

Затухающие колебания

Во время реальных колебаний в системе всегда присутствуют силы сопротивления, которые постепенно уменьшают энергию системы. Если убыль энергии не восполняется за счёт энергии внешних сил, то колебания будут **затухающими**

Будем рассматривать только малые колебания. Тогда и скорость системы будет малой, а при небольших скоростях **сила сопротивления** пропорциональна величине скорости:

$$f_r = -rv = -r\dot{x}$$

Где

r — коэффициент сопротивления

f_r — сила сопротивления

Напишем для колеблющегося тела уравнение второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}.$$

Перепишем его следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (73.2)$$

где применены обозначения:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad (73.3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (73.4)$$

ным. Наличие сопротивления среды приводит к тому, что размах колебаний уменьшается. Поэтому попробуем искать решение уравнения (73.2) в виде

$$x = a(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (73.5)$$

где $a(t)$ — некоторая функция времени.

Продифференцировав (73.5) по t , найдем \dot{x} и \ddot{x} :

$$\dot{x} = \dot{a} \cos(\omega t + \alpha) - a\omega \sin(\omega t + \alpha),$$

$$\ddot{x} = \ddot{a} \cos(\omega t + \alpha) - 2\dot{a}\omega \sin(\omega t + \alpha) - a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

После подстановки этих выражений в уравнение (73.2) и несложных преобразований приходим к следующему соотношению:

$$[\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a] \cos(\omega t + \alpha) - 2\omega[\dot{a} + \beta a] \sin(\omega t + \alpha) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к двум уравнениям:

$$\dot{a} + \beta a = 0, \quad (73.6)$$

$$\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0. \quad (73.7)$$

Уравнение (73.6) можно представить в виде

$$\frac{da}{dt} = -\beta a, \quad \text{откуда} \quad \frac{da}{a} = -\beta dt.$$

Интегрирование последнего уравнения дает $\ln a = -\beta t + \ln a_0$, где через $\ln a_0$ обозначена постоянная интегрирования. Наконец, произведя потенцирование найденного соотношения, получим для $a(t)$ следующее выражение:

$$a = a_0 e^{-\beta t}. \quad (73.8)$$

Легко видеть, что $\dot{a} = -\beta a$ и $\ddot{a} = \beta^2 a$. Подстановка этих значений в уравнение (73.7) приводит к соотношению

$$\beta^2 a - 2\beta^2 a + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0,$$

249

из которого после сокращения на отличный от нуля множитель a получается значение ω^2 :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (73.9)$$

При условии, что $\omega_0^2 > \beta^2$, величина ω будет вещественной, и решение дифференциального уравнения (73.2) может быть представлено в виде (73.5). Таким образом, при не слишком большом затухании (при $\beta < \omega_0$) колебания описываются функцией

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (73.10)$$

График этой функции дан на рис. 182. Пунктирными линиями показаны пределы, в которых находится смещение колеблющейся точки x .

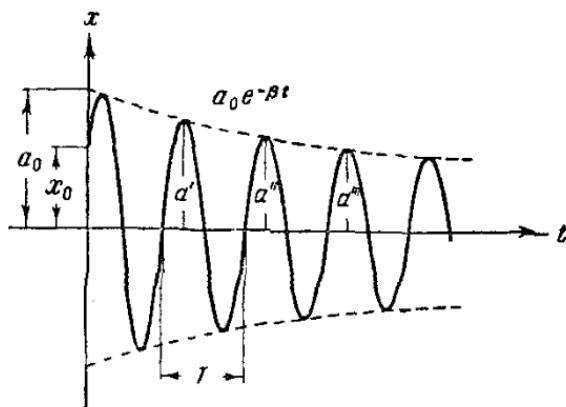


Рис. 182.

В соответствии с видом функции (73.10) движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание частоты ω с амплитудой, изменяющейся по закону (73.8). Верхняя из пунктирных кривых на рис. 182 дает график функции

$a(t)$, причем величина a_0 представляет собой амплитуду в начальный момент времени. Начальное смещение x_0 зависит, кроме a_0 , также от начальной фазы α : $x_0 = a_0 \cdot \cos \alpha$ (рис. 182).

