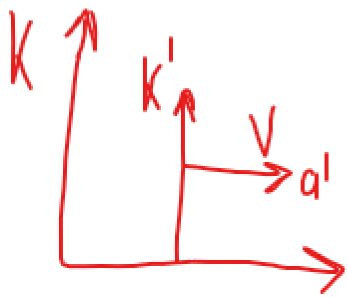
Релятивистское уравнение движения

Релятивистское движение — это движение тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света (v~c), где становятся существенными эффекты специальной теории относительности (СТО) Эйнштейна. В этом режиме классическая механика Ньютона неприменима.



Ракета летит из состояния покоя с ускорением a'
K - система, связанная с неподвижным наблюдателем (например, с Землёй или условной "неподвижной" точкой в пространстве).
K' - система связанная с ускоряющейся ракетой или движущимся объектом, меняется при ускорении.
$\Delta V = (1 - \frac{v^2}{c^2})\Delta v'$
$\Delta v'$ — изменение скорости в K'
ΔV — соответствующее изменение в K
Множитель $(1 - \frac{v^2}{c^2})$ — релятивистский эффект замедления изменений при v→c. (c - скорость света)
$a' = \frac{dv'}{dt'}$ - ускорение ракеты.

$$[\text{Выразим } \Delta v' : \Delta v' = a\Delta t] \frac{\Delta V}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dv'}{dt'}\Delta t' = a'\Delta t'$$ **(*)**

[Это уравнение описывает, как ускорение ракеты в её собственной системе отсчёта (K') проявляется в лабораторной системе (K) при релятивистских скоростях.]

$c^2 \int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = a' \int_0^{t'} dt$ **- релятивистское ускорение, получается из релятивистского аналога второго закона Ньютона**

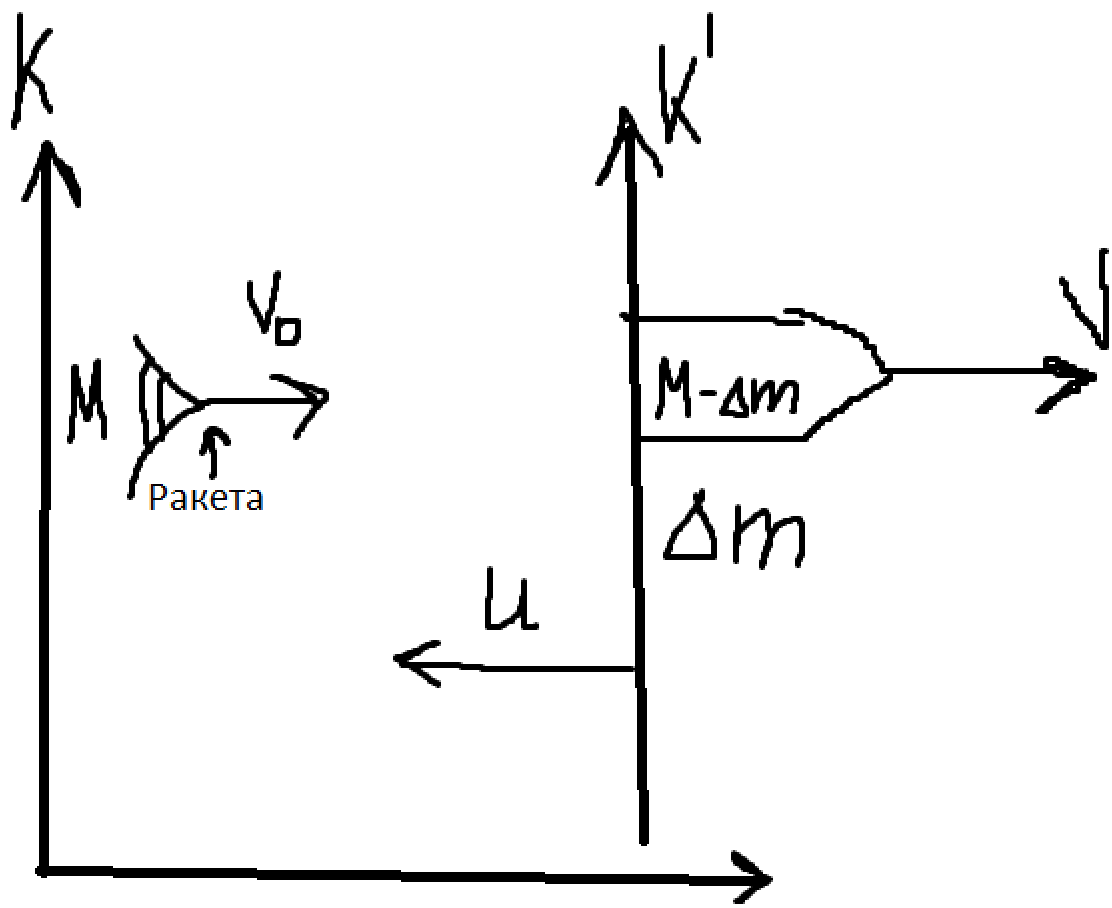
$V_\text{г} = \frac{v-u}{(1-\frac{vu}{c^2})}$ **- релятивистское сложение скоростей (показывает, как преобразуются скорости при переходе между системами отсчёта), частный случай преобразования скоростей Лоренца.**

