Момент импульса (или *кинетический момент, угловой момент*) — это физическая величина, характеризующая количество вращательного движения тела. Она играет ключевую роль в динамике вращения, аналогично тому, как обычный импульс ($\vec{p} = m\vec{v}$) описывает поступательное движение.

Аналогично моменту силы определяется момент импульса (момент количества движения) материальной точки. Момент импульса относительно точки O равен

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = m[\mathbf{rv}], \tag{37.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в ту точку пространства, в которой находится материальная точка (рис. 96; вектор $\mathbf{f}$ понадобится нам в дальнейшем), $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс точки [ср. с формулой (36.1)].

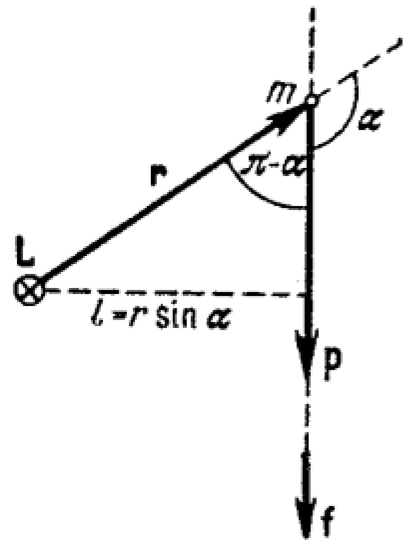


Рис. 96.

Введя плечо $l = r \sin\alpha$, модуль вектора момента импульса можно записать в виде:

$$L = rp\sin\alpha = lp. \tag{37.2}$$

Моментом импульса относительно оси z называется составляющая $\mathbf{L}_z$ по этой оси момента импульса $\mathbf{L}$ относительно точки O, лежащей на оси (рис. 97):

$$\mathbf{L}_z = [\mathbf{rp}]_z. \tag{37.3}$$

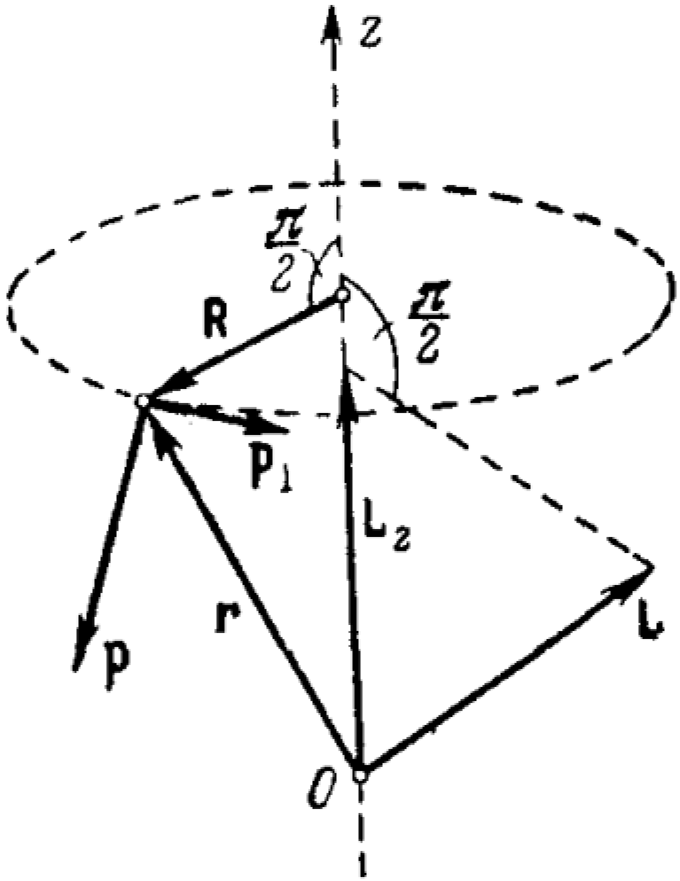


Рис. 97.

1. Исходные данные

- **Формула (37.3)**:

$$L_z = [\vec{r} \times \vec{p}]_z$$

  Это проекция вектора момента импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ на ось z.

- **Геометрия (рис. 97)**:
  - Точка O лежит на оси z.
  - Радиус-вектор $\vec{r}$ можно разложить на две составляющие:
    - $\vec{R}$ — перпендикулярная оси z (лежит в плоскости xy),
    - z-компонента $\vec{z}$ (параллельна оси z).
  - Импульс $\vec{p}$ также разложим на:
    - $\vec{p}_t$ — тангенциальную компоненту (перпендикулярную $\vec{R}$, лежащую в плоскости xy),
    - p_z — компоненту вдоль оси z.