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\beta = r/2m$, которую называют коэффициентом затухания. Найдем время τ , за которое амплитуда уменьшается в e раз. По определению $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, откуда $\beta\tau = 1$. Следовательно, коэффициент затухания обратен по величине тому промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз.

Согласно формуле (73.9) период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (73.11)$$

При незначительном сопротивлении среды ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) период колебаний практически равен $T_0 = 2\pi/\omega_0$. С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается.

Последующие наибольшие отклонения в какую-либо сторону (например, a' , a'' , a''' и т. д. на рис. 182) образуют геометрическую прогрессию. Действительно, если $a' = a_0 e^{-\beta t}$, то $a'' = a_0 e^{-\beta(t+T)} = a' e^{-\beta T}$, $a''' = a_0 e^{-\beta(t+2T)} = a'' e^{-\beta T}$ и т. д. Вообще, отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, равно

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Это отношение называют декрементом затухания, а его логарифм — логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T. \quad (73.12)$$

Найдем импульс системы, совершающей затухающие колебания. Продифференцировав функцию (73.10) по времени и умножив полученный результат на массу m , получим

$$p = m\dot{x} = -ma_0e^{-\beta t}[\beta \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

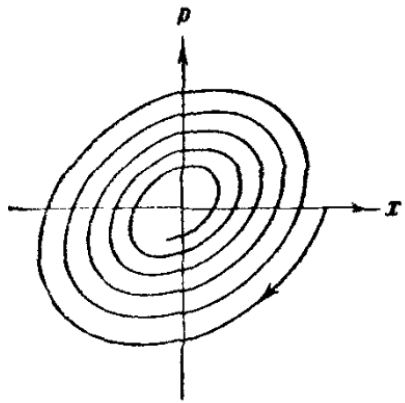


Рис. 183.

Это выражение может быть преобразовано к виду

$$p = p_0e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi), \quad (73.14)$$

где $p_0 = ma_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \approx ma_0\omega_0$, а ψ удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Если бы не множитель $e^{-\beta t}$, то, исключив t из уравнений (73.10) и (73.14), подобно тому как это было осуществлено в § 71, мы получили бы в координатах x и p уравнение эллипса, повернутого по отношению к координатным осям. Наличие экспоненциального множителя $e^{-\beta t}$ приводит к тому, что эллипс превращается в скручивающуюся спираль (рис. 183). Эта спираль и представляет собой фазовую траекторию затухающего колебания. Она будет наклонена по отношению к координатным осям тем сильнее, чем больше коэффициент затухания β .

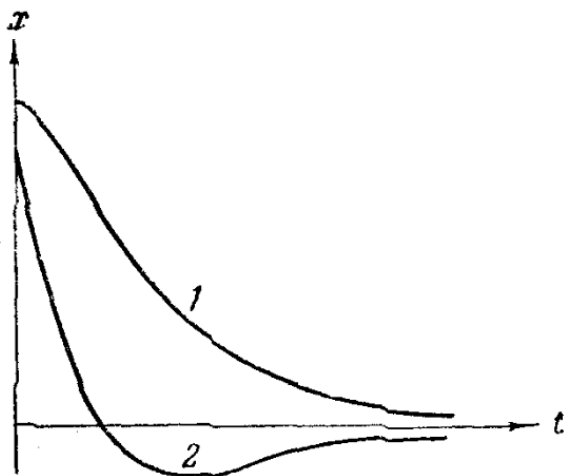


Рис. 184.

Из формулы (73.11) следует, что при $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$ период колебаний обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. Соответствующий математический анализ дает, что при $\omega_0^2 - \beta^2 \leq 0$ движение носит аperiодический (непериодический) харак-

252

тер — выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. На рис. 184 показано два возможных способа возвращения системы к положению равновесия при аperiодическом движении. Каким из этих способов приходит система в положение равновесия, зависит от начальных условий. Движение, изображаемое кривой 2, получается в том случае, когда система начинает двигаться из положения, характеризуемого смещением x_0 , к положению равновесия с начальной скоростью v_0 , определяемой условием

$$|v_0| > |x_0|(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}).$$

Вынужденные колебания

Вынужденными называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы (мы будем называть ее вынуждающей силой). Пусть вынуждающая сила изменяется со временем по гармоническому закону

$$f = F_0 \cos \omega t. \quad (75.1)$$

254

При составлении уравнения движения нужно учесть, кроме вынуждающей силы, также те силы, которые действуют в системе при свободных колебаниях, т. е. квазиупругую силу и силу сопротивления среды. Предполагая колебания достаточно малыми, будем по-прежнему считать силу сопротивления пропорциональной скорости. Тогда уравнение движения запишется следующим образом:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{r}{2m}$ — коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — собственная частота колебаний системы.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения мы уже знаем [см. функцию (73.10), являющуюся общим решением уравнения (73.2)]. Оно имеет вид

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha'), \quad (75.3)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а a_0 и α' — произвольные постоянные.

Остается найти частное (не содержащее произвольных постоянных) решение уравнения (75.2). Предположим, что это решение имеет вид

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (75.4)$$

(в данном случае удобно обозначить начальную фазу вместо α через $-\varphi$). С помощью векторной диаграммы (см. § 68 и 69) легко убедиться в том, что наше предположение справедливо, а также определить значения a и φ , при которых функция (75.4) удовлетворяет уравнению (75.2). Дифференцируя (75.4) по времени, первые два члена уравнения (75.2) можно представить в

255

следующем виде:

$$2\beta \dot{x} = -2\beta \omega a \sin(\omega t - \varphi) = 2\beta \omega a \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (75.5)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi). \quad (75.6)$$

Как следует из (75.2), гармоническое колебание $f_0 \cos \omega t$ является суммой трех гармонических колебаний той же частоты: колебания (75.6), колебания (75.5) и колебания $\omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi)$. Если изобразить последнее колебание вектором длины $\omega_0^2 a$, направленным

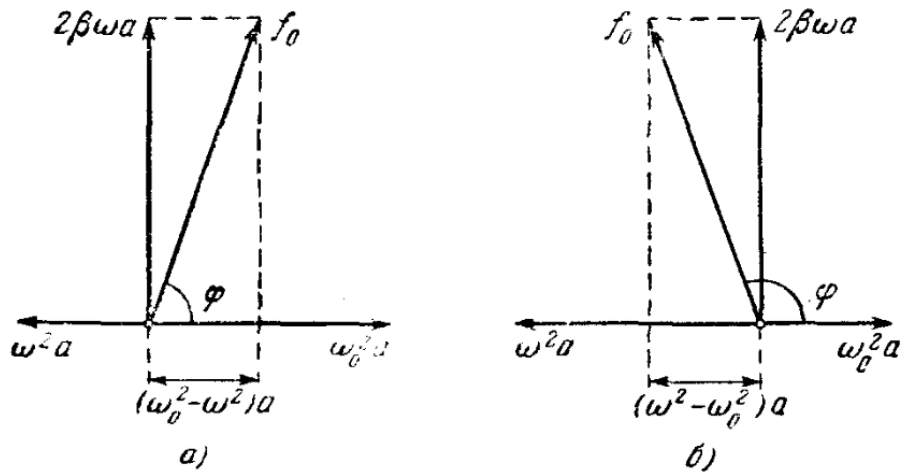


Рис. 187.

вправо (рис. 187), то колебание (75.5) изобразится вектором длины $2\beta\omega a$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 x$ против часовой стрелки на угол $\pi/2$, а колебание (75.6) — вектором длины $\omega^2 a$, повернутым относительно вектора $\omega_0^2 x$ на угол π . Чтобы уравнение (75.2) было удовлетворено, векторная сумма перечисленных трех векторов должна совпадать с вектором, изображающим колебание $f_0 \cos \omega t$. Такое совпадение возможно лишь при значении амплитуды a , которое определяется условием (см. рис. 187, а)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

