ΜΥΥ504 : «ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΙΩΑΝΝΗΣ ΧΟΥΛΙΑΡΑΣ, ΑΜ: 2631
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΖΩΓΑΝΑΣ, ΑΜ: 2977
ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΤΖΩΡΤΖΗΣ, ΑΜ: 3088

Πρόβλημα 1

Μέθοδος Euler

Ο τύπος για την απλή μέθοδο του Euler είναι ο εξής:

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n) \tag{1}$$

Στις εξισώσεις που μας δίνονται, πρέπει να λύσουμε ως προς τις μεταβλητές: x” , y” και z”. Προκύπτουν οι εξής:

$$x'' = \frac{\frac{fx - Dx\cdot|x'|\cdot x'}{m+3ma} + sin(z)\cdot z'\cdot x' - cos(z)\cdot z'\cdot y'}{cos(z)} \tag{2}$$

$$y'' = \frac{\frac{fy - Dy\cdot|y'|\cdot y'}{m+2ma} + sin(z)\cdot z'\cdot y' + cos(z)\cdot z'\cdot x'}{cos(z)} \tag{3}$$

$$z'' = \frac{nz - 2\cdot Dz\cdot|z'|z'}{mz} \tag{4}$$

Σημειώνεται ότι για την δοθείσα μεταβλητή ψ, χρησιμοποιούμε την μεταβλητή z.
Για κάθε μεταβλητή θέτουμε την παράγωγο της, ίση με μία άλλη μεταβλητή. Άρα όπου x’ αντικαθιστούμε με μία μεταβλητή w, όπου y’ αντικαθιστούμε με μία μεταβλητή v και όπου z’ αντικαθιστούμε με μία μεταβλητή u

Άρα η λύση μας προκύπτει αντικαθιστώντας τις τιμές που δίνονται στην εκφώνηση και χρησιμοποιώντας την απλή μέθοδο πρώτα για τις μεταβλητές που θέσαμε και έπειτα για τις μεταβλητές με τις διπλές παραγώγους. Χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε:

Για το x:

$$w_{n+1} = w_n + h(x''_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + h(w_n)$$

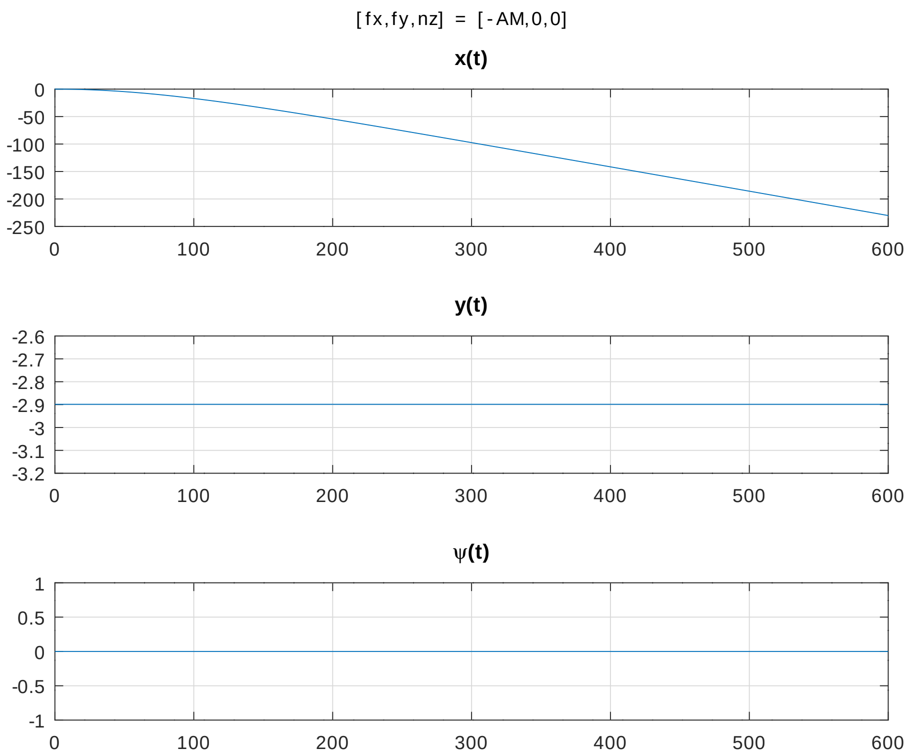
Για το y:

$$v_{n+1} = v_n + h(y''_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + h(v_n)$$

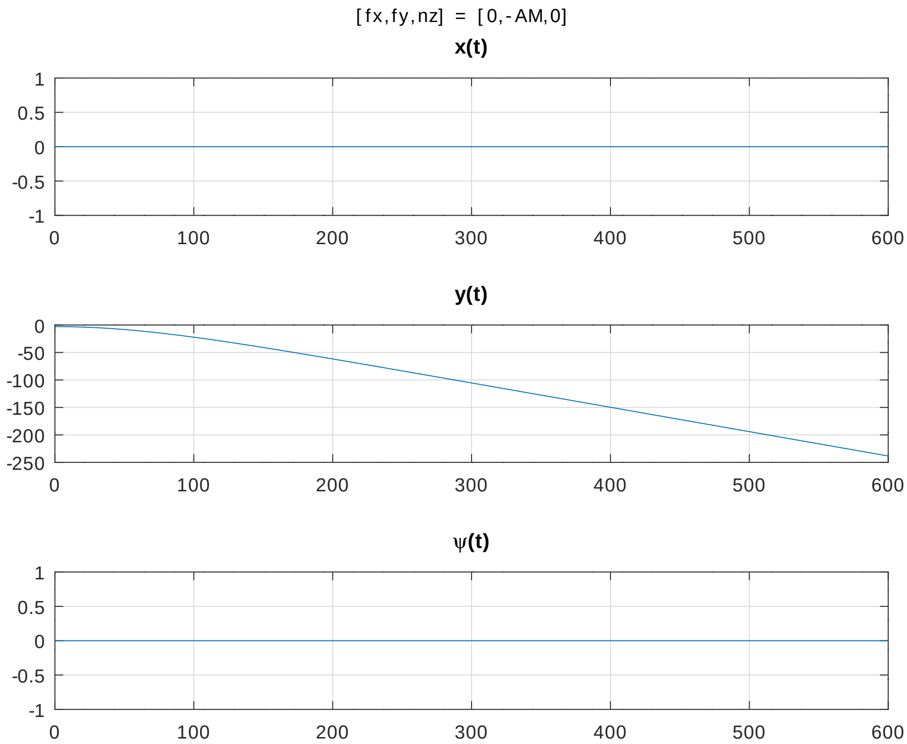
Για το z:

$$u_{n+1} = u_n + h(z''_n)$$
$$z_{n+1} = z_n + h(u_n)$$

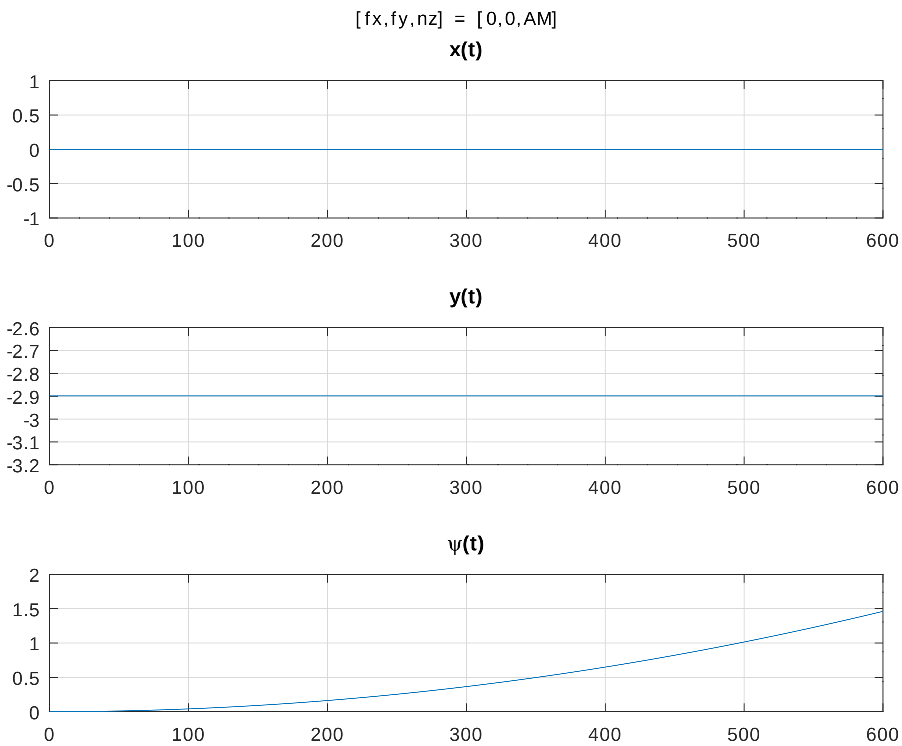
Γραφικές Παραστάσεις για απλή μέθοδο Euler



Παρατηρούμε ότι, το x αλλάζει θέση ενώ τα y και z μένουν σταθερά στις αρχικές τους συνθήκες αφού δεν τους ασκείται κάποια δύναμη.



Ομοίως, το y μεταβάλλεται σε αυτή την περίπτωση αλλά οι x και z παραμένουν στις αρχικές συνθήκες.



Ενώ σε αυτή την περίπτωση το z αυξάνεται διότι δίνουμε μια θετική δύναμη, ενώ οι y και x παραμένουν ίδιες.

Βελτιωμένη μέθοδος Euler

<u>Για την μεταβλητή z.</u>

Θέτουμε z’ = u = f1(t,z,u). Άρα u’ = $\frac{nz-2\cdot Dz\cdot|u_n|\cdot u_n}{mz}$ = f2(t,z,u)

Η βελτιωμένη μέθοδος για την μεταβλητή z θα υπολογιστεί από τους εξής δύο τύπους:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(k1z + k2z)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(k1u + k2u)$$

$k1z = f_1(t_n, z_n, u_n) = u_n$
$k2z = f_1(t_n + h, z_n + k1z\cdot h, u_n + k1u\cdot h) = u_n + h\cdot\left(\frac{nz-2\cdot Dz\cdot|u_n|\cdot u_n}{mz}\right)$
$k1u = f_2(t_n, z_n, u_n)$
$k2u = f_2(t_n + h, z_n + k1u\cdot h, u_n + k1u\cdot h) = \frac{nz-2\cdot Dz\cdot\left|\frac{u_n-2\cdot Dz\cdot|u_n|\cdot u_n}{mz}\right|\cdot\frac{u_n-2\cdot Dz\cdot|u_n|\cdot u_n}{mz}}{mz}$

<u>Για την μεταβλητή x.</u>

Θέτουμε x’ = w = g1(t,x,y,z,w) και w’ = g2(t,x,y,z,w) = $\frac{\frac{fx-Dx\cdot|w_n|\cdot w_n}{m+3ma}+sin(z)\cdot z'\cdot w_n - cos(z)\cdot z'\cdot y'}{cos(z)}$

Η βελτιωμένη μέθοδος για την μεταβλητή x θα υπολογιστεί από τους εξής δύο τύπους:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(k1x + k2x)$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2}(k1w + k2w)$$

$k1x = g_1(t_n, x_n, y_n, z_n, w_n) = w_n$

$$k2x = g_1(t_n + h, x_n + h\cdot k1x, y_n + h\cdot k1y, z_n + h\cdot k1z, w_n + h\cdot k1w) = w_n + k1w\cdot h =$$
$$w_n + h\cdot\left[\frac{\frac{fx-Dx|w_n|w_n}{m+3ma} + sin(z_n)\,z'_n\cdot w_n - cos(z_n)\cdot z'_n\cdot y'_n}{cos(z_n)}\right]$$

$$k1w = g_2(t_n, x_n, y_n, z_n, w_n) = \frac{\frac{fx-Dx|w_n|w_n}{m+3ma} + sin(z_n)\,z'_n\cdot w_n - cos(z_n)\cdot z'_n\cdot y'_n}{cos(z_n)}$$

$$k2w = g_2(t_n + h, x_n + k1x\cdot h, y_n + h\cdot k1y, z_n + h\cdot k1z, w_n + h\cdot k1w) =$$

$$\frac{\frac{fx-Dx|(w_n+k1w\cdot h)|(w_n+k1w\cdot h)}{m+3ma} + sin(z_n+h\cdot u_n)\,(u_n+h\cdot k1u)\cdot(w_n+k1w\cdot h) - cos(z_n+h\cdot u_n)\cdot(u_n+h\cdot k1u)\cdot(v_n+h\cdot k1v)}{cos(z_n+h\cdot u_n)}$$

Με αντικατάσταση στις x_{n+1} και w_{n+1} θα υπολογίζονται οι τιμές.

Για την μεταβλητή y.

Θέτουμε y’ = v = p1(t,x,y,z,v) και v’ = p2(t,x,y,z,v) = $\frac{\frac{fy-Dy\cdot|v|\cdot v}{m+2ma}+cos(z)\cdot z'\cdot x'+sin(z)\cdot z'\cdot y'}{cos(z)}$

Η βελτιωμένη μέθοδος για την μεταβλητή x θα υπολογιστεί από τους εξής δύο τύπους:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k1y + k2y)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(k1v + k2v)$$

Με τις τιμές:

$$k1y = p_1(t_n, x_n, y_n, z_n, v_n) = v_n$$
$$k2y = p_1(t_n + h, x_n + h\cdot w_n, y_n + h\cdot k1y, z_n + h\cdot u_n, v_n + h\cdot k1v) = v_n + k1v\cdot h =$$

$$v_n + h\cdot\left[\frac{\frac{f_y - Dy\cdot|v_n|\cdot v_n}{m+2ma} + cos(z_n)\cdot u_n\cdot w_n + sin(z_n)\cdot u_n\cdot v_n}{cos(z_n)}\right]$$

