При криволинейном движении траектория тела представляет собой кривую линию, и даже если скорость постоянна по модулю, направление вектора скорости меняется, что приводит к возникновению ускорения, поэтому любое криволинейное движение имеет ускорение.

Краткая выжимка:

1. Основные характеристики криволинейного движения

1.1. Вектор скорости ($\vec{v}$)

- Направлен **по касательной** к траектории.
- Модуль скорости:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

где ds — элементарное перемещение вдоль траектории.

1.2. Вектор ускорения ($\vec{a}$)

Полное ускорение можно разложить на две составляющие:

- **Тангенциальное ускорение (a_τ)** — отвечает за изменение **модуля** скорости.
- **Нормальное ускорение (a_n)** — отвечает за изменение **направления** скорости.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

---

2. Тангенциальное ускорение (a_τ)

- Направлено **по касательной** к траектории.
- Определяет быстроту изменения **модуля** скорости.

Формула:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

- Если $a_\tau > 0$ — скорость увеличивается.
- Если $a_\tau < 0$ — скорость уменьшается (торможение).
- Если $a_\tau = 0$ — движение **равномерное** (модуль скорости не меняется).

3. Нормальное (центростремительное) ускорение (a_n)

- Направлено **к центру кривизны** траектории.
- Обусловлено **изменением направления** скорости.

Формула:

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где R — **радиус кривизны** траектории в данной точке.

- Чем больше скорость v или чем меньше радиус R, тем больше a_n.
- В **прямолинейном движении** $R \to \infty$, поэтому $a_n = 0$.

4. Полное ускорение

$$\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n},$$

где:

- $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной,
- $\vec{n}$ — единичный вектор нормали (к центру кривизны).

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Угол между a⃗ и нормалью:

$$\tan\theta = \frac{a_\tau}{a_n}$$

5. Частные случаи криволинейного движения

5.1. Равномерное криволинейное движение (|v| = const)

- $a_\tau = 0$ (скорость не меняется по модулю).
- $a = a_n = \frac{v^2}{R}$ (ускорение направлено к центру).

Пример:

- Движение по окружности с постоянной скоростью.

5.2. Неравномерное криволинейное движение (|v| ≠ const)

- $a_\tau = \frac{dv}{dt} \neq 0.$
- $a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0.$

Пример:

- Движение по параболе (тело брошено под углом к горизонту).

6. Криволинейное движение в разных системах координат

6.1. В декартовых координатах (x, y, z)

Если задан закон движения $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то:

- Скорость:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

- Ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

6.2. В полярных координатах (r, φ)

Для плоского движения:

- Радиальная скорость:

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

- Трансверсальная скорость:

$$v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}$$

- Ускорение:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$a_\varphi = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

7. Движение по окружности (частный случай криволинейного движения)

7.1. Угловая скорость (ω)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Связь с линейной скоростью:

$$v = \omega R$$

7.2. Угловое ускорение (β)

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}$$

Связь с тангенциальным ускорением:

$$a_\tau = \beta R$$

7.3. Центростремительное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Полный билет:

Прежде чем приступить к нахождению ускорения в общем случае, рассмотрим простейший случай криволинейного движения — равномерное движение точки по окружности.

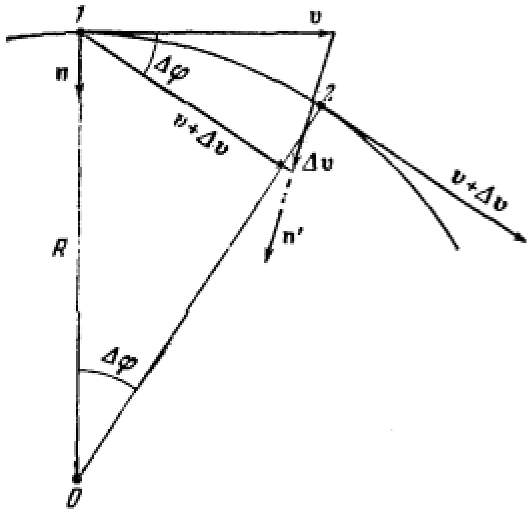

Рис. 24.