2. Разложение векторного произведения

Момент импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Подставим разложения векторов:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{z}, \quad \vec{p} = \vec{p}_t + p_z \vec{e}_z.$$

Тогда:

$$\vec{L} = (\vec{R} + \vec{z}) \times (\vec{p}_t + p_z \vec{e}_z).$$

Раскроем скобки, учитывая, что:

- $\vec{z} \times p_z \vec{e}_z = 0$ (параллельные векторы),
- $\vec{z} \times \vec{p}_t$ направлен вдоль $\vec{R}$ (перпендикулярно z),
- $\vec{R} \times p_z \vec{e}_z$ направлен вдоль $\vec{p}_t$.

Проекция на ось z сохраняет только слагаемые, перпендикулярные $\vec{R}$:

$$L_z = [\vec{R} \times \vec{p}_t]_z.$$

3. Упрощение

- Вектор $\vec{R} \times \vec{p}_t$ направлен вдоль оси z, так как оба вектора лежат в плоскости xy.
- Его модуль равен:

$$|\vec{R} \times \vec{p}_t| = R p_t \sin 90^\circ = R p_t.$$

- Таким образом:

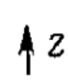
$$L_z = R p_t.$$

Это эквивалентно формуле (37.4):

$$L_z = [\vec{R}, \vec{p}_t] = m[\vec{R}, \vec{v}_t].$$

$$\mathbf{L}_z = [\mathbf{R},\ \mathbf{p}_\tau] = m\,[\mathbf{R},\ \mathbf{v}_\tau], \qquad (37.4)$$

где $\mathbf{R}$ — составляющая радиуса-вектора $\mathbf{r}$, перпендикулярная к оси z, а $\mathbf{p}_\tau$ — составляющая вектора $\mathbf{p}$, перпендикулярная к плоскости, проходящей через ось z и точку m.



Выясним, чем определяется изменение момента импульса со временем. Для этого продифференцируем (37.1) по времени t, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{p}]=\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt},\ \mathbf{p}\right]+\left[\mathbf{r},\ \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right]. \tag{37.5}$$

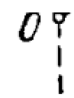


Рис. 97.

Первое слагаемое равно нулю, так как оно представляет собой векторное произведение векторов одинакового направления. В самом деле, вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ равен вектору скорости $\mathbf{v}$ и, следовательно, совпадает по направлению с вектором $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$. Вектор $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ по второму закону Ньютона равен действующей на тело силе $\mathbf{f}$ [см. (22.3)]. Следовательно, выражение (37.5) можно написать так:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=[\mathbf{r}\mathbf{f}]=\mathbf{M}, \tag{37.6}$$

где $\mathbf{M}$ — момент приложенных к материальной точке сил, взятый относительно той же точки O, относительно которой берется момент импульса $\mathbf{L}$.

Закон сохранения момента импульса. Рассмотрим систему из N материальных точек. Подобно тому, как это делалось в § 23, разобьем силы, действующие на точки, на внутренние и внешние. Результирующий момент внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку, обозначим символом $\mathbf{M}_i'$, результирующий момент внешних сил, действующих на ту же точку, — символом $\mathbf{M}_i$. Тогда уравнение (37.6) для i-й материальной точки будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_i = \mathbf{M}_i' + \mathbf{M}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Это выражение представляет собой совокупность N уравнений, отличающихся друг от друга значениями индекса i. Сложив эти уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i' + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i. \qquad (37.9)$$

Величина

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{p}_i] \qquad (37.10)$$

называется *моментом импульса системы материальных точек*.

Сумма моментов внутренних сил [первая из сумм в правой части формулы (37.9)], как было показано в конце § 36, равна нулю. Следовательно, обозначив суммарный момент внешних сил символом **M**, можно написать, что

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i = \mathbf{M} \tag{37.11}$$

[в символы **L** и **M** в этой формуле вложен иной смысл, чем в такие же символы в формуле (37.6)].

Для замкнутой системы материальных точек $\mathbf{M} = 0$, вследствие чего суммарный момент импульса **L** не зависит от времени. Таким образом, мы пришли к закону сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*