    fprintf('Integral of phi(t) * phi(t-KT) with a = %.1f and\n',
a(i));

```

```

    for j=1:length(k)
        phi_ext = [phi{i} zeros(1,k(j)*T/Ts)];
        phi_del = [zeros(1,k(j)*T/Ts) phi{i}];
        phi_product = phi_ext.*phi_del;
        v(i) = sum(phi_ext.*phi_del)*Ts;

        fprintf('k = %d: %.6f\n',k(j), v(i));
    end
end

% Table = table(a,v_j)
% for i=1:length(a)
%     for j=1:length(k)
%         disp(['a=' num2str(a(i), '%.1f') ', k=' num2str(k(j)) ' =
%             ' num2str(v(i,j), '%.6f')]);
%     end
% end

% h = {'roll-off factor' 'k' 'integral'}
% data=[0      0      ]
% f=figure;
% t=uitable(f,'data',data,'columnname',h)

```

Τέλος, θα προσομοιώσουμε ένα PAM σύστημα βασικής ζώνης, το οποίο μεταφέρει  $N$  bits χρησιμοποιώντας διαμόρφωση 2-PAM. Έστω  $T = 0.1$  sec,  $\text{over} = 10$ ,  $a = 0.5$ , και  $A = 5$ .

C.1 Να δημιουργήσετε  $N$  bits  $b_i$ , για  $i = 0, \dots, N - 1$  (ενδεικτικά  $N = 50, 100$ ), με την εντολή

$$\mathbf{b} = (\text{sign}(\text{randn}(N, 1)) + 1)/2; \quad (1)$$

C.2 Το σύστημα 2-PAM βασικής ζώνης υλοποιείται ως εξής.

(α) Να γράψετε συνάρτηση

$$\mathbf{X} = \text{bits\_to\_2PAM}(\mathbf{b});$$

η οποία παίρνει είσοδο την ακολουθία bits  $\mathbf{b}$  και παράγει ως έξοδο την ακολουθία από 2-PAM σύμβολα  $\mathbf{X}$ , χρησιμοποιώντας την εξής απεικόνιση:

$$0 \longrightarrow +1,$$

$$1 \longrightarrow -1.$$

```
function [X] = bits_to_2PAM(b)
% Conversion of bit array to 2-PAM Symbols
%
%
%      Input Bit b(i) /      0      /      1
%      -----
%      Output 2-PAM   /      -1   /      +1
%      Symbol X(i)    /
%
for i = 1:length(b)
%      if b(i) ~= 0 or b(i) ~= 1
%          disp(['Bit in position ' num2str(i-1) ' is not
%              binary ']);
%          continue;
%      end
%      X(i) = (-1)^b(i);
```

