Про Волны

Если в каком-либо месте упругой (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами это колебание начнет распространяться в среде от частицы к частице с некоторой скоростью v. Процесс распространения колебаний в пространстве называется **волной**.

Figure 1: alt text

Частицы среды, в которой распространяется волна, не переносятся волной, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные волны. В продольной волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечной волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Механические поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн.

Figure 2: alt text

Картинка, показывающая колебания частиц

формула длины волны $\lambda = v * T$

формула периода колебаний $T = \dfrac{1}{\nu}$

$$\lambda \cdot \nu = v$$

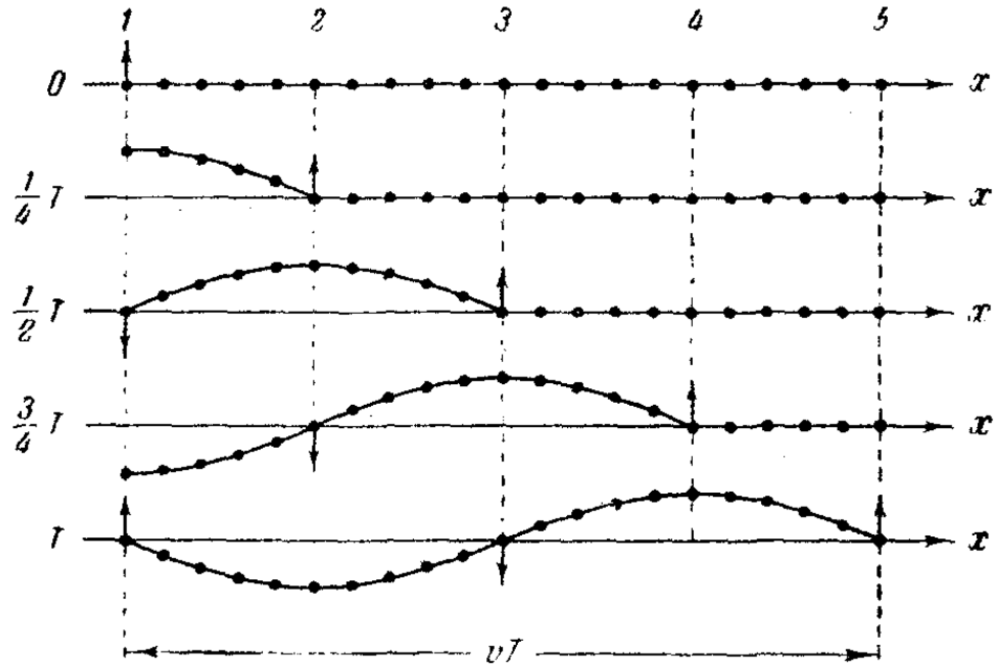

Рис. 192.

