

При криволинейном движении траектория тела представляет собой кривую линию, и даже если скорость постоянна по модулю, направление вектора скорости меняется, что приводит к возникновению ускорения, поэтому любое криволинейное движение имеет ускорение.

## Краткая выжимка:

### 1. Основные характеристики криволинейного движения

#### 1.1. Вектор скорости ( $\vec{v}$ )

- Направлен **по касательной** к траектории.
- Модуль скорости:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

где  $ds$  — элементарное перемещение вдоль траектории.

#### 1.2. Вектор ускорения ( $\vec{a}$ )

Полное ускорение можно разложить на две составляющие:

- **Тангенциальное ускорение ( $a_t$ )** — отвечает за изменение **модуля** скорости.
- **Нормальное ускорение ( $a_n$ )** — отвечает за изменение **направления** скорости.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

---

## 2. Тангенциальное ускорение ( $a_\tau$ )

- Направлено **по касательной** к траектории.
- Определяет быстроту изменения **модуля** скорости.

**Формула:**

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

- Если  $a_\tau > 0$  — скорость увеличивается.
- Если  $a_\tau < 0$  — скорость уменьшается (торможение).
- Если  $a_\tau = 0$  — движение **равномерное** (модуль скорости не меняется).

## 3. Нормальное (центростремительное) ускорение ( $a_n$ )

- Направлено **к центру кривизны** траектории.
- Обусловлено **изменением направления** скорости.

**Формула:**

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где  $R$  — **радиус кривизны** траектории в данной точке.

- Чем больше скорость  $v$  или чем меньше радиус  $R$ , тем больше  $a_n$ .
- В **прямолинейном движении**  $R \rightarrow \infty$ , поэтому  $a_n = 0$ .

## 4. Полное ускорение

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n},$$

где:

- $\vec{\tau}$  — единичный вектор касательной,
- $\vec{n}$  — единичный вектор нормали (к центру кривизны).

**Модуль полного ускорения:**

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

## 5. Частные случаи криволинейного движения

### 5.1. Равномерное криволинейное движение ( $|v| = \text{const}$ )

- $a_\tau = 0$  (скорость не меняется по модулю).
- $a = a_n = \frac{v^2}{R}$  (ускорение направлено к центру).

**Пример:**

- Движение по окружности с постоянной скоростью.

### 5.2. Неравномерное криволинейное движение ( $|v| \neq \text{const}$ )

- $a_\tau = \frac{dv}{dt} \neq 0$ .
- $a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0$ .

**Пример:**

- Движение по параболе (тело брошено под углом к горизонту).

# Полный билет:

Прежде чем приступить к нахождению ускорения в общем случае, рассмотрим простейший случай криволинейного движения — равномерное движение точки по окружности.

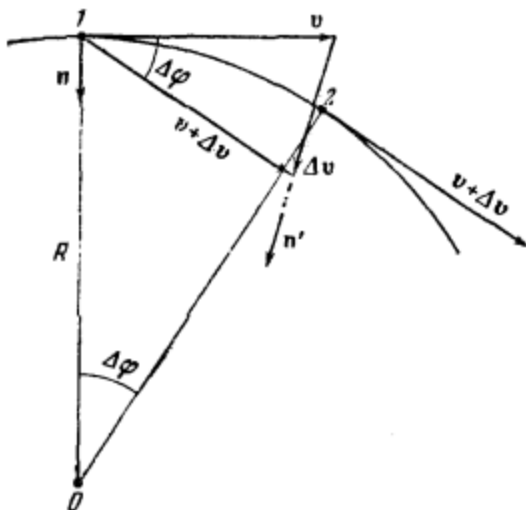


Рис. 24.