```

end

% for i =1:length(b)
%     if (b(i) == 0)
%         X(i) = 1;
%     else
%         X(i) = -1;
%     end
% end
end

```

Η συνάρτηση επιστρέφει  $X = -1$  με είσοδο  $b = 1$   $(-1)^1 = -1$  Η συνάρτηση επιστρέφει  $X = +1$  με είσοδο  $b = 0$   $(-1)^0 = 1$

(β) Να προσομοιώσετε το σήμα

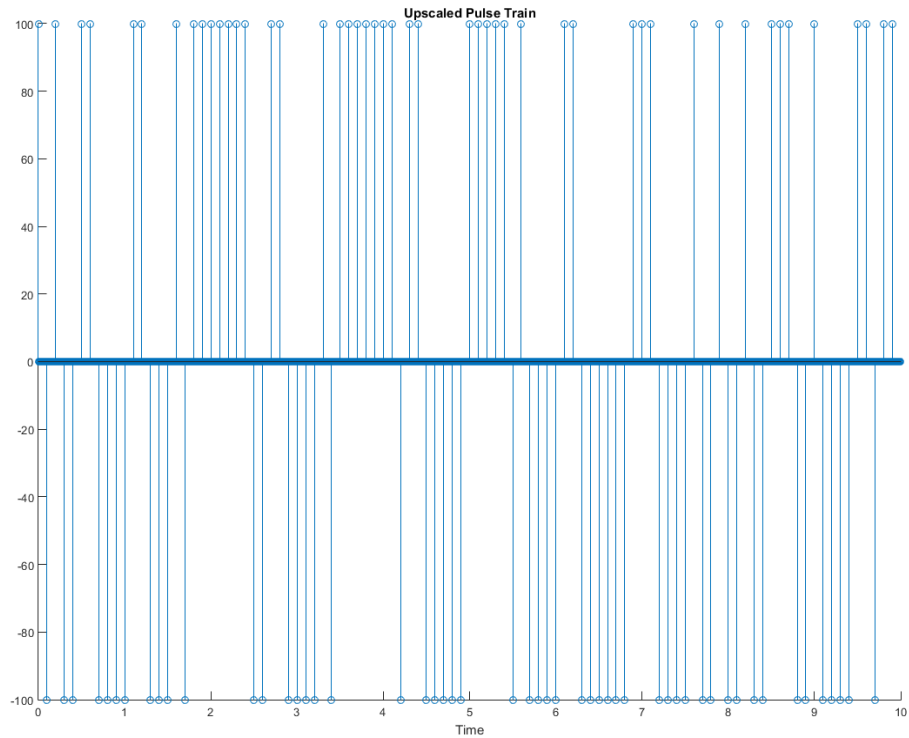
$$X_{\delta}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \delta(t - kT), \quad (2)$$

μέσω της εντολής

$$X\_delta = 1/T\_s * \text{upsample}(X, \text{over}); \quad (3)$$

Να ορίσετε κατάλληλα τον άξονα του χρόνου και να σχεδιάσετε το σήμα  $X_{\delta}(t)$ .

Το σήμα  $X\_delta[n]$  είναι το τρένο παλμών κλιμακομένο κατά  $1/T\_s$ .



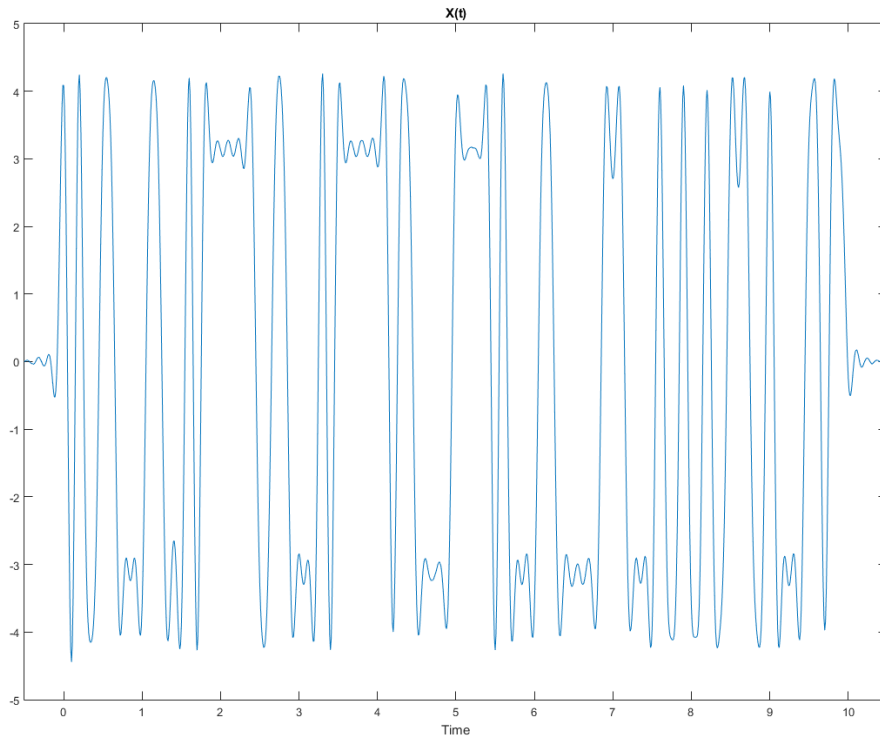
- (γ) Να δειγματοληπτήσετε κατάλληλα τον αποκομμένο *SRRC* παλμό,  $\phi(t)$ , και να προσομοιώσετε τη συνέλιξη  $X(t) = X_\delta(t) \otimes \phi(t)$ . Να κατασκευάσετε κατάλληλα τον άξονα του χρόνου και να σχεδιάσετε το σήμα  $X(t)$ .

Αρχικά δημιουργείται ο *SRRC* παλμός, μέσω της συνάρτησης *srrc\_pulse* και με την χρήση της συνάρτησης *conv* αποθηκεύονται οι τιμές της συνέλιξης του *upscaled* τρένου παλμών και του αποκομμένου παλμού *SRRC*. Τέλος δημιουργείται ο άξονας του χρόνου της συνέλιξης και δημιουργείται το σήμα.

Η κλίμακα χρόνου υπολογίζεται ως εξής:

```
Z_time = [X_time(1)+t(1):Ts:X_time(end)+t(end)]; % Time
```

- (δ) Υποθέτοντας ιδανικό κανάλι, στην είσοδο του δέκτη λαμβάνουμε  $X(t)$ . Να προσομοιώσετε τη συνέλιξη  $Z(t) = X(t) \otimes \phi(-t)$ . Να σχεδιάσετε το  $Z(t)$  στον αντίστοιχο άξονα του χρόνου και να βρείτε τι τιμές παίρνει τις

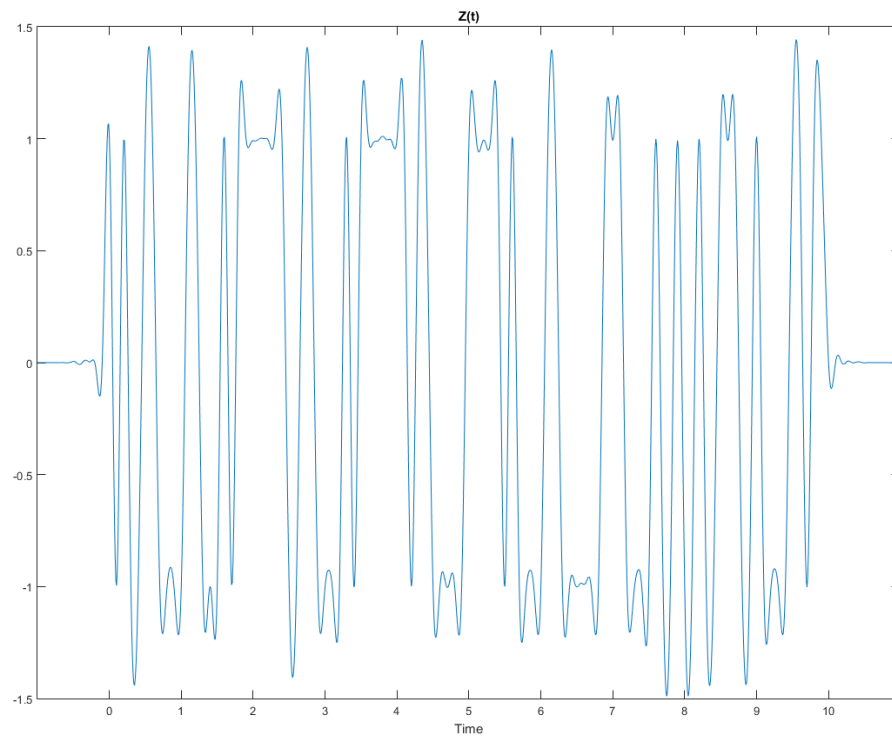


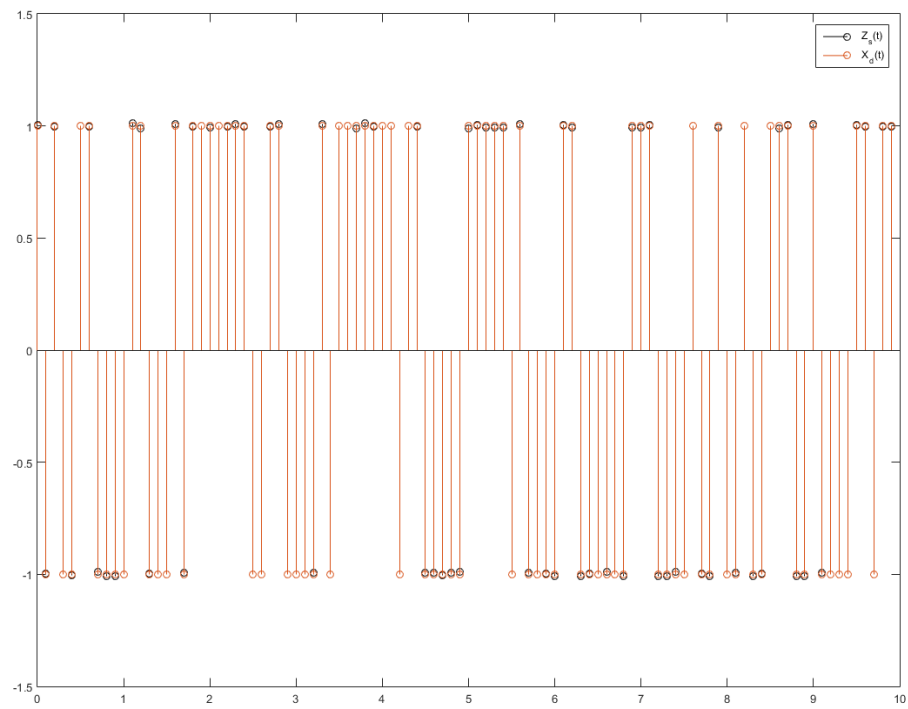
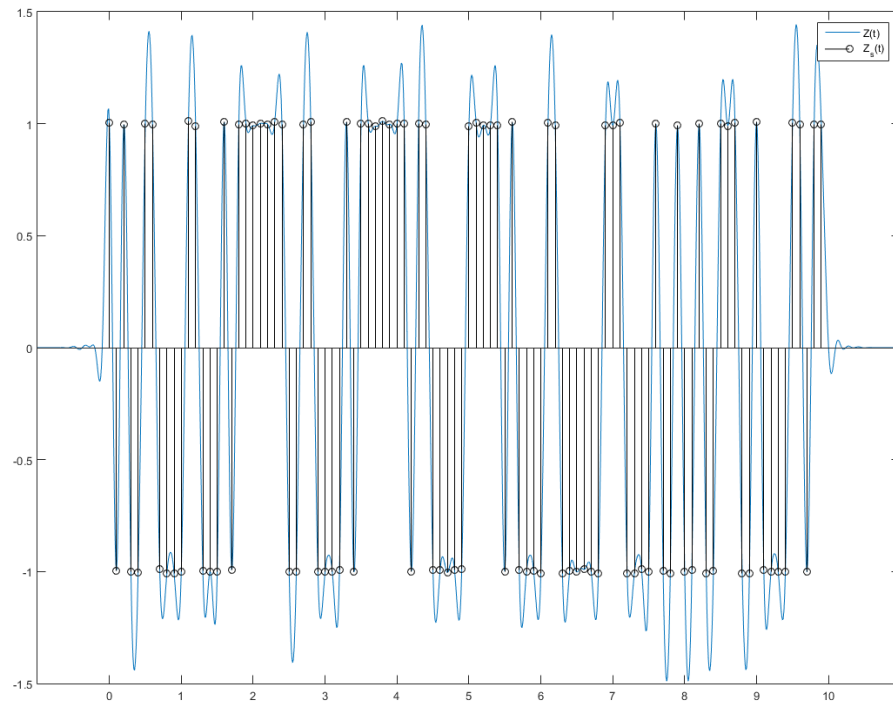
χρονικές στιγμές  $kT$ , για  $k = 0, \dots, N - 1$ . Να συσχετίσετε τις τιμές αυτές με τις τιμές των  $X_k$ , για  $k = 0, \dots, N - 1$ . Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Αρχικά, χρησιμοποιείται ο ίδιος αποκομμένος SRRC παλμός όπου λόγω του ότι είναι άρτια συνάρτηση δεν χρειάζεται να γίνει η ανάκλησή του. Με αυτό το παραπάνω και με την χρήση της συνάρτησης `conv` παίρνει τις τιμές το  $Z(t)$  δηλαδή την συνέλιξη του  $X(t)$  και του αποκομένου παλμού SRRC. Τέλος κατασκευάζεται ο άξονας του χρόνου του  $Z(t)$ . Έπειτα βρίσκουμε τις θέσεις του  $Z(t)$  που μας ενδιαφέρουν δηλαδή από την χρονική στιγμή  $t = 0$  ως την χρονική στιγμή όπου τελειώνει το τρένο παλμών. Έπειτα, έχοντας τον παλμό που μας ενδιαφέρει `zsamped` τον αποκλιμακώνουμε ώστε να "φτασουμε" το αρχικό τρένο παλμών. Τέλος τυπώνουμε την αρχική πληροφορία μαζί με το σήμα "εξόδου" και βρίσκουμε την τετραγωνική μέση απόκλιση των δύο παλμών για να βρούμε το συνολικό σφάλμα.