$$k1v = p_2(t_n, x_n, y_n, z_n, v_n) =$$

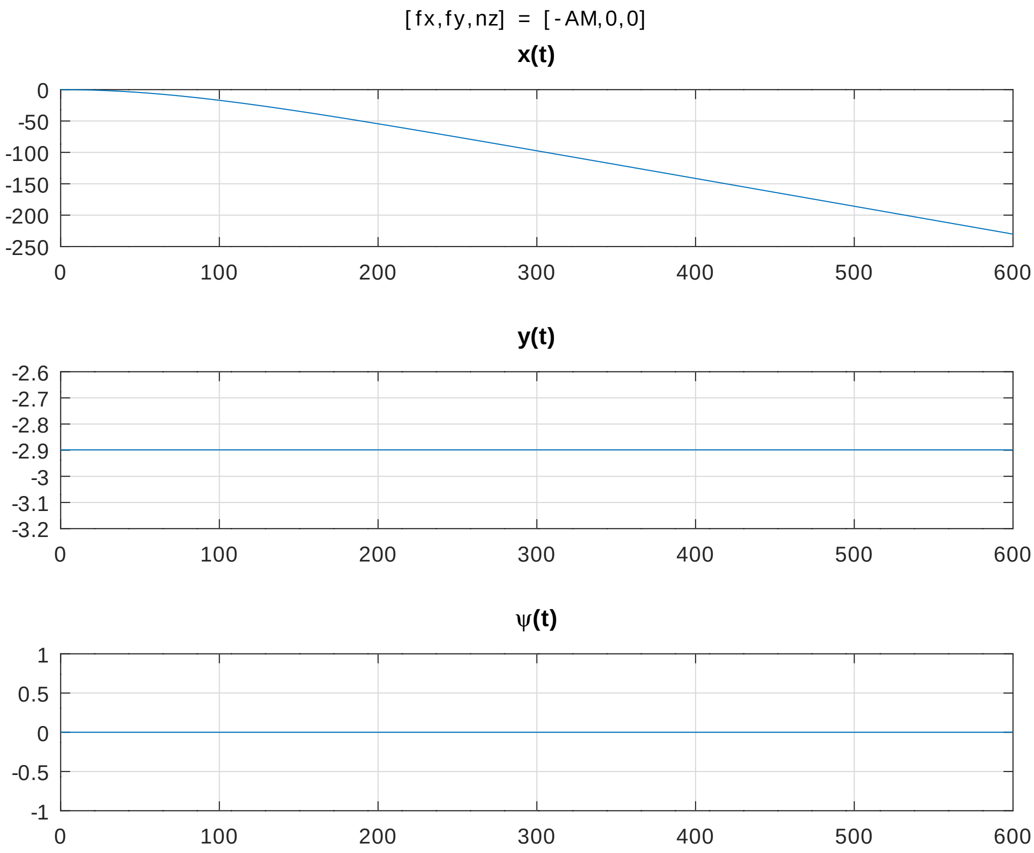
$$\frac{\frac{f_y - Dy\cdot|v_n|\cdot v_n}{m+2ma} + cos(z_n)\cdot u_n\cdot w_n + sin(z_n)\cdot u_n\cdot v_n}{cos(z_n)}$$

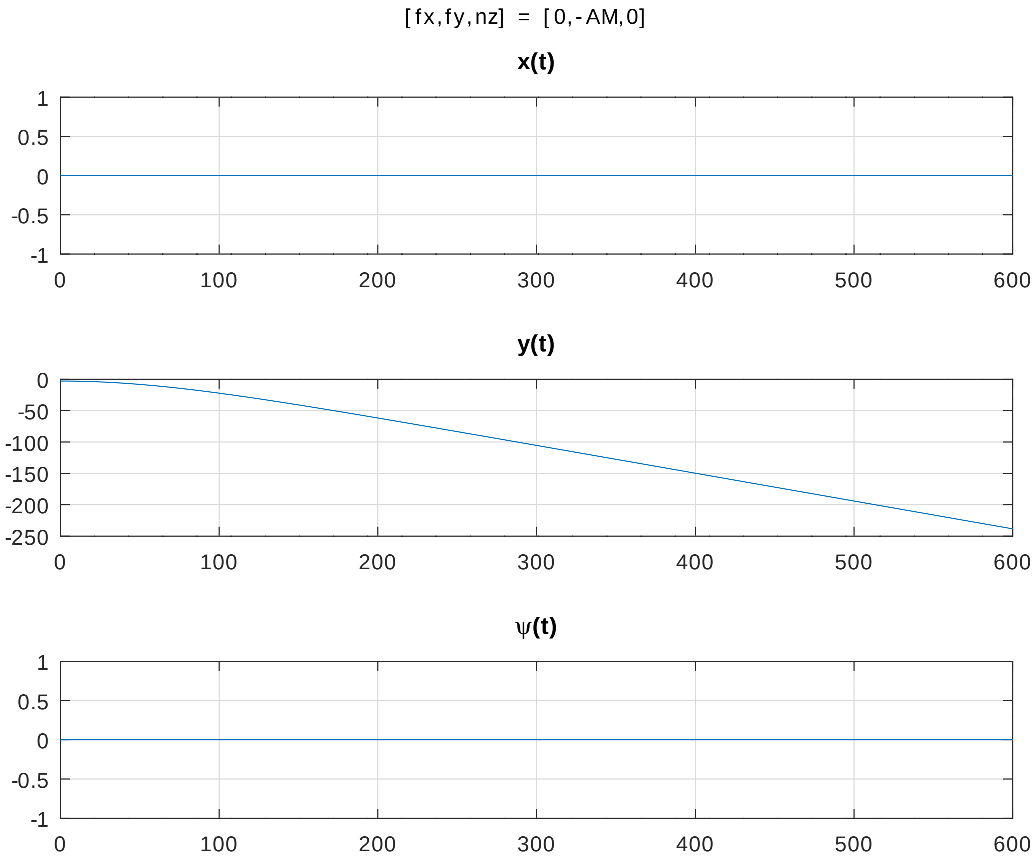
$$k2v = p_2(t_n + h, x_n + h\cdot w_n, y_n + h\cdot k1y, z_n + h\cdot u_n, v_n + h\cdot k1v) = v_n + k1v\cdot h =$$

$$\frac{\frac{fy-Dy|(v_n+k1v\cdot h)|(v_n+k1v\cdot h)}{m+2ma} + cos(z_n+h\cdot u_n)(u_n+h\cdot k1u)\cdot(w_n+k1w\cdot h) + sin(z_n+h\cdot u_n)\cdot(u_n+h\cdot k1u)\cdot(v_n+h\cdot k1v)}{cos(z_n+h\cdot k1u)}$$

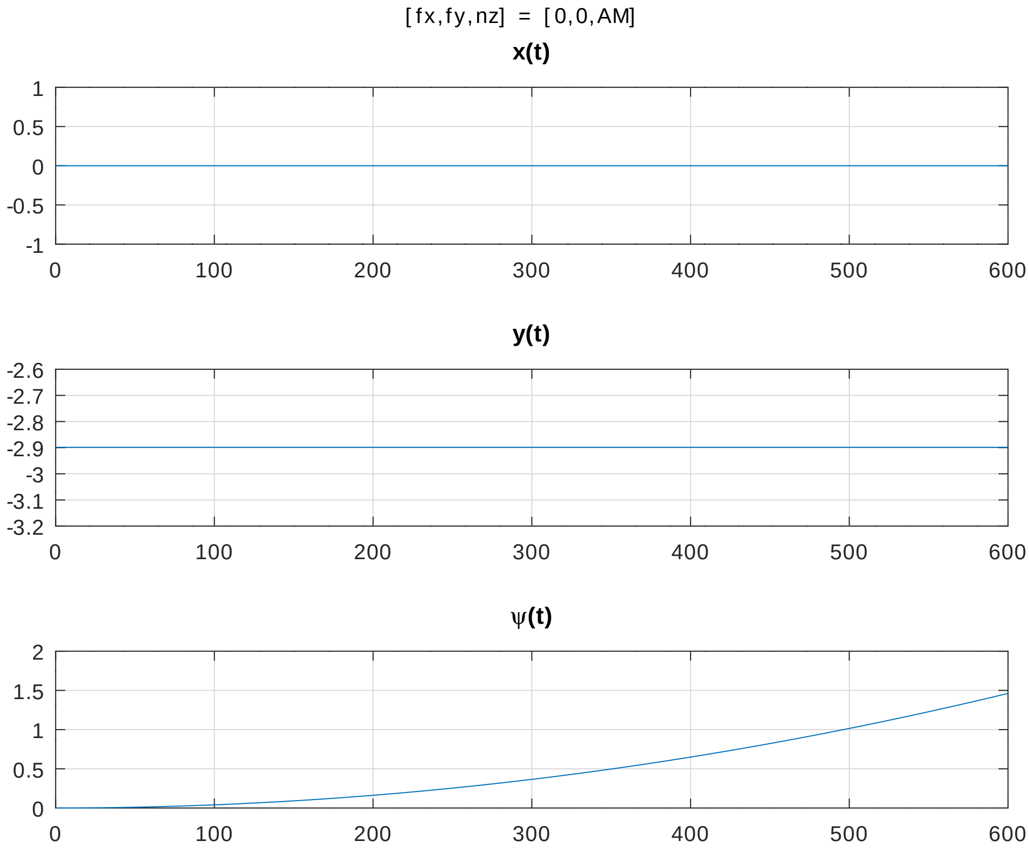
Και με αντικατάσταση στις y_{n+1} και v_{n+1} θα υπολογίζονται οι τιμές.

