Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

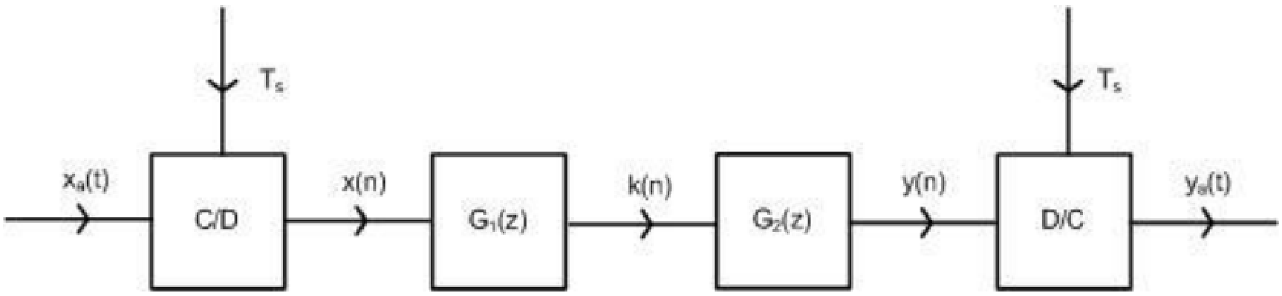
2^{η} Εργαστηριακή Αναφορά

Εργαστηριακή Ομάδα *0*

Γιουμερτάκης Απόστολος, 2017030142
Κατσούπης Ευάγγελος, 2017030077

1^η Άσκηση

Για το παρακάτω αιτιατό, γραμμικό και αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση σύστημα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 1: Starting System

με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1\ Hz$ και με εξισώσεις διαφορών:

- $k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n) \qquad A$
- $G_2(z) = \frac{1}{z+0.2} \qquad B$

(α΄) θα υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς του.

Για τον υπολογισμό του $G_1(z)$, που ορίζεται ώς $G_1(z) = \frac{K(z)}{X(z)}$, θα ξεκινήσουμε από την σχέση A:

$$k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n) \Leftrightarrow k(n) - 0.9k(n-1) = 0.2x(n)$$

$$\overset{\Gamma X A}{\Leftrightarrow} \mathcal{Z}\left\{k(n) - 0.9k(n-1)\right\} = \mathcal{Z}\left\{0.2x(n)\right\} \Leftrightarrow \mathcal{Z}\{k(n)\} - 0.9\mathcal{Z}\{k(n-1)\} = 0.2\mathcal{Z}\{x(n)\}$$

$$\Leftrightarrow\ K(z) - 0.9\ K(z)\ z^{-1} = 0.2X(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{K(z)}{X(z)} = \frac{0.2}{1-0.9z^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{G_1(z) = \frac{0.2}{1-0.9z^{-1}}}$$

Αρχικά συνελίσουμε το δειγματοληπτημένο σήμα $x(n)$ με το σύστημα $G_1(z)$:

$$x(n) * g_1(n) = k(n) \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) \cdot G_1(z) = K(z)$$