Η κλίμακα χρόνου υπολογίζεται όπως παραπάνω.





Ένας γραφικός τρόπος για να συγκρίνετε τις τιμές  $Z(kT)$  με τις τιμές  $Xk$ , για  $k = 0, \dots, N - 1$  είναι να επιλέξετε το `hold on` στο `plot` του  $Z(t)$  και να εκτελέσετε την εντολή `stem([0 : N - 1] * T, X)`; όπου  $X$  είναι το διάνυσμα με τα σύμβολα  $Xk$ , για  $k = 0, \dots, N - 1$ . Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο.

Τυπώνουμε την αρχική πληροφορία μαζί με το σήμα "εξόδου" και βρίσκουμε την τετραγωνική μέση απόκλιση των δύο παλμών για να βρούμε το συνολικό σφάλμα.

Παρατηρούμε ότι το Mean squared error (MSE) είναι αρκετά μικρό, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οι τιμές, για  $k = 0, \dots, N - 1$  του  $Z(kT)$  έχουν πάρα πολύ μικρή διαφορά με τις αντίστοιχες τιμές του  $Xk$ , πράγμα το οποίο μπορεί να αποδειχθεί βλέποντας και το αντιστοιχο σχεδιάγραμμα με μεγάλη εστίαση. Η διαφορά αυτή υπάρχει λόγω των συνελίξεων αλλά και της χρήσης του  $\phi(t)$  που είναι αποκομμένος παλμός (απώλεια πληροφορίας).

#### Κώδικας Ερωτήματος C