Пусть в рассматриваемый момент времени t точка находится в положении 1 (рис. 24). Спустя время Δt точка окажется в положении 2, пройдя путь Δs, равный дуге 1—2. При этом скорость точки $\mathbf{v}$ получает приращение $\Delta\mathbf{v}$, в результате чего вектор скорости, оставаясь неизменным по величине (при равномерном

31

движении $|\mathbf{v}| = \mathrm{const}$), повернется на угол $\Delta\varphi$, совпадающий по величине с центральным углом, опирающимся на дугу длиной Δs:

$$\Delta\varphi \approx \frac{\Delta s}{R}, \tag{9.1}$$

где R — радиус окружности, по которой движется точка.

Напомню, что длина дуги 1-2 стремится к Δs (хорда между точками 1 и 2), т.к. $\Delta t \to 0$. Равенство центрального угла $\Delta \phi$ и $\Delta \phi$ внутри треугольника возникает из подобия этих тругольников (т.к. радиус перпендикулярен касательным)

Найдем приращение вектора скорости $\Delta\mathbf{v}$. Для этого перенесем вектор $(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})$ так, чтобы его начало совпадало с началом вектора $\mathbf{v}$. Тогда вектор $\Delta\mathbf{v}$ изобразится отрезком, проведенным из конца вектора $\mathbf{v}$ в конец вектора $(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})$. Этот отрезок служит основанием равнобедренного треугольника со сторонами $\mathbf{v}$ и $(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})$ и углом $\Delta\varphi$ при вершине. Если угол $\Delta\varphi$ невелик (что выполняется для малых Δt), для сторон этого треугольника можно приближенно написать:

$$|\Delta\mathbf{v}| \cong v\,\Delta\varphi$$ [1]).

Вектор $\Delta\mathbf{v}$ можно представить в виде произведения его модуля на единичный вектор такого же направления, как и у $\Delta\mathbf{v}$. Обозначим этот единичный вектор $\mathbf{n}'$. Тогда

$$\Delta\mathbf{v} = |\Delta\mathbf{v}|\,\mathbf{n}' \cong v\,\Delta\varphi\mathbf{n}'.$$

Подставляя сюда $\Delta\varphi$ из (9.1), получаем:

$$\Delta\mathbf{v} \cong v\frac{\Delta s}{R}\mathbf{n}'. \qquad (9.2)$$

Деля $\Delta\mathbf{v}$ на Δt и делая предельный переход, получим ускорение

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}\mathbf{n}'.$$

В этом выражении v и R — постоянные; отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ в пределе даст модуль скорости v; единичный вектор $\mathbf{n}'$ в пределе сольется с единичным вектором $\mathbf{n}$, нормальным к окружности в точке *1* и направленным к центру. Таким образом,

$$\mathbf{w}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \qquad (9.3)$$

$$w_n$$

- нормальное ускорение, направлено по нормали к траектории (т.е. в любой момент времени t вектор движения ортогонален вектору нормали, напралвенного в центр окружности)

Модуль нормального ускорения $w_n = \frac{v^2}{R}$

Кривизна окружности - мера кривизны равная величине $\frac{1}{R}$

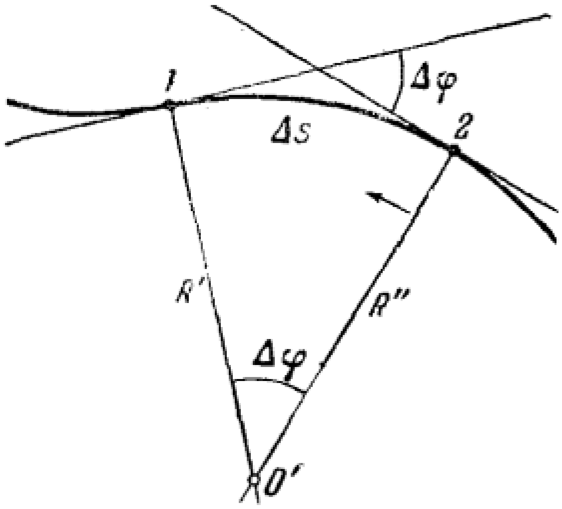

Рис. 26.