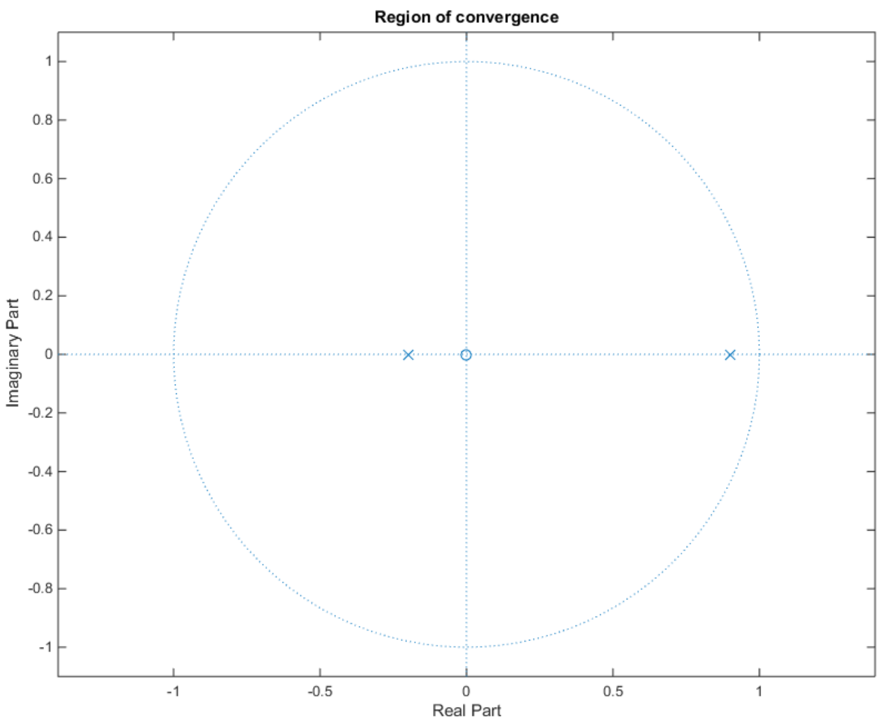
Το $k(n)$ στην συνέχεια συνελίσεται με το 2^o σύστημα:

$$k(n) * g_2(n) = y(n) \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} K(z) \cdot G_2(z) = Y(z)$$

Παρατηρούμε πως τα υποσυστήματα G_1 και G_2 είναι σε σειρά, άρα η συνάρτηση μεταφοράς όλου του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί ως το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων, μιας και μιλάμε για συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου.

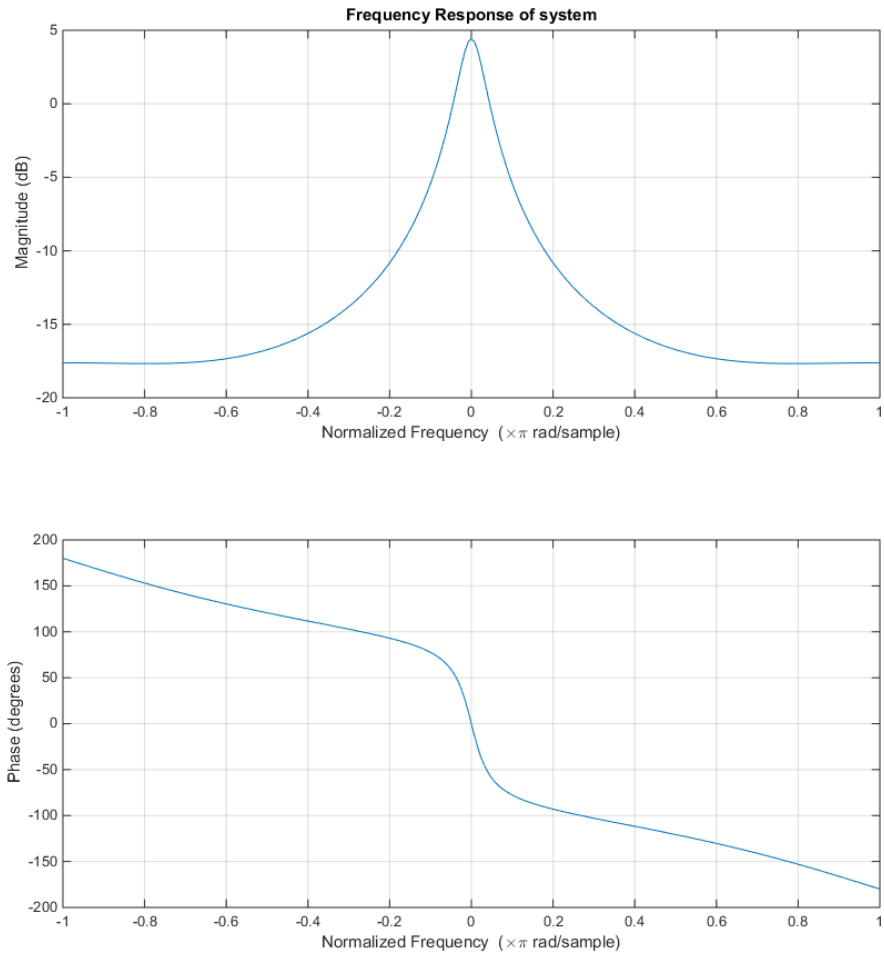
$$H(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) = \frac{0.2}{1-0.9z^{-1}} \cdot \frac{1}{z+0.2} = \frac{0.2}{(1-0.9z^{-1}) \cdot (z+0.2)}$$
$$= \frac{0.2}{z - 0.18z^{-1} - 0.7} = \frac{z}{z} \cdot \frac{0.2}{z-0.18z^{-1}-0.7} = \frac{0.2z}{z^2 - 0.18 - 0.7\, z} \Rightarrow$$
$$\boxed{H(z) = \frac{0.2\, z}{z^2 - 0.7z - 0.18}}$$