Γραφικές Παραστάσεις για βελτιωμένη μέθοδο Euler





[fx,fy,nz] = [0,-AM,0]
x(t)
y(t)
ψ(t)


[fx,fy,nz] = [0,0,AM]
x(t)
1
0.5
0
-0.5
-1
0
100
200
300
400
500
600
y(t)
-2.6
-2.7
-2.8
-2.9
-3
-3.1
-3.2
0
100
200
300
400
500
600
ψ(t)
2
1.5
1
0.5
0
0
100
200
300
400
500
600

Ερώτημα Γ

Με αντικατάσταση των τιμών fx , fy, nz με τις τιμές:

$$f_x = K_{px}(x_{des} - x) - K_{dx}(x')$$

$$f_y = K_{py}(y_{des} - y) - K_{dy}(y')$$

$$n_z = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}(\psi')$$

Η απλή μέθοδος δεν έχει καμία διαφορά στον υπολογισμό της παρά μόνο οι αλλαγές των παραπάνω μεταβλητών. Έτσι, εργαζόμαστε όπως και στη προηγούμενη περίπτωση. Στην βελτιωμένη μέθοδο του Euler υπάρχουν αλλαγές για τον υπολογισμό των k2u, k2w, k2v. Ο τρόπος επίλυσης είναι ο εξής:
Οι τιμές των nz, fy και fx είναι:

$$n_z = K_{pz} \cdot (z_{des} - z(i)) - K_{dz} \cdot u(i)$$

$$f_y = K_{py} \cdot (y_{des} - y(i)) - K_{dy} \cdot v(i)$$

$$f_x = K_{px} \cdot (x_{des} - x(i)) - K_{dx} \cdot w(i)$$

Πρώτα υπολογίζονται τα k1(x,y,z):

$$k1z = u(n)$$

$$k1y = v(n)$$

$$k1x = w(n)$$

Συνεχίζοντας, υπολογίζουμε τα k1(u,v,w):

$$k1u = f_2(t_n, z_n, u_n)$$

$$k1v = p_2(t_n, x_n, y_n, z_n, v_n)$$

$$k1w = g_2(t_n, x_n, y_n, z_n, w_n)$$

Στην συνέχεια θα υπολογιστούν οι τιμές k2(x,y,z)

$$k2z = u(n) + (h \cdot k1u)$$

$$k2x = w(n) + (h \cdot k1w)$$

$$k2y = v(n) + (h \cdot k1v)$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να υπολογιστούν τα νέα nz1,fy1,fx1 ως εξής:

$$n_z 1 = Kpz \cdot (z_{des} - (z_n + h \cdot k1z)) - Kdz \cdot k2z$$

$$f_y 1 = Kpy \cdot (y_{des} - (y_n + h \cdot k1y)) - Kdy \cdot k2y$$

$$f_x 1 = Kpx \cdot (x_{des} - (x_n + h \cdot k1x)) - Kdx \cdot k2x$$

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των k2(u,w,v):

$$k2u = f_2(t_n + h,\, z_n + k1u \cdot h,\, u_n + k1u \cdot h) =$$

$$\frac{nz1 - 2 \cdot Dz \cdot \left|\frac{u_n - 2 \cdot Dz \cdot |u_n| \cdot u_n}{mz}\right| \cdot \frac{u_n - 2 \cdot Dz \cdot |u_n| \cdot u_n}{mz}}{mz}$$

$$k2v = p_2(t_n + h\,,\, x_n + h \cdot w_n\,,\, y_n + h \cdot k1y\,,\, z_n + h \cdot u_n\,,\, v_n + h \cdot k1v) = v_n + k1v \cdot h =$$

$$\frac{\frac{fy1 - Dy|(v_n + k1v \cdot h)|(v_n + k1v \cdot h)}{m + 2ma} + cos(z_n + h \cdot u_n)\,(u_n + h \cdot k1u) \cdot (w_n + k1w \cdot h) + sin(z_n + h \cdot u_n) \cdot (u_n + h \cdot k1u) \cdot (v_n + h \cdot k1v)}{cos(z_n + h \cdot k1u)}$$

$$k2w = g_2(t_n + h\,,\, x_n + k1x \cdot h\,,\, y_n + h \cdot k1y\,,\, z_n + h \cdot k1z\,,\, w_n + h \cdot k1w)$$

$$\frac{\frac{fx1 - Dx|(w_n + k1w \cdot h)|(w_n + k1w \cdot h)}{m + 3ma} + sin(z_n + h \cdot u_n)\,(u_n + h \cdot k1u) \cdot (w_n + k1w \cdot h) - cos(z_n + h \cdot u_n) \cdot (u_n + h \cdot k1u) \cdot (v_n + h \cdot k1v)}{cos(z_n + h \cdot u_n)}$$

Τέλος για τον υπολογισμό της βελτιωμένης μεθόδου του Euler αρκεί να υπολογίσουμε:
Z:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} \cdot (k1u + k2u)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (k1z + k2z)$$