```
close all;
clear;

T = 0.1;
over = 10;
a = 0.5;
A = 5;
Ts = T/over;

% C1
% N = 10;
% N = 50;
N = 100;
b = (sign(randn(N,1)) + 1)/2; % N amount of bits

% C2.a
X = bits_to_2PAM(b); %
```

```

% C2.b
x_delta = (1/Ts) * upsample(X, over); % Pulse train generation
t_pulse = 0:Ts:T*N-Ts; % Pulse Train time scale
% t_pulse = linspace(0, (A*T), N*over);

figure('Name', 'Upscaled.Pulse.Train'); % Plot Pulse Train
hold on;
stem(t_pulse,x_delta);
title('Upscaled Pulse Train')
xlim([0 T*N]);
xlabel('Time');

% C2.c
[phi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a); % SRRC pulse generation
X_conv = conv(phi,x_delta)*Ts; % Convolution of phi and pulse
train
X_time = [t_pulse(1)+t(1):Ts:t_pulse(end)+t(end)]; % Pulse Train

figure('Name', 'X(t).Conv.phi(t)'); % Plot convolution
% hold on;
plot(X_time,X_conv);
xlabel('Time')
xlim([X_time(1) X_time(end)]);
title('X(t)');

% C2.d
% Na poume oti to phi einai artio kai phi(-t)=phi(t)
Z = conv(phi,X_conv)*Ts; % Convolution of recieved signal
Z_time = [X_time(1)+t(1):Ts:X_time(end)+t(end)]; % Time