(β΄) Για την επιβεβαίωση των παραπάνω υπολογισμών, έγινε η αντίστοιχη διαδικασία στο matlab. Αρχικά έγινε ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς με την χρήση της $tf(num,\ denum)$, όπου num πίνακας με τιμές τους συντελεστές των δυνάμεων του z, του αριθμητή και $denum$ με τιμές αντοίστοιχα τους συντελεστές του παρανομαστή. Έπειτα υπολογίζουμε τους πόλους ($p_1 = -0.2$ $p_2 = 0.9$) και τα μηδενικά ($z = 0$), με χρήση κατάλληλων συναρτήσεων. Με βάση των παραπάνω, έγινε η γραφική απεικόνιση του διαγράμματος πόλων–μηδενικών της $H(z)$ με την χρήση της συνάρτησης $zplane()$ ώς εξής:



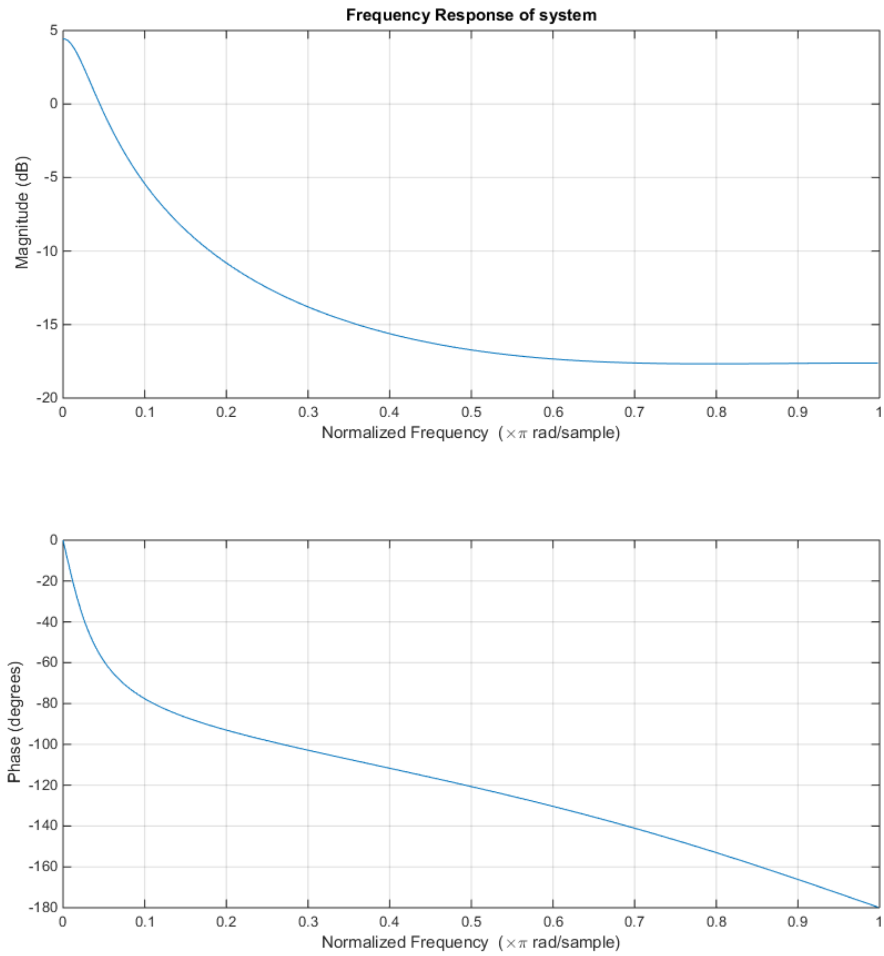
(γ′) Από το παραπάνω διάγραμμα, προκύπτει ότι το σύστημα έχει δύο(2) πόλους , $p_1 = -0.2$ $p_2 = 0.9$. Το σύστημα γνωρίζουμε ότι είναι αιτιατό άρα δεξιόπλευρο, οπότε το μέτρο του z είναι μεγαλύτερο από τον κατά μέτρο, μεγαλύτερο πόλο, δηλαδή $|z| > 0.9$. Οπότε η περιοχή σύγκλισης (ROC) του συστήματος είναι όλη η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου με ακτίνα $|z|$. Εφόσον η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, τότε το σύστημα είναι ευσταθές.

