- Сообщение о значении св Y пришло, какая тогда информация в конкретном сообщении о случайной величине X ?
  1. $J(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_j) = -log(P(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_j))$
- Информация о значении св X, без сообщения об Y
  2. $J(\mathcal{X} = x_i) = -log(P(\mathcal{X} = x_i))$
- **разность 2 - 1**
  - $-log(P(\mathcal{X} = x_i)) + log(P(\mathcal{X} = x_i, \mathcal{Y} = y_j))$
  - **Эта разность обозначается как** $J(\mathcal{X} = x_i \leftarrow \mathcal{Y} = y_j)$ **и представляет собой кол-во инфы в сообщении** $\mathcal{Y} = y_j$ **о том, что св** $\mathcal{X} = x_i$

Немного преобразуем $J(A \leftarrow B) = -log(P(A)) + log(P(A|B)) =$

- $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$-log(P(A)) - log(P(B)) + log(P(AB)) =$

- Видим что формула симитричная

$J(B \leftarrow A) =$

- Загоним всё под один логорифм

$log(\frac{P(AB)}{P(A) \cdot P(B)})$

- Видим, что $J(B \leftarrow A) = J(A \leftarrow B)$ зависит от того какое A и B мы возьмем(В нашем случае от индексо i и j, т.к они определяют значение случайных величин X и Y соответственно)
- Из этого следует, что $J(\mathcal{X} = x_i \Leftrightarrow \mathcal{Y} = y_j)$ - это функция от Случайной величины (X, Y), т.е тоже случайная величина
  - Пишем теперь двойную стрелку, т.к убедилилсь, что J$(X \leftarrow Y) = J(Y \leftarrow X)$

ОПР(Взаимная информация)

$I(X \leftrightarrow Y) = M[J(\mathcal{X} = x_i \Leftrightarrow \mathcal{Y} = y_j)]$ - взаимная информация между случайными величинами X и Y.

- это среднее кол-во информации, которое мы получаем в сообщение о значении одной случайной о значении другой случайной св
- Смотрим на значение одной св и получаем инфу о значении другой

Теорема о взаимной информации(Главная часть билета)

1. $0 \leq I(X \leftrightarrow Y)$
2. $I(X \leftrightarrow Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$

Д-ВО

$I(X \leftrightarrow Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (log(\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)}) \cdot P(X = x_i, Y = y_j))$

Д-ЖЕМ 2 часть теоремы

- Теперь разделываем эту формулу на части

$I(X \leftrightarrow Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (log(P(X = x_i, Y = y_j) - log(P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j))) \cdot P(X = x_i, Y = y_j))$

- $log(P(X = x_i, Y = y_j)) \cdot P(X = x_i, Y = y_j) = -H(X, Y)$ по опр H(X,Y)
- $-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} log(P(X = x_i)) \cdot P(X = x_i, Y = y_j) =$
  - $-\sum_{i=1}^{n} (log(P(X = x_i)) \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j))$
  - $-\sum_{i=1}^{n} (log(P(X = x_i)) P(X = x_i)) =$ H(X)
- $-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} log(P(Y = y_j)) \cdot P(X = x_i, Y = y_j) =$
  - $-\sum_{i=1}^{n} (log(P(Y = y_j)) P(Y = y_j)) =$ H(Y)

■

Д-ЖЕМ 1 часть теоремы

$\measuredangle -I(X \leftrightarrow Y) =$

$-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (log(\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)}) \cdot P(X = x_i, Y = y_j)) =$

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (log(\frac{P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j)}{P(X=x_i, Y=y_j)}) \cdot P(X = x_i, Y = y_j)) =$

$log(e)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(ln(\frac{P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)}{P(X=x_i,Y=y_j)})\cdot P(X=x_i,Y=y_j))\leq$

- вспоминаем, что $ln(x)\leq x-1$

$log(e)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\frac{P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)}{P(X=x_i,Y=y_j)}-1)\cdot P(X=x_i,Y=y_j))=$

- раскрываем скобки

$log(e)(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j))-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P(X=x_i,Y=y_j))=0$

- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P(X=x_i,Y=y_j)=1$
- $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j))=1$

Получаем, что $-I(X\leftrightarrow Y)\leq 0$

■

Следствие

Когда X,Y - независимые случайные величины,то $I(X\leftrightarrow Y)=0$