% Plot Z(t)
figure('Name', 'Z(t)');
plot(Z_time,Z);
xlabel('Time')
xlim([Z_time(1) Z_time(end)]);
title('Z(t)');

```

```

% Find the index of Z(0) and Z(5)
index_first = find(abs(Z_time) < 0.001);
index_last = find(abs(Z_time-t_pulse(end)) < 0.001);

Z_sampled = Z(index_first:index_last); % Z(0) - Z(end)
Z_sampled = downsample(Z_sampled, over); % Downsampled Z ('reach'
    pulse train)

figure('Name', 'Z(t).&.Z_s(t)'); % Plot of Z(t) and Z(t) sampled
plot(Z_time,Z);
hold on;
stem(0:T:(N-1)*T, Z_sampled, 'k');
legend('Z(t)', 'Z_s(t)');
xlim([Z_time(1) Z_time(end)]);

% Mean squared error of Z_s(t) and X_d(t)
MSE = (1/N)*sum((Z_sampled - X).^2);
disp(['Mean squared error: ' num2str(MSE)]);

% Plots of Z_sampled(t) and X_delta(t)
figure('Name', 'Z_s(t).&.X_delta(t)');
stem(0:T:(N-1)*T, Z_sampled, 'k');
hold on;
s = stem([0:N-1]*T, X);
s.Color = [0.8500 0.3250 0.0980];
legend('Z_s(t)', 'X_d(t)');

```

Όλα τα Scripts της άσκησης

*%Exercise A1*

close all;

clear all;

T = 0.001;      *%Given Period*

over = 10;      *%Oversampling factor*

A = 4;          *%Half duration of the pulse in symbol periods*

a = [0, 0.5, 1]; *%Roll-off factor*

Ts = T / over; *%sampling period*

phi = {}; *%Initialization of truncated SRRC pulse*

t = 0;          *%Initialization of time*

*%Set vars for each roll-off factor*

for i=1:length(a)

    [phi{i}, t] = srrc\_pulse(T, over, A, a(i));

end

*% SRRC pulse's*

figure('Name','SRRC.rollOffFactor');

hold on;

for i=1:length(a)

*% p = plot(t,phi{i});*

        plot(t,phi{i});

end

title('SRRC Pulses for each roll off factor');

xlabel('Time')

xlim([-A\*T A\*T]);

legend('a=0', 'a=0.5', 'a=1');

*%legend(p, sprintf('a=%d', a(1)), sprintf('a=%.1f', a(2)), sprintf*  
*('a=%d', a(3)));*

*%title(x,'rol')*

hold off;

*%Exercise A2*

```

Fs = 1/Ts; % Sampling Frequency
%Nf = 1024;% Step
Nf = 2048;
phi_F = {}; % Initialization of fourier of truncated SRRC pulse
Energy_phi = {}; %

f_axis = linspace(-Fs/2,(Fs/2-Fs/Nf), Nf); % Frequency range

% Set Energy Spectrums
for i=1:length(a)
    phi_F{i} = fftshift(fft(phi{i}, Nf)*Ts);
    Energy_phi{i} = power(abs(phi_F{i}),2);
end

figure('Name','Energy.SRRC');
hold on;
for i=1:length(a)
%    pF = plot(f_axis,Energy_phi{i});
    plot(f_axis,Energy_phi{i});
end

title('Energy Spectrums of SRRC');
xlabel('Frequency');
xlim([-Fs/2 Fs/2]);

legend('a=0', 'a=0,5', 'a=1');

%legend(pF, sprintf('a=%d', a(1)), sprintf('a=%.1f', a(2)),
%    sprintf('a=%d', a(3)));
%title(x,'rol')
hold off;

figure('Name','Energy.SRRC.logScale');
for i=1:length(a)
    semilogy(f_axis,Energy_phi{i});
    hold on;

```

```

end

title('Energy Spectrums of SRRC');
xlabel('Frequency');
ylabel('Logarithmic');
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
legend('a=0', 'a=0,5', 'a=1');
hold off;