откуда

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (75.7)$$

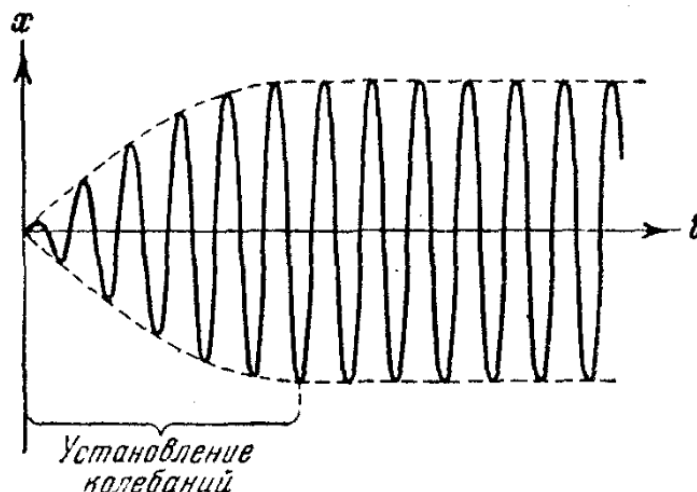
Рис. 187, а отвечает случаю $\omega < \omega_0$. Из рис. 187, б, соответствующего случаю $\omega > \omega_0$, получается такое же значение a .

Рис. 187 позволяет получить также и значение φ , которое представляет собой величину отставания по фазе вынужденного колебания (75.4) от обусловившей его вынуждающей силы (75.1). Из рисунка следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (75.8)$$

$$x = \frac{f_0}{V(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (75.9)$$

Функция (75.9) в сумме с (75.3) дает общее решение уравнения (75.2), описывающее поведение системы при вынужденных колебаниях. Слагаемое (75.3) играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний (рис. 188),



орств, сохранил в решении лишь слагаемое (75.8).

Таким образом, функция (75.9) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда (75.7) вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей

силы. Для данной колебательной системы (определенных ω_0 и β) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания φ также зависит от частоты вынуждающей силы [см. (75.8)].

Резонанс

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота — резонансной частотой.

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$, нужно найти максимум функции (75.7) или, что то же самое, минимум выражения, стоящего под корнем в знаменателе. Продифференцировав это выражение по ω и приравняв нулю, мы получим условие, определяющее $\omega_{\text{рез}}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0. \quad (75.10)$$

Уравнение (75.10) имеет три решения: $\omega = 0$ и $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Решение равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Из остальных двух решений отрицательное должно быть отброшено, как не имеющее физического смысла (частота не может быть отрицательной). Таким образом, для резонансной частоты получается одно значение:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (75.11)$$

Подставив это значение частоты в (75.7), получим выражение для амплитуды при резонансе:

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (75.12)$$

Из (75.12) следует, что при отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Согласно (75.11) резонансная частота при тех же условиях (при $\beta = 0$) совпадает с собственной частотой колебаний системы ω_0 .

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (или, что то же самое, от

258

частоты колебаний) показана графически на рис. 189. Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям параметра β . В соответствии с (75.11) и (75.12), чем меньше β , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. При очень большом затухании (таком, что $2\beta^2 > \omega_0^2$) выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается — с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает (см. нижнюю кривую на рис. 189). Изображенная на

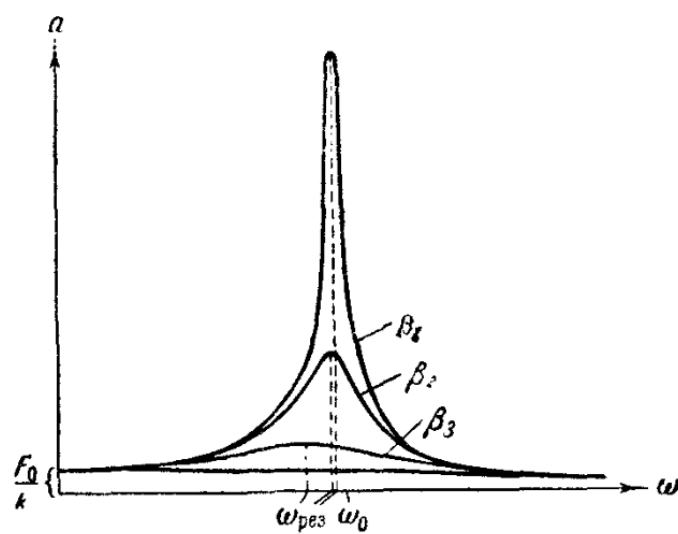


Рис. 189.

рис. 189 совокупность графиков функции (75.7), соответствующих различным значениям параметра β , называется резонансными кривыми.