# Про информацию

Информация всегда содержится в сообщении

## Как измерить информацию

### Первое предположение:

**Кол-во инфы в сообщение примерно пропорционально длине сообщения**. К сожалению это не всегда так, нужно просто послушать пьяные бредни алкашей и всё станет понятно - Слов дохуя, а смысла нихуя

### Второе предположение

**Кол-во информации в сообщении зависит от вероятности события**. Чем меньше вероятность возникновения события, тем больше информации несет сообщение.

### ОПР(Кол-во информации)

Пусть **кол-во информации** в сообщении "Произошло A" J(A) = J(произошло A) -это функция от вероятности события A.

- $J(A) = J(P(A)) \Rightarrow J : [0,1] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- J - это непрерывная функция(т.е если мы чуть-чуть изменим вероятность события A, то кол-во информации тоже изменится на чуть-чуть)
- J - монотонно убывающая функция
- Если $P(A) = 1 \Rightarrow J(A) = 0$
- Если A и B - независимые, то $J(A \cdot B) = J(A) + J(B)$
- Если $P(A) = \frac{1}{2}$, то $J(A) = 1$

# Теорема об информации

1. $\forall p, q \in [0,1] : J(p \cdot q) = J(p) + J(q)$
2. J(p) - непрерывная
3. $J(\frac{1}{2}) = 1$

Тогда $J(p) = -log(p)$

## Д-ВО

для 1ого свойства проведем индукцию по n и получим свойство 1')

1') $J(p^n) = n \cdot J(p)$

- сделаем замену $p^n = q \to n = q^{\frac{1}{n}}$

1' ')$\frac{1}{n} \cdot J(p) = J(q^{\frac{1}{n}})$

- Получили свойство 1' ') для чисел степеней обратных натуральным

$\measuredangle J(p^{\frac{m}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot J(p^m) = \frac{m}{n} \cdot J(p)$

- Получили аналог свойства 1) для рациональных степеней ($\mathbb{Q}^+$)

$J(\frac{1}{2}^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n} \cdot J(\frac{1}{2}) = \frac{m}{n}$

Теперь покажем, что $J(p)$ это именно $-log(p)$

- т.к $-log(p)$ - это действительное число, то можно построить 2 последовательности рациональных чисел, которые будут стремиться к нему сверху и снизу

$\{\frac{m_i}{n_i}\}_{i=0}^{\infty} \nearrow -log(p)$

$\{\frac{u_n}{v_i}\}_{i=0}^{\infty} \searrow -log(p)$

Тогда $\forall i : \frac{m_i}{n_i} < log(p) < \frac{u_n}{v_i} \Rightarrow$

$-\frac{m_i}{n_i} > log(p) > -\frac{u_n}{v_i} \Rightarrow$

$2^{-\frac{m_i}{n_i}} > p > 2^{-\frac{u_n}{v_i}} \Rightarrow$

- т.к J(p) - убываюящая, то меняем знак неравенства

$J(2^{-\frac{m_i}{n_i}}) < J(p) < J(2^{-\frac{u_n}{v_i}}) \Rightarrow$

$\frac{m_i}{n_i} < J(p) < \frac{u_n}{v_i} \Rightarrow$

- Делаем предельный переход по i

$-log(p) = \lim\limits_{i \to \infty} \frac{m_i}{n_i} \leq J(p) \leq \lim\limits_{i \to \infty} \frac{u_i}{v_i} = -log(p)$

$\blacksquare$

**ОПР(Стохастический вектор)**

$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \vec{x}$ - **стохастический вектор**, если верно:

- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\forall i : x_i \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

**ОПР(Энтропия)**

Пусть $\mathcal{X}$ - дискретная случайная величина.
Тогда $J(\mathcal{X} = x_i) = -log(P(\mathcal{X} = x_i))$

- $J(p)$ - это функция от случайной величины $\Rightarrow$ тоже случайная величина

**Энтропия случайной величины** $\mathcal{X}$ - Это мат.ожидание кол-ва информации

- $H(x) = M[J(x)]$
- $H(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i \cdot J(p_i) = -\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot log(p_i)$
- $H(x) = H(p_1, p_2, ...p_n) = H(\vec{p})$
- слагаемые вида $0 \cdot log(0)$ можно не учитывать в подсчете энтропии, они дают 0

## Свойства энтропии

1. $H(p_1, p_2, ...p_n, 0) = H(p_1, p_2, ...p_n)$
2. Пусть $\sigma \in S_n$. Тогда $H(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, ...p_{\sigma(n)}) = H(\vec{p})$
   - $\sigma \in S_n$ - это перестановки длины n
   - Т.е как бы мы не переставляли аргументы функции H(p), результат её не изменится
3. $0 \leq H(p_1, p_2, ...p_n) \leq log(n) = H(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ...\frac{1}{n})$ **правое равенство достигается при равномерном распределении**
4. $H(p_1, ...p_n) = H(p_1, \cdots, p_{n-2}, p_{n-1} + p_n) + H(p_{n-1} + p_n) \cdot H(\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}+p_n}, \frac{p_n}{p_{n-1}+p_n})$
   - Для д-ва просто подставь все в формулы

**Д-ВО( $\leq$ 3-его свойства)**

Сначала покажем, что $ln(x) \leq x - 1$

- Графики имеют единственную точку пересечения в (1, 0)

Сравним производные

- $(ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(x-1)' = 1$
- Видим, что $(ln(x))' = \frac{1}{x} < 1 = (x-1)'(\forall x > 1)$
- При $(0 < x < 1) : 1 < \frac{1}{x}$

$\measuredangle H(p) - log(n) =$
$-\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot log(p_i)$ - $log(n) =$

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$-\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot log(p_i)$ - $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot log(n) =$
$-\sum_{i=1}^{n} \cdot p_i \cdot (log(p_i) + log(n)) =$
$\sum_{i=1}^{n} \cdot p_i \cdot (log(\frac{1}{n \cdot p_i})) =$

- $log(x) = \frac{ln(x)}{ln(2)}$
- $ln(x) = \frac{log(x)}{log(e)}$

$log(e) \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot ln(\frac{1}{n \cdot p_i}) \leq$
$log(e) \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\frac{1}{n \cdot p_i} - 1) =$
$log(e)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i=n}^{n} p_i) = 0$
$\Rightarrow H(\vec{p}) - log(n) \leq 0$
Равенство будет при равномерном распределении. В этом случае $p_i = \frac{1}{n}$ и тогда $log(e) \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (\frac{1}{n \cdot p_i} - 1) = 0$
■