Следствие из теоремы

$\forall n > N, \forall u \in U_n : P(x^n = u) \in (2^{-2n(H(x)+\sigma)}, 2^{-2n(H(x)-\sigma)})$

Д-ВО

Доказательство. Заметим, что $-\sigma < \frac{1}{n}J(X^n = u) - H(x) < \sigma$

$$n(H(x) - \sigma) < J(X^n = u) < n(H(x) + \sigma)$$

$$n(H(x) - \sigma) < -\log P(X^n = u) < n(H(x) + \sigma)$$

$$-n(H(x) - \sigma) > \log P(X^n = u) > -n(H(x) + \sigma)$$

$$2^{-n(H(x)-\sigma)} > P(X^n = u) > 2^{-n(H(x)+\sigma)}$$

Это означает, что все типичные последовательности равновероятны.

Рис. 1: alt text

■

Теорема Шеннона о доле типичных последовательностей

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot log(|U_n|) = H(x)$

- т.е с ростом n кол-во типичных последовательностей ведёт себя как $2^{n(H(x))}$; $|U_n| \approx 2^{n(H(x))}$

Д-ВО (из следствия)

- сложим по U левое **неравенство из следствия из первой теоремы Шеннона**

$\sum_{u\in U_n} 2^{-n(H(x)+\sigma)} < \sum_{u \in U_n} P(x^n = u) = P(u \in U_n) \leq 1 \Rightarrow$

$|U_n| \cdot 2^{-n(H(x)+\sigma)} < 1$

- сложим по U правое **неравенство из следствия из первой теоремы Шеннона**

$\sum_{u\in U_n} P(x^n = u) < |U_n| \cdot 2^{-n(H(x)-\sigma)} \Rightarrow$

- вероятность противоположного события $P(u \in V_n) < \epsilon$, т.е когда слово редкое

$\forall \epsilon > 0 : 1 - \epsilon < P(u \in U_n)$

- т.к $\forall$ ϵ,то можно взять $\epsilon = 0 \Rightarrow$

$1 < |U_n| \cdot 2^{(-n(H(x))-\sigma)}$

- объединим неравенства

$|U_n| \cdot 2^{-n(H(x)+\sigma)} < |U_n| < |U_n| \cdot 2^{(-n(H(x))-\sigma)} \Rightarrow$

$H(x) - \sigma < \frac{1}{n} log(|U_n|) < H(x) + \sigma \Rightarrow$

$|\frac{1}{n} \cdot log(|U_n|) - H(x)| < \sigma$

■

Таким образом,

$$\forall \delta > 0\ \exists N\ \forall n > N : H(X) - 2\delta < \frac{1}{n}\log(|U_n|) < H(X) + 2\delta$$

это и есть определение предела.
Таким образом, $|U_n| \approx 2^{n \cdot H(X)}$.
Фактически, типичные последовательности соответствуют осмысленным текстам. Из первой теоремы Шеннона следует, что они равновероятны, а во второй мы писчитали, сколько их может быть.

Рис. 2: alt text