Пусть в рассматриваемый момент времени  $t$  точка находится в положении 1 (рис. 24). Спустя время  $\Delta t$  точка окажется в положении 2, пройдя путь  $\Delta s$ , равный дуге 1—2. При этом скорость точки  $v$  получает приращение  $\Delta v$ , в результате чего вектор скорости, оставаясь неизменным по величине (при равномерном

31

движении  $|v| = \text{const}$ ), повернется на угол  $\Delta\phi$ , совпадающий по величине с центральным углом, опирающимся на дугу длиной  $\Delta s$ :

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{R}, \quad (9.1)$$

где  $R$  — радиус окружности, по которой движется точка.

Напомню, что длина дуги 1-2 стремится к  $\Delta s$  (хорда между точками 1 и 2), т.к.  $\Delta t \rightarrow 0$ . Равенство центрального угла  $\Delta\phi$  и  $\Delta\phi$  внутри треугольника возникает из подобия этих треугольников (т.к. радиус перпендикулярен касательным)

Найдем приращение вектора скорости  $\Delta \mathbf{v}$ . Для этого перенесем вектор  $(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})$  так, чтобы его начало совпало с началом вектора  $\mathbf{v}$ . Тогда вектор  $\Delta \mathbf{v}$  изобразится отрезком, проведенным из конца вектора  $\mathbf{v}$  в конец вектора  $(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})$ . Этот отрезок служит основанием равнобедренного треугольника со сторонами  $\mathbf{v}$  и  $(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})$  и углом  $\Delta \phi$  при вершине. Если угол  $\Delta \phi$  невелик (что выполняется для малых  $\Delta t$ ), для сторон этого треугольника можно приближенно написать:

$$|\Delta \mathbf{v}| \cong v \Delta \phi^1).$$

Вектор  $\Delta \mathbf{v}$  можно представить в виде произведения его модуля на единичный вектор такого же направления, как и  $\Delta \mathbf{v}$ . Обозначим этот единичный вектор  $\mathbf{n}'$ . Тогда

$$\Delta \mathbf{v} = |\Delta \mathbf{v}| \mathbf{n}' \cong v \Delta \phi \mathbf{n}'.$$

Подставляя сюда  $\Delta \phi$  из (9.1), получаем:

$$\Delta \mathbf{v} \cong v \frac{\Delta s}{R} \mathbf{n}'. \quad (9.2)$$

Деля  $\Delta \mathbf{v}$  на  $\Delta t$  и делая предельный переход, получим ускорение

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \cong \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} \mathbf{n}'.$$

В этом выражении  $v$  и  $R$  — постоянные; отношение  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  в пределе даст модуль скорости  $v$ ; единичный вектор  $\mathbf{n}'$  в пределе сольется с единичным вектором  $\mathbf{n}$ , нормальным к окружности в точке  $I$  и направленным к центру. Таким образом,

$$\mathbf{w}_n \cong \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (9.3)$$

$w_n$  - **нормальное ускорение**, направлено по нормали к траектории (т.е. в любой момент времени  $t$  вектор движения ортогонален вектору нормали, направленного в центр окружности)

**Модуль нормального ускорения**  $w_n = \frac{v^2}{R}$

**Кривизна окружности** - мера кривизны равная величине  $\frac{1}{R}$

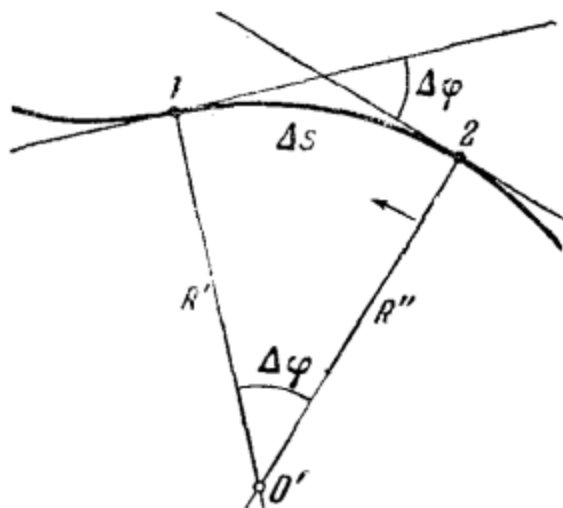


Рис. 26.