Док-во формулы кривизны: (фактически к билету не относится, но прочитать полезно)

Аналитически кривизна кривой C определяется выражением

$$C = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

где $\Delta\varphi$ — угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на Δs (рис. 26). Таким образом, кривизна характеризуется скоростью изменения

направления кривой, т. е. скоростью поворота касательной при перемещении вдоль кривой. Величина, обратная C, равна радиусу кривизны R. Легко убедиться в том, что в случае окружности определенный таким образом радиус кривизны совпадает с радиусом окружности.

Обратимся снова к рис. 26. Построим перпендикуляры к касательным в точках *1* и *2*. Эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке O', причем расстояния R' и R'' *будут, вообще говоря, неодинаковыми.* Образуем отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$. Величину Δs можно приближенно заменить через $R'\Delta\varphi$. Тогда

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \approx \frac{1}{R'}.$$

Последнее приближенное равенство выполняется тем точнее, чем ближе точки *1* и *2*, т. е. чем меньше Δs. Устремив Δs к нулю, мы получим кривизну:

$$C = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{R'}.$$

Если точку *2* приближать неограниченно к точке *1*, *пересечение перпендикуляров O' будет стремиться к* некоторой точке, которая будет представлять собой центр кривизны. Оба расстояния, R' и R'', будут стремиться к одному и тому же пределу R, равному радиусу кривизны. Величина, обратная R, дает кривизну линии в точке *1*.

Обратно к билету:

Теперь найдем ускорение точки, движущейся по произвольной плоской кривой. Разложим вектор приращения скорости $\Delta\mathbf{v}$ (соответствующий промежутку времени Δt, за который точка перемещается из положения *1* в положение *2*) на две составляющие: $\Delta\mathbf{v}_n$ и $\Delta\mathbf{v}_\tau$ (рис. 27). Эти составляющие выберем так, чтобы расстояние от точки *1* до конца вектора $\Delta\mathbf{v}_n$ было равно *модулю скорости* $\mathbf{v}$ в начальный момент. Тогда, очевидно, модуль вектора $\Delta\mathbf{v}_\tau$ будет равен приращению модуля скорости:

$$|\Delta\mathbf{v}_\tau| = \Delta|\mathbf{v}| = \Delta v.$$

Ввведя единичный вектор $\boldsymbol{\tau}'$, совпадающий по направлению с вектором $\Delta\mathbf{v}_\tau$, последний можно представить в следующем виде:

$$\Delta\mathbf{v}_\tau = \Delta v\boldsymbol{\tau}'. \tag{9.5}$$

Повторив рассуждения, которые привели нас к формуле (9.4), можно получить, что

$$\Delta\mathbf{v}_n = v\frac{\Delta s}{R'}\mathbf{n}'. \tag{9.6}$$

Вектор полного ускорения по определению равен

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_n + \Delta\mathbf{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_\tau}{\Delta t}.$$

С учетом (9.6)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R'}\frac{\Delta s}{\Delta t}\mathbf{n}'.$$

В пределе $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ даст модуль скорости v, R' — радиус кривизны R, а вектор $\mathbf{n}'$ совпадет с $\mathbf{n}$ — единичным

