Импульс

2-ой закон Ньютона: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$. Т.к. m - это константа, то её можно занести под знак дифференциала:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

Векторная величина $\vec{p} = m\vec{v}$ называется **импульсом**.

Получается, что 2-ой закон Ньютона можно записать через импульс:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему из n материальных точек(тел). **Импульсом системы** p называется векторная сумма импульсов тел, образующих систему:

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_N = \sum_{i=1}^{N} p_i$$

Центр инерции это точка, положение которой задаётся радиус вектором

r_c где $r_c = \frac{m_1\vec{r_1} + ... + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$, $m_i -$ масса iого тела, $r_i -$ радиус вектор

Декартовы координаты центра инерции равны проекциям $\mathbf{r}_c$ на координатные оси:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \quad (23.2)$$

Отметим, что центр инерции совпадает с центром тяжести системы [1]).

Скорость центра инерции получается путем дифференцирования $\mathbf{r}_c$ по времени:

$$\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{m}$$

Скорость центра инерции получается путем дифференцирования $\mathbf{r}_c$ по времени:

$$\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{m}$$

Учитывая, что $m_i \mathbf{v}_i$ есть $\mathbf{p}_i$, а $\sum \mathbf{p}_i$ дает импульс системы $\mathbf{p}$, можно написать

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c. \tag{23.3}$$

Таким образом, импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции.

Пусть система состоит из трех тел (рис. 51). Каждой из внутренних сил, например $\mathbf{f}_{12}$, т. е. силе, с которой на тело *1* воздействует тело *2*, соответствует сила $\mathbf{f}_{21}$, с которой тело *1* воздействует на тело *2*, причем по третьему закону Ньютона $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$. Символами $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$ обозначены результирующие всех сил, с которыми внешние тела воздействуют соответственно на 1-е, 2-е и 3-е тело системы.

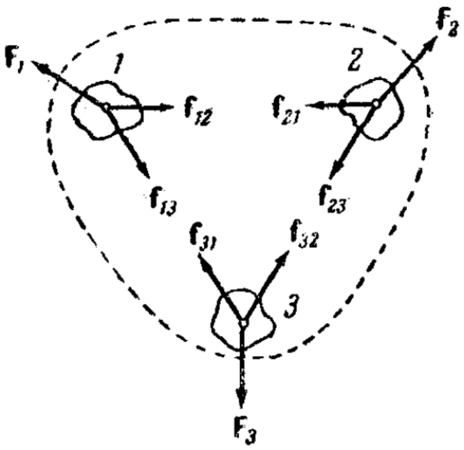

Рис. 51.

Напишем для каждого из трех тел уравнение (22.3)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_2 = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23} + \mathbf{F}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_3 = \mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32} + \mathbf{F}_3.$$

Сложим все три уравнения вместе. Сумма внутренних сил будет равна нулю, вследствие чего

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3. \qquad (23.4)$$

При отсутствии внешних сил получается, что

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0,$$

следовательно, для замкнутой системы $\mathbf{p}$ постоянен.

При отсутствии внешних сил импульс замкнутой системы постоянен

Этот результат легко обобщить на систему, состоящую из произвольного числа тел N. Пользуясь сокращенной записью сумм, уравнение (22.3) для всех N тел можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{F}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \qquad (23.5)$$

Выражение (23.5) представляет собой систему N уравнений, отличающихся друг от друга значением индекса i. Суммирование в каждом из этих уравнений производится по индексу k, причем в i-м уравнении индекс k пробегает все значения от 1 до N, кроме значения $k = i$.

Складывая эти уравнения, с учетом того, что $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki}$, получим:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i. \tag{23.6}$$

Следовательно, производная по времени от вектора импульса системы равна векторной сумме всех внешних сил, приложенных к телам системы.

Для замкнутой системы правая часть соотношения (23.6) равна нулю, вследствие чего $\mathbf{p}$ не зависит от времени. Это утверждение представляет собой содержание закона сохранения импульса, который формулируется следующим образом: *импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*