- Есть 2 случайные величины $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$
- Пусть известно что, $\mathcal{Y} = y$
- Тогда $H(\mathcal{X}|\mathcal{Y} = y) = -\sum_{i=1}^{n}(p(\mathcal{X} = x_i|\mathcal{Y} = y) \cdot log(P(x = x_i|\mathcal{Y} = y)))$
- $H(\mathcal{X}|\mathcal{Y} = y)$ - это среднее кол-во информации в сообщении о значении X, если до этого было получено сообщение Y = y
- $H(\mathcal{X}|\mathcal{Y} = y)$ - это функция от св Y, т.е тоже СВ

ОПР(Условной энтропии)

Условная энтропия X при условии Y - мат ожидание $H(\mathcal{X}|\mathcal{Y} = y)$ $H(X|Y) =$
$M[H(\mathcal{X}|\mathcal{Y} = y)] =$
$-\sum_{j=1}^{k}(P(\mathcal{Y} = y_j) \cdot \sum_{i=1}^{n}(p(\mathcal{X} = x_i|\mathcal{Y} = y_j) \cdot log(P(x = x_i|\mathcal{Y} = y_j))) =$

- по формуле совместной вероятности $P(x, y) = P(y) \cdot P(x|y)$

$-\sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n}(P(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_j) \cdot log(P(x = x_i|\mathcal{Y} = y_j)))$

Замечание

- Если X, Y - независимые, тогда $\forall i, j : P(\mathcal{X} = x_i|\mathcal{Y} = y_j) = P(\mathcal{X} = x_i)$
- $\sum_{j=1}^{k} P(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_j) = P(\mathcal{X} = x_i)$
- Получаем что H(X|Y) = H(X)

Можно обобщить определение условной энтропии на 3 и более случайных величины

- $H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = -\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k} P(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_i) \cdot log(P(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_j)))$
- $H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}|\mathcal{Z}) = -\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k}(\sum_{t=1}^{m}(P(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_i, \mathcal{Z} = z_t) \cdot log(P(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_j|\mathcal{Z} = z_t))))$

Цепное правило(Главная теорема билета)

$H(X, Y) =$
$H(X) + H(Y|X) =$
$H(Y) + H(X|Y)$

Для случая с тремя случайными величинами

$H(X, Y|Z) =$
$H(X|Z) + H(Y|X, Z) =$
$H(Y|Z) + H(X|Y, Z)$

Д-ВО

$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$
для обычной энтропии
Тогда получаем $log(P(AB)) = log(P(B)) + log(P(A|B))$

- $log(P(B))$ -превращается в энтропию Y
- $log(P(A|B))$ - превращается в условную энтропию X при условии Y
- мы рассматриваем $log(P(X = x_i, Y = y_j))$ из опр H(X,Y)

Для условной энтропии

- мы рассматриваем $log(P(X = x_i, Y = y_j|Z = z_t))$ из опр H(X,Y|Z)

$P(AB|C) =$
$\frac{P(ABC)}{P(C)} =$
$\frac{P(BC) \cdot P(A|BC)}{P(C)} =$
$\frac{P(C) \cdot P(B|C) \cdot P(A|BC)}{P(C)} =$
$P(B|C) \cdot P(A|BC)$
$logP(X = x_i, Y = y_j|Z = z_t) = log(X = x_i|Y = y_j, Z = z_t) + log(Y = y_j|Z = z_t)$

- $log(X = x_i|Y = y_j, Z = z_t)$ превращается в $H(X|Y, Z)$
- $log(Y = y_j|Z = z_t)$ превращается в H(Y|Z)

■

Следствие из цепного правила и замечания

Если X, Y - независимы, то H(X,Y) = H(X) + H(Y)