Систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где w_0^2 постоянная положительная величина, называют гармоническим осциллятором.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = a\cos(w_0 t + \alpha) \quad \textbf{(64.2)}$$

Следовательно гармонический осциллятор представляет собой систему, которая совершает гармонические колебания около положения равновесия.

Простыми словами о гармоническом осцилляторе:

1. Что это?

Гармонический осциллятор — это система (например, грузик на пружинке или маятник), которая **колеблется** (движется туда-сюда) **вокруг положения равновесия** по закону синуса или косинуса.

2. Как описывается?

Уравнение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- x — отклонение от равновесия (например, растяжение пружины).
- $\ddot{x}$ — ускорение (как быстро меняется скорость).
- ω_0 — собственная частота колебаний (определяет, как быстро система колеблется).

3. Решение:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

- a — амплитуда (максимальное отклонение).
- $\omega_0 t + \alpha$ — фаза (где сейчас находится колеблющийся объект).
- α — начальная фаза (с какого положения началось движение).

Найдем импульс гармонического осциллятора. Продифференцировав (64.2) по времени и умножив полученный результат на массу осциллятора m, получим

$$p = m\dot{x} = -ma\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \qquad (64.3)$$

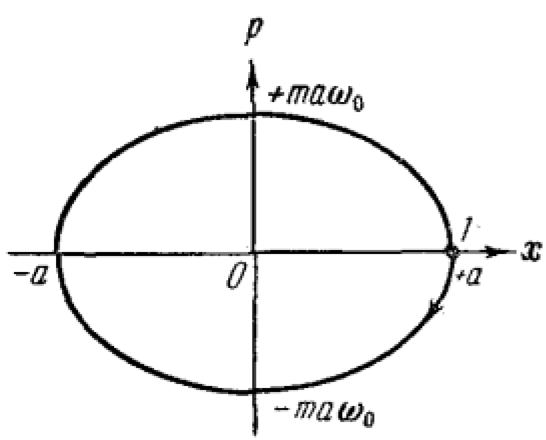
В каждом положении, характеризуемом отклонением x, осциллятор имеет некоторое значение импульса p. Чтобы найти p как функцию x, нужно исключить время t из уравнений (64.2) и (64.3). Для этого представим указанные уравнения в виде

$$\frac{x}{a} = \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

$$\frac{p}{ma\omega_0} = -\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Возведя эти выражения в квадрат и складывая, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{m^2a^2\omega_0^2} = 1. \qquad (64.4)$$



На рис. 167 изображен график, показывающий зависимость импульса p гармонического осциллятора от отклонения x. Координатную плоскость p, x принято называть **фазовой плоскостью**, а соответствующий график — **фазовой траекторией**. В соответствии с (64.4) фазовая траектория гармонического осциллятора представляет собой эллипс с полуосями a и $ma\omega_0$.

Найдем площадь эллипса. Как известно, она равна произведению полуосей эллипса, умноженному на π:

$$S = \pi a m a \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{m a^2 \omega_0^2}{2}.$$

В соответствии с (63.5) $m a^2 \omega_0^2/2$ есть полная энергия осциллятора; величина $2\pi/\omega_0$ равна $1/\nu_0$, где ν_0 — собственная частота осциллятора, являющаяся для данного осциллятора величиной постоянной. Следовательно, площадь эллипса может быть представлена в виде

$$S = \frac{1}{\nu_0} E,$$

откуда

$$E = \nu_0 S. \tag{64.5}$$

Таким образом, полная энергия гармонического осциллятора пропорциональна площади эллипса, причем коэффициентом пропорциональности служит собственная частота осциллятора.

Площадь эллипса может быть вычислена как интеграл $\oint p\,dx$. Поэтому формуле (64.5) можно придать следующий вид:

$$E = \nu_0 \oint p\,dx.$$