### **Док-во формулы кривизны: (фактически к билету не относится, но прочитав полезно)**

Аналитический кривизна кривой  $C$  определяется выражением

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

где  $\Delta \varphi$  — угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на  $\Delta s$  (рис. 26). Таким образом, кривизна характеризуется скоростью изменения

направления кривой, т. е. скоростью поворота касательной при перемещении вдоль кривой. Величина, обратная  $C$ , равна радиусу кривизны  $R$ . Легко убедиться в том, что в случае окружности определенный таким образом радиус кривизны совпадает с радиусом окружности.

Обратимся снова к рис. 26. Построим перпендикуляры к касательным в точках 1 и 2. Эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке  $O'$ , причем расстояния  $R'$  и  $R''$  будут, вообще говоря, неодинаковыми. Образует отношение  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ . Величину  $\Delta s$  можно приближенно заменить через  $R'\Delta\varphi$ . Тогда

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \approx \frac{1}{R'}.$$

Последнее приближенное равенство выполняется тем точнее, чем ближе точки 1 и 2, т. е. чем меньше  $\Delta s$ . Устремив  $\Delta s$  к нулю, мы получим кривизну:

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{R'}.$$

Если точку 2 приближать неограниченно к точке 1, пересечение перпендикуляров  $O'$  будет стремиться к некоторой точке, которая будет представлять собой центр кривизны. Оба расстояния,  $R'$  и  $R''$ , будут стремиться к одному и тому же пределу  $R$ , равному радиусу кривизны. Величина, обратная  $R$ , дает кривизну линии в точке 1.

## Обратно к билету:

Теперь найдем ускорение точки, движущейся по произвольной плоской кривой. Разложим вектор приращения скорости  $\Delta \mathbf{v}$  (соответствующий промежутку времени  $\Delta t$ , за который точка перемещается из положения 1 в положение 2) на две составляющие:  $\Delta \mathbf{v}_n$  и  $\Delta \mathbf{v}_\tau$  (рис. 27). Эти составляющие выберем так, чтобы расстояние от точки 1 до конца вектора  $\Delta \mathbf{v}_n$  было равно модулю скорости  $v$  в начальный момент. Тогда, очевидно, модуль вектора  $\Delta \mathbf{v}_\tau$  будет равен приращению модуля скорости:

$$|\Delta \mathbf{v}_\tau| = \Delta |\mathbf{v}| = \Delta v.$$

Введя единичный вектор  $\boldsymbol{\tau}'$ , совпадающий по направлению с вектором  $\Delta \mathbf{v}_\tau$ , последний можно представить в следующем виде:

$$\Delta \mathbf{v}_\tau = \Delta v \boldsymbol{\tau}'. \quad (9.5)$$

34

Повторив рассуждения, которые привели нас к формуле (9.4), можно получить, что

$$\Delta \mathbf{v}_n = v \frac{\Delta s}{R'} \mathbf{n}'. \quad (9.6)$$

Вектор полного ускорения по определению равен

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t}.$$

С учетом (9.6)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R'} \frac{\Delta s}{\Delta t} \mathbf{n}'.$$



В пределе  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  даст модуль скорости  $v$ ,  $R'$  — радиус кривизны  $R$ , а вектор  $\mathbf{n}'$  совпадет с  $\mathbf{n}$  — единичным

