Κατσούπης Ευάγγελος
2017030077

*Συνεργασία με*
*Απόστολο Γιουμερτάκη 2017030142*

# Λύσεις ασκήσεων

## Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα

Κατασκευάστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις παρακάτω γλώσσες:

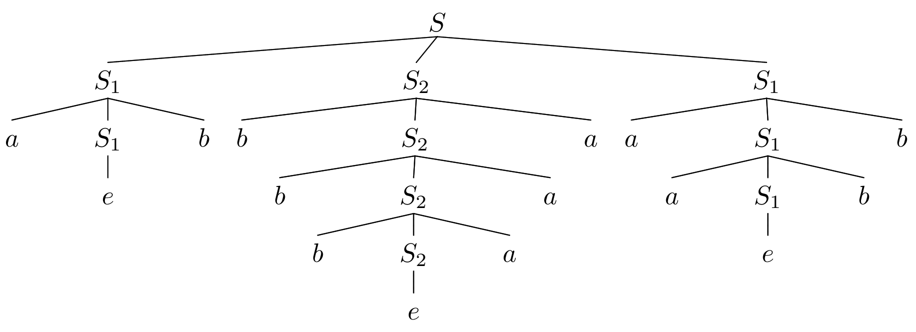
- $L_1 = \left\{ a^n b^{n+k} a^{k+m} b^m : \ n, k, m \ \in \mathbb{N} \right\}$

  Απάντηση:
  Η ζυτούμενη γραμματική είναι η $G = \{V, \Sigma, R, S\}$ όπου:

$$V = \{S, S_1, S_2, a, b\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow \ S_1 S_2 S_1 \\ S_1 \rightarrow \ a S_1 b \\ S_1 \rightarrow \ e \\ S_2 \rightarrow \ b S_1 a \\ S_2 \rightarrow \ e \end{array} \right\}$$

  Για την συμβολοσειρά abbbbaaaaabb $\in L_1$:



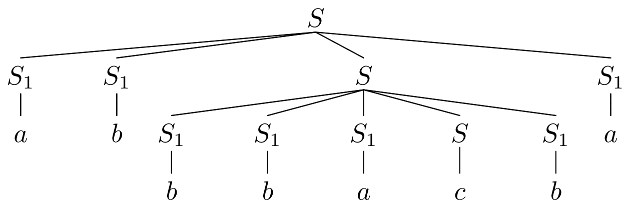
- $L_2 = \{ \ wcu : \ w, u \ \in \{a,b\}^* \text{ και } 2|u| \leq |w| \leq 4|u| \ \}$

  Απάντηση:
  Η ζυτούμενη γραμματική είναι η $G = \{V, \Sigma, R, S\}$ όπου:

$$V = \{S, S_1, S_2, a, b, c\}$$
$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow & S_1 S_1 \ S \ S_1 \\ S \rightarrow & S_1 S_1 S_1 \ S \ S_1 \\ S \rightarrow & S_1 S_1 S_1 S_1 \ S \ S_1 \\ S \rightarrow & c \\ S_1 \rightarrow & a \\ S_1 \rightarrow & b \\ S_1 \rightarrow & e \end{array} \right\}$$

Για την συμβολοσειρά abbbacba $\in L_2$:



# Αυτόματα στοίβας

Κατασκευάστε αυτόματα στοίβας για τις παρακάτω γλώσσες:

- $L_1 = \{uw \in a^* b^* \text{ και } |u| = |w|\}$

  Απάντηση:
  Το αυτόματο είναι το εξής: $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q, F)$, όπου:

  $$K = \{s\} \quad \Sigma = \{a, b\} \quad \Gamma = \{a, b\} \quad F = \{s\}$$

  $$\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6\}$$

  $$\begin{array}{l} \star\ \Delta_1 : (\ (s, a, e), (s, a)\ ) \\ \star\ \Delta_2 : (\ (s, b, e), (s, b)\ ) \\ \star\ \Delta_3 : (\ (s, a, a), (s, e)\ ) \\ \star\ \Delta_4 : (\ (s, a, b), (s, e)\ ) \\ \star\ \Delta_5 : (\ (s, b, a), (s, e)\ ) \\ \star\ \Delta_6 : (\ (s, b, b), (s, e)\ ) \end{array}$$