Figure 3: alt text

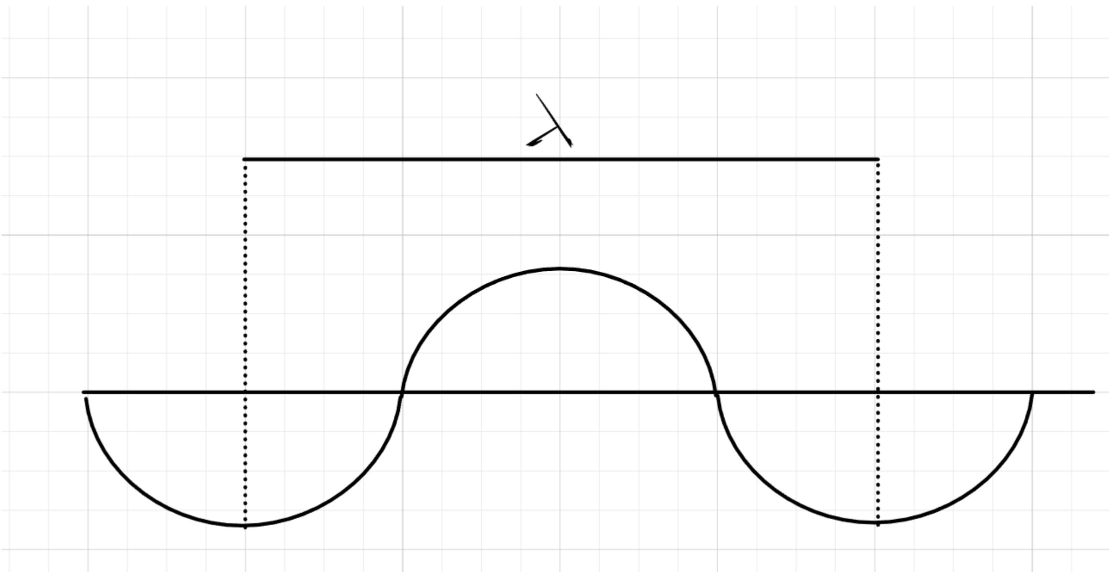

Figure 4: alt text

Волновое Уравнение

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение, колеблющейся точки, как функцию ее координат [1]), x, y, z и времени t:

$$\xi = \xi(x,\ y,\ z;\ t). \tag{78.1}$$

Figure 5: alt text

$$\tau = \frac{x}{v},$$

Figure 6: alt text

Уравнение плоской волны

уравнеие плоской волны

$$\xi = a\cos(wt - kx)$$

$$\xi(x,\ t) = a\cos\omega(t-\tau) = a\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Figure 7: alt text

Уравнение сферической волны

уравнение сферической волны

$$\xi = \frac{a}{r}\cos w(t - \frac{r}{v})$$

Зафиксируем какое-либо значение фазы, стоящей в уравнении (78.2), положив:

$$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)=\text{const}. \tag{78.3}$$

Выражение (78.3) дает связь между временем (t) и тем местом (x), в котором зафиксированное значение фазы осуществляется в данный момент. Определив вытекающее из него значение $\frac{dx}{dt}$, мы найдем скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав выражение (78.3), получим:

$$dt-\frac{1}{v}\,dx=0,$$

Figure 8: alt text

откуда

$$\frac{dx}{dt}=v. \tag{78.4}$$

Таким образом, скорость распространения волны v в уравнении (78.2) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем ее называют фазовой скоростью. Из (78.4) следует, что скорость волны (78.2) положительна. Следовательно, уравнение (78.2) описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастания x. Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, имеет вид

$$\xi=a\cos\omega\left(t+\frac{x}{v}\right). \tag{78.5}$$

Действительно, приравняв константе фазу волны (78.5) и продифференцировав, получим:

$$\frac{dx}{dt}=-v,$$

Figure 9: alt text

откуда и следует, что волна (78.5) распространяется в сторону убывания x.

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно t и x вид. Для этого введем так называемое волновое число k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (78.6)$$

268

Из (77.1) и (78.6) вытекает, что между волновым числом k, круговой частотой ω и фазовой скоростью волны v имеется соотношение

$$v = \frac{\omega}{k}. \qquad \textbf{(78.7)}$$

Figure 10: alt text

Заменив в уравнении (78.2) v его значением **(78.7)** и внеся в скобки ω, получим уравнение плоской волны в виде

$$\xi = a\cos(\omega t - kx). \qquad \textbf{(78.8)}$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания x, будет отличаться от (78.8) только знаком при члене kx.

Figure 11: alt text

В случае, когда скорость распространения волны во всех направлениях одна и та же, порождаемая точечным источником волна будет сферической. Предположим, что фаза колебаний источника равна ωt. Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса r, будут колебаться с фазой $\omega(t - r/v)$ (чтобы пройти путь r, волне требуется время $\tau = r/v$). Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной — она убывает с расстоянием от источника по закону $1/r$ (см. § 82). Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi = \frac{a}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v}\right), \tag{78.9}$$

где a — постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность a равна размерности амплитуды, умноженной на размерность длины (размерность r).