Y:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} \cdot (k1v + k2v)$$

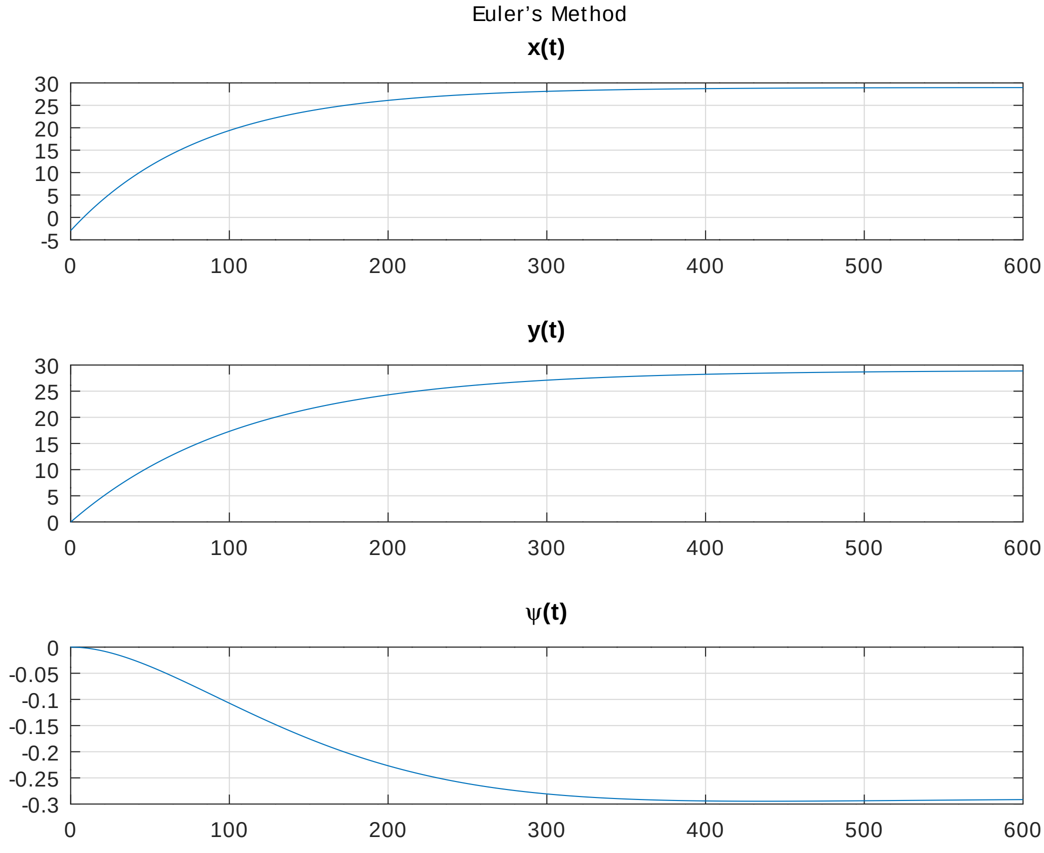
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot (k1y + k2y)$$

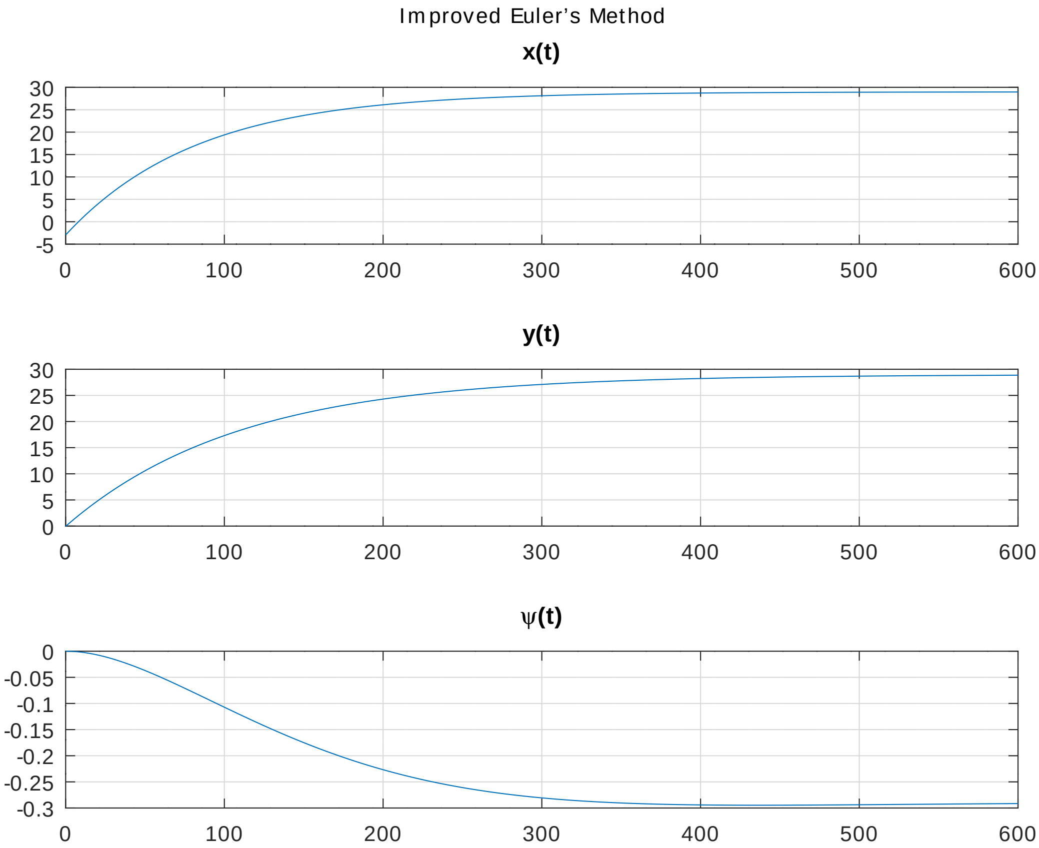
X:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} \cdot (k1w + k2w)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \cdot (k1x + k2x)$$

Με την αντικατάσταση των τιμών που μας δίνονται στην εκφώνηση όπου προκύπτουν οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις στην μέθοδο του Euler αλλά και την βελτιωμένη μέθοδο, παρατηρούμε ότι για την μεταβλητή x από την x=-5 και t=0 αρχίζει και αυξάνεται θετικά έως και την τιμή περίπου t=350 όπου και μένει σταθερή με τιμή που τείνει στο x=30. Επίσης η y ακολουθεί την ίδια εκθετική καμπύλη ξεκινώντας από την τιμή t=0 και y=0. Σε μία τιμή περίπου t=470, τείνει να φτάσει την τιμή y=30. Για την μεταβλητή z, παρατηρούμε ότι ξεκινάει από την θέση 0 για t=0 και ακολουθεί μία αρνητική καμπύλη έως ότου φτάσει στην τιμή περίπου t=380 όπου θα τείνει να φτάσει την τιμή z=-0.3.


Euler's Method
x(t)
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
100
200
300
400
500
600
y(t)
30
25
20
15
10
5
0
0
100
200
300
400
500
600
ψ(t)
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
0
100
200
300
400
500
600


Improved Euler's Method
x(t)
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
100
200
300
400
500
600
y(t)
30
25
20
15
10
5
0
0
100
200
300
400
500
600
ψ(t)
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
0
100
200
300
400
500
600

Πρόβλημα 2

(α'): Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και να προσδιορισθούν οι πόλοι και τα μηδενικά της, υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες.

$$m_z \cdot z'' = K_{pz} \cdot (z_{des} - z) - K_{dz\cdot(z')} - 2D_z \cdot z' =>$$

$$\frac{m_z}{K_{pz}} \cdot z'' + \frac{\left(K_{dz+2D_z}\right)}{K_{pz}} \cdot z' + z = z_{des}$$

Οι τιμές των mz και Dz θα αντικατασταθούν από το ερώτημα γ του πρώτου προβλήματος: $m_z = 357000000kg\cdot m2$ και $D_z = 6000$. Θέτοντας τώρα το $z_{des} = u(t)$ έχουμε:

$$\frac{m_z}{K_{pz}} \cdot z'' + \frac{\left(K_{dz+2D_z}\right)}{K_{pz}} \cdot z' + z = u(t) \tag{5}$$

Επίσης: $z(t) <-> Z(s)$ και $u(t) <-> U(s) = \frac{z_{des}}{s}$, $L[z''(t)] = s^2 \cdot Z(s)$ και $L[z'(t)] = s \cdot Z(s)$
Με αντικατάσταση στην (5) θα έχουμε:

$$\frac{m_z}{K_{pz}} \cdot s^2 \cdot Z(s) + \frac{\left(K_{dz+2D_z}\right)}{K_{pz}} \cdot s \cdot Z(s) + Z(s) = U(s) =>$$

$$Z(s) \cdot \left[\frac{m_z}{K_{pz}} \cdot s^2 + \frac{\left(K_{dz+2D_z}\right)}{K_{pz}} \cdot s + 1\right] = U(s) =>$$

$$H(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{m_z}{K_{pz}} \cdot s^2 + \frac{\left(K_{dz+2D_z}\right)}{K_{pz}} \cdot s + 1} \tag{6}$$

Η οποία (6) είναι και η συνάρτηση μεταφοράς.

