Момент импульса

§ 37. Момент импульса материальной точки. Закон сохранения момента импульса

Аналогично моменту силы определяется момент импульса (момент количества движения) материальной точки. Момент импульса относительно точки O равен

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = m\,[\mathbf{rv}], \qquad (37.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в ту точку пространства, в которой находится материальная точка (рис. 96; вектор $\mathbf{f}$ понадобится нам в дальнейшем), $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс точки [ср. с формулой (36.1)].

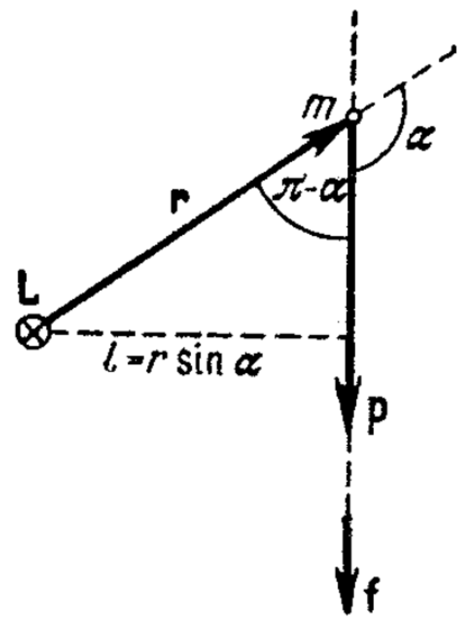

Рис. 96.

Введя плечо $l = r\sin\alpha$, модуль вектора момента импульса можно записать в виде:

$$L = rp\sin\alpha = lp. \qquad (37.2)$$

Моментом импульса относительно оси z называется составляющая $\mathbf{L}_z$ по этой оси момента импульса $\mathbf{L}$

относительно точки O, лежащей на оси (рис. 97):

$$\mathbf{L}_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_z. \tag{37.3}$$

Повторив рассуждения, приведшие нас к формуле (36.9), найдем, что

$$\mathbf{L}_z = [\mathbf{R},\ \mathbf{p}_\tau] = m\,[\mathbf{R},\ \mathbf{v}_\tau], \tag{37.4}$$

где $\mathbf{R}$ — составляющая радиуса-вектора $\mathbf{r}$, перпендикулярная к оси z, а $\mathbf{p}_\tau$ — составляющая вектора $\mathbf{p}$, перпендикулярная к плоскости, проходящей через ось z и точку m.

Выясним, чем определяется изменение момента импульса со временем. Для этого продифференцируем (37.1) по времени t, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{p}] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt},\ \mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r},\ \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right]. \tag{37.5}$$

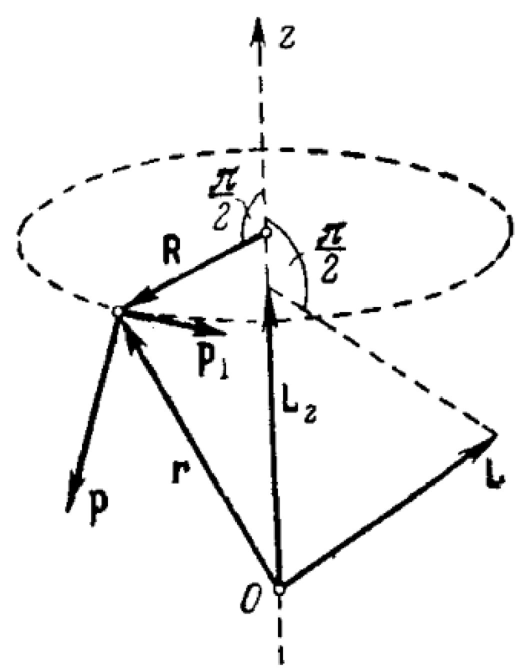

Рис. 97.

Первое слагаемое равно нулю, так как оно представляет собой векторное произведение векторов одинакового направления. В самом деле, вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ равен вектору скорости $\mathbf{v}$ и, следовательно, совпадает по направлению с вектором $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Вектор $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ по второму закону Ньютона равен действующей на тело силе $\mathbf{f}$ [см. (22.3)]. Следовательно, выражение (37.5) можно написать так:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{rf}] = \mathbf{M}, \qquad (37.6)$$

где $\mathbf{M}$ — момент приложенных к материальной точке сил, взятый относительно той же точки O, относительно которой берется момент импульса $\mathbf{L}$.

Из соотношения (37.6) следует, что если результирующий момент действующих на материальную точку сил относительно какой-либо точки O равен нулю, то момент импульса материальной точки, взятый относительно той же точки O будет оставаться постоянным.

Взяв составляющие по оси z от векторов, входящих в формулу (37.6), получим выражение[1]):

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \mathbf{M}_z. \qquad (37.7)$$

Формула (37.6) похожа на формулу (22.3). Из сравнения этих формул вытекает, что подобно тому, как производная по времени от импульса равна силе, действующей на материальную точку, производная по времени от момента импульса равна моменту силы.