% Exercise A3

c1 = zeros(1,length(f_axis))+T/10^3; % Energy "limit" c1 = T/10^3
c2 = zeros(1,length(f_axis))+T/10^5; % Energy "limit" c2 = T/10^5
figure('Name','Energy.SRRC.logScale.c1_c2');
for i=1:length(a)
    semilogy(f_axis,Energy_phi{i});
    hold on;
end
grid on;
plot(f_axis,c1);
plot(f_axis,c2);
title('Energy Spectrums of SRRC');
xlabel('Frequency');
ylabel('Logarithmic');
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
legend('a=0', 'a=0,5', 'a=1', 'c1', 'c2');
hold off;

% Exercise B1
close all;
clear;
T = 0.001; %Given Period
A = 5;
a = [0, 0.5, 1]; %Roll-off factor
over = 10; %Oversampling factor
kStep = 1;
k = [0, 1, 2, 3];

```



```

t_delay = k.*T;

Ts = T / over; %sampling period
phi = {}; % Initialization of truncated SRRC pulse

%Set vars for each roll-off factor
for i=1:length(a)
    [phi{i}, t] = srrc_pulse(T, over, A, a(i));
end

% SRRC pulse's
figure('Name','SRRC.a.Delay(k)');
for i=1:length(a)
    subplot(3,1,i);
    for j=1:length(k)
        p = plot(t+t_delay(j),phi{i});
        hold on;
    end
    title(['SRRC Pusles with roll-off factor: a = ' num2str(a(i))
]);
    legend('k = 0', 'k = 1', 'k = 2', 'k = 3');
    xlabel('Time');
    xlim([-A*T A*T]);
end
hold off;

% Exercise B2

for i=1:length(a)
    figure('Name',['SRRC.a=' num2str(a(i)) '.Delay(k)']);
    for j=1:length(k)
        subplot(4,1,j);
        time = [-A*T:Ts:A*T+k(j)*T];
        phi_ext = [phi{i} zeros(1,k(j)*T/Ts)];
        phi_del = [zeros(1,k(j)*T/Ts) phi{i}];
        phi_product = phi_ext.*phi_del;
    end
end

```

```

        plot(time, phi_product);
        xlim([-A*T A*T+k(j)*T]);
        title(['Product of \phi(t) and \phi(t-KT) with: a = ',
num2str(a(i)) ', k = ', num2str(k(j))]);
    end
    xlabel('Time');
end

% Exercise B3
for i=1:length(a)
    fprintf('Integral of phi(t) * phi(t-KT) with a = %.1f and\n',
a(i));
    for j=1:length(k)
        phi_ext = [phi{i} zeros(1,k(j)*T/Ts)];
        phi_del = [zeros(1,k(j)*T/Ts) phi{i}];
        phi_product = phi_ext.*phi_del;
        v(i) = sum(phi_ext.*phi_del)*Ts;

        fprintf('k = %d: %.6f\n',k(j), v(i));
    end
end

% Table = table(a,v_j)
% for i=1:length(a)
%     for j=1:length(k)
%         disp(['a=' num2str(a(i), '%.1f') ', k=' num2str(k(j)) ' =
%             ' num2str(v(i,j), '%.6f')]);
%     end
% end

% h = {'roll-off factor' 'k' 'integral'}
% data=[0      0      ]
% f=figure;
% t=uitable(f,'data',data,'columnname',h)

close all;
clear;

```

```

T = 0.1;
over = 10;
a = 0.5;
A = 5;
Ts = T/over;

% C1
% N = 10;
% N = 50;
N = 100;
b = (sign(randn(N,1)) + 1)/2; % N amount of bits

% C2.a
X = bits_to_2PAM(b); %

% C2.b
x_delta = (1/Ts) * upsample(X, over); % Pulse train generation
t_pulse = 0:Ts:T*N-Ts; % Pulse Train time scale
% t_pulse = linspace(0, (A*T), N*over);

figure('Name', 'Upscaled.Pulse.Train'); % Plot Pulse Train
hold on;
stem(t_pulse,x_delta);
title('Upscaled Pulse Train')
xlim([0 T*N]);
xlabel('Time');