Επίσης, το Z(s) είναι : $Z(s) = \frac{z_{des}}{s} \cdot \frac{1}{\frac{m_z}{K_{pz}} \cdot s^2 + \frac{\left(K_{dz+2D_z}\right)}{K_{pz}} \cdot s + 1}$

Από την συνάρτηση μεταφοράς (6) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διακρίνουσα για να βρούμε τις δύο λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Εργαζόμαστε ως εξής:

$$\frac{m_z}{K_{pz}} \cdot s^2 + \frac{\left(K_{dz+2D_z}\right)}{K_{pz}} \cdot s + 1 = 0$$

$$\varDelta = \left[\frac{(K_{dz} + 2D_z)}{K_{pz}}\right]^2 - 4 \cdot \frac{m_z}{K_{pz}}$$

Άρα οι δύο λύσεις θα βρεθούν από:

$$s_1 = \frac{-\left(\frac{K_{dz}+2D_z}{K_{pz}}\right) + \sqrt{\varDelta}}{2 \cdot \frac{m_z}{K_{pz}}} = \frac{-(K_{dz} + 2D_z) + K_{pz} \cdot \sqrt{\varDelta}}{2 \cdot m_z}$$

$$s_2 = \frac{-\left(\frac{K_{dz}+2D_z}{K_{pz}}\right) - \sqrt{\varDelta}}{2 \cdot \frac{m_z}{K_{pz}}} = \frac{-(K_{dz} + 2D_z) - K_{pz} \cdot \sqrt{\varDelta}}{2 \cdot m_z}$$

Άρα έχουμε: $(s - s_1) \cdot (s - s_2) = 0$ και $H(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$ με τους πόλους s1 και s2.

(γ'): Βρείτε την αναλυτική λύση με τις αρχικές συνθήκες του Προβλήματος 1γ.

$$K_{pz} = 50000$$

$$K_{dz} = 6710133.33333$$

$$z_{des} = -0.28987$$

$$m_z = 357.000.000$$

$$D_z = 6000$$

$$z(0) = z'(0) = 0$$

$$m_z \cdot z'' = K_{pz} \cdot z_{des} - K_{pz} \cdot z - K_{dz} \cdot z' - 2D_z \cdot z'$$

$$m_z \cdot z'' + \left(K_{pz} + 2D_z\right) \cdot z' + K_{pz} \cdot z = K_{pz} \cdot z_{des}$$

s **Λύση της ομογενούς:** $m_z \cdot z'' + \left(K_{pz} + 2D_z\right) \cdot z' + K_{pz} \cdot z = 0$

Χ.Ε: $m_z \cdot r^2 + \left(K_{pz} + 2D_z\right) \cdot r + K_{pz} = 0$
με Διακρίνουσα: $\Delta = \left(K_{dz} + 2D_z\right)^2 - 4 \cdot m_z \cdot K_{pz} = -2.6212923x10^{13} < 0$ και ρίζες εξίσωσης:

$$r_1 = \frac{-\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z} + \frac{i\sqrt{\Delta}}{2m_z}$$

$$r_2 = \frac{-\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{2m_z}$$

Γενικά : $y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot cos(\mu t) + c_2 \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot sin(\mu t)$, με $\lambda = \frac{-\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z}$ και $\mu = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z}$

$$z_h(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z} t} \cdot cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z} t} \cdot sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot t\right) \tag{7}$$

Λύση της μη ομογενούς: $m_z \cdot z'' + \left(K_{dz} + 2D_z\right) \cdot z' + K_{pz} \cdot z = K_{pz} \cdot z_{des}$

Για $z = z_{des}$ => z'=0 => z'' = 0 => $K_{pz} \cdot z_{des} = K_{pz} \cdot z_{des}$
Άρα:

$$z_p(t) = z_{des} \tag{8}$$

Συνολικά από (7) και (8) έχουμε : $z(t) = z_h(t) + z_p(t)$

$$z'(t) = c_1 \cdot \left(\frac{-\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z}\right) \cdot e^{-\frac{\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z} t} \cdot cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot t\right) + c_1 \cdot e^{-\frac{\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z} t} \cdot \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot \left(-sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot t\right)\right) +$$
$$c_2 \cdot \left(\frac{-\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z}\right) \cdot e^{-\frac{\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z} t} \cdot sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{\frac{-\left(K_{dz} + 2D_z\right)}{2m_z} t} \cdot \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot t\right)$$

Για t=0, z(0) = z'(0) = 0

$$z(0) = c_1 \cdot e^0 \cdot cos(0) + c_2 \cdot e^0 \cdot sin(0) + z_{des} = 0 => c_1 = -z_{des}$$
$$z'(0) = z_{des} - \frac{(K_{dz}+2D_z)}{2m_z} \cdot e^0 \cdot cos(0) + c_2 \cdot e^0 \cdot \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot cos(0) = 0 => c_2 = \frac{z_{des} \cdot (K_{dz}+2D_z)}{\sqrt{|\Delta|}}$$

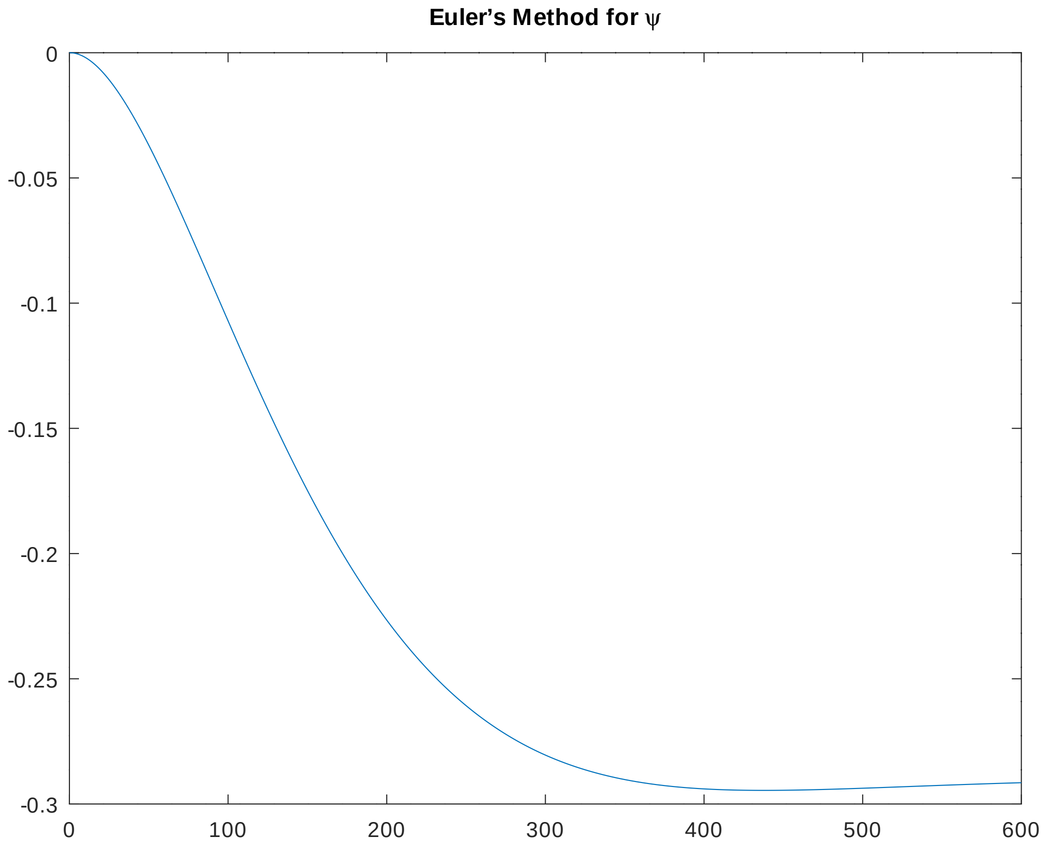
Χρησιμοποιώντας τις δύο τιμές των c1 και c2 μπορούμε να βρούμε την αναλυτική λύση:

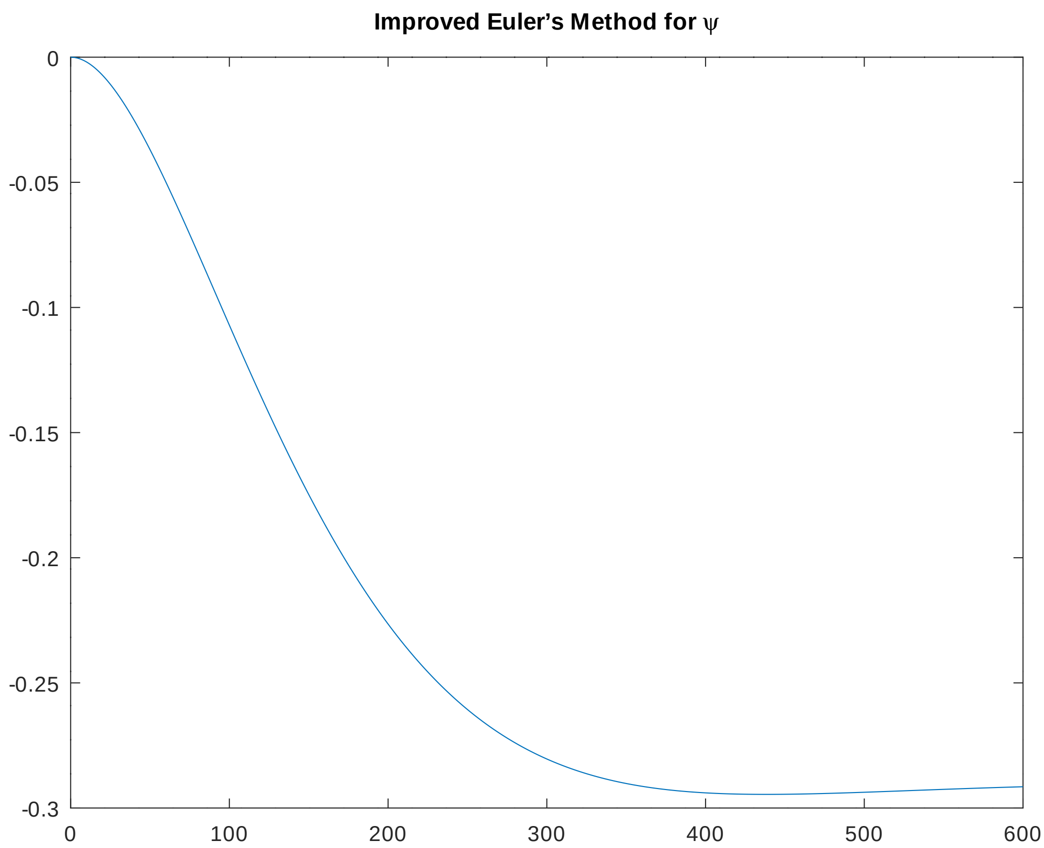
$$z(t) = -z_{des} \cdot e^{-\frac{(K_{dz}+2D_z)}{2m_z} \cdot t} \cdot cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot t\right) + z_{des} \cdot \frac{(K_{dz}+2D_z)}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot e^{-\frac{(K_{dz}+2D_z)}{2m_z} \cdot t} \cdot sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2m_z} \cdot t\right) + z_{des}$$

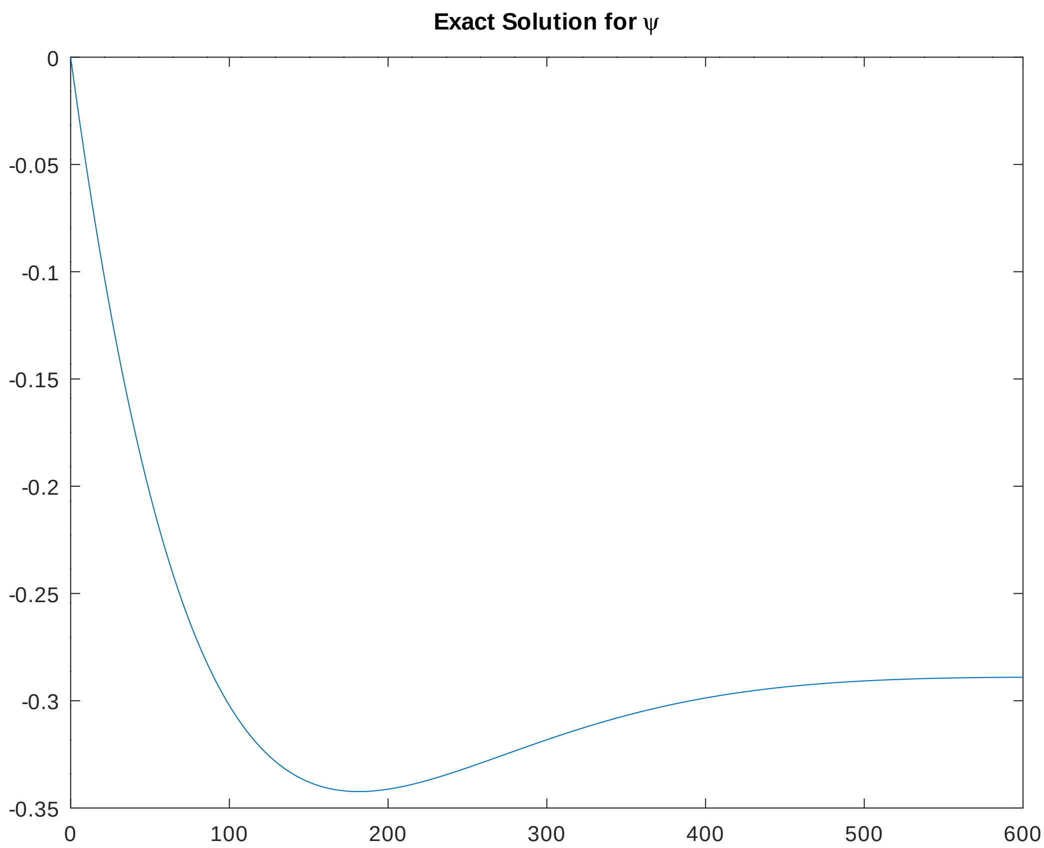
Στα παρακάτω γραφήματα *Difference between Exact Solution and Eulers Method for z* και *Difference between Exact Solution and Improved Eulers Method for z* παρουσιάζονται οι συγκρίσεις μεταξύ της α- κριβούς/αναλυτικής λύσης και των μεθόδων Euler/Βελτιωμένη Euler.

