Вращательное движение

Про вращательное движение

Рассмотрим систему материальных точек, каждая из которых может как-то перемещаться, оставаясь в одной из плоскостей, проходящих через общую ось z (рис. 99). Все плоскости могут вращаться вокруг этой оси с одинаковой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

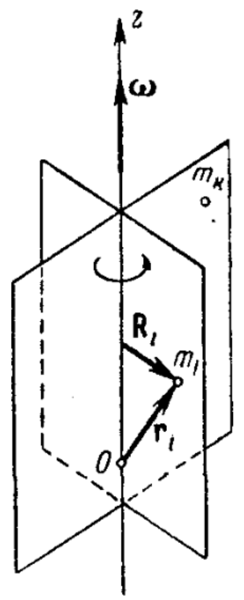

Рис. 99.

Согласно формуле (11.5) тангенциальная составляющая скорости i-й точки может быть представлена в виде:

$$\mathbf{v}_{\tau i} = [\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{R}_i],$$

где $\mathbf{R}_i$ — перпендикулярная к оси z составляющая радиуса-вектора $\mathbf{r}_i$ [ее модуль R_i дает расстояние точки от оси z]. Подставив это значение $\mathbf{v}_{\tau i}$ в формулу (37.4), получим выражение для момента импульса точки относительно оси z:

$$\mathbf{L}_{zi} = m_i\,[\mathbf{R}_i,\ [\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{R}_i]\,] = m_i R_i^2 \boldsymbol{\omega}$$

[мы воспользовались соотношением (11.3); векторы $\mathbf{R}_i$ и $\boldsymbol{\omega}$ взаимно перпендикулярны].

Просуммировав это выражение по всем точкам и вынеся общий множитель $\boldsymbol{\omega}$ за знак суммы, найдем для

момента импульса системы относительно оси z следующее выражение:

$$\mathbf{L}_z = \boldsymbol{\omega} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2. \tag{38.1}$$

Физическая величина

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2, \tag{38.2}$$

равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты их расстояний от оси z, называется **моментом инерции** системы материальных точек **относительно оси** z (отдельно взятое слагаемое $m_i R_i^2$ представляет собой момент инерции i-й материальной точки относительно оси z).

С учетом (38.2) выражение (38.1) принимает вид:

$$\mathbf{L}_z = I_z \boldsymbol{\omega}. \tag{38.3}$$

Подставив это выражение для $\mathbf{L}_z$ в соотношение (37.12), придем к уравнению:

$$\frac{d}{dt}(I_z \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_z, \tag{38.4}$$

которое является основным уравнением динамики вращательного движения. По форме оно сходно с уравнением второго закона Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f}.$$

В § 35 мы уже отмечали, что абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек с неизменными расстояниями между ними. Для такой системы момент инерции I_z относительно фиксированной оси z есть величина постоянная. Следовательно, уравнение (38.4) переходит для абсолютно твердого тела в уравнение:

$$I_z \boldsymbol{\beta} = \mathbf{M}_z, \tag{38.5}$$

где $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\omega}$ — угловое ускорение тела, $\mathbf{M}_z$ — результирующий момент внешних сил, действующих на тело.

Уравнение (38.5) похоже по форме на уравнение:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{f}.$$

Сопоставив уравнения динамики вращательного движения с уравнениями динамики поступательного движения, легко заметить, что при вращательном движении роль силы играет момент силы, роль массы — момент инерции и т. д. (табл. 2)

Поступательное движение	Вращательное движение
$m\mathbf{w} = \mathbf{f}$	$I_z\boldsymbol{\beta} = \mathbf{M}_z$
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$\mathbf{L}_z = I_z\boldsymbol{\omega}$
$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$
$\mathbf{f}$ — сила	$\mathbf{M}$ или $\mathbf{M}_z$ — момент силы
m — масса	I_z — момент инерции
$\mathbf{v}$ — линейная скорость	$\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость
$\mathbf{w}$ — линейное ускорение	$\boldsymbol{\beta}$ — угловое ускорение
$\mathbf{p}$ — импульс	$\mathbf{L}$ — момент импульса

Про момент инерции

Формула связывающая момент инерции и момент сил

$$I_z \cdot \beta = M_z$$

где:

$$I_z - \text{момент инерции } I = w \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r_i}^{\,2}$$

$$\beta - \text{угловое ускорение } \beta = \frac{dw}{dt}$$

$$M_z - \text{момент сил } M_z = \sum_i F_i \cdot r_i$$

Теорема Штейнера

Момент инерции тела, вращающегося вокруг произвольной оси, равен сумме моментов инерции проходящий через центр инерции и произведению массы на квадрат расстояния между осями