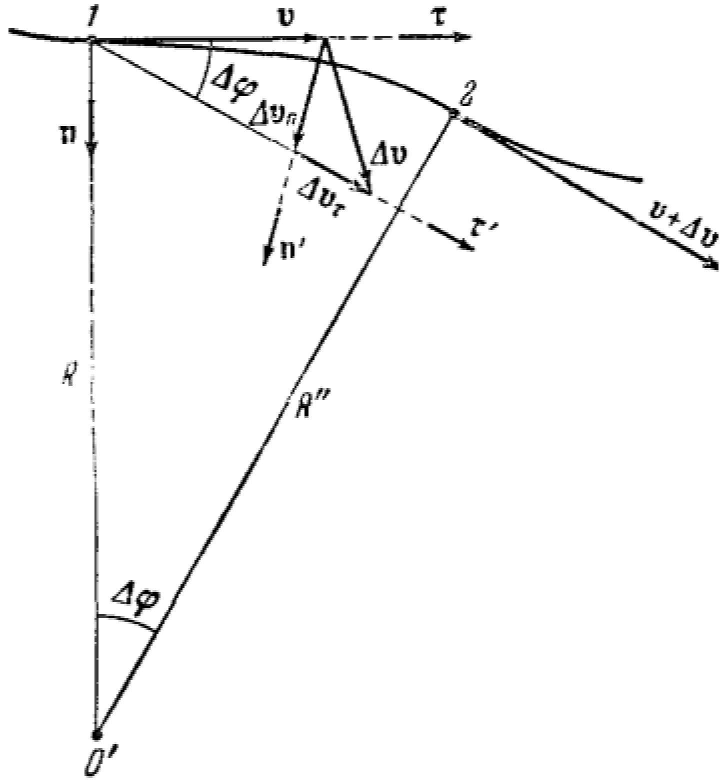

Рис. 27.

вектором нормали к траектории в точке *1*. Обозначим этот предел $\mathbf{w}_n$:

$$\mathbf{w}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{9.7}$$

Второй предел (обозначим его $\mathbf{w}_\tau$) с учетом (9.5) равен

$$\mathbf{w}_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\boldsymbol{\tau}'.$$

При переходе к пределу вектор $\boldsymbol{\tau}'$ совпадет с $\boldsymbol{\tau}$ — единичным вектором, направленным по касательной к траектории в точке *1* в сторону движения и тождественным единичному вектору скорости $\mathbf{v}$ (см. (2.6)):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Окончательно,

$$\mathbf{w}_\tau = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\right) \boldsymbol{\tau} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}. \qquad (9.8)$$

Итак, вектор $\mathbf{w}$ может быть представлен в виде суммы двух векторов $\mathbf{w}_n$ и $\mathbf{w}_\tau$ (рис. 28), один из которых ($\mathbf{w}_n$) перпендикулярен к вектору скорости $\mathbf{v}$ и направлен к центру кривизны траектории, а второй ($\mathbf{w}_\tau$) направлен по касательной к траектории. Если скорость растет по величине $\left(\frac{dv}{dt}\right.$ положительно$\left.\right)$, то $\mathbf{w}_\tau$ направлен в сторону движения, если скорость по величине убывает $\left(\frac{dv}{dt}\right.$ отрицательно$\left.\right)$, то $\mathbf{w}_\tau$ направлен в сторону, противоположную направлению движения.

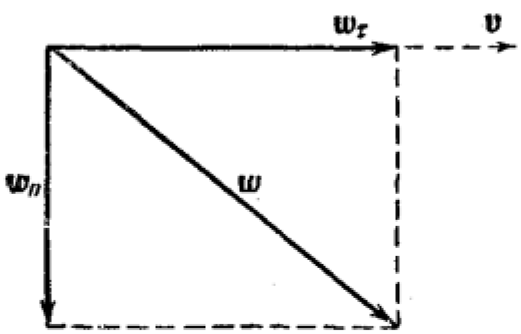

Рис. 28.

Вектор w_τ называют тангенциальным ускорением. Он характеризует изменение скорости по величине. Если скорость по величине не изменяется, тангенциальное ускорение = 0 и $w_n = w$

Вектор w_n называют нормальным ускорением характеризует изменение скорости по направлению. Если направление скорости не изменяется, движение происходит по прямолинейной траектории, кривизна прямой равна нулю (радиус кривизны R соответственно равен бесконечности), следовательно, нормальное ускорение = 0 и $w = w_\tau$

Модуль полного ускорения:

В общем случае модуль полного ускорения равен (рис. 28):

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$