Опр(Стационарная модель открытого текста)

Стационарная модель открытого текста - это последовательность случайных величин $x_1, x_2, \cdots$ таких что

- x_i распределена на Σ,
- $\forall w \in \Sigma^k$, $\forall i, j \in \mathbb{N} : P(x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k} = w) = P(x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots x_{j+k},)$
- Вероятности появления символов/биграмм/н-грамм не зависят от их позиции в тексте, т.е $\forall k$ на Σ^k задано распределение вероятностей, работающее для любых подпоследовательностей длины k

Замечание 1

$\forall i, j, k \in \mathbb{N} : H(x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}) = H(x_{j+1}, x_{j+1}, \cdots, x_{j+1},)$

Д-ВО

Подставим в опр энтропии эти вероятности

$$H(X_{i+1}X_{i+2}...X_{i+t}) = -\sum w \in \Sigma^t P(X_{i+1}X_{i+2}...X_{i+t} = \omega) \log P(X_{i+1}X_{i+2}...X_{i+t} = \omega)$$

Рис. 1: alt text

■

Замечание 2

$\forall i, j, k, s \in \mathbb{N}$:
$H(x_{i+s+1}, x_{i+s+2}, \cdots, x_{i+s+k} | x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+s}) =$
$H(x_{j+s+1}, x_{j+s+2}, \cdots, x_{j+s+k} | x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+s})$

Д-ВО

Переименуем:

- $X = x_{i+s+1}, x_{i+s+2}, \cdots, x_{i+s+k}$
- $Y = x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+s}$

По цепному правилу получаем, что $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$
Переименуем:

- $Z = x_{j+s+1}, x_{j+s+2}, \cdots, x_{j+s+k}$
- $E = x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+s}$

По цепному правилу получаем, что $H(Z|E) = H(Z, E) - H(E)$
Правые части равны по 1ому замечанию => $H(Z|E) = H(X|Y)$
■
можем ввести обозначение $x_{i+1}, \cdot, x_{i+k} = x^k$ т.к распределение вероятностей не зависит от i и j, а зависит только от k

ОПР(Условная взаимная информация)

$I(X \leftrightarrow Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z) - H(X, Y|Z)$

Теорема

$I(X \leftrightarrow Y|Z) \geq 0$

Д-ВО (как в теореме о взаимной информации)

Теорема для стационарного источника открытого текста

1. $H(x|x^n) = H(x_{i+n+1}|x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}) \searrow$
2. $H_n(x) = \frac{H(x^n)}{n} \searrow$
3. $H_n(x) \geq H(x|x^{n-1})$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} H(x|x^n)$

Д-ВО 1

Знаем, что $H(X|Z) - H(X|Y,Z) = I(X \leftrightarrow Y|Z) \geq 0 \Rightarrow$

- $H(x|x^{n-1}) - H(x|x^n) \geq 0$

■

Д-ВО 2

$H(x_1, \cdots, x_n) =$ [цепное правило] $=$

$H(x_1, \cdots x_{n-1}) + H(x_n|x_1 \cdots x_{n-1})=$

- цепное правило применяем много раз, раскладывая энтропию

$H(x_1) + \cdots + H(x_2|x_1) + H(x_3|x_2x_1) + \cdots + H(x_n|x_1, \cdots x_{n-1})=$

- Поменяли индексы из-за **стационарности**

$H(x_n) + H(x_n|x_{n-1}) + H(x_n|x_{n-2}x_{n-1}) + \cdots + H(x_n|x_1 ... x_{n-1}) \geq$

- оценили снизу самым маленьким слагаемым. Самое маленькое по 1 пункту теоремы, т.к в нём больше всего условий

$n \cdot H(x_n|x_1, \cdots x_{n-1})$

$\measuredangle H(x_1, \cdots x_n) = H(x_1, \cdots x_{n-1}) + H(x_n|x_1 \cdots x_{n-1}) \leq$

$H(x_1, \cdots, x_{n-1}) + \frac{1}{n} \cdot H(x_1, \cdots x_n);$

- все слагаемые с n переносим влево

$\frac{n-1}{n} \cdot H(x_1, \cdots, x_n) \leq H(x_1, \cdots x_{n-1})$

$\frac{H(x_1, \cdots, x_n)}{n} \leq \frac{H(x_1, \cdots x_{n-1})}{(n-1)}$

■

Д-ВО 3

$H(x_1, \cdots, x_n) =$ [цепное правило] $=$

$H(x_1, \cdots x_{n-1}) + H(x_n|x_1 \cdots x_{n-1})=$

- цепное правило применяем много раз, раскладывая энтропию

$H(x_1) + \cdots + H(x_2|x_1) + H(x_3|x_2x_1) + \cdots + H(x_n|x_1, \cdots x_{n-1})=$

- Поменяли индексы из-за стационарности

$H(x_n) + H(x_n|x_{n-1}) + H(x_n|x_{n-2}x_{n-1}) + \cdots + H(x_n|x_1 ... x_{n-1}) \geq$

- оценили снизу самым маленьким слагаемым. Самое маленькое по 1 пункту теоремы, т.к в нём больше всего условий

$n \cdot H(x_n|x_1, \cdots x_{n-1})$

получаем, что $H(x_1, x_2, \cdots x_n) \geq n \cdot H(x_n|x_1, \cdots x_{n-1}) \Rightarrow H_n(x) \geq H(x_n|x_1, \cdots x_{n-1})$

■

Д-ВО 4

$H_n(x) \searrow$ и $H_n(x) \geq 0$, т.к энтропия ≥ 0

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} H_n(x)$ по Т.Вейерштрасса

Аналогично $\exists \lim\limits_{n\to\infty} H(x|x^n)$

- по пункту 3

$\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) \geq \lim\limits_{n\to\infty} H(x|x^n)$

Д-жем, $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} H(x|x^n)$

$\measuredangle H(x^n) = H(x_1, \cdots x_n) = H(x_1, \cdots x_m) + H(x_{m+1}, \cdots, x_n|x_1, \cdots m)=$

- применяем цепное правило для условной энтропии к $H(x_{m+1}, \cdots, x_n|x_1, \cdots m)$ много раз
- $H(x_1, \cdots x_m) = m \cdot H_m(x)$

$m \cdot H_m(x) + H(x_{m+1}|x_1, \cdots x_m) + H(x_{m+2}|x_1, \cdots, x_{m+1}) + H(x_n|x_1, \cdots, x_{n-1}) \leq$

- оценили самым большим слагаемым $H(x|x^m)$ в силу 1

$m \cdot H_m(x) + (n-m) \cdot H(x|x^m)$

Получили

$\forall n, m \leq n : H(x^n) \leq m \cdot H_m(x) + (n-m) \cdot H(x|x^m)$

- поделим на n

$H_n(x^n) \le \frac{m}{n} \cdot H_m(x) + \frac{(n-m)}{n} \cdot H(x|x^m)$

- т.е $\forall n, m \le n$, то выберем $m = \frac{n}{2}$

$H_{2m}(x^n) \le \frac{1}{2} \cdot H_m(x) + \frac{1}{2} \cdot H(x|x^m)$

- переходим к пределу по m

$\lim\limits_{m\to\infty} H_m(x) \le \frac{1}{2} \lim\limits_{m\to\infty} H_m(x) + \frac{1}{2} \lim\limits_{m\to\infty} H(x|x^m) \Rightarrow$

$\lim\limits_{m\to\infty} H_m(x) \le \lim\limits_{m\to\infty} H(x|x^m) \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) \le \lim\limits_{n\to\infty} H(x|x^n)$

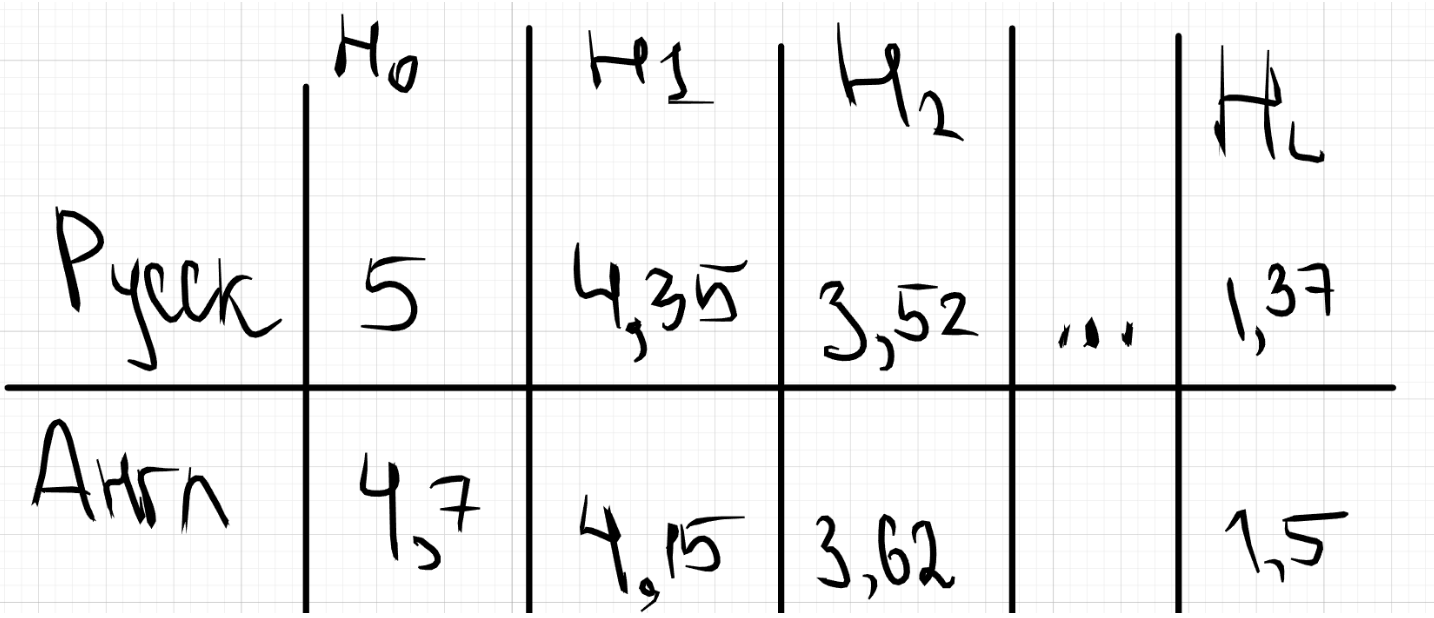
■

ОПР(Энтропия языка)

Энтропия языка L: $H_L = \lim\limits_{n\to\infty} H_n(x)$

Пусть:

- $H_0(x) = log(|\Sigma|)$
- $H_1(x) = -\sum_{i=0}^{l-1} p_i \cdot log(p_i)$



	H_0	H_1	H_2	...	H_L
Русск	5	4,35	3,52	...	1,37
Англ	4,7	4,15	3,62		1,5

Рис. 2: alt text

ОПР(Избыточность языка)

Избыточность языка L это $R_L = 1 - \frac{H_L}{log(|\Sigma|)} = 1 - \frac{H_L}{H_0}$

- Это доля неиспользуемой выразительной способности каждой буквы

Для русского языка $R_L = 73\%$

Для английского языка $R_L = 68\%$

Спроси, что еще можно рассказать про избыточность