(δ′) Η απεικόνιση της απόκρισης της συγχνότητας του συστήματός μας, για έυρος συχνοτήτων στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και με βήμα $\frac{\pi}{128}$, έγινε με την χρήση της συνάρτησης $freqz()$. Το αποτέλεσμά της:



Στο διάγραμμα πλάτους παρατηρούμε ότι στο μιδενικό του συστήματος ($z = 0$) το πλάτος πέρνει την μεγιστη τιμή του. Αντίστοιχα στο διάγραμμα φάσης παρατηρούμε ότι στο μηδενικό έχουμε εναλλαγή φάσης.

Στην περίπτωση όπου δεν δοθεί το τρίτο όρισμα, η παραπάνω συνάρτηση θα επιστρέψει τις αποκρίσεις συγχνότητας από $\{0, \pi\}$. Οι γραφικές που προκύπτουν φαίνονται παρακάτω:

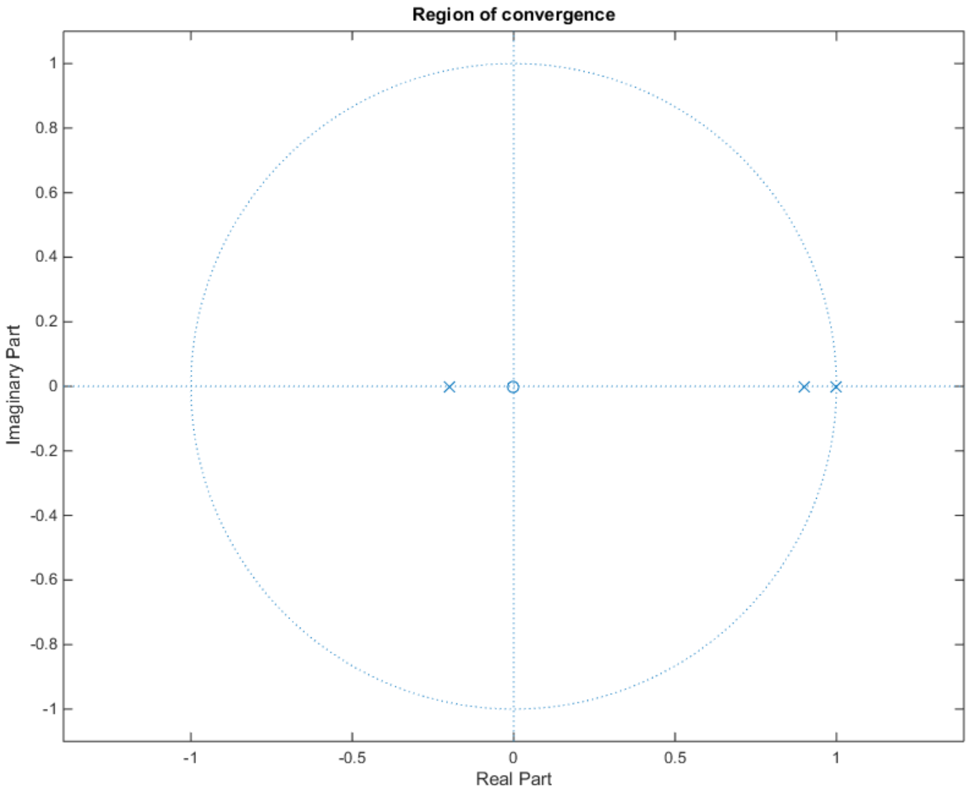


Τα διαγράμματα που προκύπτουν απεικονίζουν την απόκριση συχνότητας του συστήματος για το πλάτος και την φάση, αλλά μόνο στο θετικό ημιάξονα της συχνότητας.

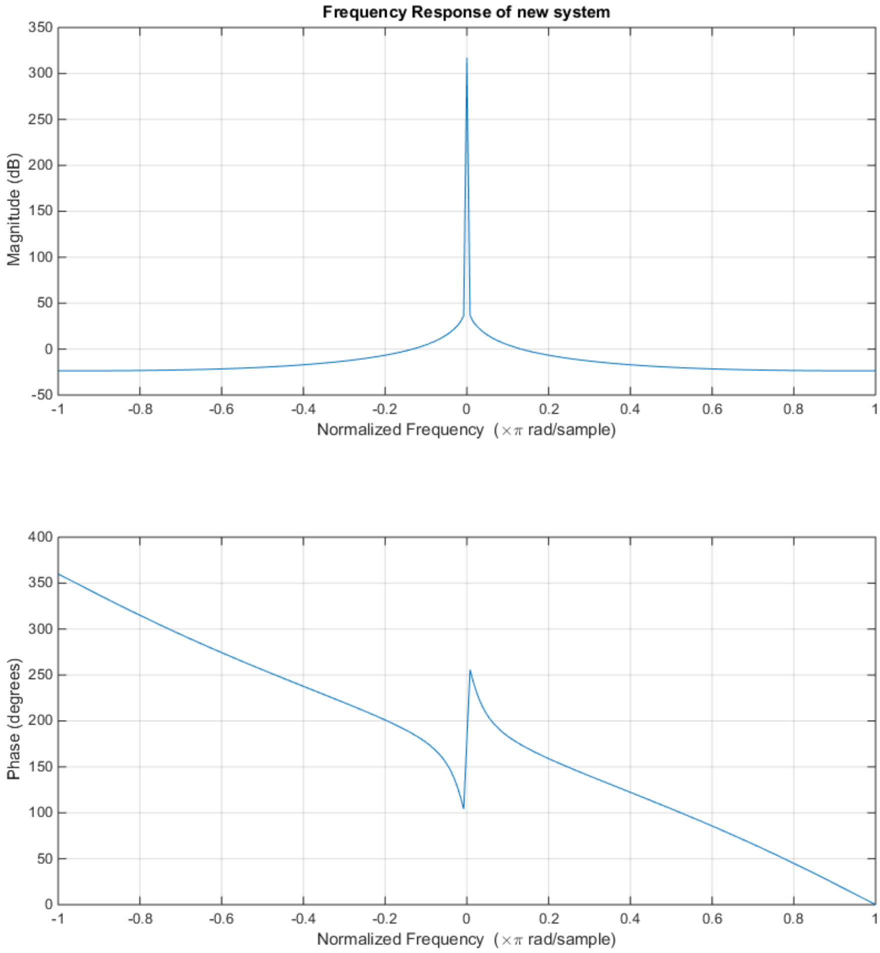
(ε′) Προσθέτοντας άλλον ένα πόλο για $z = 1$, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γίνεται:

$$H(z) = \frac{0.2\ z}{z^3 - 1.7z^2 + 0.52z + 0.18}$$

Το διάγραμμα πόλων - μηδενικών της νέας συνάρτησης μεταφοράς φαίνεται παρακάτω:



Όπως στο ερώτημα (δ΄), η απεικόνιση της απόκρισης της συγχνότητας του συστήματός μας, για εύρος συχνοτήτων στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και με βήμα $\frac{\pi}{128}$, έγινε με την χρήση της συνάρτησης $freqz()$. Το αποτέλεσμά της:



Παρατηρείται πως το πλάτος φθίνει απότομα όσο αυξάνεται η συχνότητα (κατά μέτρο), πολύ γρηγορότερα σε σχέση με το προηγούμενο σύστημα. Το ίδιο απότομες είναι και οι αλλαγές στην φάση, η οποία αλλάζει τιμές απότομα δεξιά και αριστερά του μηδενός αλλά και στις τιμές των πόλων

Η προσθήκη πόλου στο $z = 1$ αυξάνει το πλάτος, με αποτέλεσμα στο τείνει στο άπειρο στην τιμή '0'. Γενικά η προσθήκη πόλου μακριά από την αρχή των αξόνων (z-plane), αναγκάζει το πλάτος να αυξηθεί ενώ η προσθήκη μηδενικών έχει αντίθετη επίδραση.

2^{η} Άσκηση

(α΄) Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} \quad \forall\ |z| > 2$$

Θα μετατρέψουμε την H_z σε άθροισμα από γνωστά ζεύγοι.

$$H(z) = \frac{A}{1 - 2z^{-1}} \frac{B}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{A - A0.5z^{-1} + B - B2z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} \Leftrightarrow$$
$$(A + B) - (A0.5z^{-1} + B2z^{-1}) = 4 - 3.5z^{-1}$$

Άρα πρέπει

$$A + B = 4 \ \ \& \ \ A0.5z^{-1} + B2z^{-1} = 3.5z^{-1}$$
$$A = 4 - B \ \ \& \ \ \underbrace{(4 - B)0.5\cancel{z^{-1}} + B2\cancel{z^{-1}} = 3.5\cancel{z^{-1}}}_{B=1}$$
$$A = 3 \ \ \& \ \ B = 1$$

Επομένος μπορούμε να ξαναγράψουμε την συνάρτηση μεταφοράς ως εξής:

$$H(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Γνωρίζοντας ότι αντίστροφως μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης $b^n \cdot u(n)$ είναι η $\frac{1}{1-bz^{-1}}$ $\forall |z| > |b|$, αλλά και την πληροφία του ότι η H είναι δεξιόπλευρη, μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$H(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{3}{1 - 2z^{-1}}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}\right\} \Rightarrow h(n) = 3 \cdot 2^n u(n) + 0.5^n \cdot u(n)$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $residuez()$, μπορούμε εύκολα να προσδιορίζουμε του πόλους και τους συντελεστές των επιμέρους απλών κλασμάτων που συνθέτουν την συνάρτηση μεταφορά του συστήματος. Τα αποτελέματα που προκύπτουν είναι:

Συντελεστές: $A = 3$ $B = 1$
Πόλοι: $p_1 = 2$ $p_2 = 0.5$

Τα παραπάνω αποτελέσματα, επιβεβαιώνουν τους δικούς μας θεωρητικούς υπολογισμούς όπου σαν έξοδο λαμβάνουμε τα την ίδια συνάρτηση

```
Residue:      3, 1
Poles:        2, 0.5

Inverse z transform:
   n   / 1 \n
3 2  + | - |
       \ 2 /
```