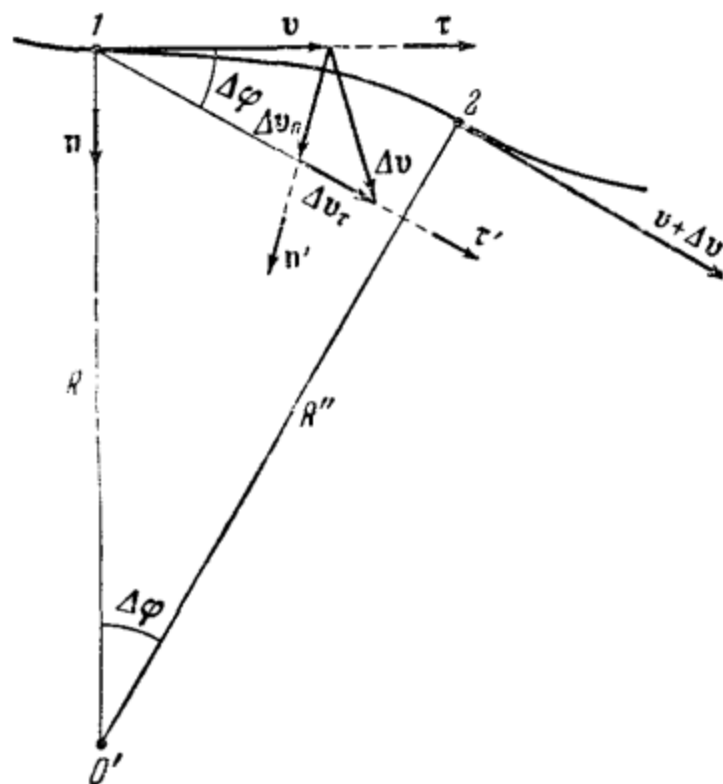


Рис. 27.

вектором нормали к траектории в точке 1. Обозначим этот предел  $\mathbf{w}_n$ :

$$\mathbf{w}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (9.7)$$

Второй предел (обозначим его  $\mathbf{w}_\tau$ ) с учетом (9.5) равен

$$\mathbf{w}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \boldsymbol{\tau}'.$$

При переходе к пределу вектор  $\tau'$  совпадет с  $\tau$  — единичным вектором, направленным по касательной к траектории в точке  $I$  в сторону движения и тождественным единичному вектору скорости  $v$  (см. (2.6)):

$$\tau = \frac{v}{v}.$$

Окончательно,

$$w_\tau = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) \tau = \frac{dv}{dt} \tau. \quad (9.8)$$

Итак, вектор  $w$  может быть представлен в виде суммы двух векторов  $w_n$  и  $w_\tau$  (рис. 28), один из которых ( $w_n$ ) перпендикулярен к вектору скорости  $v$  и направлен к центру кривизны траектории, а второй ( $w_\tau$ ) направлен по касательной к траектории. Если скорость растет по величине ( $\frac{dv}{dt}$  положительно), то  $w_\tau$  направлен в сторону движения, если скорость по величине убывает ( $\frac{dv}{dt}$  отрицательно), то  $w_\tau$  направлен в сторону, противоположную направлению движения.

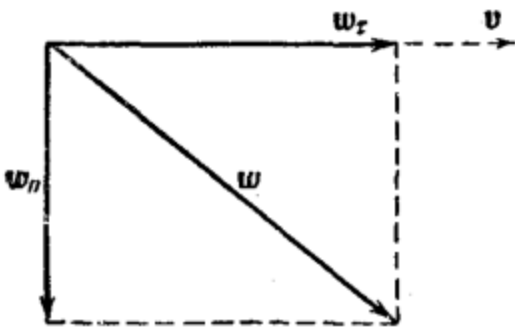


Рис. 28.

**Вектор  $w_\tau$  называют тангенциальным ускорением.** Он характеризует изменение скорости по величине. Если скорость по величине не изменяется, тангенциальное ускорение = 0 и  $w_n = w$

**Вектор  $w_n$  называют нормальным ускорением** характеризует изменение скорости по направлению. Если направление скорости не изменяется, движение происходит по прямолинейной траектории, кривизна прямой равна нулю (радиус кривизны  $R$  соответственно равен бесконечности), следовательно, нормальное ускорение = 0 и  $w = w_\tau$

**Модуль полного ускорения:**

В общем случае модуль полного ускорения равен (рис. 28):

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$