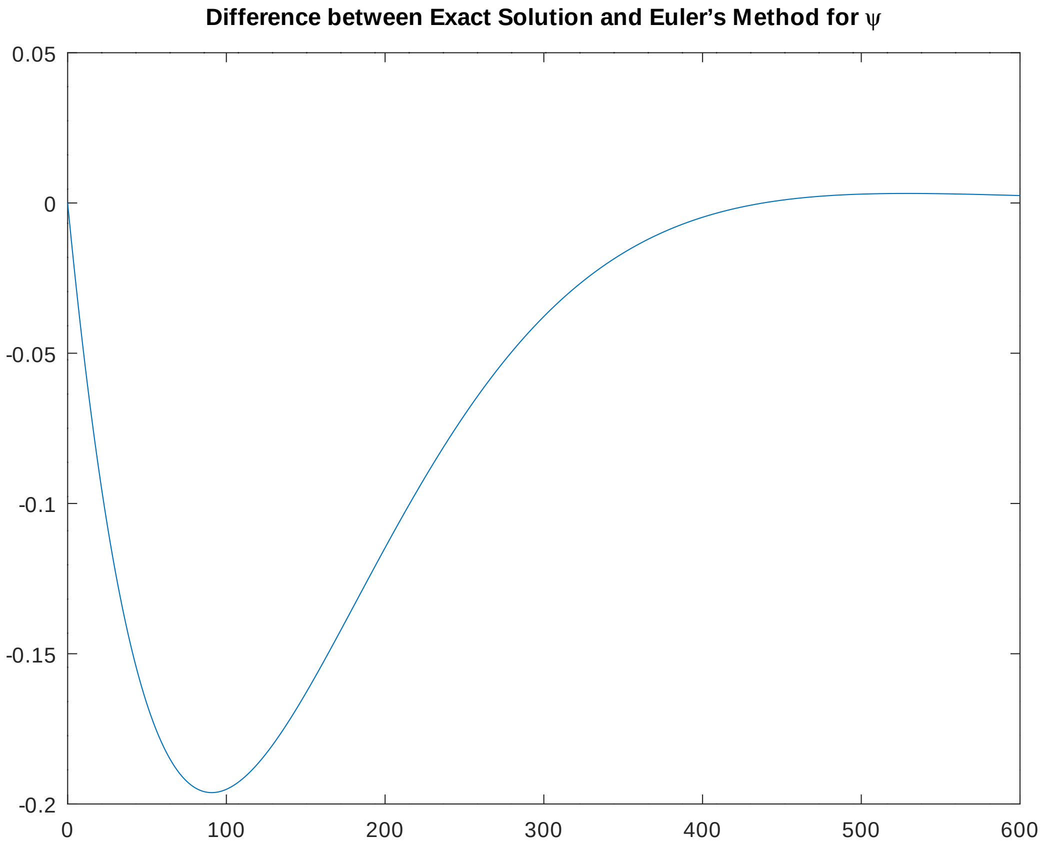
Παρατηρούμε ότι η διαφορά με την Euler και την αναλυτική λύση, στην αρχή μεγαλώνει (αρνητικά) μέχρι που φτάνει σε μέγιστη διαφορά λίγο πριν την χρονική στιγμή t=100. Στη συνέχεια μέχρι περίπου την t=450 η διαφορά μειώνεται και ύστερα κυμαίνεται γύρω από το 0 με μικρές διακυμάνσεις.

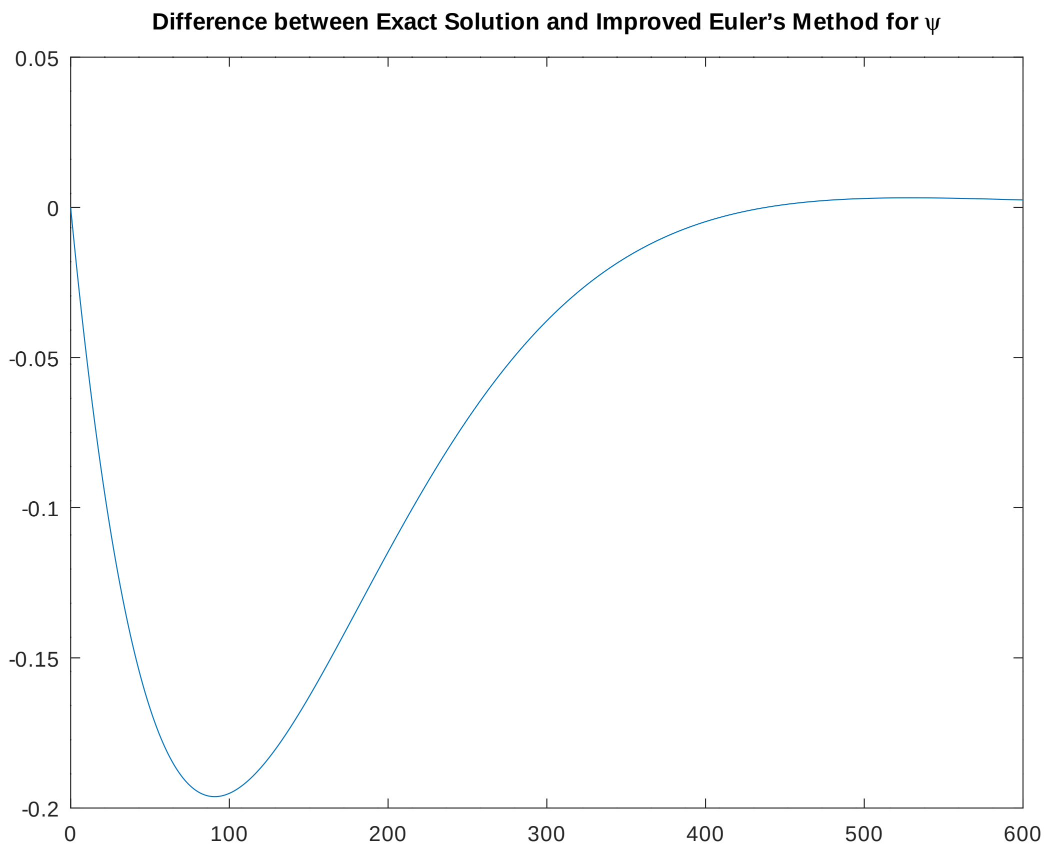
Παρόμοια συμπεράσματα βγαίνουν και για την διαφορά με τη βελτιωμένη και την αναλυτική λύση.


Euler's Method for ψ
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
0
100
200
300
400
500
600


Improved Euler's Method for ψ
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
0
100
200
300
400
500
600


Exact Solution for ψ
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
-0.3
-0.35
0
100
200
300
400
500
600


Difference between Exact Solution and Euler's Method for ψ
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
100
200
300
400
500
600


Difference between Exact Solution and Improved Euler's Method for ψ
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
100
200
300
400
500
600