Закон сохранения момента импульса. Рассмотрим систему из N материальных точек. Подобно тому, как это делалось в § 23, разобьем силы, действующие на точки, на внутренние и внешние. Результирующий момент внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку, обозначим символом $\mathbf{M}'_i$, результирующий момент внешних сил, действующих на ту же точку, — символом $\mathbf{M}_i$. Тогда уравнение (37.6) для i-й материальной точки будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_i = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Это выражение представляет собой совокупность N уравнений, отличающихся друг от друга значениями индекса i. Сложив эти уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}'_i + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i. \tag{37.9}$$

Величина

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{p}_i] \tag{37.10}$$

называется моментом импульса системы материальных точек.

Сумма моментов внутренних сил [первая из сумм в правой части формулы (37.9)], как было показано в конце § 36, равна нулю. Следовательно, обозначив суммарный момент внешних сил символом $\mathbf{M}$, можно написать, что

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i = \mathbf{M} \tag{37.11}$$

[в символы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ в этой формуле вложен иной смысл, чем в такие же символы в формуле (37.6)].

Для замкнутой системы материальных точек $\mathbf{M} = 0$, вследствие чего суммарный момент импульса $\mathbf{L}$ не зависит от времени. Таким образом, мы пришли к закону сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Отметим, что момент импульса остается постоянным и для системы, подвергающейся внешним воздействиям,

при условии, что суммарный момент внешних сил, действующих на тела системы, равен нулю.

Взяв от векторов, стоящих в левой и правой частях уравнения (37.11), их составляющие по оси z, придем к соотношению:

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_{zi} = \mathbf{M}_z. \qquad (37.12)$$

Может случиться, что результирующий момент внешних сил относительно точки O отличен от нуля ($\mathbf{M} \neq 0$), однако равна нулю составляющая $\mathbf{M}_z$ вектора $\mathbf{M}$ по некоторому направлению z. Тогда согласно (37.12) будет сохраняться составляющая $\mathbf{L}_z$ момента импульса системы по оси z.

А теперь разбираемся

Основные формулы:

> 1. Момент импульса относительно точки О:
>
> $$L = [rp] = m[rv],$$

где r - радиус-вектор, проведенный из О к материальной точке,
p = mv - импульс точки

> 2. Плечо l
>
> $$l = r \sin a$$
>
> 3. Модуль вектора момента импульса L
>
> $$L = rp \sin a = lp$$

> 4. Lz - Момент импульса относительно оси z
>
> $$L_z = [rp]_z = [R, p_\tau] = m[R, v_\tau],$$
>
> где R - составляющая радиус вектора r, перпендикулярная к оси z,
>
> p_τ - составляющая вектора p, перпендикулярная к плоскости,

> проходящая через ось z и m,
>
> v_τ - компонента скорости, направленная перпендикулярно к R в плоскости,
>
> перпендикулярной оси z (из формулы p = mv)

PS: p и v еще называют тангенциальными (перпендикулярными R) составляющими

> 5. изменение момента импульса со временем t
>
> $$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}[rp] = [\frac{dr}{dt}, p] + [r, \frac{dp}{dt}]$$
>
> Но первое слагаемое равно 0, так как это векторное произведение векторов одинакового направления (вектор dr/dt совпадает с направлением вектора скорости v и следовательно вектора p = mv). Вектор dp/dt по второму закону ньютона можно равен действующей на тело силе f, следовательно можно записать так:
>
> $$\frac{dL}{dt} = [rf] = M$$

> 6. момент импульса системы материальных точек

- уравнение для i-ой материальной точки:

$$\frac{d}{dt}L_i = M_i' + M_i \ \ (\text{i} = 1{,}2\ldots{,}\text{N})$$

- если все сложить:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} L_i = \sum_{i=1}^{N} M_i' + \sum_{i=1}^{N} M_i$$

- получим момент импульса системы материальных точек:

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i = \sum_{i=1}^{N} [r_i, p_i]$$

> 7. суммарный момент внешних сил (не то же самое что формула 5)

> $$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_i = M$$

Для замкнутой системы материальных точек $\mathbf{M} = 0$, вследствие чего суммарный момент импульса $\mathbf{L}$ не зависит от времени. Таким образом, мы пришли к закону сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.*

Отметим, что момент импульса остается постоянным и для системы, подвергающейся внешним воздействиям,

при условии, что суммарный момент внешних сил, действующих на тела системы, равен нулю.

В чем смысл?

Определения:

Момент импульса (или угловой момент)

> — это векторная физическая величина, характеризующая количество вращательного движения материальной точки или системы (формула 1 для материальной точки).

Физический смысл:

> Момент импульса показывает, насколько интенсивно тело вращается вокруг некоторой точки или оси. Чем больше
> L, тем сложнее остановить вращение.

Момент импульса относительно оси

> Если ось вращения фиксирована (например, ось z), то момент импульса относительно этой оси есть формула 4

Закон сохранения импульса

> Если суммарный момент внешних сил M_внеш=0, то момент импульса системы сохраняется: L=const.

1. Формулировка закона

> **Если результирующий момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю ($\mathbf{M}_{\text{внеш}} = 0$), то полный момент импульса системы сохраняется:**
>
> $$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \text{const.}$$

2. Происхождение закона

- Следует из **второго закона Ньютона для вращательного движения**:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

- Если $\mathbf{M} = 0$, то $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, значит, $\mathbf{L}$ не меняется.

3. Условия применимости

Закон выполняется, если:

1. **Нет внешних сил** (изолированная система).
2. **Момент внешних сил равен нулю**, даже если силы есть (например, если силы направлены к оси вращения).