Опр(централизатор)

$Z(\rho) = \{e : \mathcal{M} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{M} | \rho \circ e = e \circ \rho\}$ - централизатор ρ

ОПР (Множество sub)

$w \in \Sigma^*$, то $sub(w) = \{v \in \Sigma^* | w \ \rho \ v\} \backslash w$

ОПР (Содержание слова)

Содержание слова $w \in \Sigma^*$ это $S(w) = \{a \in \Sigma | |w|_a > 0\}$

Предложение(Главная часть билета)

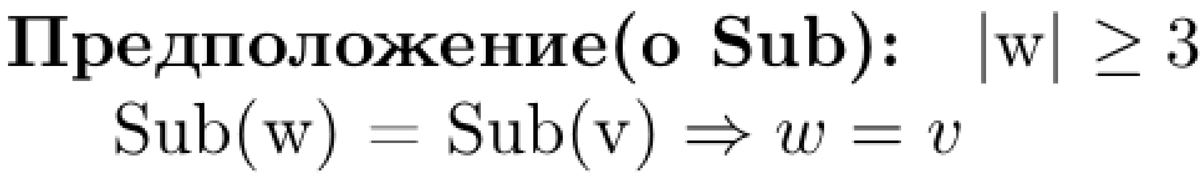

Рис. 1: alt text

Почему важно, что $|w| \geq 3$

- $sub(ab) = \{a, b\} = sub(ba), ab \neq ba$

Д-ВО

Сначала разберём случай, когда $|w| = 3$

в таком случае можно разделить все слова на 3 кучки по размеру содержания

$\mathbf{|S(w)| = 1}$

Тогда $\mathrm{S(w)} = \{\mathrm{a}\}$, $w = a^3$, $sub(a^3) = \{a^2\}$

- у если $sub(v) = \{a^2\}$, то $S(v) = \{a\}, |v| = 3 \Rightarrow v = a^3 = w$

$\mathbf{|S(w)| = 2}$**, т.е** $S(w) = \{a, b\}$

пусть: $|w|_a = 2, |w|_b = 1$

тогда $w = \begin{cases} a^2b \\ aba \\ ba^2 \end{cases} \Rightarrow \ sub(w) = \begin{cases} \{a^2, ab\} \\ \{a^2, ab, ba\} \\ \{a^2, ba\} \end{cases}$

если $sub(v) \in \{\{a^2, ab\}, \{a^2, ab, ba\}, \{a^2, ba\}\} \Rightarrow$

$S(v) = \{a, b\}, |v|_a = 2, |v|_b = 1$ т.е $v \in a^2b, aba, ba^2$

- У всех слов разные сабы, что значит, что sub(v) однозначно определяет v

$\mathbf{|S(w)| = 3}$**, т.е** $S(w) = \{a, b, c\}$

т.е w - анаграмма abc

$sub(abc) = \{ab, ac, bc\}$

Б.О.О $sub(v) = \{xy, xz, yz\} \Rightarrow S(v) = \{x, y, z\}, |v| = 3$, т.е v - тоже анаграма xyz

sub(v) задаёт порядок следования:

- x стоит раньше y и z
- y стоит раьньше z

$\Rightarrow sub(v)$ - однозначно задаёт слово v

Если $|w| \geq 4, |S(w)| > 1$

w - может начинаться с 2 одинаковых букв, либо не начинается

1. Б.О.О $w = a^2w'$

$sub(w) = \{aw', \{a^2x | w' \rho \ x\}\}$

если $sub(v) = \{aw', \{a^2x | w' \rho \ x\}\} \Rightarrow v = a^2w'$

- aw' - слово с наименьшим числом букв а в начале среди sub(v)
- у слов вида $\{a^2x | w' \rho \ x\}$ букв а в начале больше на 1

- по словам вида $\{a^2x|w'\rho\ x\}$, сможем однозначно найти слово aw', по которому легко востанавливается v(просто в начало a приписываем) $\Rightarrow$ v=w

Получается, что по sub(v) можем однозначно восстановить v

1. Б.О.О $w = abw'; |sub(w)| \geq 2$

Если $|sub(w)| > 2$,

- то в $sub(w)$ $\exists!$ слово, начинающиеся на b - слово bw'. Все остальные слова начинаются на a.
- Т.к $|sub(w)| > 2$, то слов, начинающихся на a, больше одного
- глядя на их кол-во слов, начинающихся с a узнаём какая первая буква. Глядя на слово bw' узнаём все остальные буквы

Получается, что однозначно восстанавливаем v

Если $|sub(w)| = 2 \Rightarrow sub(w) = \{bw', aw'\} \Rightarrow w' = b^{|w|-2}$

- Если бы была третья буква, то могли бы её вычеркнуть, и получили бы новое слово
- Если бы в w' была бы a, то могли бы её вычеркнуть и получить
  - если w' = uav($u, v \in \Sigma^k$), то $abuv \in sub(w)$: $abuv \neq buav$(очевидно) и $abuv \neq auav$, иначе бы получили, что bu = ua, причем у нас только буквы a и b.
  - т.е bu'=bu'a и тд по индукции получаем, что $u = b^{k-1}$, но тогда $b^k \neq b^{k-1}a$ $\otimes$

получаем, что $|w| = b^{|w|-2}$

$sub(w) = \{b^{|w|-1}, ab^{|w|-2}\}$

sub однозначно задаёт слово v $= ab^{|w|-1}$

Если $|S(w)| = 1, |w| \geq 4$

тогда $sub(w) = \{a^{|w|-1}\}$

однозначно восстанавливаем v $= a^{|w|}$

■