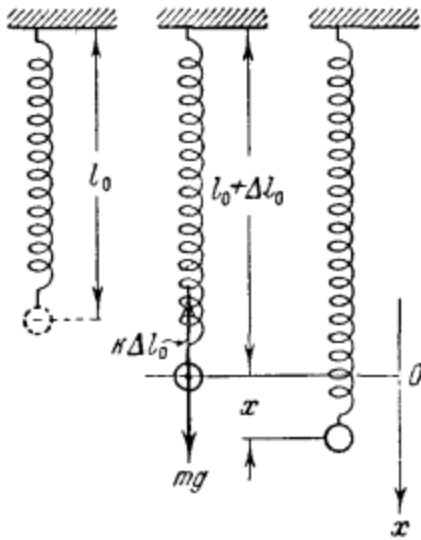


Гармонические колебания.



В состоянии равновесия сила mg уравнивается упругой силой:

$$mg = k\Delta l$$

Если сместить шарик от положения равновесия на расстояние x , то удлинение пружины будет $\Delta l + x$ и проекция результирующей силы на ось x примет значение

$$F = mg - k(\Delta l + x)$$

Учитывая условия равновесия:

$$f = -kx \quad \text{- сила упругости}$$

"-" обозначает, что смещение и сила имеют противоположные направления.

В рассмотренном примере сила - упругая. Но может быть так, что сила иного происхождения обнаруживает такую же закономерность, то есть будет равна силе упругости. Сила такого вида называется - *квазиупругими*.

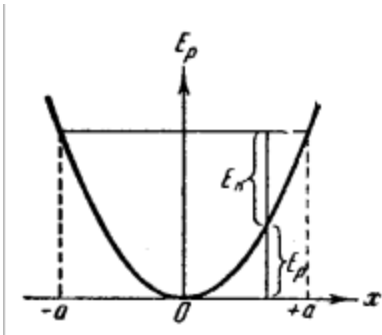
Для того, чтобы сообщить системе о смещении x , нужно совершить против квазиупругой силы работу:

$$A = \int_0^x (-f) dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

Эта работа идет на создание запаса потенциальной энергии:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Обратимся к системе, изображенной на рисунке:



Сообщим шарiku смещение $x = a$. Под действием силы $f = -kx$ шарик будет двигаться к положению равновесия со всевозрастающей скоростью $v = \dot{x}$. При этом потенциальная энергия убывает, а кинетическая энергия всевозрастающая

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Если нет трения то $x \in [-a; a]$

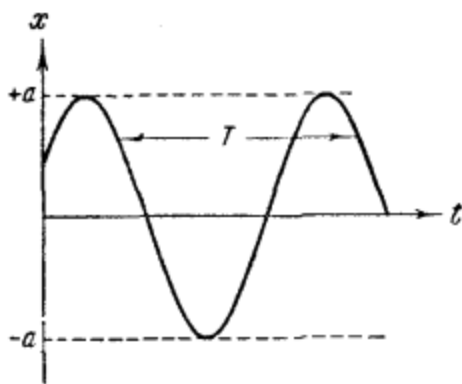
2-ой Закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{где} \quad \ddot{x} = a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 > 0$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ - линейное однородное дифференциальное уравнение 2го порядка.

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$



$$\omega_0(t + T) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad - \text{Период колебаний}$$

$$\nu = \frac{1}{T} \quad - \text{Частота колебаний}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad - \text{циклическая частота}$$

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{выражение скорости})$$

$$a\omega_0 \quad - \text{Амплитуда колебаний скорости}$$

$$a_{\text{уск}} = \ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$$

$$a\omega_0^2 \quad - \text{ускорение}$$

Энергия Гармонических Колебаний.

Квазиупругая сила является консервативной, поэтому *полная энергия гармонических колебаний* - постоянна.

$$E_{pmax} = \frac{a^2 \cdot k}{2}; \quad E_{kmax} = \frac{mV_{max}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2};$$

$$V_{max} = a\omega_0, \text{ где } \omega_0 - \text{частота.}$$

При максимальном отклонении:

$$E_{\text{полн}} = E_{pmax}$$

При прохождении положения равновесия:

$$E_{\text{полн}} = E_{k\text{max}}$$

Как изменяется со временем кинетическая и потенциальная энергии:

Кинетическая энергия:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Потенциальная энергия:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Тогда полная энергия:

$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}$$

Используя формулы тригонометрии можно придать другой вид E_k и E_p :

$$E_k = E \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos[2(\omega_0 t + \alpha)] \right]$$

$$E_p = E \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin[2(\omega_0 t + \alpha)] \right]$$