Heston-Modell Cheatsheet

Alexandros Apostolidis

3. Juni 2025

Grundidee

Das Heston-Modell ist ein stochastisches Volatilitätsmodell, das eine zufällig schwankende Varianz anstelle konstanter Volatilität wie im Black-Scholes-Modell verwendet. Es erfasst Smile/Skew-Effekte und eignet sich für realistisches Optionspricing.

1. Dynamik unter risikoneutralem Maß

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t^v$$
$$dW_t^S \cdot dW_t^v = \rho dt$$

Parameter:

- S_t: Asset-Preis
- v_t: Varianzprozess
- κ: Geschwindigkeit der Mittelwert-Reversion
- θ: langfristiges Varianzmittel
- σ: Volatilität der Varianz (Vol-of-Vol)
- ρ: Korrelation zwischen Preis- und Varianzprozess

2. Charakteristische Funktion (Fourier-Bewertung)

Das Heston-Modell besitzt eine geschlossene Form für die charakteristische Funktion:

$$\phi(u, t) = \exp(C(u, t) + D(u, t)v_0 + iu \log S_0)$$

mit komplexen Funktionen $C(u, t), D(u, t)$ abhängig von Modellparametern.

3. Anwendung auf Option Pricing

- Fourier-Inversion zur Preisbestimmung von europäischen Optionen (Carr-Madan, FFT)
- Kalibrierung der Parameter an Markt-IV-Surfaces
- Modelliert Volatility Smile besser als Black-Scholes

4. Vorteile und Limitationen

Vorteile

- Realistische Replikation von Smiles/Skews
- Geschlossene Form für charakteristische Funktion
- Gängige Kalibrierungsmethoden verfügbar

Limitationen

- Keine Sprünge (Jump-Diffusion separat nötig)
- Komplexität bei der numerischen Implementierung
- Ggf. instabil bei sehr kurzer Restlaufzeit

5. Simulation und Parameterwirkung

Simulationstipp

Die direkte Simulation des Varianz-Prozesses v_t erfordert Sorgfalt:

- **Euler-Maruyama:** Schnell, aber ungenau und kann negative Varianz erzeugen.
- **QE-Methode (Andersen):** Stabil, speziell für Heston entwickelt.
- **Milstein:** Höhere Genauigkeit, aber komplexer.

Für korrelierte Wiener-Prozesse: nutze Cholesky-Zerlegung oder Rotationsmatrix.

Intuition für Parameterwirkung

- $\kappa \uparrow \to$ schnellere Mittelwert-Reversion von v_t
- $\theta \uparrow \to$ höheres langfristiges Volatilitätsniveau
- $\sigma \uparrow \to$ stärkere Schwankung der Volatilität (mehr Smile)
- $\rho \downarrow \to$ stärkere linke Skews (höhere Put-IV)

6. Kalibrierung

Die Modellparameter werden typischerweise durch Minimierung des Fehlers zur beobachteten IV-Oberfläche bestimmt:

$$\min_{\theta,\kappa,\sigma,\rho,v_0} \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma^{(i)}_{\text{impl, Markt}} - \sigma^{(i)}_{\text{impl, Modell}} \right)^2$$

Gängige Optimierungsverfahren:

- **Global:** Differential Evolution, Simulated Annealing
- **Lokal:** Nelder-Mead, L-BFGS-B

Dabei müssen Parameterrestriktionen wie $\kappa, \theta, \sigma, v_0 > 0$ und $|\rho| \leq 1$ beachtet werden.

7. Visualisierung

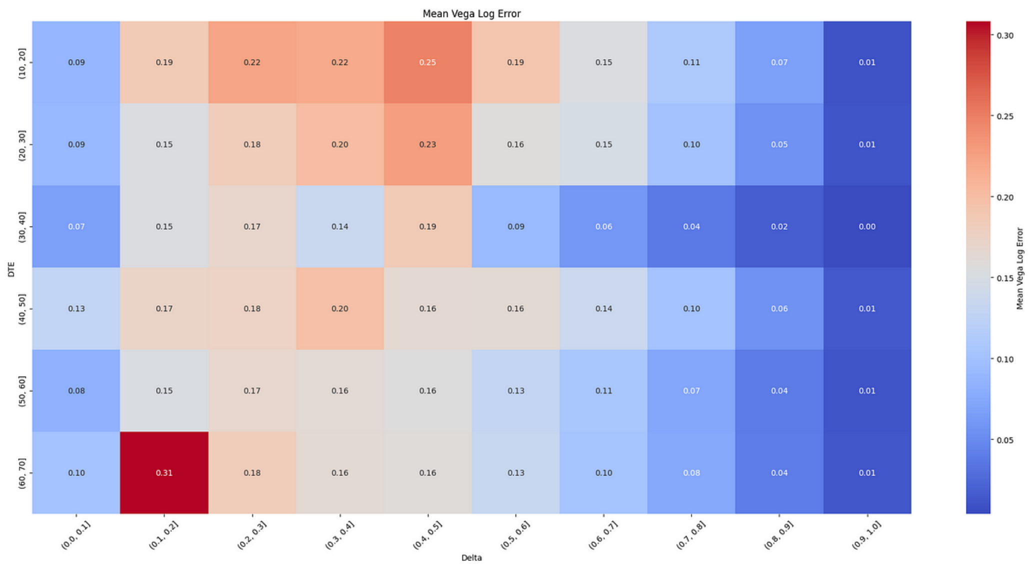

Abbildung 1: Vega-Sensitivität unter dem Heston-Modell für verschiedene Strikes und Laufzeiten.

8. Preisberechnungsmethoden im Vergleich

Wann welche Methode?

- **Fourier-Methoden (z. B. Carr-Madan):** Sehr effizient für europäische Optionen, wenn charakteristische Funktion bekannt.
- **Monte Carlo:** Flexibel bei exotischen Optionen oder Pfadabhängigkeiten (z. B. Asian, Barrier), aber langsamer.
- **Finites Differenzenverfahren:** Für PIDE (z. B. bei Heston mit Jumps), gut für Preisoberflächen.

9. Modellhierarchie in der Volatilitätsmodellierung

Vergleich der Modelle

- **Black-Scholes:** Konstante Volatilität $\rightarrow$ keine Smile-Effekte.
- **Heston:** Stochastische Volatilität $\rightarrow$ Smile, Mean-Reversion.
- **Bates:** Heston + Sprungprozess $\rightarrow$ besser bei Earnings-/Crash-Risiken.
- **SABR:** Besonders für Zinsderivate mit starkem Skew.

10. Typische Anwendungen in der Praxis

Einsatzbereiche des Heston-Modells

- Pricing von **exotischen Optionen** mit Volatilitätskomponenten (z. B. Barrier, Cliquet).
- **Volatility Surface Calibration** im Derivatehandel.
- **XVA-Analysen**: Adjustments für Credit, Funding oder Capital.
- **Stresstests**: Reaktion auf Schocks bei IV-Surfaces.