  Ο υπολογισμός αποδοχής για τη συμβολοσειρά $aabbaaab \in L_1$ έχει ως εξής:

  $$(s, aabbaaab, e) \overset{\Delta_1}{\vdash} (s, abbaaab, a) \overset{\Delta_3}{\vdash} (s, bbaaab, e) \overset{\Delta_2}{\vdash} (s, baaab, b) \overset{\Delta_6}{\vdash} \cdots$$
  $$\cdots (s, aaab, e) \overset{\Delta_1}{\vdash} (s, aab, a) \overset{\Delta_3}{\vdash} (s, ab, e) \overset{\Delta_1}{\vdash} (s, b, a) \overset{\Delta_5}{\vdash} (s, e, e)$$

- $L_2 = \{w \in \{a^*b^*\} : \eta \;\; w$ περιέχει διπλάσιο αριθμό $a$ απ` ότι $b\}$

  Απάντηση:
  Μπορούμε να κατασκευάσουμε πρώτα μια γραμματική για τη γλώσσα:
  Η ζητούμενη γραμματική είναι η $G = V, \Sigma, R, S$, όπου:

$$V = \{S, a, b\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow \; aa\ S\ b \\ S \rightarrow \; a\ S\ ab \\ S \rightarrow \; a\ S\ ba \\ S \rightarrow \; ab\ S\ a \\ S \rightarrow \; ba\ S\ a \\ S \rightarrow \; b\ S\ aa \\ S \rightarrow \; e \end{array} \right\}$$

!!! Το top-down αυτόματο της παραπάνω γλώσσας είναι το $M = K, \Sigma, \Gamma, \Delta, q, F$, όπου:

$$K = \{s\} \;\; \Sigma = \{a, b\} \;\; \Gamma = \{S, a, b\} \;\; F = \{s\}$$

$$\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8, \Delta_9, \Delta_{10}\}$$

$$\begin{array}{l} \star\ \Delta_1 : (\ (s, e, e), (s, S)\ ) \\ \star\ \Delta_2 : (\ (s, e, S), (s, aaSb)\ ) \\ \star\ \Delta_3 : (\ (s, e, S), (s, aSab)\ ) \\ \star\ \Delta_4 : (\ (s, e, S), (s, aSba)\ ) \\ \star\ \Delta_5 : (\ (s, e, S), (s, abSa)\ ) \\ \star\ \Delta_6 : (\ (s, e, S), (s, baSa)\ ) \\ \star\ \Delta_7 : (\ (s, e, S), (s, bSaa)\ ) \\ \star\ \Delta_8 : (\ (s, e, S), (s, e)\ ) \\ \star\ \Delta_9 : (\ (s, a, a), (s, e)\ ) \\ \star\ \Delta_{10} : (\ (s, b, b), (s, e)\ ) \end{array}$$

Ο υπολογισμός αποδοχής για τη συμβολοσειρά $baaaba \in L_2$ έχει ως εξής:

$$(s, baaaba, e) \overset{\Delta_1}{\vdash} (s, baaaba, S) \overset{\Delta_7}{\vdash} (s, baaaba, bSaa) \overset{\Delta_{10}}{\vdash} (s, aaaba, Saa) \overset{\Delta_8}{\vdash} \cdots$$

$$\cdots (s, aaaba, aa) \overset{\Delta_9}{\vdash} (s, aaba, a) \overset{\Delta_9}{\vdash} (s, aba, e) \overset{\Delta_1}{\vdash} (s, aba, S) \overset{\Delta_4}{\vdash} \cdots$$

$$\cdots (s, aba, aSba) \overset{\Delta_9}{\vdash} (s, ba, Sba) \overset{\Delta_8}{\vdash} (s, ba, ba) \overset{\Delta_{10}}{\vdash} (s, a, a) \overset{\Delta_9}{\vdash} (s, e, e)$$

# Γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα

- Αποφανθείτε αν ο παρακάτω ισχυρισμός είναι σωστός ή λανθασμένός και αιτιολογήστε:

  Η τομή μιας γλώσσας που αναγνωρίζεται από ένα αυτόματο στοίβας με μια γλώσσα που παράγεται από κανονική έκφραση είναι πάντα γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

  Απάντηση:
  Ισχύει πώς η κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα και η κλάση των γλωσσών αυτομάτων στοίβας, είναι η ίδια κλάση. Δεδομένου αυτού, η γλώσσα που αναγνωρίζεται από ένα αυτόματο στοίβας είναι μια γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
  Μια γλώσσα που παράγεται από κανονική έκφραση μπορεί να χαρακτηριστεί ώς κανονική. Επιπλέον ισχύει, ότι το σύνολο των κανονικών γλωσσών ($L_\kappa$) είναι υποσύνολο των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα ($L_{\chi\Sigma}$).
  Δεδομένου των παραπάνω, η τομή $L_\kappa \cap L_{\chi\Sigma}$ μας οδηγεί πάντα σε γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

  Άρα ο παραπάνω ισχυρισμός είναι **ορθός**.

