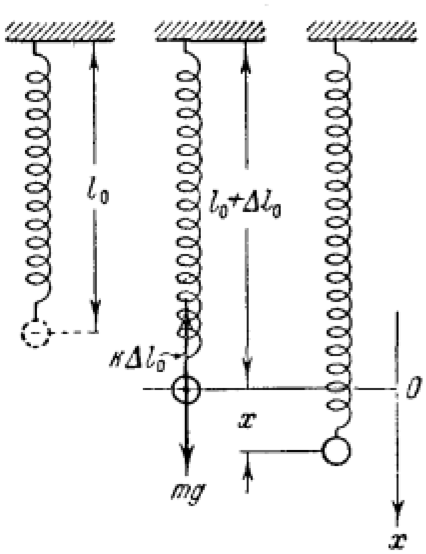
Гармонические колебания.



В состояние равновесия сила mg уравновешивается упругой силой:

$$mg = k\Delta l$$

Если сместить шарик от положения равновесия на расстояние x, то удлинение пружины будет $\Delta l + x$ и проекция результирующей силы на ось x примет значение

$$F = mg - k(\Delta l + x)$$

Учитывая условия равновесия:

$$f = -kx \quad \text{- сила упругости}$$

"-" обозначает отображает, что смещение и сила имеют противоположные направления.

В рассмотренном примере сила - упругая. Но может быть так, что сила иного происхождения обнаруживает такую же закономерность, то есть будет равна силе упругости. Сила такого вида называется - *квазиупругими*.

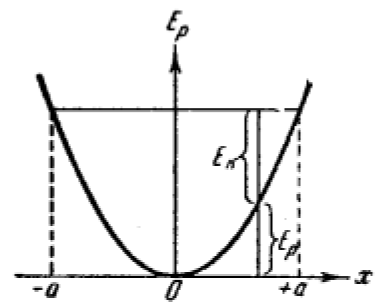
Для того, чтобы сообщить системе о смещение x, нужно совершить против квазиупругой силы работу:

$$A = \int_0^x (-f)dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

Эта работа идет на создание запаса потенциальной энергии:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Обратимся к системе, изображенной на рисунке:



Сообщим шарику смещение $x = a$. Под действием силы $f = -kx$ шарик будет двигаться к положению равновесия со всевозрастающей скоростью $v = \dot{x}$. При этом потенциальная энергия убывает, а кинетически энергия всевозрастающая

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Если нет трения то $x \in [-a; a]$

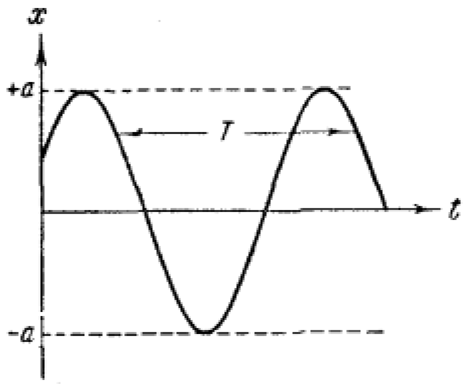
2-ой Закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{где} \quad \ddot{x} = a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 > 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{- линейное однородное дифференциальное уравнение 2го порядка.}$$

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$$



$$\omega_0(t+T)+\alpha=\omega_0 t+\alpha+2\pi$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}\quad \text{- Период колебаний}$$

$$\nu=\frac{1}{T}\quad \text{- Частота колебаний}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu\quad \text{- циклическая частота}$$

$$v=\dot{x}=-a\omega_0\sin(\omega_0 t+\alpha)=a\omega_0\cos\left(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{(выражение скорости)}$$

$$a\omega_0\quad \text{- Амплитуда колебаний скорости}$$

$$a_{\text{уск}}=\ddot{x}=-a\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\alpha)=a\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\alpha+\pi)$$

$$a\omega_0^2\quad \text{- ускорение}$$

Энергия Гармонических Колебаний.

Квазиупругая сила является консервативной, поэтому *полная энергия гармонических колебаний* - постоянна.

$$E_{pmax}=\frac{a^2\cdot k}{2};\quad E_{kmax}=\frac{mV_{max}^2}{2}=\frac{ma^2\omega_0^2}{2};$$

$$V_{max}=a\omega_0,\ \text{где } \omega_0 \text{ - частота.}$$

При максимальном отклонении:

$$E_{\text{полн}}=E_{pmax}$$

При прохождении положения равновесия:

$$E_{\text{полн}} = E_{kmax}$$

Как изменяется со временем кинетическая и потенциальная энергии:

Кинетическая энергия:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Потенциальная энергия:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cdot \cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Тогда полная энергия:

$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}$$

Используя формулы тригонометрии можно придать другой вид Ek и Ep:

$$E_k = E \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos[2(\omega_0 t + \alpha)]\right]$$

$$E_p = E \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin[2(\omega_0 t + \alpha)]\right]$$