% C2.c
[phi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a); % SRRC pulse generation
X_conv = conv(phi,x_delta)*Ts; % Convolution of phi and pulse
train
X_time = [t_pulse(1)+t(1):Ts:t_pulse(end)+t(end)]; % Pulse Train

figure('Name', 'X(t).Conv.phi(t)'); % Plot convolution
% hold on;
plot(X_time,X_conv);
xlabel('Time')

```

```

xlim([X_time(1) X_time(end)]);
title('X(t)');

%C2.d
% Na poume oti to phi einai artio kai phi(-t)=phi(t)
Z = conv(phi,X_conv)*Ts; % Convolution of recieved signal
Z_time = [X_time(1)+t(1):Ts:X_time(end)+t(end)]; % Time

% Plot Z(t)
figure('Name', 'Z(t)');
plot(Z_time,Z);
xlabel('Time')
xlim([Z_time(1) Z_time(end)]);
title('Z(t)');

% Find the index of Z(0) and Z(5)
index_first = find(abs(Z_time) < 0.001);
index_last = find(abs(Z_time-t_pulse(end)) < 0.001);

Z_sampled = Z(index_first:index_last); % Z(0) - Z(end)
Z_sampled = downsample(Z_sampled, over); % Downsampled Z ('reach'
    pulse train)

figure('Name', 'Z(t).&.Z_s(t)'); % Plot of Z(t) and Z(t) sampled
plot(Z_time,Z);
hold on;
stem(0:T:(N-1)*T, Z_sampled, 'k');
legend('Z(t)', 'Z_s(t)');
xlim([Z_time(1) Z_time(end)]);

% Mean squared error of Z_s(t) and X_d(t)
MSE = (1/N)*sum((Z_sampled - X).^2);
disp(['Mean squared error: ' num2str(MSE)]);

% Plots of Z_sampled(t) and X_delta(t)
figure('Name', 'Z_s(t).&.X_delta(t)');
stem(0:T:(N-1)*T, Z_sampled, 'k');

```

```

hold on;
s = stem([0:N-1]*T, X);
s.Color = [0.8500 0.3250 0.0980];
legend('Z_s(t)', 'X_d(t)');

function [phi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a)
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% [phi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a)
%
% OUTPUT
%
%      phi: truncated SRRC pulse, with parameter T,
%
%           roll-off factor a, and duration 2*A*T
%
%      t:   time axis of the truncated pulse
%
%
%
% INPUT
%
%      T: Nyquist parameter or symbol period (positive real
%         number)
%
%      over: positive integer equal to T/T_s (oversampling factor)
%
%      A: half duration of the pulse in symbol periods (positive
%         integer)
%
%      a: roll-off factor (real number between 0 and 1)
%
%
%
%      A. P. Liavas, Oct. 2020
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

Ts=T/over;

% Create time axis
t = [-A*T:Ts:A*T] + 10^(-8); % in order to avoid division by zero
    problems at t=0.

if (a>0 && a<=1)
    num = cos((1+a)*pi*t/T) + sin((1-a)*pi*t/T) ./ (4*a*t/T);
    denom = 1-(4*a*t./T).^2;
    phi = 4*a/(pi*sqrt(T)) * num ./ denom;
elseif (a==0)
    phi = 1/(sqrt(T)) * sin(pi*t/T)./(pi*t/T);
else
    phi = zeros(length(t),1);
    disp('Illegal value of roll-off factor')
    return
end

function [X] = bits_to_2PAM(b)
% Conversion of bit array to 2-PAM Symbols
%
%
%      Input Bit b(i) /      0      /      1
%      -----
%      Output 2-PAM   /      -1     /      +1
%      Symbol X(i)    /
%
for i =1:length(b)
%      if b(i)~=0 and b(i)~=1
%          disp(['Bit in position' num2str(i-1) 'is not binary']);
%          continue;
%      end
    X(i)=(-1)^b(i);
end

```

```
% for i = 1:length(b)
%     if (b(i) == 0)
%         X(i) = 1;
%     else
%         X(i) = -1;
%     end
% end
end
```