Figure 12: alt text

§ 79. Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении

В предыдущем параграфе мы получили уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении оси x. Найдем уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, образующем с осями координат x, y, z углы α, β и γ. Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат (рис. 196), имеют вид

$$\xi_0 = a \cos \omega t. \qquad (79.1)$$

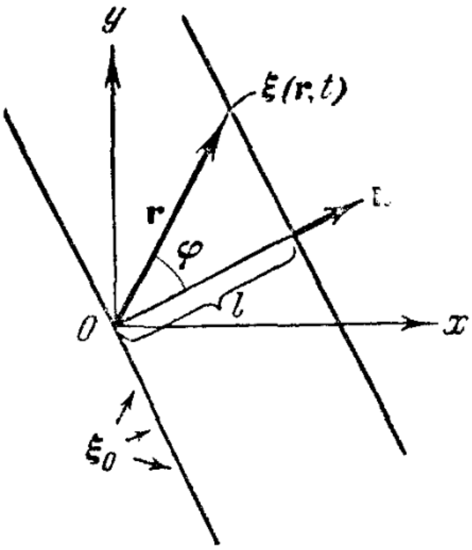

Рис. 196.

Возьмем волновую поверхность (плоскость), отстоящую от начала координат на расстоянии l. Колебания в этой плоскости будут отставать от колебаний (79.1) на время $\tau = l/v$;

$$\xi = a \cos \omega \left(t - \frac{l}{v}\right). \qquad (79.2)$$

Выразим l через радиус-вектор $\mathbf{r}$ точек рассматривае-

Figure 13: alt text

мой поверхности. Для этого введем единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали к волновой поверхности. Легко видеть, что скалярное произведение $\mathbf{n}$ на радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой из точек поверхности имеет одно и то же значение, равное l:

$$\mathbf{nr} = r\cos\varphi = l. \tag{79.3}$$

Подставим выражение (79.3) для l в уравнение (79.2), внеся одновременно в скобки ω:

$$\xi = a\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}\mathbf{nr}\right). \tag{79.4}$$

Отношение ω/v равно волновому числу k [см. (78.7)]. Вектор

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \tag{79.5}$$

равный по модулю волновому числу $k = 2\pi/\lambda$ и имеющий направление нормали к волновой поверхности, называется волновым вектором. Введя $\mathbf{k}$ в (79.4), получим:

$$\xi(\mathbf{r},\ t) = a\cos(\omega t - \mathbf{kr}). \tag{79.6}$$

Figure 14: alt text

мени t.

Чтобы перейти от радиуса-вектора точки к ее координатам x, y, z, выразим скалярное произведение $\mathbf{kr}$ через проекции векторов на координатные оси

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Тогда уравнение плоской волны принимает вид

$$\xi(x,\ y,\ z;\ t) = a\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \tag{79.7}$$

где $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma$. Функция

Figure 15: alt text

Оказывается, что уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым. Чтобы установить вид волнового уравнения, сопоставим вторые частные производные по координатам и времени от функции (79.7), описывающей плоскую волну. Продифференцировав (79.7) дважды по каждой из переменных, получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -\omega^2 \xi, \tag{80.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_x^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_y^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_z^2 \xi. \end{aligned}\right\} \tag{80.2}$$

Figure 16: alt text

Сложим вместе уравнения (80.2):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\xi = -k^2\xi. \quad (80.3)$$

Теперь, сопоставляя уравнения (80.1) и (80.3), находим, что

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Наконец, учитывая, что согласно (78.7) $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$, получаем окончательно:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\ ^{1)}. \quad (80.4)$$

Уравнение (80.4) и есть искомое волновое уравнение. Легко убедиться в том, что волновому уравнению удовлетворяет не только функция (79.7), но и любая функция вида

$$f(x,\ y,\ z;\ t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \quad (80.5)$$

Figure 17: alt text