- Αποδείξτε εάν η παρακάτω γλώσσα είναι ή δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα:

$$L = \left\{a^m b^n c^k : n, k, m \in \mathbb{N},\ m + k \leq n \leq 3m + 2k\right\}$$

  Η γλώσσα $L_1 = \{a^m b^n : n, m \in \mathbb{N},\ m \leq n \leq 3m\}$ μπορεί να παραγεί από την γραμματική $G = \{V, \Sigma, R, S\}$ όπου:

$$V = \{S, a, b\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$R = \left\{ \begin{array}{l} S \to\ aSb \\ S \to\ aSbb \\ S \to\ aSbbb \\ S \to\ e \end{array} \right\}$$

  Παρομοίως και η γλώσσα $L_2 = \left\{b^n c^k : n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n \leq 2k\right\}$ μπορεί να παραγεί από την γραμματική $G = \{V, \Sigma, R, S\}$ όπου:

$$V = \{S, b, c\}$$
$$\Sigma = \{b, c\}$$
$$R = \left\{ \begin{array}{l} S \to\ bSc \\ S \to\ bbSc \\ S \to\ e \end{array} \right\}$$

  Συνεπώς, λόγω κλειστότητας της παράθεσης στην κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα, και η γλώσσα $L$ θα είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα γιατί είναι η παράθεση δύο γλωσσών της κλάσης, $L = L_1 L_2$.

# Αναγνώριση γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα

1. Η γραμματική $G = \{V, \Sigma, R, S\}$ με:

$$V = \{S, A, M, T, a, b\}$$
$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$R = \left\{ \begin{array}{rl} S \to & A \\ S \to & M \\ A \to & MbATa \\ A \to & MaT \\ M \to & Ta \\ M \to & e \\ T \to & b \end{array} \right\}$$

- Σε πρώτη φάση, απαλοίφουμε τους μεγάλους κανόνες (#συμβόλων $> 2$), δηλαδή τους $A \to MbATa$ και $A \to MaT$, οπότε η γραμματική γίνεται $G' = (V', \Sigma, R', S)$ όπου:

$$V' = \{S, A, A_1, A_2, A_3, A_4, M, T, a, b\}$$

$$R' = \left\{ \begin{array}{rll} S \to & A & \\ S \to & M & \\ A \to & MA_1 & \star \\ A_1 \to & bA_2 & \star \\ A_2 \to & AA_3 & \star \\ A_3 \to & Ta & \star \\ A \to & MA_4 & \star \\ A_4 \to & aT & \star \\ M \to & Ta & \\ M \to & e & \\ T \to & b & \end{array} \right\}$$

  Τα σύμβολα $\star$ δείχνουν τους νέους κανόνες.

- $\star\star\star$ Κατόπιν απαλοίφουμε τους κενούς κανόνες, δηλαδή τον $M \rightarrow e$. Έχουμε:

$$\mathcal{E} = \{M, S\}$$

Η νέα γραμματική γίνεται $G'' = (V'', \Sigma, R'', S)$ όπου:

$$V'' = \{S, A, A_1, A_2, A_3, A_4, M, T, a, b\}$$

$$R'' = \left\{ \begin{array}{rl} S \rightarrow & A \\ S \rightarrow & M \\ A \rightarrow & MA_1 \\ A \rightarrow & A_1 \quad \star \\ A_1 \rightarrow & bA_2 \\ A_2 \rightarrow & AA_3 \\ A_3 \rightarrow & Ta \\ A \rightarrow & MA_4 \\ A \rightarrow & A_4 \quad \star \\ A_4 \rightarrow & aT \\ M \rightarrow & Ta \\ T \rightarrow & b \end{array} \right\}$$

Τα σύμβολα $\star$ δείχνουν τους νέους κανόνες.