$$I = I_0 + ma^2$$

где

I_0- момент инерции в центре

a – расстояние между осями

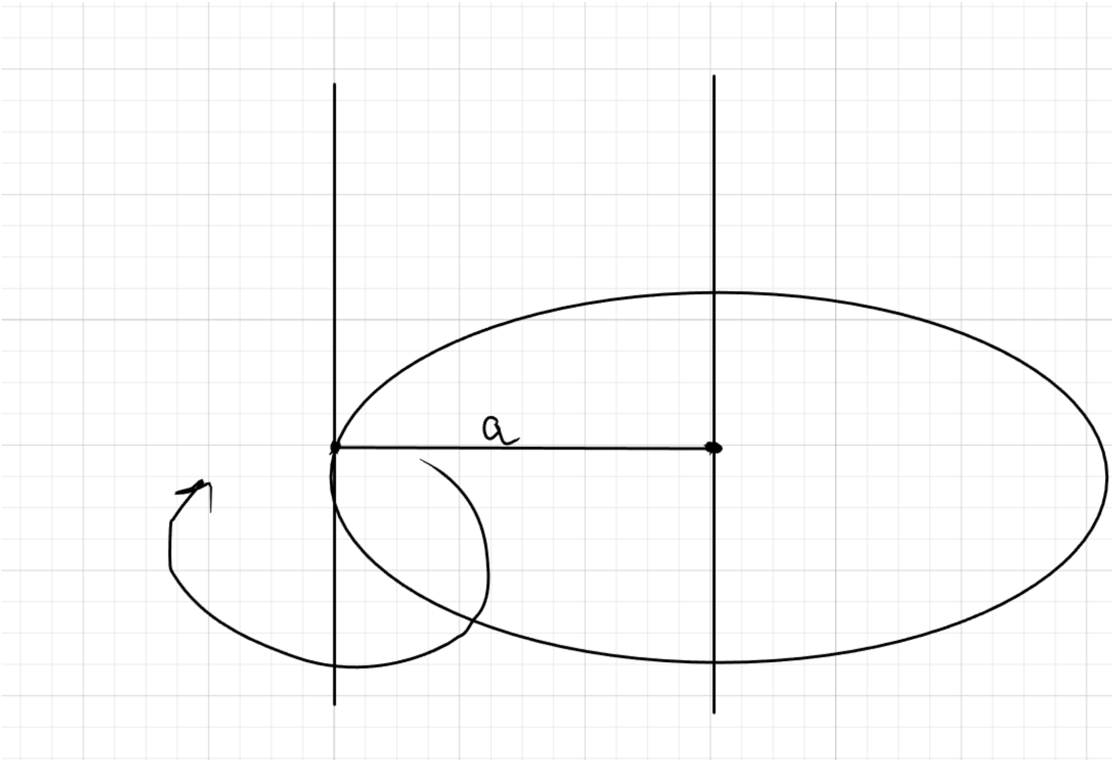

Figure 1: alt text

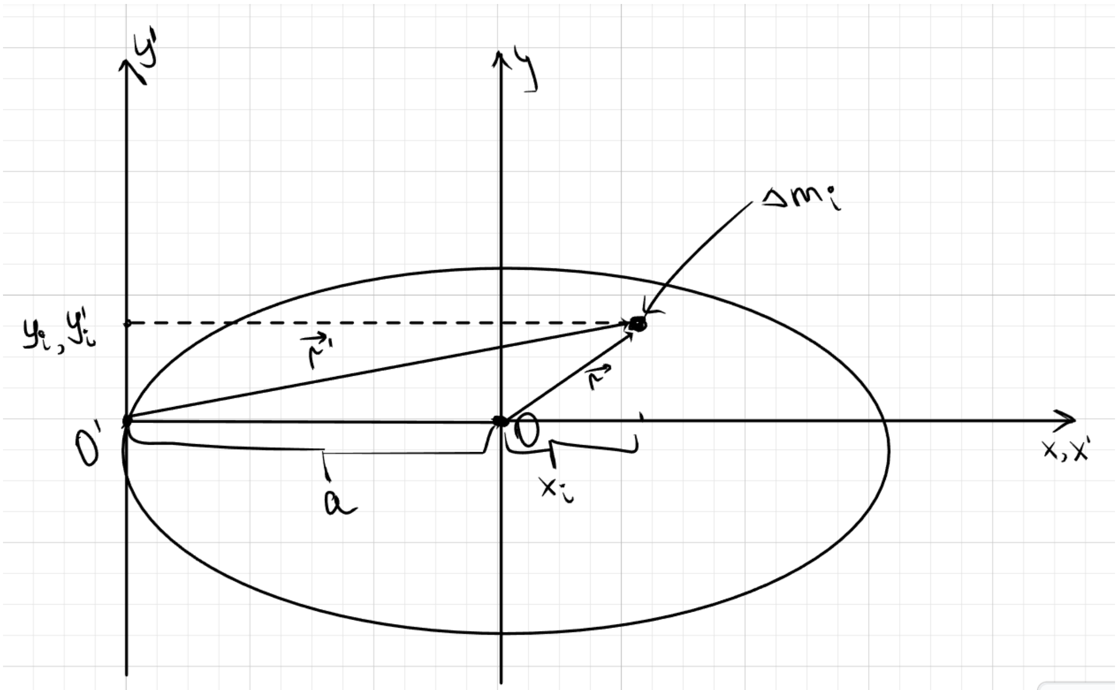

Figure 2: alt text

Д-во теоремы Штейнера

$$x_i' = x_i \ + \ a y_i' = y_i$$

по рисунку выражаем векторы $\vec{r}^2 \ \vec{r'}$

$$\vec{r}_i = x_i^2 + y_i^2 \vec{r}_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (a+x_i)^2 + y_i^2$$

По опр момента инерции получаем, что

$$I_0 = \sum \vec{r}_i \cdot \Delta m_i = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i I_0' = \sum \vec{r}_i'^2 \cdot \Delta m_i = \sum ((a+x_i)^2 + y_i^2) \Delta m_i$$

Время расскрыть скобочки у последнего момента инерции

$$I_0' = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i$$

Т.к ось проходит через центр инерци, то

$$X_c = 0, \ X_c = \frac{1}{m} \sum x_i \Delta m_i \Rightarrow \sum x_i \Delta m_i = 0$$

По итогу получаем, что

$$I_0' = I_0 + ma^2$$

ЧТД