Решая интеграл получим: $c\, arth(\frac{v}{c}) = a't'$ Продолжаем: $\frac{v}{c} = th\frac{a't'}{c}$
$x = \int vdt = \int_0^{t'} v \frac{dt'}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}$ - преобразования Лоренца

Выведем из **(*)** $dt' = \frac{1}{a'} \frac{c^2 dv}{c^2 - v^2}$

$x = \frac{c^3}{a'} \int_0^v \frac{vdv}{(c^2-v^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{c^3}{a'}\left[\frac{1}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{c}\right]$ **- уравнение Мещерского**

(Это уравнение описывает траекторию ракеты в лабораторной системе отсчёта.)



Делаем систему отсчёта относительно движущейся ракеты.

u - скорость топлива относительно ракеты в K'
M — начальная масса ракеты (включая топливо)
Δm — небольшая порция топлива, которая выбрасывается из ракеты за малый промежуток времени. В системе $K\prime$ эта масса покидает ракету со скоростью u.
$M - \Delta m$ — масса ракеты после выброса топлива Δm.

V_1 - скорость выброшенного топлива в системе K
V_0 - начальная скорость ракеты в K
V — скорость ракеты после выброса Δm в K
$P_T = \Delta m V_1$ - импульс выброшенного топлива
$V_1 = u + V$
$P_0 = MV_0 = (M - \Delta m)V + P_T = (M - \Delta m)V + \Delta m(u + V)$
$MV_0 = (M - \Delta m)V + \Delta m(u + V)$ - закон сохранения импульса
$M(V_0 - V) - \Delta mu = 0$ - раскрыли скобки
$V - V_o = \Delta V$
$M\Delta V + \Delta mu = 0, [\Delta m = \mu \Delta t]$ μ - кф сгорания топлива
$M\Delta V + \mu \Delta tu = 0| * \frac{1}{\Delta t}$
$Ma + \mu u = 0$
$-\mu u = F_{\text{г}} => F_{\text{г}} = Ma$ - **сила сопротивления топлива**

$Ma = F_{\text{г}} + F_{\text{внеш.сил}}$ - Уравнение Мещерского для конкретного момента времени

Это уравнение движения ракеты (уравнение Мещерского), описывающее:

- как реактивная тяга $(-\mu u)$ разгоняет ракету,
- как внешние силы (например, гравитация) влияют на её движение.
- В случае без внешних сил ($F_{\text{внеш}} = 0)$: $Ma = -\mu u$ (Ракета ускоряется за счёт истечения газов)