- Τέλος προχωράμε στην απαλοιφή των μικρών κανόνων, δηλαδή των $S \rightarrow A$, $A \rightarrow A_1$, $A \rightarrow A_4$ και $T \rightarrow b$
Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(S) &= \{S, M, A, A_1, A_4, \} \\ \mathcal{D}(A) &= \{A, A_1, A_4\} \\ \mathcal{D}(A_1) &= \{A_1\} \\ \mathcal{D}(A_2) &= \{A_2\} \\ \mathcal{D}(A_3) &= \{A_3\} \\ \mathcal{D}(A_4) &= \{A_4\} \\ \mathcal{D}(M) &= \{M\} \\ \mathcal{D}(T) &= \{T, b\} \end{aligned}$$

Η τελική γραμματική σε μορφή Chomsky είναι η $G''' = (V''', \Sigma, R''', S)$ όπου:

$$V''' = \{S, A, A_1, A_2, A_3, A_4, M, T, a, b\}$$

$$
\begin{aligned}
R'' = \Big\{ \quad A &\rightarrow \; MA_1 \\
A_1 &\rightarrow \; bA_2 \\
A_2 &\rightarrow \; AA_3 \\
A_2 &\rightarrow \; A_1A_3 \quad \star \\
A_2 &\rightarrow \; A_4A_3 \quad \star \\
A_3 &\rightarrow \; Ta \\
A_3 &\rightarrow \; ba \quad \star \\
A &\rightarrow \; MA_4 \\
A_4 &\rightarrow \; aT \\
A_4 &\rightarrow \; ab \quad \star \\
M &\rightarrow \; Ta \\
M &\rightarrow \; ba \quad \star \\
S &\rightarrow \; MA_1 \quad \star \\
S &\rightarrow \; bA_2 \quad \star \\
S &\rightarrow \; MA_4 \quad \star \\
S &\rightarrow \; aT \quad \star \\
S &\rightarrow \; ab \quad \star \\
S &\rightarrow \; Ta \quad \star \\
S &\rightarrow \; ba \quad \star \quad \Big\}
\end{aligned}
$$

Τα σύμβολα $\star$ δείχνουν τους νέους κανόνες.
Είναι φανερό ότι οι κανόνες που περιέχουν το $T$ είναι πλέον περιττοί. Η εφαρμογή οποιουδήποτε από αυτούς θα οδηγήσει σε αδιέξοδο. Γι' αυτό και μπορούμε να τους παραλείψουμε ώστε να απλοποιηθεί η γραμματική χωρίς απώλεια γενικότερα.

Η τελική γραμματική σε μορφή Chomsky είναι η $G''' = (V''', \Sigma, R''', S)$ όπου:

$$
V''' = \{S, A, A_1, A_2, A_3, A_4, M, T, a, b\}
$$

$$
\begin{aligned}
R'' = \Big\{ \quad A &\rightarrow \; MA_1 && (1) \\
A &\rightarrow \; MA_4 && (2) \\
A_1 &\rightarrow \; bA_2 && (3) \\
A_2 &\rightarrow \; AA_3 && (4) \\
A_2 &\rightarrow \; A_1A_3 && (5) \\
A_2 &\rightarrow \; A_4A_3 && (6) \\
A_3 &\rightarrow \; ba && (7) \\
A_4 &\rightarrow \; ab && (8) \\
M &\rightarrow \; ba && (9) \\
S &\rightarrow \; MA_1 && (10) \\
S &\rightarrow \; bA_2 && (11) \\
S &\rightarrow \; MA_4 && (12) \\
S &\rightarrow \; ab && (13) \\
S &\rightarrow \; ba \quad \Big\} && (14)
\end{aligned}
$$

2. Ο πίνακας για την συμβολοσειρά $w = bababba$ φαίνονται παρακάτω. Σε τετράγωνες αγκύλες φαίνεται ο αριθμός του κανόνα που αιτιολογεί την εισαγωγή κάποιου συμβόλου στην πίνακα.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | | a |
| 6 | | | | | | b | $A_3$[7],$M$[9],$S$[14] |
| 5 | | | | | b | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 4 | | | | a | $A_4$[8],$S$[13] | $\emptyset$ | $A_2$[6] |
| 3 | | | b | $A_3$[7],$M$[9],$S$[14] | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $A_1$[3], $S$[11] |
| 2 | | a | $A_4$[8],$S$[13] | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 1 | b | $A_3$[7],$M$[9],$S$[14] | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $A$[1], $S$[10] |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Το συντακτικό δένδρο για την ίδια συμβολοσειρά: