

LEHRBUCH



Wolfgang Nolting

Grundkurs Theoretische Physik 2

Analytische Mechanik

9. Auflage



Springer Spektrum

Springer-Lehrbuch

Grundkurs Theoretische Physik

Band 1

Klassische Mechanik

10. Auflage

ISBN: 978-3-642-29936-0

Band 2

Analytische Mechanik

9. Auflage

ISBN: 978-3-642-41979-9

Band 3

Elektrodynamik

10. Auflage

ISBN: 978-3-642-37904-8

Band 4

Spezielle Relativitätstheorie,

Thermodynamik

8. Auflage

ISBN: 978-3-642-24480-3

Band 5/1

Quantenmechanik – Grundlagen

8. Auflage

ISBN: 978-3-642-25402-4

Band 5/2

Quantenmechanik –

Methoden und Anwendungen

7. Auflage

ISBN: 978-3-642-24420-9

Band 6

Statistische Physik

7. Auflage

ISBN: 978-3-642-25392-8

Band 7

Viel-Teilchen-Theorie

7. Auflage

ISBN: 978-3-642-01605-9

Wolfgang Nolting

Grundkurs Theoretische Physik 2

Analytische Mechanik

9. Auflage



Springer Spektrum

Professor Wolfgang Nolting
Humboldt-Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-41979-9
DOI 10.1007/978-3-642-41980-5

ISBN 978-3-642-41980-5 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnetet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002, 2004, 2006, 2011, 2014
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Planung und Lektorat: Dr. Vera Spillner
Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.springer-spektrum.de

Allgemeines Vorwort

Die sieben Bände der Reihe „*Grundkurs Theoretische Physik*“ sind als direkte Begleiter zum Hochschulstudium Physik gedacht. Sie sollen in kompakter Form das wichtigste theoretisch-physikalische Rüstzeug vermitteln, auf dem aufgebaut werden kann, um anspruchsvollere Themen und Probleme im fortgeschrittenen Studium und in der physikalischen Forschung bewältigen zu können.

Die Konzeption ist so angelegt, dass der erste Teil des Kurses,

Klassische Mechanik (Band 1)

Analytische Mechanik (Band 2)

Elektrodynamik (Band 3)

Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik (Band 4),

als Theorieteil eines „*Integrierten Kurses*“ aus Experimentalphysik und Theoretischer Physik, wie er inzwischen an zahlreichen deutschen Universitäten vom ersten Semester an angeboten wird, zu verstehen ist. Die Darstellung ist deshalb bewusst ausführlich, manchmal sicher auf Kosten einer gewissen Eleganz, und in sich abgeschlossen gehalten, sodass der Kurs auch zum Selbststudium ohne Sekundärliteratur geeignet ist. Es wird nichts vorausgesetzt, was nicht an früherer Stelle der Reihe behandelt worden ist. Dies gilt insbesondere auch für die benötigte Mathematik, die vollständig so weit entwickelt wird, dass mit ihr theoretisch-physikalische Probleme bereits vom Studienbeginn an gelöst werden können. Dabei werden die mathematischen Einschübe immer dann eingefügt, wenn sie für das weitere Vorgehen im Programm der Theoretischen Physik unverzichtbar werden. Es versteht sich von selbst, dass in einem solchen Konzept nicht alle mathematischen Theorien mit absoluter Strenge bewiesen und abgeleitet werden können. Da muss bisweilen ein Verweis auf entsprechende mathematische Vorlesungen und vertiefende Lehrbuchliteratur erlaubt sein. Ich habe mich aber trotzdem um eine halbwegs abgerundete Darstellung bemüht, sodass die mathematischen Techniken nicht nur angewendet werden können, sondern dem Leser zumindest auch plausibel erscheinen.

Die mathematischen Einschübe werden natürlich vor allem in den ersten Bänden der Reihe notwendig, die den Stoff bis zum Physik-Vordiplom beinhalten. Im zweiten Teil des Kurses, der sich mit den modernen Disziplinen der Theoretischen Physik befasst,

- Quantenmechanik: Grundlagen* (Band 5/1)
- Quantenmechanik: Methoden und Anwendungen* (Band 5/2)
- Statistische Physik* (Band 6)
- Viel-Teilchen-Theorie* (Band 7),

sind sie weitgehend überflüssig geworden, insbesondere auch deswegen, weil im Physik-Studium inzwischen die Mathematik-Ausbildung Anschluss gefunden hat. Der frühe Beginn der Theorie-Ausbildung bereits im ersten Semester gestattet es, die *Grundlagen der Quantenmechanik* schon vor dem Vordiplom zu behandeln. Der Stoff der letzten drei Bände kann natürlich nicht mehr Bestandteil eines „*Integrierten Kurses*“ sein, sondern wird wohl überall in reinen Theorie-Vorlesungen vermittelt. Das gilt insbesondere für die „*Viel-Teilchen-Theorie*“, die bisweilen auch unter anderen Bezeichnungen wie „*Höhere Quantenmechanik*“ etwa im achten Fachsemester angeboten wird. Hier werden neue, über den Stoff des Grundstudiums hinausgehende Methoden und Konzepte diskutiert, die insbesondere für korrelierte Systeme aus vielen Teilchen entwickelt wurden und für den erfolgreichen Übergang zu wissenschaftlichem Arbeiten (Diplom, Promotion) und für das Lesen von Forschungsliteratur inzwischen unentbehrlich geworden sind.

In allen Bänden der Reihe „*Grundkurs Theoretische Physik*“ sollen zahlreiche Übungsaufgaben dazu dienen, den erlernten Stoff durch konkrete Anwendungen zu vertiefen und richtig einzusetzen. Eigenständige Versuche, abstrakte Konzepte der Theoretischen Physik zur Lösung realer Probleme aufzubereiten, sind absolut unverzichtbar für den Lernenden. Ausführliche Lösungsanleitungen helfen bei größeren Schwierigkeiten und testen eigene Versuche, sollten aber nicht dazu verleiten, „*aus Bequemlichkeit*“ eigene Anstrengungen zu unterlassen. Nach jedem größeren Kapitel sind Kontrollfragen angefügt, die dem Selbsttest dienen und für Prüfungsvorbereitungen nützlich sein können.

Ich möchte nicht vergessen, an dieser Stelle allen denen zu danken, die in irgendeiner Weise zum Gelingen dieser Buchreihe beigetragen haben. Die einzelnen Bände sind letztlich auf der Grundlage von Vorlesungen entstanden, die ich an den Universitäten in Münster, Würzburg, Osnabrück, Valladolid (Spanien), Warangal (Indien) sowie in Berlin gehalten habe. Das Interesse und die konstruktive Kritik der Studenten bedeuteten für mich entscheidende Motivation, die Mühe der Erstellung eines doch recht umfangreichen Manuskripts als sinnvoll anzusehen. In der Folgezeit habe ich von zahlreichen Kollegen wertvolle Verbesserungsvorschläge erhalten, die dazu geführt haben, das Konzept und die Ausführung der Reihe weiter auszubauen und aufzuwerten.

Die ersten Auflagen dieser Buchreihe sind im Verlag Zimmermann-Neufang entstanden. Ich kann mich an eine sehr faire und stets erfreuliche Zusammenarbeit erinnern. Danach erschien die Reihe bei Vieweg. Die Übernahme der Reihe durch den Springer-Verlag im

Januar 2001 hat dann zu weiteren professionellen Verbesserungen im Erscheinungsbild des „*Grundkurs Theoretische Physik*“ geführt. Herrn Dr. Kölsch und seinem Team bin ich schon jetzt für viele Vorschläge und Anregungen sehr dankbar. Meine Manuskripte scheinen in guten Händen zu liegen.

Berlin, im April 2001

Wolfgang Nolting

Vorwort zu Band 2

Das Anliegen der Klassischen Mechanik besteht in dem Aufstellen und Lösen von Bewegungsgleichungen für

Massenpunkte, Systeme von Massenpunkten, Starre Körper

auf der Grundlage möglichst weniger

Axiome und Prinzipien

Letztere sind mathematisch nicht streng beweisbar, sondern stellen lediglich bislang widerspruchsfreie Erfahrungstatsachen dar. Man könnte natürlich fragen, warum man sich heute noch mit Klassischer Mechanik beschäftigt, obwohl diese doch wohl in den seltesten Fällen noch einen direkten Bezug zur aktuellen Forschung aufweist. Sie bildet jedoch die unerlässliche Basis für die modernen Richtungen der Theoretischen Physik, d.h., diese bauen auf der Klassischen Mechanik auf und sind ohne sie nicht verständlich zu machen. Ferner gestattet sie im Zusammenhang mit relativ vertrauten Fragestellungen eine gewisse „Gewöhnung“ an mathematische Lösungsverfahren. So haben wir im ersten Band dieses „*Grundkurs Theoretische Physik*“ im Zusammenhang mit der *Newton-Mechanik* den Einsatz der Vektoralgebra intensiv geübt.

Warum befassen wir uns in diesem zweiten Band nun aber noch einmal mit Klassischer Mechanik? Die „*Analytische Mechanik*“ des vorliegenden zweiten Bandes behandelt die Formulierungen nach *Lagrange*, *Hamilton* und *Hamilton-Jacobi*, die gegenüber der *Newton-Mechanik* zwar „*keine neue Physik*“ beinhalten, methodisch jedoch eleganter sind und einen direkteren Bezug zu weiterführenden Disziplinen der Theoretischen Physik, wie der Quantenmechanik, erkennen lassen.

Die Zielsetzung des vorliegenden Bandes 2 entspricht der des gesamten Grundkurses: Theoretische Physik. Es soll sich um einen direkten Begleiter des Grundstudiums zum Physik-Diplom bzw. des Bachelor/Master-Studienprogramms handeln, der es ermöglicht, Techniken und Konzepte der Theoretischen Physik zunächst ohne aufwendige Sekundärliteratur zu erlernen. Zum Verständnis des Textes wird lediglich das in Band 1 Erarbeitete vorausgesetzt. Mathematische Einschübe werden immer dann in kompakter und zweck-

gerichteter Form gebracht und geübt, wenn es für die weitere Entwicklung der Theorie unerlässlich erscheint.

Das Manuskript zu diesem Buch ist aus mehreren Vorlesungen entstanden, die ich in der Vergangenheit an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster und der Humboldt-Universität zu Berlin gehalten habe. Nach seinem Erscheinen, zunächst im Verlag Zimermann-Neufang, dann später und bis heute im Springer-Verlag, haben mir zahlreiche Studierende und Dozenten durch Vorschläge zur Verbesserung einzelner Passagen sehr geholfen. Dafür möchte ich mich ganz herzlich bedanken. Besonders erwähnen sollte ich Herrn Frank Knoll, der mich durch viele Hinweise bei der Suche nach lästigen Druckfehlern sehr unterstützt hat. Die jetzt vorliegende 9. Auflage besitzt gegenüber den früheren Auflagen ein stark erweitertes Aufgabenangebot und zahlreiche Korrekturen und Ergänzungen im Text an Stellen, wo ich glaubte, die Darstellung verständlicher machen zu sollen. Die Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag, insbesondere mit Frau Dr. V. Spillner, war stets fair, konstruktiv und produktiv und deshalb sehr erfreulich.

Berlin, im Januar 2014

Wolfgang Nolting

Inhaltsverzeichnis

1	Lagrange-Mechanik	1
1.1	Zwangbedingungen, generalisierte Koordinaten	3
1.1.1	Holonom Zwangbedingungen	4
1.1.2	Nicht-holonom Zwangbedingungen	10
1.2	Das d'Alembert'sche Prinzip	13
1.2.1	Lagrange-Gleichungen	13
1.2.2	Einfache Anwendungen	22
1.2.3	Verallgemeinerte Potentiale	32
1.2.4	Reibung	36
1.2.5	Nicht-holonom Systeme	39
1.2.6	Anwendungen der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren	44
1.2.7	Aufgaben	48
1.3	Das Hamilton'sche Prinzip	65
1.3.1	Formulierung des Prinzips	66
1.3.2	Elemente der Variationsrechnung	70
1.3.3	Lagrange-Gleichungen	77
1.3.4	Erweiterung des Hamilton'schen Prinzips	80
1.3.5	Aufgaben	83
1.4	Erhaltungssätze	86
1.4.1	Homogenität der Zeit	88
1.4.2	Homogenität des Raumes	92

1.4.3 Isotropie des Raumes	95
1.4.4 Aufgaben	98
Kontrollfragen	99
2 Hamilton-Mechanik	103
2.1 Legendre-Transformation	106
2.1.1 Aufgaben	109
2.2 Kanonische Gleichungen	110
2.2.1 Hamilton-Funktion	110
2.2.2 Einfache Beispiele	114
2.2.3 Aufgaben	120
2.3 Wirkungsprinzipien	123
2.3.1 Modifiziertes Hamilton'sches Prinzip	123
2.3.2 Prinzip der kleinsten Wirkung	127
2.3.3 Fermat'sches Prinzip	131
2.3.4 Jacobi-Prinzip	132
2.4 Poisson-Klammer	136
2.4.1 Darstellungsräume	136
2.4.2 Fundamentale Poisson-Klammern	141
2.4.3 Formale Eigenschaften	144
2.4.4 Integrale der Bewegung	146
2.4.5 Bezug zur Quantenmechanik	148
2.4.6 Aufgaben	150
2.5 Kanonische Transformationen	153
2.5.1 Motivation	153
2.5.2 Die erzeugende Funktion	158
2.5.3 Äquivalente Formen der erzeugenden Funktion	162
2.5.4 Beispiele kanonischer Transformationen	165
2.5.5 Kriterien für Kanonizität	169
2.5.6 Aufgaben	172
Kontrollfragen	176

3 Hamilton-Jacobi-Theorie	181
3.1 Hamilton-Jacobi-Gleichung	183
3.2 Die Lösungsmethode	186
3.3 Hamilton'sche charakteristische Funktion	191
3.4 Separation der Variablen	194
3.5 Wirkungs- und Winkelvariable	200
3.5.1 Periodische Systeme	200
3.5.2 Wirkungs- und Winkelvariable	203
3.5.3 Das Kepler-Problem	207
3.5.4 Entartung	214
3.5.5 Bohr-Sommerfeld'sche Atomtheorie	216
3.6 Der Übergang zur Wellenmechanik	217
3.6.1 Wellengleichung der Klassischen Mechanik	218
3.6.2 Einschub über Lichtwellen	222
3.6.3 Der Ansatz der Wellenmechanik	225
3.7 Aufgaben	228
Kontrollfragen	230
Lösungen der Übungsaufgaben	233
Sachverzeichnis	363

Lagrange-Mechanik

1

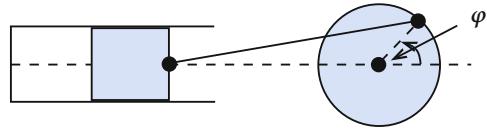
Kapitel 1

1.1	Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten	3
1.1.1	Holome Zwangsbedingungen	4
1.1.2	Nicht-holome Zwangsbedingungen	10
1.2	Das d'Alembert'sche Prinzip	13
1.2.1	Lagrange-Gleichungen	13
1.2.2	Einfache Anwendungen	22
1.2.3	Verallgemeinerte Potentiale	32
1.2.4	Reibung	36
1.2.5	Nicht-holome Systeme	39
1.2.6	Anwendungen der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren	44
1.2.7	Aufgaben	48
1.3	Das Hamilton'sche Prinzip	65
1.3.1	Formulierung des Prinzips	66
1.3.2	Elemente der Variationsrechnung	70
1.3.3	Lagrange-Gleichungen	77
1.3.4	Erweiterung des Hamilton'schen Prinzips	80
1.3.5	Aufgaben	83
1.4	Erhaltungssätze	86
1.4.1	Homogenität der Zeit	88
1.4.2	Homogenität des Raumes	92

1.4.3 Isotropie des Raumes	95
1.4.4 Aufgaben	98
Kontrollfragen	99

1.1 Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten

Abb. 1.1 Modell einer Kolbenmaschine



1.1 Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten

Die Newton-Mechanik, die Gegenstand der Überlegungen des ersten Bandes der Reihe **Grundkurs: Theoretische Physik** war, befasst sich mit Systemen von Teilchen (*Massenpunkten*), von denen jedes durch eine Bewegungsgleichung der Form

$$m_i \ddot{r}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{ex})} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \quad (1.1)$$

beschrieben wird. $\mathbf{F}_i^{(\text{ex})}$ ist die auf Teilchen i wirkende äußere Kraft, \mathbf{F}_{ij} die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte (*innere*) Kraft. Bei N Teilchen ergibt sich aus (1.1) ein gekoppeltes System von $3N$ Differentialgleichungen 2. Ordnung, dessen Lösung die Kenntnis hinreichend vieler Anfangsbedingungen erfordert. Die typischen physikalischen Systeme unserer Umgebung sind jedoch häufig keine typischen Teilchensysteme. Betrachten wir einmal als Beispiel das Modell einer Kolbenmaschine (Abb. 1.1). Die Maschine selbst besteht aus praktisch unendlich vielen Teilchen. Der Zustand der Maschine ist aber im Allgemeinen bereits durch Angabe des Winkels φ vollständig charakterisiert. Kräfte und Spannungen, zum Beispiel in der Pleuelstange, interessieren in der Regel nicht. Sie sorgen für gewisse *geometrische Bindungen* der Teilchen miteinander. Durch diese sind die Bewegungen der Teilchen eines makroskopischen mechanischen Systems im Allgemeinen nicht völlig frei. Man sagt, sie seien eingeschränkt durch gewisse

- ▶ **Zwangskräfte.**

Diese über die Kräfte \mathbf{F}_{ij} in (1.1) zu berücksichtigen, stellt praktisch immer ein hoffnungsloses Unterfangen dar.

Wir führen zwei für das Folgende wichtige Begriffe ein:

Definition 1.1.1

1. **Zwangsbedingungen** sind Bedingungen, die die freie Bewegung der Systemteilchen einschränken (*geometrische Bindungen*).
2. **Zwangskräfte** sind Kräfte, die die Zwangsbedingungen bewirken, also die freie Teilchenbewegung behindern (z. B. Auflagekräfte, Fadenspannungen).

Bei der Beschreibung eines mechanischen Systems ergeben sich zwei schwerwiegende Probleme:

- Zwangskräfte sind im Allgemeinen unbekannt. Bekannt sind nur ihre Auswirkungen. Das System (1.1) der gekoppelten Bewegungsgleichungen lässt sich also erst gar nicht formulieren, geschweige denn lösen. Wir versuchen deshalb, die Mechanik so umzuformulieren, dass die Zwangskräfte herausfallen. Genau dies führt zur Lagrange-Formulierung der Klassischen Mechanik.
- Die Teilchenkoordinaten

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

sind wegen der Zwangsbedingungen nicht unabhängig voneinander. Wir werden sie deshalb später durch linear unabhängige, verallgemeinerte Koordinaten zu ersetzen versuchen. Diese werden dann in der Regel unanschaulicher, dafür aber mathematisch einfacher zu handhaben sein.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass Zwangsbedingungen für die konkrete Lösung eines mechanischen Problems eine wichtige Rolle spielen. Eine Klassifikation der mechanischen Systeme nach Art und Typ ihrer Zwangsbedingungen ist deshalb sicher sinnvoll.

1.1.1 Holome Zwangsbedingungen

Darunter versteht man Verknüpfungen der Teilchenkoordinaten und eventuell der Zeit in der folgenden Form:

$$f_v (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 , \quad v = 1, 2, \dots, p . \quad (1.2)$$

■ 1) Holonom-skleronome Zwangsbedingungen

Das sind holome Zwangsbedingungen, die **nicht** explizit zeitabhängig sind, also Bedingungen der Form (1.2), für die zusätzlich

$$\frac{\partial f_v}{\partial t} = 0 , \quad v = 1, \dots, p \quad (1.3)$$

gilt.

1.1 Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten

Beispiele

1) Hantel

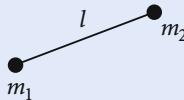


Abb. 1.2 Schematische Darstellung einer Hantel aus zwei durch eine masselose Stange auf konstanten Abstand gehaltene Massen m_1 und m_2

Die Zwangsbedingung betrifft den konstanten Abstand der beiden Massenpunkte m_1 und m_2 :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2 . \quad (1.4)$$

2) Starrer Körper

Dieser ist durch konstante Teilchenabstände ((4.1), Bd. 1) ausgezeichnet. Das entspricht den Zwangsbedingungen:

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0 , \quad i, j = 1, 2, \dots, N , \quad c_{ij} = \text{const} . \quad (1.5)$$

3) Teilchen auf Kugeloberfläche

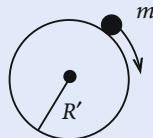


Abb. 1.3 Teilchen der Masse m auf einer Kugeloberfläche

Die Masse m ist an die Kugeloberfläche durch die Zwangsbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 - R'^2 = 0 \quad (1.6)$$

gebunden.

■ 2) Holonom-rheonome Zwangsbedingungen

Dies sind holonome Zwangsbedingungen mit expliziter Zeitabhängigkeit:

$$\frac{\partial f_v}{\partial t} \neq 0 . \quad (1.7)$$

Wir wollen auch diesen Begriff durch Beispiele erläutern:

Beispiele

1) Teilchen im Aufzug

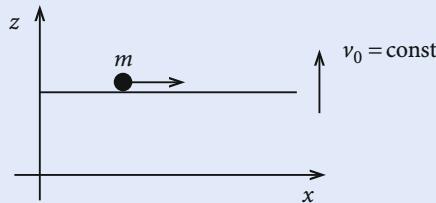


Abb. 1.4 Teilchen der Masse m auf einer mit der Geschwindigkeit v_0 sich in z -Richtung bewegenden Ebene

Das Teilchen kann sich nur in der xy -Ebene frei bewegen. Für die z -Koordinate gilt die Zwangsbedingung,

$$z(t) = v_0(t - t_0) + z_0 , \quad (1.8)$$

hervorgerufen durch den mit konstanter Geschwindigkeit v_0 sich nach oben bewegenden Aufzug.

2) Masse auf schiefer Ebene mit veränderlicher Neigung

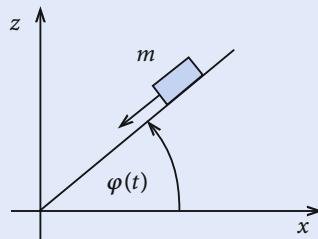


Abb. 1.5 Eine Masse m auf einer schiefen Ebene mit zeitlich veränderlichem Neigungswinkel

Die zeitlich veränderliche Neigung der Ebene sorgt für eine holonom-rheonome Zwangsbedingung

$$\frac{z}{x} - \tan \varphi(t) = 0 . \quad (1.9)$$

1.1 Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten

Holome Zwangsbedingungen reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade. Ein N -Teilchen-System hat ohne Zwang $3N$ Freiheitsgrade, bei p holonomen Zwangsbedingungen dann nur noch

$$S = 3N - p . \quad (1.10)$$

Ein mögliches Lösungsverfahren kann nun darin bestehen, mit Hilfe der Zwangsbedingungen (1.2) p der $3N$ kartesischen Koordinaten zu eliminieren und für den Rest die Newtonschen Bewegungsgleichungen zu integrieren. Eleganter und wirkungsvoller ist jedoch die Einführung von

- ▶ generalisierten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_s ,

die zwei Bedingungen erfüllen müssen:

1. Die momentane Konfiguration des physikalischen Systems ist **eindeutig** durch q_1, \dots, q_s festgelegt. Insbesondere gelten Transformationsformeln

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t) , \quad i = 1, 2, \dots, N , \quad (1.11)$$

die die Zwangsbedingungen implizit enthalten.

2. Die q_j sind unabhängig voneinander, d. h., es gibt **keine** Beziehung der Form $F(q_1, \dots, q_s, t) = 0$.

Das Konzept der generalisierten Koordinaten wird im Folgenden noch eine wichtige Rolle spielen. Wir schließen an die obige Definition noch einige Bemerkungen an:

- a) Unter dem

- ▶ Konfigurationsraum

versteht man den S -dimensionalen Raum, der durch die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_s aufgespannt wird. Jeder Punkt des Konfigurationsraums (*Konfigurationsvektor*)

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (1.12)$$

entspricht einem möglichen Zustand des Systems.

- b) Man nennt

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s \quad \text{generalisierte Geschwindigkeiten} .$$

- c) Bei bekannten Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= \mathbf{q}(t_0) \equiv (q_1(t_0), \dots, q_s(t_0)) , \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}(t_0) \equiv (\dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_s(t_0)) \end{aligned}$$

ist der Zustand des Systems im Konfigurationsraum für alle Zeiten über noch festzulegende Bewegungsgleichungen berechenbar.

- d) Die Wahl der Größen q_1, \dots, q_s ist nicht eindeutig, wohl aber ihre Zahl S . Man legt sie nach Zweckmäßigkeit fest, die in der Regel durch die physikalische Problemstellung eindeutig vorgegeben ist.
- e) Die Größen q_j sind beliebig. Es handelt sich dabei nicht notwendig um *Längen*. Sie charakterisieren in ihrer **Gesamtheit** das System und beschreiben nicht mehr unbedingt Einzelteilchen. Als Nachteil kann die Tatsache gewertet werden, dass das Problem dadurch unanschaulicher werden kann.

Beispiele

1) Teilchen auf Kugeloberfläche

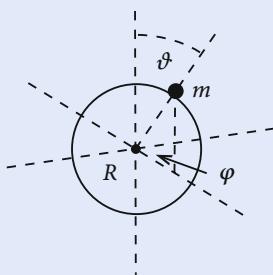


Abb. 1.6 Generalisierte Koordinaten für ein an eine Kugeloberfläche gebundenes Teilchen der Masse m

Es gibt eine holonom-skleronome Zwangsbedingung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 .$$

Dies bedeutet für die Zahl der Freiheitsgrade:

$$S = 3 - 1 = 2 .$$

Als generalisierte Koordinaten bieten sich zwei Winkel an:

$$q_1 = \theta ; \quad q_2 = \varphi .$$

Die Transformationsformeln

$$x = R \sin q_1 \cos q_2 ,$$

$$y = R \sin q_1 \sin q_2 ,$$

$$z = R \cos q_1$$

1.1 Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten

enthalten implizit die Zwangsbedingungen. q_1, q_2 legen den *Zustand* des Systems eindeutig fest.

2) Ebenes Doppelpendel

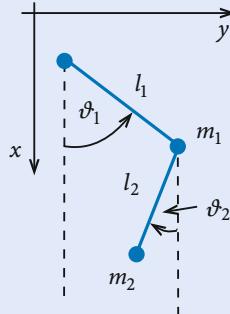


Abb. 1.7 Generalisierte Koordinaten für das ebene Doppelpendel

Es gibt insgesamt vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 = \text{const} , \\ x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 &= 0 , \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt deshalb:

$$S = 6 - 4 = 2 .$$

„Günstige“ generalisierte Koordinaten sind in diesem Fall offenbar:

$$q_1 = \vartheta_1 ; \quad q_2 = \vartheta_2 .$$

Die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos q_1 ; \quad y_1 = l_1 \sin q_1 ; \quad z_1 = 0 , \\ x_2 &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 ; \quad y_2 = l_1 \sin q_1 - l_2 \sin q_2 ; \quad z_2 = 0 \end{aligned}$$

enthalten wiederum implizit die Zwangsbedingungen.

3) Teilchen im Zentrafeld

In diesem Fall gibt es keine Zwangsbedingungen. Trotzdem ist die Einführung von generalisierten Koordinaten sinnvoll:

$$S = 3 - 0 = 3 .$$

„Günstige“ generalisierte Koordinaten sind in diesem Fall

$$q_1 = r ; \quad q_2 = \vartheta ; \quad q_3 = \varphi .$$

Die Transformationsformeln ((1.389), Bd. 1)

$$x = q_1 \sin q_2 \cos q_3 ,$$

$$y = q_1 \sin q_2 \sin q_3 ,$$

$$z = q_1 \cos q_2$$

sind uns aus vielen Anwendungen (s. Bd. 1) bereits bekannt und dokumentieren, dass die Verwendung von generalisierten Koordinaten auch in Systemen **ohne** Zwang sinnvoll sein kann, nämlich dann, wenn infolge gewisser Symmetrien durch eine *Punkttransformation* auf krummlinige Koordinaten die Integration der Bewegungsgleichungen vereinfacht wird.

1.1.2 Nicht-holome Zwangsbedingungen

Darunter versteht man Verknüpfungen der Teilchenkoordinaten und eventuell der Zeit, die sich **nicht** wie in (1.2) darstellen lassen, sodass durch sie kein Eliminieren von überflüssigen Koordinaten möglich ist. Für Systeme mit nicht-holonenmen Zwangsbedingungen gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren. Spezielle Methoden werden später diskutiert.

■ 1) Zwangsbedingungen als Ungleichungen

Liegen die Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen vor, so kann man offenbar durch diese die Zahl der Variablen nicht reduzieren.

Beispiele

1) Perlen eines Rechenbretts

Die Perlen (Massenpunkte) können nur eindimensionale Bewegungen zwischen zwei festen Grenzen ausführen. Die Zwangsbedingungen sind dann zum Teil holonom,

$$z_i = \text{const} ; \quad y_i = \text{const} , \quad i = 1, 2, \dots, N ,$$

1.1 Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten

zum Teil aber auch nicht-holonom:

$$a \leq x_i \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

2) Teilchen auf Kugel im Schwerefeld

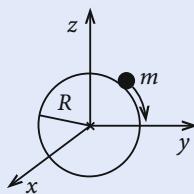


Abb. 1.8 Teilchen der Masse m auf einer Kugeloberfläche im Schwerefeld der Erde als Beispiel für nicht-holome Zwangsbedingungen

Die Zwangsbedingung

$$(x^2 + y^2 + z^2) - R^2 \geq 0$$

schränkt die freie Bewegung der Masse m ein, kann aber nicht dazu benutzt werden, „überflüssige“ Koordinaten zu eliminieren.

■ 2) Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrierbarer Form

Dies sind insbesondere Zwangsbedingungen, die Teilchengeschwindigkeiten enthalten. Sie haben die allgemeine Form:

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im} dx_m + f_{it} dt = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.13)$$

wobei sich die linke Seite **nicht** integrieren lässt. Sie stellt kein totales Differential dar. Es gibt also keine Funktion F_i mit

$$f_{im} = \frac{\partial F_i}{\partial x_m} \quad \forall m; \quad \frac{\partial F_i}{\partial t} = f_{it}.$$

Gäbe es eine solche Funktion F_i , dann würde aus (1.13)

$$F_i(x_1, \dots, x_{3N}, t) = \text{const}$$

folgen und die entsprechende Zwangsbedingung wäre doch holonom.

Beispiel: „Rollen“ eines Rades auf rauer Unterfläche

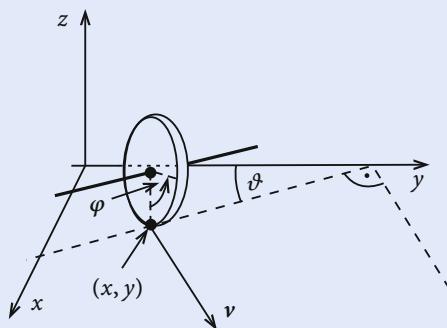


Abb. 1.9 Koordinaten zur Beschreibung eines rollenden Rades auf einer rauen Unterfläche

Die Bewegung der Radscheibe (Radius R) erfolge so, dass die Scheibenebene stets vertikal steht. Die Bewegung ist vollständig beschrieben durch

1. den momentanen Auflagepunkt (x, y) ,
2. die Winkel φ, ϑ .

Das Problem ist also gelöst, falls diese Größen als Funktionen der Zeit bekannt sind.

Die Zwangsbedingung „Rollen“ betrifft Richtung und Betrag der Geschwindigkeit des Auflagepunktes:

$$\begin{aligned} \text{Betrag:} \quad & |\boldsymbol{v}| = R\dot{\varphi}, \\ \text{Richtung:} \quad & \boldsymbol{v} \text{ senkrecht zur Radachse,} \\ & \dot{x} = v_x = v \cos \vartheta, \\ & \dot{y} = v_y = v \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Die Kombination der Zwangsbedingungen ergibt

$$\dot{x} - R \dot{\varphi} \cos \vartheta = 0; \quad \dot{y} - R \dot{\varphi} \sin \vartheta = 0$$

oder

$$dx - R \cos \vartheta d\varphi = 0; \quad dy - R \sin \vartheta d\varphi = 0. \quad (1.14)$$

Diese Bedingungen sind nicht integrierbar, da dazu die Kenntnis von $\vartheta = \vartheta(t)$ notwendig wäre, die aber erst nach vollständiger Lösung des Problems vorliegt. Die Zwangsbedingung „Rollen“ führt also nicht zu einer Verringerung der Koordinatenzahl. Sie schränkt gewissermaßen die Freiheitsgrade des Rades *mikroskopisch* ein, *makroskopisch* bleibt ihre Anzahl jedoch erhalten. Erfahrungsgemäß lässt sich ja durch geeignete Wendemanöver des Rades jeder Punkt der Ebene erreichen.

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

1.2.1 Lagrange-Gleichungen

Nach den Überlegungen des letzten Abschnittes muss unsere vordringlichste Aufgabe darin bestehen, die im Allgemeinen nicht explizit bekannten Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Genau das ist der neue Aspekt der *Lagrange-Mechanik*. Wir beginnen mit der Einführung eines wichtigen Begriffes.

Definition 1.2.1 Virtuelle Verrückung δr_i .

Dies ist die willkürliche (virtuelle), infinitesimale Koordinatenänderung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist und momentan durchgeführt wird. Letzteres bedeutet:

$$\delta t = 0 . \quad (1.15)$$

Die Größen δr_i müssen nichts mit dem tatsächlichen Ablauf der Bewegung zu tun haben. Sie sind deshalb von den tatsächlichen Verschiebungen dr_i im Zeitraum dt , in dem sich Kräfte und Zwangsbedingungen ändern können, zu unterscheiden:

$$\delta \longleftrightarrow \text{virtuell} ; \quad d \longleftrightarrow \text{tatsächlich} .$$

Mathematisch gehen wir mit dem Symbol δ wie mit dem Differential d um. Wir erläutern den Sachverhalt an einem **Beispiel**:

Beispiel: Teilchen im Aufzug

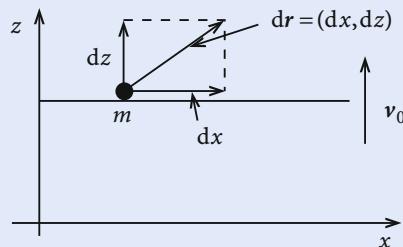


Abb. 1.10 Zur Unterscheidung von tatsächlichen und virtuellen Verrückungen am Beispiel eines Teilchens auf einer sich mit der Geschwindigkeit v_0 in z-Richtung bewegenden Fläche

Die Zwangsbedingung (holonom-rheonom) haben wir bereits in (1.8) formuliert. Eine passende generalisierte Koordinate ist $q = x$. Dann gilt aber wegen $\delta t = 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{tatsächliche Verrückung:} & \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}z) = (\mathrm{d}q, v_0 \, \mathrm{d}t), \\ \text{virtuelle Verrückung:} & \delta\boldsymbol{r} = (\delta x, \delta z) = (\delta q, 0). \end{array}$$

Definition 1.2.2 Virtuelle Arbeit

$$\delta W_i = -\boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i. \quad (1.16)$$

\boldsymbol{F}_i ist die auf Teilchen i wirkende Kraft:

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{K}_i + \boldsymbol{Z}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i. \quad (1.17)$$

\boldsymbol{K}_i ist die auf den in seiner Bewegungsfreiheit durch Zwangsbedingungen eingeschränkten Massenpunkt wirkende *treibende Kraft*. \boldsymbol{Z}_i ist die Zwangskraft.

Offensichtlich gilt:

$$\sum_i (\boldsymbol{K}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i + \sum_i \boldsymbol{Z}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0. \quad (1.18)$$

Das fundamentale

Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\sum_i \boldsymbol{Z}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \quad (1.19)$$

wird nicht mathematisch abgeleitet, sondern durch Übereinstimmung mit der Erfahrung als *bewiesen* angesehen. Es besagt, dass bei jeder gedachten Bewegung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist, die Zwangskräfte keine Arbeit leisten. Man beachte, dass in (1.19) nur die Summe, nicht notwendig jeder Summand, gleich Null sein muss.

Beispiele

1) Teilchen auf „glatter“ Kurve

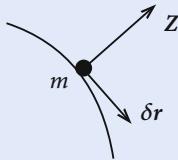


Abb. 1.11 Zwangskraft für ein Teilchen auf einer glatten Kurve

„Glatt“ bedeutet, dass es keine Komponente der Zwangskraft Z längs der Bahn gibt. Ohne Z explizit zu kennen, wissen wir damit, dass Z senkrecht zur Bahn gerichtet sein wird und damit auch senkrecht zur virtuellen Verrückung δr :

$$Z \cdot \delta r = 0 .$$

2) Hantel

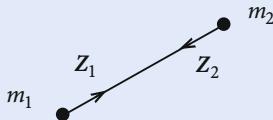


Abb. 1.12 Zwangskräfte einer aus zwei Massen m_1 und m_2 bestehenden Hantel

Es gilt:

$$Z_1 = -Z_2 .$$

Die virtuellen Verrückungen der beiden Massen lassen sich als Translation δs der Masse m_1 plus zusätzliche Rotation δx_R der Masse m_2 um die bereits verschobene Masse m_1 formulieren:

$$\delta r_1 = \delta s ; \quad \delta r_2 = \delta s + \delta x_R .$$

Eingesetzt in (1.19) ergibt sich:

$$\delta W = -Z_1 \cdot \delta r_1 - Z_2 \cdot \delta r_2 = -(Z_1 + Z_2) \cdot \delta s - Z_2 \cdot \delta x_R = 0 ,$$

da δx_R senkrecht zu Z_2 gerichtet und $(Z_1 + Z_2)$ gleich Null sind. Wir erkennen an diesem Beispiel, das sich unmittelbar auf den gesamten starren Körper übertragen

lässt, dass nur die Summe der Beiträge in (1.19) Null sein muss, nicht schon jeder einzelne Summand.

3) Atwood'sche Fallmaschine

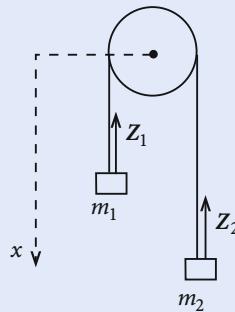


Abb. 1.13 Zwangskräfte bei der Atwood'schen Fallmaschine

Für die *Fadenspannungen* Z_1, Z_2 wird

$$Z_1 = Z_2$$

gelten (1.49). Für die virtuelle Arbeit δW folgt dann:

$$\begin{aligned}\delta W &= -Z_1 \cdot \delta x_1 - Z_2 \cdot \delta x_2 \\ &= Z_1 (\delta x_1 + \delta x_2) \\ &= Z_1 \underbrace{\delta (x_1 + x_2)}_{\text{const}} = 0.\end{aligned}$$

4) Reibungskräfte

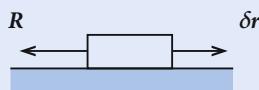


Abb. 1.14 Zur Demonstration der virtuellen Arbeit gegen die Reibungskraft

Diese zählen **nicht** zu den Zwangskräften, da sie das *Prinzip der virtuellen Arbeit* verletzen:

$$\delta W = -R \cdot \delta r = R \delta r \neq 0.$$

Reibungskräfte werden deshalb später eine Sonderbehandlung erfahren müssen.

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Das Prinzip der virtuellen Arbeit (1.19) lässt sich mit (1.18) umschreiben und heißt dann:

d'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{K}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.20)$$

Die virtuelle Arbeit der *verlorenen Kräfte* ist also Null. Damit ist ein erstes, vorläufiges Ziel erreicht. Die Zwangskräfte tauchen nicht mehr auf. In der Tat lassen sich mit (1.20) bereits einfache mechanische Probleme lösen. Es bleibt jedoch noch ein Nachteil. Die virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{r}_i$ sind wegen der Zwangsbedingungen nicht unabhängig voneinander. Gleichung (1.20) ist deshalb so noch nicht geeignet, um daraus verwertbare Bewegungsgleichungen abzuleiten. Wir werden deshalb die Größen $\delta \mathbf{r}_i$ auf generalisierte Koordinaten transformieren. Aus

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.21)$$

folgt:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \dot{\mathbf{r}}_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) . \quad (1.22)$$

Dies bedeutet insbesondere:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (1.23)$$

Für die virtuellen Verrückungen lesen wir wegen $\delta t = 0$ an (1.22) ab:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j . \quad (1.24)$$

Damit ergibt sich für den ersten Summanden in (1.20):

$$-\delta W_K = \sum_i \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s \mathbf{K}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j . \quad (1.25)$$

Definition 1.2.3 Generalisierte Kraftkomponenten

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (1.26)$$

Da die Größen q_j nicht notwendig *Längen* sind, müssen auch die Größen Q_j nicht unbedingt die Dimension *Kraft* besitzen. Es gilt aber stets:

$$[Q_j q_j] = \text{Energie} .$$

Einen wichtigen Spezialfall stellen **konservative Systeme** dar, für die ein Potential existiert ((2.233), Bd. 1),

$$V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (1.27)$$

das insbesondere nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_i$ abhängt und über

$$\mathbf{K}_i = -\nabla_i V \quad (1.28)$$

die Kräfte festlegt. In einem solchen Fall gilt für die generalisierten Kraftkomponenten:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N (-\nabla_i V) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (1.29)$$

Wir werten nun den zweiten Summanden in (1.20) aus. Dabei benutzen wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_{l=1}^S \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{ \sum_{l=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} . \end{aligned} \quad (1.30)$$

Vorausgesetzt wurde hier, dass die Transformationsformeln (1.21) stetige partielle Ableitungen bis mindestens zur zweiten Ordnung besitzen ((1.257), Bd. 1):

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\ &\stackrel{(1.23, 1.30)}{=} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S m_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right\} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^S \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j . \end{aligned} \quad (1.31)$$

$T = 1/2 \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ ist die kinetische Energie des Teilchensystems. Wir setzen (1.31) und (1.25) in (1.20) ein:

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

d'Alembert'sches Prinzip

$$\sum_{j=1}^S \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0 . \quad (1.32)$$

Dies gilt in dieser Form noch ganz allgemein. Wichtig sind die folgenden Spezialisierungen:

■ 1) Holonome Zwangsbedingungen

In diesem Fall sind die Koordinaten q_j unabhängig voneinander, die Größen δq_j also frei wählbar. Wir können z. B. alle δq_j bis auf eine gleich Null setzen. Dies bedeutet aber, dass in (1.32) nicht nur die Summe, sondern bereits jeder Summand verschwindet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (1.33)$$

■ 2) Konservatives System

In diesem Fall ist (1.29) gültig. Da außerdem V nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j abhängt, können wir anstelle von (1.32) schreiben:

$$\sum_{j=1}^S \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right] \delta q_j = 0 .$$

Mit der für die weiteren Überlegungen wichtigen **Definition**:

Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) = T(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) - V(q_1, \dots, q_S, t) \quad (1.34)$$

folgt dann:

$$\sum_{j=1}^S \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 . \quad (1.35)$$

■ 3) Konservatives System mit holonomen Zwangsbedingungen

Das ist der Fall, den wir später in der Regel diskutieren werden:

Lagrange-Gleichungen (2. Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (1.36)$$

In der Newton-Mechanik sind *Impuls* und *Kraft*, also Vektoren, die dominierenden Größen. In der Lagrange-Mechanik sind es *Energie* und *Arbeit*, also Skalare. Darin mag man einen gewissen Vorteil erkennen. Die Lagrange-Gleichungen (1.36) ersetzen die Newton'schen Bewegungsgleichungen (1.1). Es handelt sich um S Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren vollständige Lösung die Kenntnis von

► 2S Anfangsbedingungen

erfordert. Die Zwangskräfte sind eliminiert, sie tauchen in den Bewegungsgleichungen nicht mehr auf.

Wir untersuchen die Lagrange-Funktion in beliebigen Koordinaten. Mit (1.22) schreibt sich die kinetische Energie,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{j=1}^S \alpha_j \dot{q}_j + \alpha , \quad (1.37)$$

mit den folgenden Abkürzungen:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 , \quad (1.38)$$

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) , \quad (1.39)$$

$$\mu_{jl} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) \quad (1.40)$$

verallgemeinerte Massen.

Die Lagrange-Funktion hat also die folgende allgemeine Gestalt:

$$L = T - V = L_2 + L_1 + L_0 , \quad (1.41)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^S \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l , \quad (1.42)$$

$$L_1 = \sum_{j=1}^S \alpha_j \dot{q}_j , \quad (1.43)$$

$$L_0 = \alpha - V(q_1, \dots, q_S, t) . \quad (1.44)$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Die Größen L_n sind *homogene Funktionen* der generalisierten Geschwindigkeiten vom Grad $n = 2, 1, 0$. Homogene Funktionen sind allgemein wie folgt definiert:

Definition 1.2.4

$f(x_1, \dots, x_m)$ homogen vom Grad n , falls

$$f(ax_1, \dots, ax_m) = a^n f(x_1, \dots, x_m) \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (1.45)$$

Wir hatten früher behauptet, dass die Wahl der generalisierten Koordinaten willkürlich ist, dass nur ihre Gesamtzahl S festliegt. Wir zeigen nun, dass die

$$\begin{array}{c} \text{Lagrange-Gleichungen form invariant} \\ \text{gegenüber Punkttransformationen} \\ (q_1, \dots, q_S) \xleftarrow[\text{differenzierbar}]{} (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_S) \end{array}$$

sind. Es gelte:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{q}_j = \tilde{q}_j(q_1, \dots, q_S, t) \\ q_l = q_l(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_S, t) \end{array} \right\} \quad j, l = 1, \dots, S.$$

Unter der Voraussetzung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, S$$

folgt dann für

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = L(q(\tilde{q}, t), \dot{q}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t), t)$$

die Behauptung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, S. \quad (1.46)$$

Beweis

$$\dot{q}_j = \sum_l \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} \dot{\tilde{q}}_l + \frac{\partial q_j}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} = \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l},$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \tilde{q}_l} \right),$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_l} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_l}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} = \sum_j \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} \right) \right\}$$

$$= \sum_j \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \bar{q}_l} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_l} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \bar{q}_l} = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right\} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_l} = 0 .$$

Für den Begriff der Forminvarianz ist eigentlich nicht entscheidend, dass \tilde{L} aus L schlicht durch Einsetzen der Transformationsformeln hervorgeht. Wichtig ist nur, dass es überhaupt zu $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ein eindeutiges $\tilde{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t)$ gibt, sodass die Gleichungen erhalten bleiben.

1.2.2 Einfache Anwendungen

Wir wollen in diesem Abschnitt ausführlich den Algorithmus demonstrieren und üben, den man üblicherweise zur Lösung von Problemen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen benutzt. Wir setzen durchweg

- ▶ holonome Zwangsbedingungen, konservative Kräfte

voraus. Die Lösungsmethode setzt sich dann aus fünf Teilschritten zusammen:

1. Zwangsbedingungen formulieren.
2. Generalisierte Koordinaten \mathbf{q} festlegen.
3. Transformationsformeln bilden.
4. Lagrange-Funktion $L = T - V = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ aufstellen.
5. Lagrange-Gleichungen (1.36) ableiten und lösen.
6. Rücktransformation auf „anschauliche“ Koordinaten.

Wir wollen dieses Verfahren an einigen Anwendungsbeispielen üben.

■ 1) Atwood'sche Fallmaschine

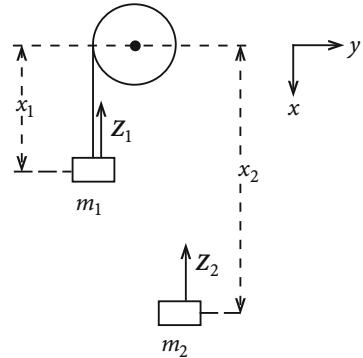
Es handelt sich um ein konservatives System mit fünf holonom-skleronomen Zwangsbedingungen:

$$x_1 + x_2 = l - \pi R = \text{const} ,$$

$$y_1 = z_1 = z_2 = 0 , \quad y_2 = 2R .$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Abb. 1.15 Atwood'sche Fallmaschine



Es bleiben also

$$S = 6 - 5 = 1$$

Freiheitsgrade. Eine passende generalisierte Koordinate wäre dann:

$$q = x_1 \quad (\Rightarrow x_2 = l - \pi R - q) .$$

Damit sind die Transformationsformeln bekannt.

Mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2$$

und der potentiellen Energie

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = -m_1 g q - m_2 g (l - \pi R - q)$$

folgt die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2 + (m_1 - m_2) g q + m_2 g (l - \pi R) . \quad (1.47)$$

Mit

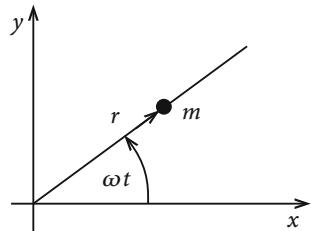
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2) \ddot{q} ; \quad \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 - m_2) g$$

ergibt sich über (1.36) die einfache Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g . \quad (1.48)$$

Das ist der „verzögerte“ freie Fall. Gleichung (1.48) lässt sich bei Vorgabe von zwei Anfangsbedingungen einfach integrieren. Damit ist das Problem gelöst.

Abb. 1.16 Gleitende Perle auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Draht



Wir haben nun die Möglichkeit, über die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + Z_1 ; \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + Z_2$$

die Zwangskräfte (*Fadenspannungen*) explizit zu bestimmen. Wegen

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = \ddot{q}$$

gilt:

$$m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 - m_2) g + (Z_1 - Z_2) = (m_1 + m_2) \ddot{q} = (m_1 - m_2) g .$$

Dies bedeutet:

$$Z_1 = Z_2 = Z .$$

Damit folgt weiter:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 + m_2) g + 2Z = (m_1 - m_2) \ddot{q} .$$

Die Fadenspannung Z lautet damit:

$$Z = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (1.49)$$

■ 2) Gleitende Perle auf gleichförmig rotierendem Draht

Das konservative System besitzt zwei holonome Zwangsbedingungen; davon ist eine skleronom, die andere rheonom:

$$\begin{aligned} z &= 0 , \\ y &= x \tan \omega t . \end{aligned}$$

Als generalisierte Koordinate bietet sich der Abstand

$$q = r$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

der Perle vom Drehpunkt an. Mit den Transformationsformeln

$$x = q \cos \omega t ; \quad y = q \sin \omega t ; \quad z = 0$$

berechnen wir die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) ,$$

die wegen $V \equiv 0$ mit der Lagrange-Funktion identisch ist:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) = L_2 + L_0 . \quad (1.50)$$

Die Funktion L_1 taucht trotz rheonome Zwangsbedingung nicht auf. Dies ist jedoch rein zufällig. Normalerweise erscheint die Funktion L_1 (1.43) in einem solchen Fall explizit. Die Funktion L_0 ist hier jedoch eine Folge der rheonomen Zwangsbedingung.

Mit der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = m q \omega^2$$

folgt:

$$\ddot{q} = \omega^2 q .$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$q(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} .$$

Mit den Anfangsbedingungen

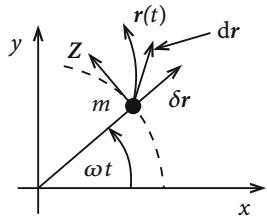
$$q(t=0) = r_0 > 0 ; \quad \dot{q}(t=0) = 0$$

folgt z. B. $A = B = r_0/2$ und damit

$$q(t) = \frac{1}{2} r_0 (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) .$$

Die Perle bewegt sich also mit wachsender Beschleunigung für $t \rightarrow \infty$ nach außen. Dabei nimmt die Energie der Perle zu, da die Zwangskraft an der Perle Arbeit leistet. Das sieht nach einem Widerspruch zum Prinzip der virtuellen Arbeit (1.19) aus. Ist es aber nicht. Die tatsächliche Verschiebung der Masse m im Zeitraum dt ist nicht mit der virtuellen

Abb. 1.17 Zur Demonstration des Unterschieds von tatsächlicher und virtueller Arbeit der Zwangskräfte am Beispiel der gleitenden Perle auf einem rotierenden Draht



Verrückung δr identisch, die ja bei festgehaltener Zeit durchgeführt wird. Es ist deshalb die von der Zwangskraft tatsächlich geleistete Arbeit

$$dW_Z = \mathbf{Z} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

von der virtuellen Arbeit

$$\delta W_Z = \mathbf{Z} \cdot \delta \mathbf{r} = 0, \quad \text{da } \mathbf{Z} \perp \delta \mathbf{r},$$

zu unterscheiden.

■ 3) Schwingende Hantel

Die Masse m_1 einer Hantel der Länge l kann sich reibungslos entlang einer horizontalen Geraden bewegen. Wir fragen uns, welche Kurven die Massen m_1 und m_2 unter dem Einfluss der Schwerkraft beschreiben.

Es liegen vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen vor:

$$z_1 = z_2 = 0; \quad y_1 = 0; \quad (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0.$$

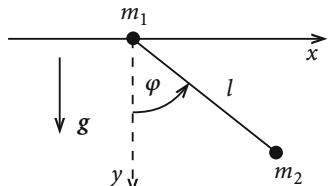
Es bleiben damit

$$S = 6 - 4 = 2$$

Freiheitsgrade. Günstige generalisierte Koordinaten dürften

$$q_1 = x_1; \quad q_2 = \varphi$$

Abb. 1.18 Im Schwerefeld der Erde schwingende Hantel mit einer Masse m_1 , die sich in x -Richtung reibungslos bewegen kann



1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

sein. Dies ergibt die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 ; & y_1 &= z_1 = 0 , \\ x_2 &= q_1 + l \sin q_2 ; & y_2 &= l \cos q_2 ; & z_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Damit berechnen wir die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2) . \end{aligned}$$

Für die potentielle Energie finden wir:

$$V_1 \equiv 0 ; \quad V_2 = -m_2 g l \cos \varphi ; \quad V = -m_2 g l \cos q_2 .$$

Dies ergibt die folgende Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2) + m_2 g l \cos q_2 . \quad (1.51)$$

Bevor wir den konkreten Lösungsweg weiter diskutieren, wollen wir zwei für das Folgende eminent wichtige Begriffe einführen.

Definition 1.2.5 Verallgemeinerter Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (1.52)$$

Definition 1.2.6 Zyklische Koordinate

$$q_j \text{ zyklisch} \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const} . \quad (1.53)$$

Jede zyklische Koordinate führt automatisch auf einen Erhaltungssatz. Deswegen sollte man generalisierte Koordinaten stets so wählen, dass möglichst viele zyklisch sind.

In unserem Beispiel ist q_1 zyklisch. Dies bedeutet:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2) \dot{q}_1 + m_2 l \dot{q}_2 \cos q_2 = \text{const} .$$

Wir lösen nach \dot{q}_1 auf:

$$\dot{q}_1 = c - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{q}_2 \cos q_2$$

und integrieren:

$$q_1(t) = c t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin q_2(t) + a .$$

Wir benötigen vier Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} q_1(t=0) &= 0 ; & q_2(t=0) &= 0 ; \\ \dot{q}_1(t=0) &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \omega_0 ; & \dot{q}_2(t=0) &= \omega_0 . \end{aligned} \quad (1.54)$$

Daraus folgt zunächst:

$$a = 0 , \quad c = 0 .$$

Wir haben damit die Zwischenlösung:

$$q_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin q_2(t) .$$

Für die Bewegung der Masse m_1 gilt also:

$$x_1(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \varphi(t) ; \quad y_1(t) = z_1(t) = 0 . \quad (1.55)$$

Mit den Transformationsformeln folgt für die Masse m_2 :

$$x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \varphi(t) ; \quad y_2(t) = l \cos \varphi(t) ; \quad z_2(t) = 0 . \quad (1.56)$$

Zusammengefasst ergibt dies die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse:

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{m_1 l}{m_1 + m_2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{l^2} = 1 . \quad (1.57)$$

Die Masse m_2 durchläuft also einen Teil einer Ellipse mit der horizontalen Halbachse $m_1 l / (m_1 + m_2)$ und der vertikalen Halbachse l . In der Grenze $m_1 \rightarrow \infty$ ergibt sich das gewöhnliche mathematische Pendel (Abschn. 2.3.4, Bd. 1).

Mit (1.55) und (1.56) ist das Problem noch nicht vollständig gelöst, da $\varphi(t)$ noch unbekannt ist. Wir haben aber noch eine weitere Lagrange-Gleichung zur Verfügung:

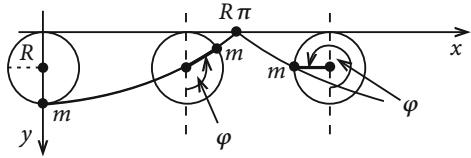
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 (l^2 \ddot{q}_2 + l \dot{q}_1 \cos q_2) ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 (l^2 \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 \cos q_2 - l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 (-l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - g l \sin q_2) .$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Abb. 1.19 Realisierung einer Zykloide durch Abrollen eines Rades auf einer Ebene



Dies ergibt in (1.36) eingesetzt die folgende Bewegungsgleichung:

$$l^2 \ddot{q}_2 + l \ddot{q}_1 \cos q_2 + g l \sin q_2 = 0 . \quad (1.58)$$

Für „kleine“ Werte von $q_2 = \varphi$ können wir

$$\cos q_2 \approx 1 ; \quad \sin q_2 \approx q_2$$

annehmen, wodurch sich (1.58) zu

$$l \ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 + g q_2 \approx 0$$

vereinfacht. An (1.55) lesen wir ab:

$$q_1 \approx -\frac{m_2}{m_1 + m_2} l q_2 \Rightarrow \ddot{q}_1 \approx -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \ddot{q}_2 .$$

Dies ergibt für q_2 die folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q}_2 + \frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} q_2 \approx 0 .$$

Es empfiehlt sich der Lösungsansatz:

$$q_2 = A \cos \omega t + B \sin \omega t .$$

Die gewählten Anfangsbedingungen (1.54) führen zu $A = 0$ und $B\omega = \omega_0$. Damit folgt schließlich:

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t ; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}} . \quad (1.59)$$

■ 4) Zykloidenpendel

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Schwerefeld auf einer *Zykloide*. Diese wird durch Abrollen eines Rades (Radius R) auf einer ebenen Fläche realisiert. Sie besitzt die folgende Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= R \varphi + R \sin \varphi = R(\varphi + \sin \varphi) , \\ y &= 2R - R(1 - \cos \varphi) = R(1 + \cos \varphi) . \end{aligned} \quad (1.60)$$

Der erste Term für x ist die Abrollbedingung, der zweite resultiert aus der Raddrehung. Wir können die Gleichung für y nach φ auflösen und in die Gleichung für x einsetzen. Gleichung (1.60) liefert damit eine Zwangsbedingung. Eine weitere ist $z \equiv 0$. Es bleiben für den Massenpunkt m somit $S = 3 - 2 = 1$ Freiheitsgrade. Als generalisierte Koordinate q empfiehlt sich der Winkel φ . Mit

$$\dot{x} = R \dot{q} (1 + \cos q) ; \quad \dot{y} = -R \dot{q} \sin q$$

berechnen wir die kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = m R^2 \dot{q}^2 (1 + \cos q) .$$

Für die potentielle Energie gilt:

$$V = -m g y = -m g R (1 + \cos q) .$$

Dies ergibt für die Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = m R (1 + \cos q) (R \dot{q}^2 + g) . \quad (1.61)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= 2 m R^2 (1 + \cos q) \dot{q} , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= 2 m R^2 [\ddot{q} (1 + \cos q) - \dot{q}^2 \sin q] , \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= -m R \sin q (R \dot{q}^2 + g) . \end{aligned}$$

Mit $(1 + \cos q) = 2 \cos^2(q/2)$ und $\sin q = 2 \sin(q/2) \cos(q/2)$ finden wir die zu lösende Bewegungsgleichung:

$$2 \ddot{q} \cos \frac{q}{2} - \dot{q}^2 \sin \frac{q}{2} + \frac{g}{R} \sin \frac{q}{2} = 0 .$$

Dies kann weiter zusammengefasst werden:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \frac{q}{2} + \frac{g}{4R} \sin \frac{q}{2} = 0 . \quad (1.62)$$

Das Zykloidenpendel befolgt also für $\sin(q/2) = \sin(\varphi/2)$ eine Schwingungsgleichung mit der Frequenz

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} . \quad (1.63)$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = 2 \arcsin [A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}] , \quad (1.64)$$

wobei A, B durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Beim Fadenpendel (Abschn. 2.3.4, Bd. 1) ist die Schwingungsfrequenz von der Amplitude der Schwingung abhängig. Die übliche Annahme $\sin \varphi \approx \varphi$, die zur Schwingungsgleichung führt, ist ja nur für kleine Ausschläge erlaubt. Hier haben wir eine geometrische Führung des Massenpunktes kennen gelernt, bei welcher die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude wird.

■ 5) N Teilchen ohne Zwangsbedingungen

Wir erwarten, dass in diesem speziellen Fall die Lagrange'schen mit den Newton'schen Bewegungsgleichungen identisch sind. Wegen fehlender Zwangsbedingungen gibt es $S = 3N$ Freiheitsgrade, und als generalisierte Koordinaten kommen zum Beispiel die kartesischen Koordinaten in Frage. Aus der Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, \dots, z_N, t) \quad (1.65)$$

folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \ddot{x}_i ; \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_{x_i} .$$

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \Leftrightarrow m_i \ddot{x}_i = F_{x_i} ,$$

führen damit in der Tat direkt auf die Newton'schen Bewegungsgleichungen. Nehmen wir die in (1.46) bewiesene Forminvarianz gegenüber Punkttransformationen hinzu, so gilt die Äquivalenz auch in beliebigen krummlinigen Koordinaten.

■ 6) Kepler-Problem

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Masse m im Zentralfeld (s. Beispiel 3 in Abschn. 1.1) mit der potentiellen Energie (s. (2.259), Bd. 1):

$$V(x, y, z) = \frac{-\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{z. B. } \alpha = \gamma m M) .$$

In kartesischen Koordinaten ergeben sich recht komplizierte Bewegungsgleichungen. Wir haben im Beispiel 3 des Abschn. 1.1 bereits die Verwendung von Kugelkoordinaten als generalisierte Koordinaten als zweckmäßig erkannt. In diesen lautet die Lagrange-Funktion:

$$L(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} . \quad (1.66)$$

Allein aus der unmittelbaren Beobachtung, dass die Koordinate φ zyklisch ist, ergeben sich wichtige physikalische Folgerungen:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = L_z = \text{const.} \quad (1.67)$$

Die z -Komponente des Bahndrehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist eine Konstante der Bewegung. Da die z -Richtung durch nichts ausgezeichnet ist, muss sogar der volle Drehimpuls konstant sein:

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{const.} \quad (1.68)$$

(Man unterscheide den Vektor \mathbf{L} (Drehimpuls) vom Skalar L (Lagrange-Funktion).) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die z -Achse unseres Koordinatensystems parallel zum Drehimpuls \mathbf{L} legen, womit automatisch $L_x = L_y \equiv 0$ folgt. Die durch $[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]$ aufgespannte Bahnebene ist dann die xy -Ebene. Dies bedeutet $\vartheta \equiv \pi/2$ und damit $\dot{\vartheta} \equiv 0$, sodass sich die Lagrange-Funktion zu

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (1.69)$$

vereinfacht. Es bleibt dann noch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} \quad (1.70)$$

zu diskutieren.

1.2.3 Verallgemeinerte Potentiale

Die einfachen Anwendungsbeispiele des letzten Abschnitts setzen die Gültigkeit der Lagrange-Gleichungen in der Form (1.36) voraus. Sie gelten für konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen. Bei einem nicht-konservativen System, aber holonomen Zwangsbedingungen gilt stattdessen (1.33):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, S.$$

Wir kommen jedoch zu formal unveränderten Lagrange-Gleichungen für so genannte

verallgemeinerte Potentiale

$$U = U(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t),$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

falls sich aus diesen die generalisierten Kräfte Q_j wie folgt ableiten lassen:

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (1.71)$$

Der erste Summand ist hier gegenüber dem Fall des konservativen Systems neu. Für die

verallgemeinerte Lagrange-Funktion

$$L = T - U \quad (1.72)$$

gelten dann mit (1.71) offenbar die Bewegungsgleichungen formal in der unveränderten Form (1.36). Nun sieht allerdings die Forderung (1.71) auch sehr speziell aus. Es gibt jedoch ein sehr wichtiges Anwendungsbeispiel:

- ▶ **Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld!**

Im Band 3 werden wir erfahren, dass auf ein Teilchen mit der Ladung \tilde{q} , das sich mit der Geschwindigkeit v in einem elektromagnetischen Feld (elektrisches Feld E , magnetische Induktion B) bewegt, die so genannte „Lorentz-Kraft“

$$\mathbf{F} = \tilde{q} [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (1.73)$$

wirkt. Diese ist nicht konservativ. Sie besitzt allerdings ein verallgemeinertes Potential U im Sinne von (1.71). Um dies zu zeigen, schreiben wir F zunächst auf die *elektromagnetischen Potentiale*,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) : \text{skalares Potential} ; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Vektorpotential} ,$$

um. Diese sind so gewählt, dass in den *Maxwell-Gleichungen*, die in der Elektrodynamik die Rolle übernehmen, die die Newton'schen Axiome in der Mechanik spielen,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 ; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ; \quad (1.74)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \mathbf{j} ; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho , \quad (1.75)$$

die beiden *homogenen* Gleichungen (1.74) automatisch erfüllt sind:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} ; \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} . \quad (1.76)$$

In den *inhomogenen* Gleichungen (1.75), die wir im Folgenden nicht weiter benötigen, bezeichnen \mathbf{H} das magnetische Feld, \mathbf{D} die dielektrische Verschiebung, \mathbf{j} die Stromdichte und ρ die Ladungsdichte. Weitere Einzelheiten werden in Band 3 diskutiert.

Mit (1.76) schreibt sich die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = \bar{q} \left[-\nabla \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}) \right]. \quad (1.77)$$

Wir versuchen, dazu ein verallgemeinertes Potential

$$U = U(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

abzuleiten, nehmen als generalisierte also die kartesischen Koordinaten des geladenen Teilchens. Damit werden die generalisierten Kraftkomponenten mit $F_{x,y,z}$ identisch:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A})_x &= \dot{y}(\text{rot } \mathbf{A})_z - \dot{z}(\text{rot } \mathbf{A})_y \\ &= \dot{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \\ &= \dot{y} \frac{\partial}{\partial x} A_y + \dot{z} \frac{\partial}{\partial x} A_z + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} A_x - \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} A_x - \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} A_x - \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} A_x \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \left(\frac{d}{dt} A_x - \frac{\partial}{\partial t} A_x \right). \end{aligned}$$

Damit lautet die x -Komponente der Lorentz-Kraft:

$$F_x = \bar{q} \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} A_x + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Wir benutzen noch

$$\frac{d}{dt} A_x = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right]; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \varphi = 0$$

und können dann schreiben:

$$F_x = \bar{q} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Wir definieren ein

verallgemeinertes Potential der Lorentz-Kraft

$$U = \bar{q}(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (1.78)$$

das für die x -Komponente die gewünschte Beziehung (1.71) erfüllt:

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} = Q_x.$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Dies lässt sich natürlich ganz analog für die beiden anderen Komponenten F_y, F_z ebenso zeigen. Damit haben wir als wichtiges Ergebnis die Lagrange-Funktion eines Teilchens der Masse m und der Ladung \bar{q} im elektromagnetischen Feld abgeleitet:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \bar{q} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \bar{q} \varphi . \quad (1.79)$$

Obwohl wir als generalisierte Koordinaten die kartesischen Ortskoordinaten des Teilchens gewählt haben, sind die generalisierten Impulse \mathbf{p} nicht mit den mechanischen Impulsen $m \mathbf{v}$ identisch. Nach (1.52) gilt vielmehr:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} + \bar{q} A_x ; \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} + \bar{q} A_y ; \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} + \bar{q} A_z . \quad (1.80)$$

Die eigentlichen experimentellen Messgrößen sind die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} . Die Potentiale φ, \mathbf{A} sind dagegen nur Hilfsgrößen. **Eichtransformationen** der Form

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi ; \quad \varphi \longrightarrow \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \chi , \quad (1.81)$$

wobei χ eine beliebige skalare Funktion sein darf, sind deshalb erlaubt, da nach (1.76) dadurch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} nicht geändert werden. Da die Lagrange-Funktion (1.79) aber direkt von den Potentialen φ, \mathbf{A} abhängt, ist sie **nicht** eichinvariant. Die Lagrange'sche Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \bar{q} [\mathbf{E} + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})] \quad (1.82)$$

ist dagegen eichinvariant, da in diese nur die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} eingehen. Die Lagrange-Funktion ändert sich gemäß

$$L \longrightarrow L + \bar{q} \left(\dot{\mathbf{r}} \nabla \chi + \frac{\partial}{\partial t} \chi \right) = L + \bar{q} \frac{d}{dt} \chi(\mathbf{r}, t) . \quad (1.83)$$

Nun kann man ganz allgemein zeigen, dass sich bei einer

mechanischen Eichtransformation

$$L \longrightarrow L + L_0 ; \quad L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) \quad (1.84)$$

die Bewegungsgleichungen nicht ändern, wenn f eine praktisch beliebige, hinreichend oft differenzierbare, nur von \mathbf{q} und t abhängende Funktion ist. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{df}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} + \sum_l \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} + \sum_l \frac{\partial^2 f}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l .$$

Daraus folgt mit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_0}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j \quad (1.85)$$

die Behauptung. Umeichungen der Lagrange-Funktion gemäß (1.84) lassen die Bewegungsgleichung und damit die Bahnen $\mathbf{q}(t)$ im Konfigurationsraum invariant. Nur diese sind aber empirisch beobachtbare Phänomene. Auch die elektromagnetische Eichtransformation (1.81) ist in diesem Sinne irrelevant.

1.2.4 Reibung

Reibungskräfte lassen sich nicht wie in (1.71) aus einem verallgemeinerten Potential U ableiten. Sie müssen daher in besonderer Weise in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. Es sind auch keine Zwangskräfte im eigentlichen Sinn. Sie erfüllen nicht das d'Alembert'sche Prinzip.

Nach (1.33) gilt bei holonomen Zwangsbedingungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j^{(V)} + Q_j^{(R)} . \quad (1.86)$$

Der Anteil $Q_j^{(V)}$ sei dabei aus einem Potential ableitbar ($\mathbf{K}_i^{(V)} \equiv -\nabla_i V$), während $Q_j^{(R)}$ den Einfluss der Reibungskraft angibt.

Die Lagrange-Funktion

$$L = T - V \quad \left(V \text{ aus } Q_j^{(V)} \right)$$

befolgt dann die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(R)} , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (1.87)$$

Einen brauchbaren phänomenologischen Ansatz für die Reibungskräfte stellt der Ausdruck

$$Q_j^{(R)} = - \sum_{l=1}^S \beta_{jl} \dot{q}_l \quad (\beta_{jl} = \beta_{lj}) \quad (1.88)$$

dar (vgl. (2.59), Bd. 1). Kräfte dieser Art werden durch die

Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^S \beta_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m \quad (1.89)$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

beschrieben. Dies ergibt **modifizierte** Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (1.90)$$

Zur Festlegung der Bewegungsgleichungen müssen nun also zwei skalare Funktionen L und D bekannt sein.

Wir wollen uns noch die physikalische Bedeutung der Dissipationsfunktion klar machen. In Systemen mit Reibung ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie keine Erhaltungsgröße, da das System gegen die Reibung Arbeit leisten muss:

$$dW^{(R)} = - \sum_j Q_j^{(R)} dq_j = \sum_{j,l} \beta_{jl} \dot{q}_l dq_j.$$

Es ist also:

$$\frac{dW^{(R)}}{dt} = 2D \quad (\text{Energiedissipation}). \quad (1.91)$$

Die Energiedissipation entspricht der zeitlichen Änderung der Gesamtenergie ($T + V$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + V) &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{dV}{dt}, \\ \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned}$$

Wir setzen skleronome Zwangsbedingungen voraus. Dann ist nach (1.37) die kinetische Energie T eine homogene Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten vom Grad 2. Ferner sei das System, abgesehen von den Reibungskräften, konservativ:

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{d}{dt}(2T) - \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Daraus folgt mit (1.90):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + V) &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d}{dt}(2T) + \frac{dV}{dt} - \sum_{j=1}^S \dot{q}_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial V}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d}{dt}(2T + V) + 2D \\ &= \frac{d}{dt}(2T + 2V) + 2D. \end{aligned}$$

Dies bedeutet:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -2D. \quad (1.92)$$

Beispiel

Ein Teilchen der Masse m falle vertikal unter dem Einfluss der Schwere, wobei Reibungskräfte gemäß einer Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} \alpha v^2$$

aufreten mögen (*Stokes'sche Reibung*; s. (2.59), Bd. 1). Mit $v = -\dot{z}$ (eindimensionale Bewegung!) folgt die Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2} z^2 - mgz .$$

Dies gibt nach (1.90) die folgende modifizierte Lagrange-Gleichung:

$$m \ddot{z} + mg + \alpha \dot{z} = 0 .$$

Es ist also:

$$\frac{d}{dt} v = g - \frac{\alpha}{m} v \Rightarrow dt = \frac{dv}{g - \frac{\alpha}{m} v} .$$

Dies lässt sich leicht integrieren:

$$t - t_0 = -\frac{m}{\alpha} \ln \frac{\alpha v - mg}{\alpha v_0 - mg} .$$

Wir wählen als Anfangsbedingungen

$$t_0 = 0 ; \quad v_0 = 0$$

und haben dann das bekannte Resultat ((2.119), Bd. 1):

$$v = \frac{mg}{\alpha} \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha}{m} t \right) \right] .$$

Wegen der Reibung bleibt v auch für $t \rightarrow \infty$ endlich!

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

1.2.5 Nicht-holonom Systeme

Holonome Zwangsbedingungen lassen sich in der Form (1.2) angeben. Durch Einführung von $S = 3N - p$ (p = Zahl der holonomen Zwangsbedingungen) voneinander unabhängigen generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_s , die die Konfiguration des Systems eindeutig festlegen, wird u. a. der Tatsache Rechnung getragen, dass sich durch die holonomen Zwangsbedingungen die Zahl der Freiheitsgrade von $3N$ auf $S = 3N - p$ verringert hat.

Bei nicht-holonomen Zwangsbedingungen lässt sich nicht mehr eine der Zahl der Freiheitsgrade entsprechenden Menge von **unabhängigen** generalisierten Koordinaten angeben. Insbesondere sind die Lagrange-Gleichungen nicht mehr in der Form (1.36) verwendbar. Nach den Überlegungen in Abschn. 1.1 können nicht-holonom Zwangsbedingungen als Ungleichungen oder in differentieller, nicht-integrierbarer Form vorliegen. Für den zweiten Fall gibt es ein Lösungsverfahren, nämlich die

- ▶ Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren,

die wir nun einführen wollen. Dazu betrachten wir ein System, dem \tilde{p} Zwangsbedingungen auferlegt seien. Von diesen mögen $p \leq \tilde{p}$ in der folgenden, nicht-holonom Form vorliegen:

$$\sum_{m=1}^{3N} f_{im}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dx_m + f_{it}(x_1, \dots, x_{3N}, t) dt = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.93)$$

Wir wollen das Lösungsrezept schrittweise entwickeln:

1. Im Allgemeinen wird das System sowohl holonome als auch nicht-holonome Zwangsbedingungen aufweisen. Die holonomen Zwangsbedingungen verwenden wir zur partiellen Verringerung der Koordinatenzahl von $3N$ auf

$$j = 3N - (\tilde{p} - p).$$

Wir drücken also die Teilchenorte \mathbf{r}_i durch j *generalisierte* Koordinaten q_1, \dots, q_j aus:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_j, t). \quad (1.94)$$

Die Koordinaten q_j können natürlich nicht alle voneinander unabhängig sein.

2. Die Bedingungen (1.93) werden auf q_1, \dots, q_j umgeschrieben:

$$\sum_{m=1}^j a_{im} dq_m + b_{it} dt = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.95)$$

3. Die Zwangsbedingungen werden für virtuelle Verrückungen formuliert ($\delta t = 0$):

$$\sum_{m=1}^j a_{im} \delta q_m = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.96)$$

4. Wir führen nun so genannte *Lagrange'sche Multiplikatoren* λ_i ein, die unabhängig von q sein sollen, aber möglicherweise von t abhängen. Aus (1.96) folgt trivialerweise:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \sum_{m=1}^j a_{im} \delta q_m = 0 . \quad (1.97)$$

5. Das System sei konservativ. Dann lässt sich eine Lagrange-Funktion definieren, für die die Bewegungsgleichungen die Form (1.35) haben:

$$\sum_{m=1}^j \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0 . \quad (1.98)$$

Dies kombinieren wir mit (1.97):

$$\sum_{m=1}^j \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \right\} \delta q_m = 0 . \quad (1.99)$$

Die δq_m sind nicht unabhängig voneinander, d. h., wir können nicht jeden Summanden gleich Null setzen.

6. Wegen der Zwangsbedingungen sind nur $j-p = 3N-\bar{p}$ Koordinaten frei wählbar. Wir legen fest:

$$\begin{aligned} q_m : \quad m = 1, \dots, j-p &: \quad \text{unabhängig ,} \\ q_m : \quad m = j-p+1, \dots, j &: \quad \text{abhängig .} \end{aligned}$$

Nun sind die p Lagrange'schen Multiplikatoren λ_i noch unbestimmt. Wir wählen sie so, dass gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \stackrel{!}{=} 0 , \quad m = j-p+1, \dots, j . \quad (1.100)$$

Das sind p Gleichungen für p unbekannte λ_i , die durch (1.100) festgelegt sind. Einsetzen in (1.99) führt dann zu

$$\sum_{m=1}^{j-p} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \right\} \delta q_m = 0 .$$

Diese q_m sind nun aber unabhängig voneinander, sodass bereits jeder Summand für sich gleich Null sein muss:

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} = 0 , \quad m = 1, 2, \dots, j-p . \quad (1.101)$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

7. Wir kombinieren (1.101) und (1.100) und erhalten die

Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (1. Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im}, \quad m = 1, \dots, j. \quad (1.102)$$

Das sind j Gleichungen für $j + p$ Unbekannte, nämlich j Koordinaten q_m und p Multiplikatoren λ_i . Die fehlenden Bestimmungsgleichungen sind die p Zwangsbedingungen (1.95):

$$\sum_{m=1}^j a_{im} \dot{q}_m + b_{it} = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.103)$$

Diese Zwangsbedingungen lassen sich zwar nicht direkt integrieren, möglicherweise aber im Zusammenhang mit den obigen Bewegungsgleichungen. Wir werden dies an Beispielen demonstrieren. Bei diesem Verfahren erhalten wir also eigentlich mehr als ursprünglich beabsichtigt, nämlich neben den q_m noch die λ_i .

Was ist die physikalische Bedeutung der λ_i ? Vergleicht man (1.102) mit (1.33), so wird klar, dass

$$\bar{Q}_m = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \quad (1.104)$$

als Komponente einer *generalisierten Zwangskraft* zu interpretieren ist, die die nicht-holonen Zwangsbedingungen realisiert. Man kann dann (1.97) auch wie folgt schreiben:

$$\sum_{m=1}^j \bar{Q}_m \delta q_m = 0. \quad (1.105)$$

Das ist gewissermaßen das d'Alembert'sche Prinzip für die generalisierte Zwangskraft.

Man kann die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren auch auf Systeme mit ausschließlich holonomen Zwangsbedingungen anwenden. Dazu schreiben wir die p holonomen Zwangsbedingungen (von insgesamt $\bar{p} \geq p$),

$$f_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

auf generalisierte Koordinaten q_1, \dots, q_j um:

$$\tilde{f}_i(q_1, \dots, q_j, t) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Damit gilt dann auch die Beziehung

$$d\tilde{f}_i = \sum_{m=1}^j \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t} dt = 0,$$

die mit (1.95) bzw. (1.103) formal identisch ist, falls

$$a_{im} = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial q_m} \quad \text{und} \quad b_{it} = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial t}$$

gesetzt werden. Damit sind dann (1.102) und (1.103) zu lösen. Das Verfahren liefert nun auch Informationen über Zwangskräfte, ist aber auch komplizierter, da statt $j - p$ nun $j + p$ Gleichungen zu lösen sind. – Die Anwendungsbeispiele des nächsten Abschnitts sollen mit dem abstrakten Formalismus vertraut machen.

Für den gerade diskutierten Spezialfall, dass vorliegende holonome Zwangsbedingungen **nicht** zur Verringerung der Variablenzahl benutzt werden, um auch Aussagen über die etwas schwerer zugänglichen Zwangskräfte zu bekommen, soll jetzt noch eine alternative, etwas direktere Methode dargestellt werden.

Wir betrachten ein N -Teilchen-System mit p holonomen Zwangsbedingungen:

$$f_v(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 ; \quad v = 1, \dots, p . \quad (1.106)$$

Da keine der Zwangsbedingungen zur Verringerung der Variablenzahl benutzt werden soll, liegt es nahe, die Komponenten (kartesisch, zylindrisch, sphärisch, ...) der Teilchenorte direkt als „generalisierte“ Koordinaten zu verwenden:

$$\mathbf{r}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \quad (1.107)$$

Die Zwangsbedingungen (1.106) haben für **reale** Verschiebungen zur Folge:

$$\begin{aligned} df_v &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_v}{\partial x_{ij}} dx_{ij} + \frac{\partial f_v}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^N \nabla_i f_v \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{\partial f_v}{\partial t} dt = 0 \\ &\leadsto \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i f_v = -\frac{\partial f_v}{\partial t} . \end{aligned} \quad (1.108)$$

Für virtuelle Verrückungen gilt daher wegen $\delta t = 0$:

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i f_v \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.109)$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit (1.19) führt mit (1.18) zu den Bewegungsgleichungen (1.20), an die wir die p Nebenbedingungen (1.109) mit p Lagrange'schen Multiplikatoren λ_v „ankoppeln“:

$$\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{K}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \sum_{v=1}^p \lambda_v \nabla_i f_v \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.110)$$

K_i ist die *treibende Kraft* auf Teilchen i . Mit dem dritten Summanden haben wir lediglich die Null zur Bewegungsgleichung (1.20) hinzugefügt. Wegen der Zwangsbedingungen sind

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

nicht alle $\delta \mathbf{r}_i$ unabhängig voneinander. Mit derselben Begründung wie zu (1.100) betrachten wir $3N - p$ der Variationen δx_{ij} als unabhängig. Für die restlichen p Variationen wählen wir die p Multiplikatoren λ_v , so, dass bereits die entsprechenden Klammern in (1.110) verschwinden. Es bleibt dann insgesamt:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{K}_i + \sum_{v=1}^p \lambda_v \nabla_i f_v . \quad (1.111)$$

Das ist das „Newton'sche Analogon“ zu den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 1. Art (1.102). Es sind auch hier $3N$ Gleichungen für $(3N+p)$ Variable $(x_{11}, \dots, x_{N3}; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Die fehlenden Bestimmungsgleichungen holen wir uns aus den p Zwangsbedingungen (1.106).

Der Vergleich mit (1.17) gestattet nun eine explizite Festlegung der im realen dreidimensionalen Raum auf das i -te Teilchen wirkenden Zwangskraft \mathbf{Z}_i :

$$\mathbf{Z}_i = \sum_{v=1}^p \lambda_v \nabla_i f_v . \quad (1.112)$$

In dieser direkten Bestimmungsmöglichkeit der oft recht unhandlichen Zwangskräfte mag ein gewisser Vorteil dieses Verfahrens gesehen werden.

Mit Hilfe der hier dargestellten Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren lässt sich der Einfluß der Zwangskräfte auf den Energiesatz des Teilchensystems unmittelbar erkennen. Die treibende Kraft sei aus einem Potential V ableitbar:

$$\mathbf{K}_i = -\nabla_i V .$$

Damit gilt für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie T :

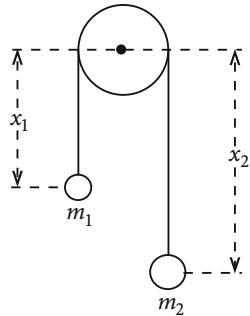
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{K}_i + \mathbf{Z}_i) = -\frac{d}{dt} V + \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{Z}_i \\ &\underset{(1.112)}{\approx} \frac{d}{dt} (T + V) = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{Z}_i \end{aligned}$$

Nutzen wir nun noch (1.108) aus, so bleibt:

$$\frac{d}{dt} (T + V) = - \sum_{v=1}^p \lambda_v \frac{\partial f_v}{\partial t} . \quad (1.113)$$

Bei ausschließlich skleronomen Zwangsbedingungen f_v gilt somit der Energieerhaltungssatz. Bei rheonomen Zwangsbedingungen leisten dagegen die Zwangskräfte in der Regel Arbeit am System. Energieerhaltung gilt dann nicht mehr! (s. Beispiel 2 in Abschn. 1.2.2).

Abb. 1.20 Atwood'sche Fallmaschine



1.2.6 Anwendungen der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Wir diskutieren drei einfache physikalische Probleme.

■ 1) Atwood'sche Fallmaschine

Als eigentlich holonomes System haben wir die Fallmaschine bereits als Anwendungsbeispiel 1) in Abschn. 1.2.2 diskutiert. Sie dient hier der Illustration der Methode.

Von den fünf Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 = z_2 = 0, \quad y_2 = 2R \\ x_1 + x_2 - l + \pi R &= 0 \end{aligned}$$

verwenden wir nur die ersten vier zur Verringerung der Koordinatenzahl:

$$j = 6 - 4 = 2.$$

Als *generalisierte* Koordinaten wählen wir:

$$q_1 = x_1; \quad q_2 = x_2.$$

Die verbleibende Zwangsbedingung lautet dann:

$$\begin{aligned} f(q_1, q_2, t) &= q_1 + q_2 - l + \pi R = 0 \quad (p = 1) \\ \Rightarrow df &= dq_1 + dq_2 = 0. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit (1.95) liefert

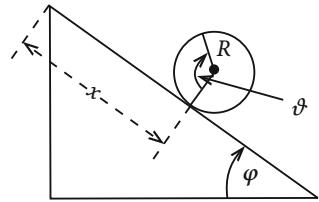
$$a_{11} = a_{12} = 1.$$

Wegen $p = 1$ ist nur ein Lagrange'scher Multiplikator λ vonnöten (1.104):

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}_2 = \lambda \quad \text{Fadenspannung}.$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Abb. 1.21 Rollender Hohlzylinder auf einer schiefen Ebene



Mit der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + g (m_1 q_1 + m_2 q_2)$$

ergeben sich gemäß (1.102) die Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{q}_1 - m_1 g = \lambda ; \quad m_2 \ddot{q}_2 - m_2 g = \lambda .$$

Ferner folgt aus der Zwangsbedingung nach (1.103):

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 .$$

Das sind jetzt drei zu lösende Gleichungen statt wie früher eine, als die Fallmaschine noch als holonomes System behandelt wurde. Dafür erhalten wir nun auch zusätzliche Information über die Zwangskraft. Als Lösung des obigen Gleichungssystems ergeben sich die früheren Resultate (1.48) und (1.49):

$$\ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g ; \quad \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} .$$

■ 2) Rollendes Fass auf schiefer Ebene

Das „Fass“ ist ein Hohlzylinder der Masse M , dessen Trägheitsmoment J sich zu

$$J = \int \rho(\mathbf{r}) r^2 d^3r = MR^2 \quad (1.114)$$

berechnet (s. Abschn. 4.3, Bd. 1). $\rho(\mathbf{r})$ ist die Massendichte des Hohlzylinders. Verifizieren Sie (1.114) zur Übung. – Es handelt sich hier wiederum um ein holonomes Problem. Wir betrachten als *generalisierte Koordinaten* (s. Abb. 1.21)

$$q_1 = x ; \quad q_2 = \vartheta \quad (j = 2)$$

mit der Abrollbedingung

$$R d\vartheta = dx$$

als Zwangsbedingung. Diese ist natürlich integriabel und dann holonom. Dies soll hier jedoch bewusst nicht ausgenutzt werden. Aus

$$R \mathrm{d}q_2 - \mathrm{d}q_1 = 0 \quad (p = 1)$$

folgt:

$$a_{11} = -1 ; \quad a_{12} = R .$$

Das rollende Fass besitzt die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{M}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{q}_2^2 - Mg(l - q_1) \sin \varphi .$$

Wegen $p = 1$ benötigen wir **einen** Lagrange'schen Multiplikator λ . Nach (1.102) gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= M \ddot{q}_1 - Mg \sin \varphi = \lambda a_{11} = -\lambda , \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= J \ddot{q}_2 = \lambda a_{12} = R \lambda . \end{aligned}$$

Die Koordinate q_2 scheint zyklisch zu sein. Dies führt hier aber nicht zu einem Erhaltungssatz, da q_1 und q_2 ja nicht unabhängig voneinander sind. Die Zwangsbedingung liefert noch, (1.103) entsprechend, eine dritte Bestimmungsgleichung:

$$-\dot{q}_1 + R \dot{q}_2 = 0 .$$

Man findet leicht als vorläufige Lösung:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \ddot{x} = \frac{1}{2} g \sin \varphi , \\ \ddot{q}_2 &= \ddot{\vartheta} = \frac{1}{2R} g \sin \varphi , \\ \lambda &= \frac{M}{2} g \sin \varphi . \end{aligned}$$

Die Linearbeschleunigung des abrollenden Zylinders ist also nur halb so groß wie die eines Körpers, der auf der Ebene reibungslos gleitet (vgl. (4.36), Bd. 1). Für die generalisierten Zwangskräfte finden wir

$$\overline{Q}_1 = \lambda a_{11} = -\frac{M}{2} g \sin \varphi ; \quad \overline{Q}_2 = \lambda a_{12} = \frac{1}{2} Mg R \sin \varphi .$$

\overline{Q}_1 kann mit der x -Komponente der Zwangskraft identifiziert werden, die aus der „Rauigkeit“ der Unterlage resultiert, die das Fass zum „Rollen“ bringt. Sie vermindert die tatsächlich wirkende Schwerkraft von $Mg \sin \varphi$ auf $(1/2)Mg \sin \varphi$. $-\overline{Q}_2$ entspricht dem durch die „Rauigkeit“ der Unterlage dem Zylinder aufgezwungenen Drehmoment.

■ 3) Rollen eines Rades auf rauer Unterfläche

Dieses System haben wir bereits in Abschn. 1.1 als Anwendungsbeispiel für nicht-holonomie Zwangsbedingungen diskutiert. Wir übernehmen die Notation des Beispiels (B,2) aus Abschn. 1.1 und wählen als „generalisierte“ Koordinaten:

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad q_3 = \varphi; \quad q_4 = \vartheta.$$

Die Zwangsbedingung „Rollen“ wird nach (1.14) durch

$$\dot{x} - R \cos \vartheta \dot{\varphi} = 0; \quad \dot{y} - R \sin \vartheta \dot{\varphi} = 0$$

wiedergegeben. Dies bedeutet nach (1.95) ($p = 2$):

$$\begin{array}{llll} a_{11} = 1; & a_{12} = 0; & a_{13} = -R \cos \vartheta; & a_{14} = 0; \\ a_{21} = 0; & a_{22} = 1; & a_{23} = -R \sin \vartheta; & a_{24} = 0. \end{array}$$

Wir benötigen zwei Lagrange'sche Multiplikatoren λ_1 und λ_2 . Nach (1.104) lauten dann die generalisierten Zwangskräfte:

$$\overline{Q}_1 = \lambda_1; \quad \overline{Q}_2 = \lambda_2; \quad \overline{Q}_3 = -R \cos \vartheta \lambda_1 - R \sin \vartheta \lambda_2; \quad \overline{Q}_4 = 0.$$

Die Radscheibe möge sich im kräftefreien Raum bewegen, besitze also nur kinetische Energie:

$$L = T = \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\vartheta}^2.$$

J_1 ist das Trägheitsmoment um die Radachse und J_2 das Trägheitsmoment um die durch Scheibenmittelpunkt und Auflagepunkt verlaufende Achse. Man verifiziere $J_1 = (1/2)MR^2$, $J_2 = (1/4)M(R^2 + (1/3)d^2)$. Dabei ist d die Scheibendicke. Die Lagrange-Gleichungen (1.102) liefern nun:

$$M \ddot{x} = \lambda_1; \quad M \ddot{y} = \lambda_2; \quad J_1 \ddot{\varphi} = -R \lambda_1 \cos \vartheta - R \lambda_2 \sin \vartheta; \quad J_2 \ddot{\vartheta} = 0.$$

Mit den obigen Zwangsbedingungen haben wir damit sechs Gleichungen für sechs Unbekannte. Aus $\ddot{\vartheta} = 0$ folgt mit $\vartheta(t=0) = 0$:

$$\vartheta = \omega t \quad (\omega = \text{const}).$$

Wir differenzieren die Zwangsbedingungen noch einmal nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -R \omega \dot{\varphi} \sin \omega t + R \ddot{\varphi} \cos \omega t, \\ \ddot{y} &= R \omega \dot{\varphi} \cos \omega t + R \ddot{\varphi} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Damit liegen auch die Multiplikatoren λ_1 und λ_2 fest:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -MR\omega \sin \omega t \dot{\varphi} + MR \cos \omega t \ddot{\varphi}, \\ \lambda_2 &= MR\omega \cos \omega t \dot{\varphi} + MR \sin \omega t \ddot{\varphi}.\end{aligned}$$

Die letzte, noch nicht benutzte Lagrange-Gleichung ergibt dann nach Einsetzen von λ_1 und λ_2 :

$$\begin{aligned}J_1 \ddot{\varphi} &= MR^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t \dot{\varphi} - MR^2 \cos^2 \omega t \ddot{\varphi} \\ &\quad - MR^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t \dot{\varphi} - MR^2 \sin^2 \omega t \ddot{\varphi} \\ &= -MR^2 \ddot{\varphi}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann aber nur die Lösung

$$\ddot{\varphi} \equiv 0 \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{const}$$

haben. Es bleibt zu integrieren:

$$\ddot{x} = -R\omega \dot{\varphi}_0 \sin \omega t; \quad \ddot{y} = R\omega \dot{\varphi}_0 \cos \omega t,$$

was mit gegebenen Anfangsbedingungen für $x(t)$ und $y(t)$ leicht möglich ist. Die Konstanten ω und $\dot{\varphi}_0$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen für $\vartheta(t)$ und $\varphi(t)$. Auch die Zwangskräfte sind nun vollständig bestimmt:

$$\overline{Q}_1 = -MR\omega \dot{\varphi}_0 \sin \omega t; \quad \overline{Q}_2 = MR\omega \dot{\varphi}_0 \cos \omega t; \quad \overline{Q}_3 = \overline{Q}_4 = 0. \quad (1.115)$$

Sie sorgen dafür, dass die Scheibe senkrecht auf der xy -Ebene rollt. Falls sich das Rad lediglich geradeaus bewegt, ist ω gleich Null, sodass alle Zwangskräfte verschwinden.

1.2.7 Aufgaben

Aufgabe 1.2.1

Diskutieren Sie die Bewegung einer auf einem gleichförmig rotierenden Draht reibungslos gleitenden Perle. r sei der Abstand vom Drehpunkt. Es sollen die Anfangsbedingungen

$$r(t=0) = r_0; \quad \dot{r}(t=0) = -r_0\omega$$

gelten (ω : konstante Winkelgeschwindigkeit des Drahtes).

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Aufgabe 1.2.2

Wir betrachten noch einmal wie in Aufgabe 1.2.1 bzw. im Anwendungsbeispiel 2) aus Abschn. 1.2.2 die auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Draht reibungslos gleitende Perle der Masse m (Abb. 1.17). Zur Interpretation der Ergebnisse wurde in Abschn. 1.2.2 die plausible Annahme gemacht, dass die wirkende Zwangskraft $Z(t)$ stets senkrecht zum rotierenden Draht orientiert ist.

- Bestätigen Sie diese *plausible* Annahme durch explizite Berechnung von $Z(t)$. Benutzen Sie dieselben Anfangsbedingungen wie in Abschn. 1.2.2.

$$r(t=0) = r_0 ; \quad \dot{r}(t=0) = 0 .$$

- Diskutieren Sie den Energiesatz:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = ?$$

Aufgabe 1.2.3

Betrachten Sie eine auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Draht reibungslos gleitende Perle der Masse m . Sie befindet sich, anders als in Aufgabe 1.2.1 zudem im Schwerefeld der Erde.

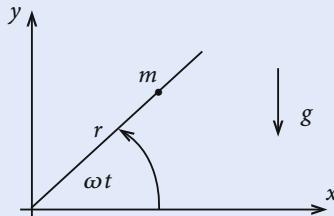


Abb. 1.22 Perle auf rotierendem Draht im Schwerefeld der Erde

- Welche Zwangsbedingungen liegen vor?
- Formulieren Sie die Lagrange-Funktion der Perle!
- Stellen Sie die Lagrangesche Bewegungsgleichung auf und finden Sie deren allgemeine Lösung!
- Benutzen Sie die Anfangsbedingungen

$$r(t=0) = r_0 ; \quad \dot{r}(t=0) = 0 .$$

Wie groß muss ω mindestens sein, damit die Perle sich auch für $t \rightarrow \infty$ nach außen bewegt?

- Wie würde das Problem in der Newton-Mechanik zu bearbeiten sein?

Aufgabe 1.2.4

Ein parabelförmig gebogener Draht drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse. Auf diesem Draht bewege sich reibunglos eine Perle der Masse m im Schwerefeld der Erde ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$). Befindet sich der Draht in der yz -Ebene, dann gilt für die Position der Masse

$$z = \alpha y^2 \quad (\alpha > 0) .$$

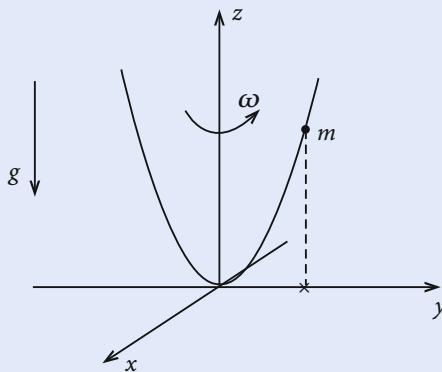


Abb. 1.23 Perle auf rotierendem, parabelförmigen Draht im Schwerefeld der Erde

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen! Wie viele Freiheitsgrade bleiben?
2. Benutzen Sie Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) zur Darstellung der Lagrange-Funktion!
3. Berechnen Sie für den Spezialfall

$$\omega = \sqrt{2\alpha g}$$

die Lagrange-Bewegungsgleichung 2. Art und zeigen Sie, dass

$$(1 + 4\alpha^2 \rho^2) \dot{\rho}^2$$

ein Integral der Bewegung darstellt!

Aufgabe 1.2.5

Die Position eines Teilchens werde durch Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) beschrieben. Die potentielle Energie des Teilchens sei

$$V(\rho) = V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad V_0 = \text{const}, \quad \rho_0 = \text{const}.$$

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

1. Wie lautet die Lagrange-Funktion?
2. Stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen auf.
3. Finden und interpretieren Sie mindestens zwei Erhaltungssätze.

Aufgabe 1.2.6

Auf der Innennfläche eines Zylindermantels (Radius R) rolle ein Zylinder (Radius r , Massendichte $\rho = \text{const}$).

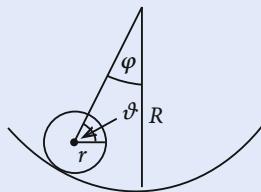


Abb. 1.24 Auf der Innennfläche eines Zylindermantels rollender Zylinder

1. Wie lautet die Lagrange-Funktion des Systems?
2. Formulieren Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen.
3. Integrieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine „Ausschläge“ φ .

Aufgabe 1.2.7

Eine Punktmasse m rollt reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels (Öffnungswinkel α) im Schwerfeld der Erde.

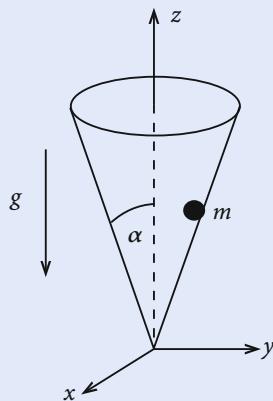


Abb. 1.25 Punktmasse m auf der Innenseite eines Kreiskegels im Schwerfeld der Erde

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingung und wählen Sie passende generalisierte Koordinaten.
2. Geben Sie die Lagrange-Funktion an und stellen Sie die Bewegungsgleichungen (2. Art) auf.
3. Welche Koordinate ist zyklisch? Geben Sie den zugehörigen Erhaltungssatz an!

Aufgabe 1.2.8

Zwei Kugeln gleicher Masse m sind durch eine (masselose) Stange der Länge l miteinander verbunden. Wie in der Skizze angedeutet, bewegen sich die Massen reibungsfrei in vorgegebenen Schächten unter dem Einfluss der Schwerkraft.

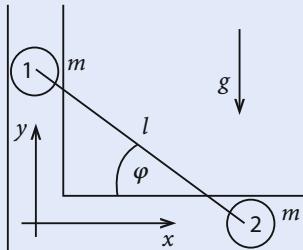


Abb. 1.26 Unter dem Einfluss der Schwerkraft in vorgegebenen Schächten gleitende Kugeln

1. Führen Sie passende generalisierte Koordinaten ein und geben Sie die Lagrange-Funktion an.
2. Lösen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 1.2.9

Ein Stab der Länge $2L$ mit kreisförmigem Querschnitt πR^2 gleite im Schwerefeld der Erde an einer Wand (y -Achse) ab. Der Stab besitze eine homogene Massenverteilung (Masse M , homogene Dichte ρ_0). φ sei der zeitabhängige Neigungswinkel gegenüber dem Erdboden (x -Achse). Diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit von φ !

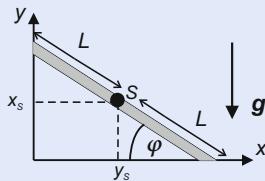


Abb. 1.27 An einer Wand abgleitender Stab im Schwerefeld der Erde

Aufgabe 1.2.10

Eine Perle der Masse m gleite reibunglos auf einem Drahtring vom Radius R . Der Ring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Durchmesser im Schwerefeld g .

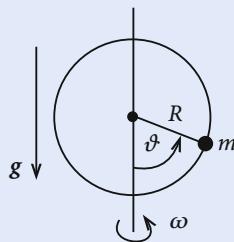


Abb. 1.28 Perle auf einem rotierenden Drahtring unter dem Einfluss der Schwerkraft

1. Formulieren und klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen.
2. Wie lautet die Lagrange'sche Bewegungsgleichung?
3. Integrieren Sie die Bewegungsgleichung für $\vartheta \ll 1$.

Aufgabe 1.2.11

Eine Masse m rotiere reibunglos auf einer Tischplatte. Über einen Faden der Länge l ($l = r + s$) sei durch ein Loch in der Platte m mit einer anderen Masse M verbunden. Wie bewegt sich M unter dem Einfluss der Schwerkraft?

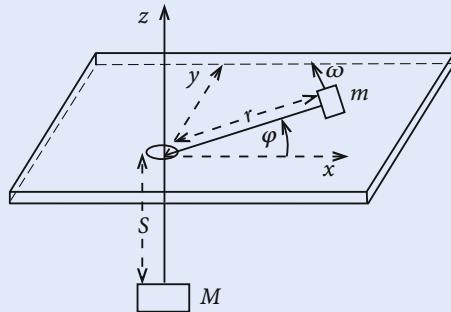


Abb. 1.29 Eine auf einem Tisch reibungslos rotierende Masse m , die durch einen Faden mit einer der Schwerkraft unterliegenden Masse M verbunden ist

1. Formulieren und klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen.
2. Stellen Sie die Lagrange-Funktion und ihre Bewegungsgleichungen auf.
3. Unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?
4. Diskutieren Sie den Spezialfall $\omega = 0$.

Aufgabe 1.2.12

Betrachten Sie ein ebenes Fadenpendel der Fadenlänge l im homogenen Schwerefeld. Es sollen nur kleine Ausschläge des Pendels diskutiert werden.

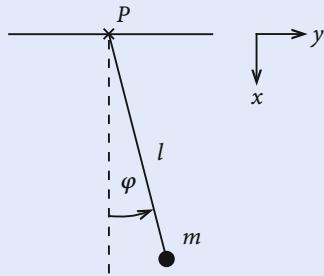


Abb. 1.30 Ebenes Fadenpendel der Länge l im Schwerefeld der Erde

1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion und ihre Bewegungsgleichung auf. Wählen Sie die Anfangsbedingungen so, dass zur Zeit $t = 0$ das Pendel durch seine Ruhelage schwingt. Wie groß ist die Frequenz ω_0 der Pendelschwingung?
2. Berechnen Sie die Fadenspannung.

Aufgabe 1.2.13

Ein Teilchen der Masse m schwinge an einem masselosen Faden der Länge l im Schwerefeld der Erde in der x - y -Ebene (s. Skizze).

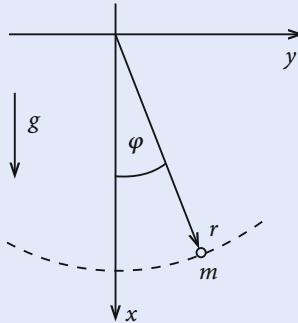


Abb. 1.31 Schwingende Masse im Schwerefeld der Erde

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen.
2. Benutzen Sie die Zwangsbedingungen **nicht** vollständig zur Eliminierung von Variablen, sondern wählen Sie φ **und** r als generalisierte Koordinaten. Geben Sie die Lagrange-Funktion

$$L = L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi})$$

an.

3. Führen Sie einen passenden Lagrangeschen Multiplikator ein und leiten Sie für φ und r die Lagrangeschen Gleichungen **erster** Art ab. Benutzen Sie die Bewegungsgleichung für r zur Bestimmung der „Fadenspannung“ Q_r .
4. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für φ mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{g}{l}}\varphi_0 \quad (\varphi_0 \ll 1)$$

unter der Voraussetzung kleiner Pendelausschläge ($\varphi \ll 1$).

Aufgabe 1.2.14

Ein Block der Masse M gleite reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schießen Ebene mit Neigungswinkel α gegen die Horizontale. An seinem Schwerpunkt sei die Masse m über einen masselosen Faden der Länge l befestigt.

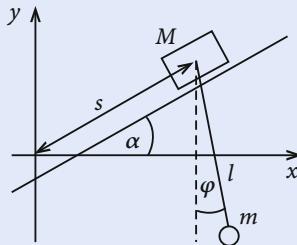


Abb. 1.32 Masse auf einer schiefen Ebene mit angekoppeltem Fadenpendel

1. Wie lautet die Lagrange-Funktion $L(\varphi, s, \dot{\varphi}, \dot{s})$?
2. Zeigen Sie, dass eine Lösung $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}$ existiert.
3. Geben Sie eine geschlossene Differentialgleichung für φ an. Lösen Sie diese für $M \gg m$ und kleine Winkelaußschläge ($\varphi \approx \alpha$).

Aufgabe 1.2.15

Zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einem Keil. Sie seien durch einen masselosen Faden der Länge $l = l_1 + l_2$ miteinander verbunden.

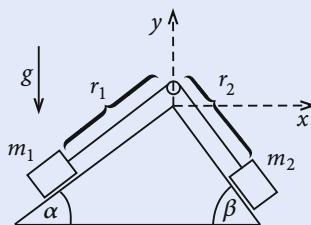


Abb. 1.33 Zwei miteinander durch einen Faden verbundene Massen auf einem Keil im Schwerefeld der Erde

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. Von welchem Typ sind diese? Wie viele Freiheitsgrade s besitzt das System?
2. Wählen Sie passende generalisierte Koordinaten. Geben Sie die Transformationsformeln an.
3. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion.
4. Stellen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese. Bestimmen Sie $r_1(t)$ mit den Anfangsbedingungen:

$$r_1(t=0) = r_0 ; \quad \dot{r}_1(t=0) = 0 .$$

Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen auf.

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

5. Benutzen Sie die Zwangsbedingung der „konstanten Fadenlänge“ **nicht** als holonome Zwangsbedingung zur Eliminierung von Variablen. Benutzen Sie stattdessen einen Lagrange'schen Multiplikator λ zur Festlegung der „Fadenspannung“. Wie groß ist diese im Gleichgewicht?

Aufgabe 1.2.16

Zwei homogene Zylinder mit Massen M_1, M_2 und Radien R_1, R_2 sind mit einem Faden umwickelt und dadurch miteinander verbunden. Die Achse des ersten Zylinders ist fest horizontal gelagert. Er lässt sich aber reibungsfrei drehen. Der zweite Zylinder fällt im Schwerefeld der Erde in x -Richtung, wobei sich auf beiden Zylindern der Faden abwickelt.

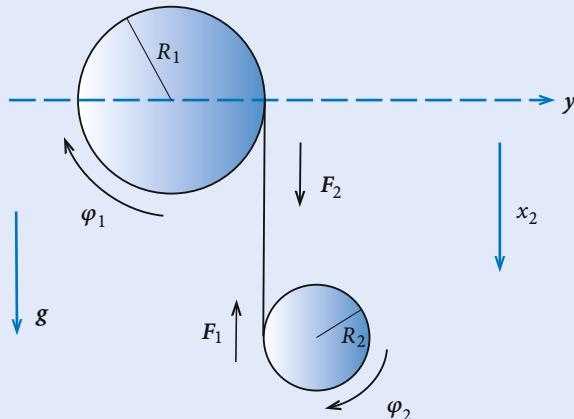


Abb. 1.34 Durch Faden gekoppelte, reibungsfreie drehbare Zylinder

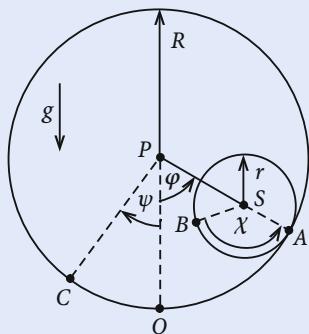
1. Stellen Sie mit Hilfe des Drehimpulssatzes die Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie insbesondere die Fadenspannungen F_1 und F_2 ! (Dieses Problem wurde als Aufgabe 4.5.4 in Band 1 gerechnet)
2. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion! Benutzen Sie dazu φ_1 und φ_2 (s. Skizze) als generalisierte Koordinaten.
3. Bestimmen Sie $x_2(t)$ mit den Anfangsbedingungen:

$$x_2(0) = 0 ; \dot{x}_2 = 0 .$$

4. Verifizieren Sie das Ergebnis für die Fadenspannung aus Teil 1.!

Aufgabe 1.2.17

Ein homogener Hohlzylinder (Masse M , Radius R) sei im Schwerefeld $\mathbf{g} = -ge_z$ um eine horizontale Achse durch den Mittelpunkt P drehbar gelagert. In diesem Hohlzylinder rollt ein homogener Vollzylinder (Masse m , Radius r) ohne zu gleiten. Die beiden Zylinderachsen seien parallel.



O und P raumfeste Punkte,
 A, B, C und S körperfest (d.h. auf den
Zylindern), sodass im Gleichgewicht:
 C auf O, B auf O, S auf \overline{PO}

ψ : Auslenkung des Hohlzylinders aus
der Gleichgewichtslage

χ : Auslenkung des Vollzylinders aus der
Gleichgewichtslage

φ : Winkellage des Schwerpunktes des
Vollzylinders

Abb. 1.35 Ein auf der Innenseite eines Hohlzylinders rollender Vollzylinder im Schwerefeld der Erde

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen und legen Sie die generalisierten Koordinaten fest.
2. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.
3. Wie lauten die Bewegungsgleichungen?
4. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz im Fall kleiner Auslenkungen.

Aufgabe 1.2.18

Zwei Punktmassen $m_1 = m_2 = m$ sind durch eine masselose Stange der Länge l zu einer Hantel verbunden. Sie bewegen sich in der xy -Ebene und unterliegen dabei einer Reibungskraft, die proportional zu ihrer Geschwindigkeit ist. ($\mathbf{F}_i = -\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_i, i = 1, 2$)

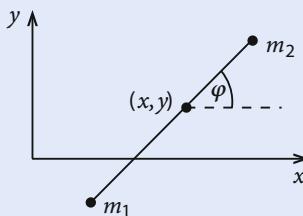


Abb. 1.36 Bewegung einer Hantel unter dem Einfluss einer Reibungskraft

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen und wählen Sie passende generalisierte Koordinaten.
2. Reibungskräfte sind nicht konservativ. Stellen Sie die entsprechenden generalisierten Kräfte Q_j auf!
3. Welche Bewegungsgleichungen sind zu lösen?
4. Lösen Sie diese unter den Anfangsbedingungen:
Schwerpunkt: $x(0) = y(0) = 0$; $\dot{x}(0) = v_x$; $\dot{y}(0) = v_y$
Winkel: $\varphi(0) = 0$; $\dot{\varphi}(0) = \omega$

Aufgabe 1.2.19

Ein Massenpunkt m gleitet im Schwerefeld der Erde reibungslos auf einer schiefen Ebene. Diese bewegt sich bei konstanter Neigung α in x -Richtung, wobei ihr Schnittpunkt mit der x -Achse durch

$$a(t) = \frac{1}{2}ct^2 \quad (c > 0)$$

gegeben ist.

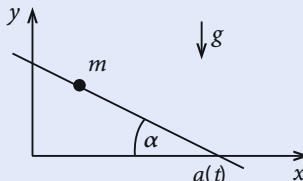


Abb. 1.37 Massenpunkt auf schiefer Ebene im Schwerefeld der Erde

1. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen und stellen Sie die Lagrange-Funktion L auf. Benutzen Sie dabei die Zwangsbedingung für die Bewegung der schiefen Ebene **nicht** zur Verringerung der Koordinatenzahl.

2. Stellen Sie die Lagrange'schen Gleichungen 1. Art auf und berechnen Sie aus diesen die verallgemeinerten Zwangskräfte Q_x, Q_y .
3. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{x}(0) = 0; \quad x(0) = x_0.$$

Aufgabe 1.2.20

Ein Massenpunkt m befindet sich unter Einfluss des homogenen Schwerefeldes der Erde auf einer Kugelfläche vom Radius R .

1. Geben Sie die Zwangsbedingungen an und formulieren Sie die Lagrange-Funktion.
2. Geben Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art an und finden Sie ein Integral der Bewegung.
3. In welcher Höhe z_0 springt der Massenpunkt von der Kugel ab, wenn er sich anfangs im höchsten Punkt der Kugel im labilen Gleichgewicht befand und dann eine infinitesimale Anfangsgeschwindigkeit erhielt?

Aufgabe 1.2.21

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Ebene unter dem Einfluss einer Kraft, die in Richtung auf ein Kraftzentrum wirkt. Für den Betrag F der nicht-konservativen Kraft gelte, wenn r der Abstand vom Kraftzentrum ist:

$$F = \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2} \right) \quad (\alpha: \text{dimensionsbehaftete Konstante}).$$

Bestimmen Sie das verallgemeinerte Potential

$$U = U(r, \dot{r})$$

und damit die Lagrange-Funktion für die Bewegung in einer Ebene.

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Aufgabe 1.2.22

Eine homogene Kreisscheibe (Radius R , Masse M), auf deren Rand eine punktförmige Masse

$$m = \frac{1}{2}M$$

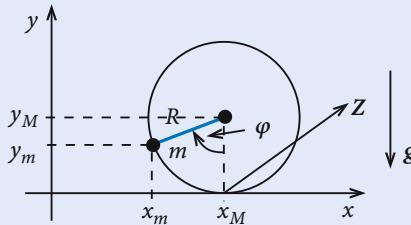


Abb. 1.38 Homogene Kreisscheibe mit Massenpunkt m auf ihrem dem Rand

fest angebracht ist, rollt reibungsfrei ohne zu gleiten unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer horizontalen Geraden:

1. Berechnen Sie die Koordinaten x_M, y_M des Scheibenmittelpunktes in Abhängigkeit vom Rollwinkel φ . Normieren Sie so, dass $\varphi = 0$ für $x_M = 0$ gilt.
2. Berechnen Sie die Koordinaten x_m, y_m des Massenpunktes sowie die Koordinaten x_S, y_S des gemeinsamen Schwerpunktes von Kreisscheibe und Massenpunkt als Funktionen von φ . Von welchem Typ sind die Bahnkurven?
3. Berechnen Sie die kinetische Energie $T(\varphi, \dot{\varphi})$ und die potentielle Energie $V(\varphi)$ des Gesamtsystems.
4. Bilden Sie die Lagrange-Funktion $L(\varphi, \dot{\varphi})$ und die zugehörige Bewegungsgleichung für φ . Wie groß ist die Frequenz kleiner Schwingungen um die Ruhelage $\varphi = 0$?
5. Berechnen Sie die von der horizontalen Geraden auf die Scheibe ausgeübte Zwangskraft $Z(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$!
6. Bei hinreichend großer Anfangsgeschwindigkeit $v = \dot{x}_M$, bezogen auf den Auflagepunkt bei $\varphi = 0$, kann die Scheibe wegen der Zusatzmasse m von der horizontalen Geraden „abheben“. Wie groß muss v sein, damit das „Abheben“ bei $\varphi = 2\pi/3$ beginnt?
7. Demonstrieren Sie zum Schluss die Äquivalenz von Newton- und Lagrange-Mechanik. Ganz allgemein beschreiben wir die Bewegung eines starren Körpers durch $\alpha)$ die Translation des Schwerpunktes und $\beta)$ die Rotation um den Schwerpunkt. Stellen Sie mit Hilfe der Zwangskraft $Z(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ aus Teil 5) die Bewegungsgleichung zu $\beta)$ auf. Sie sollte mit der aus Teil 4) identisch sein.

Aufgabe 1.2.23

Der Massenpunkt P wird durch einen Faden auf einer Kreisbahn mit dem anfänglichen Radius R_0 gehalten (kein Schwerefeld). Der Faden werde dann verkürzt, z. B. indem man den Faden durch ein im Kreismittelpunkt senkrecht zur Kreisebene angebrachtes Rohr legt und an dem Faden zieht. Zunächst erfolge die Fadenverkürzung so langsam, dass die entsprechende radiale kinetische Energie vernachlässigt werden kann.

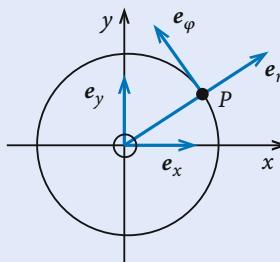


Abb. 1.39 Massenpunkt auf einer Kreisbahn

1. Bestimmen Sie ein Integral der Bewegung.
2. Welche Arbeit W wird am System geleistet bei Änderung des Bahnradius von R_0 auf $R < R_0$?
3. Der Faden werde nun mit einer endlichen Geschwindigkeit verkürzt, beginnend mit der Fadenlänge R_0 bei $t = 0$ gemäß

$$\dot{r}(t) = -b t, \quad (b > 0).$$

Hat das Integral der Bewegung aus 1) weiter Bestand?

4. Wie sieht die Zwangskraft Z aus, die die Nebenbedingung $\dot{r}(t) = -b t$ erzeugt?
5. Wie groß ist nun die am System bei Verkürzung der Fadenlänge von R_0 auf $R < R_0$ geleistete Arbeit?

Aufgabe 1.2.24

Ein Faden der Gesamtlänge l sei auf einem zur Kreisebene senkrecht stehenden Zylinder vom Radius R_0 befestigt. Bei dem Umlauf des Massenpunktes P um den festgehaltenen Zylinder wickelt sich der Faden auf und verkürzt so die freie Fadenlänge $r = \overline{PO'}$.

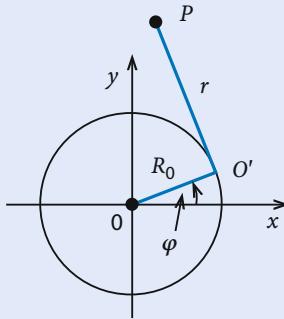


Abb. 1.40 Massenpunkt P an einem Faden, der auf einer Zylindermantelfläche befestigt ist

1. Bestimmen Sie ein Integral der Bewegung. Vergleichen Sie mit Teil 1) der vorherigen Aufgabe.
2. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel φ auf und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(t=0) = 0 ; \quad l\dot{\varphi}(t=0) = v_0$$

($\varphi = 0$ bedeutet völlig unaufgewickelten Faden). Nach welcher Zeit ist der Faden voll aufgewickelt?

3. Zeigen Sie, dass der zu φ gehörige generalisierte Impuls p_φ gleich dem Drehimpulsbetrag des Massenpunktes bezüglich O ist.

Aufgabe 1.2.25

Auf einer zylindrischen, um eine horizontale Achse drehbaren Walze (Radius R , Masse M) ist ein Faden der Länge $l \gg R$ aufgewickelt. Das eine Ende des Fadens ist an der Walze befestigt, am freien Ende hängt die Masse m . Die Massendichte der Walze steige von der Achse nach außen, mit Null beginnend, linear mit dem Radius an. Die Koordinate z der Masse m werde von der Walzenachse aus nach unten gezählt.

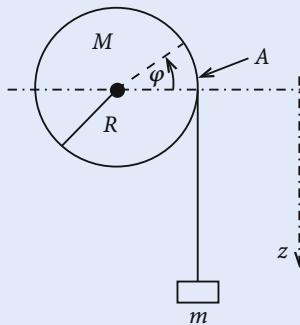


Abb. 1.41 Masse m an einem Faden, der an einer um ihre horizontale Achse drehbaren Walze befestigt ist

1. Finden Sie die Bewegungsgleichung des Systems für $0 \leq z \leq l$ und integrieren Sie diese mit der Anfangsbedingung, dass die Masse m zur Zeit $t = 0$ in Höhe der Walzenachse losgelassen wird.
2. Was lässt sich über den Bewegungsablauf im Bereich $l \leq z \leq R + l$ sagen, falls $M \gg m$ angenommen werden kann? Wie geht die Bewegung nach Erreichen des Tiefpunktes weiter?
3. Wie groß ist die Fadenspannung in den Bereichen $0 \leq z \leq l$ und $l \leq z \leq R + l$?

Aufgabe 1.2.26

Betrachten Sie die ebene Bewegung einer Hantel im Gravitationsfeld, das durch die potentielle Energie

$$V = -\gamma \frac{m}{r} \quad (\gamma > 0)$$

definiert ist, die eine Punktmasse m im Abstand r vom Feldzentrum P besitzt. Die Hantel besteht aus zwei Massenpunkten der gleichen Masse m , die durch eine masselose Stange der Länge $2a$ miteinander verbunden sind.

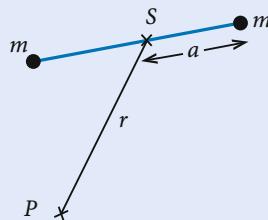


Abb. 1.42 Hantel aus zwei gleichen Massen in konstantem Abstand $2a$ im Schwerkraftfeld der Erde

1. Führen Sie neben r zwei geeignete Winkel als generalisierte Koordinaten ein, stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen der Hantel ab.
2. Finden Sie den Erhaltungssatz für den Gesamtdrehimpuls der Hantel. Definieren Sie Bahndrehimpuls und Eigendrehimpuls.
3. Entwickeln Sie die Lagrange-Gleichungen nach Potenzen von (a/r) bis zur Ordnung $(a/r)^2$. Zeigen Sie, dass für $(a/r) \ll 1$ die Bahnbewegung von der Eigendrehbewegung näherungsweise entkoppelt.
4. Zeigen Sie, dass die Bewegungen, bei denen der Schwerpunkt S gleichförmig auf einem Kreis mit Radius R um P umläuft und die Hantelstange stets in Richtung auf P zeigt bzw. tangential an diesem Kreis anliegt, mögliche spezielle Lösungen der Lagrange-Gleichungen sind. Wie groß sind dabei die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 bzw. ω_2 der Bewegungen von S ? (Genauigkeit bis zur $(a/r)^2$ sei ausreichend!) Ist der Unterschied zwischen ω_1 und ω_2 ein Widerspruch zu dem allgemeinen Satz, nach dem sich der Schwerpunkt eines Systems so bewegt, als ob die Gesamtmasse in ihm konzentriert ist und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen?

Aufgabe 1.2.27

Welche der beiden Lagrange-Funktionen

$$L_1 = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + q \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

$$L_2 = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - q \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{r}} t$$

beschreibt ein geladenes Teilchen (Masse m , Ladung q) im konstanten, homogenen Feld \mathbf{E} ?

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Wir lernen in diesem Abschnitt ein neues Prinzip der Klassischen Mechanik kennen, das sich den bisher diskutierten Prinzipien (Newton, d'Alembert) als zumindest äquivalent erweist. Die Gesetze der Klassischen Mechanik lassen sich aus zwei unterschiedlichen Typen von **Variationsprinzipien** ableiten. Beim

- ▶ 1) Differentialprinzip (d'Alembert)

wird ein momentaner Zustand des Systems mit kleinen (virtuellen) Verrückungen aus diesem Zustand verglichen. Das Resultat sind dann Bewegungsgleichungen. – Beim

- ▶ 2) Integralprinzip (Hamilton)

wird ein endliches Bahnelement zwischen festen Zeiten t_1 und t_2 mit kleinen (virtuellen) Abweichungen der gesamten Bahn von der tatsächlich durchlaufenen Bahn verglichen. Das Ergebnis sind auch hier Bewegungsgleichungen.

1.3.1 Formulierung des Prinzips

Zum besseren Verständnis des Integralprinzips rufen wir uns zunächst noch einmal zwei frühere Definitionen in Erinnerung. Unter dem

- ▶ Konfigurationsraum

verstehen wir den S -dimensionalen Raum, dessen Achsen durch die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_S gebildet werden. Jeder Punkt des Konfigurationsraums entspricht einem möglichen Zustand des **gesamten** Systems. Zwischen dem Konfigurationsraum und dem dreidimensionalen physikalischen Raum, in dem sich die Systemteilchen bewegen, besteht natürlich kein zwingender Zusammenhang. – Die Kurve im Konfigurationsraum, der der Zustand des Systems im Laufe der Zeit folgt, heißt

Konfigurationsbahn

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_S(t)) .$$

Auf ihr bewegt sich das System als Ganzes. Die Konfigurationsbahn braucht deshalb nicht die geringste Ähnlichkeit mit den tatsächlichen Teilchenbahnen zu haben.

Wir beschränken die folgenden Betrachtungen zunächst auf

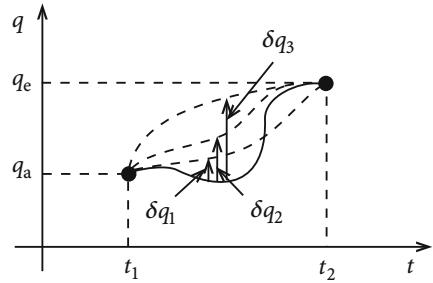
- ▶ holonome, konservative Systeme.

Verallgemeinerungen werden später diskutiert. – Setzt man in die Lagrange-Funktion die Konfigurationsbahn $\mathbf{q}(t)$ und deren Zeitableitung $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ein, so wird aus L eine reine Zeitfunktion:

$$L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) \equiv \tilde{L}(t) . \quad (1.116)$$

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Abb. 1.43 Eindimensionale Veranschaulichung der in Definition 1.3.1 eingeführten Konkurrenzschar von Konfigurationsbahnen



Wir definieren:

$$S\{\mathbf{q}(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(t) dt . \quad (1.117)$$

S hat die Dimension „Wirkung“ und ist von den Zeiten t_1, t_2 sowie der Bahn $\mathbf{q}(t)$ abhängig. Bei festen t_1, t_2 wird jeder Bahn $\mathbf{q}(t)$ eine **Zahl** $S\{\mathbf{q}(t)\}$ zugeordnet. Dies nennt man ein **Funktional**. Zu jedem Punkt der Systembahn gibt es eine Mannigfaltigkeit von virtuellen Verrückungen $\delta\mathbf{q}$, die längs der Bahn ein gewisses Kontinuum bilden. Man kann sich nun virtuelle Verrückungen so zusammengesetzt denken, dass sie ihrerseits eine stetig differenzierbare, „varierte“ Bahn darstellen. Das kann auf die unterschiedlichsten Weisen geschehen, sodass sich eine ganze Mannigfaltigkeit von „variierter“ Bahnen wird bilden lassen.

Definition 1.3.1

$$M \equiv \{\mathbf{q}(t) : \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_a ; \quad \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_e\} \quad (1.118)$$

ist die Menge von Konfigurationsbahnen (**Konkurrenzschar**) mit folgenden Eigenschaften:

1. Gleiche Endpunktzeiten t_1, t_2 , d. h. gleiche „Durchlaufzeiten“ für das System.
2. Jede Bahn ist durch virtuelle Verrückungen aus der tatsächlichen Bahn entstanden.
3. Die virtuellen Verrückungen der Endpunkte $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_e$ sind für alle Bahnen Null:

$$\delta\mathbf{q}_a = \delta\mathbf{q}_e = 0 . \quad (1.119)$$

Bild 1.43 zeigt eine eindimensionale Veranschaulichung der Konkurrenzschar M . Die durchgezogene Kurve stellt die „tatsächliche“ Bahn dar.

Wir definieren als

Wirkungsfunktional

$$S\{\boldsymbol{q}(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) dt, \quad (1.120)$$

mit dessen Hilfe das Hamilton'sche Prinzip formuliert wird:

► **Hamilton'sches Prinzip**

- A) Die Systembewegung erfolgt so, dass $S\{\boldsymbol{q}(t)\}$ auf der in (1.118) definierten Konkurrenzschar M für die tatsächliche Bahn **extremal** („stationär“) wird.
- B) Die Systembewegung erfolgt so, dass die Variation von S auf M bezüglich der tatsächlichen Bahn $\boldsymbol{q}(t)$ verschwindet:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) dt \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.121)$$

A) und B) sind natürlich äquivalente Aussagen. Wie man die Variation in (1.121) explizit ausführt, werden wir im nächsten Abschnitt kennen lernen. Das Ergebnis werden die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in der Form (1.36) sein. Das Hamilton'sche Prinzip besitzt einige bemerkenswerte Vorzüge:

1. Es handelt sich um eine sehr „elegante“ Formulierung, die in knappster Form die gesamte Klassische Mechanik konservativer, holonomer Systeme enthält.
2. Das Prinzip ist auch auf nicht typisch mechanische Systeme anwendbar, ist damit eigentlich ein der Mechanik übergeordnetes Prinzip.
3. Es ist unabhängig vom Koordinatensystem, in dem L ausgedrückt wird.

Wir zeigen als Nächstes die

► **Äquivalenz zum d'Alembert'schen Prinzip.**

Letzteres haben wir in (1.20) formuliert:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{K}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0. \quad (1.122)$$

Die virtuellen Verrückungen $\delta \boldsymbol{r}_i$ sind differenzierbare Zeitfunktionen:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i) - \frac{1}{2} \delta (\dot{\boldsymbol{r}}_i^2).$$

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Wir erinnern uns, dass wir „rechentechnisch“ mit dem Symbol „ δ “ genauso umzugehen haben wie mit dem totalen Differential „ d “. Wir integrieren nun (1.122) zwischen zwei festen Zeiten t_1 und t_2 :

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^N (m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{K}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - \frac{m_i}{2} \delta (\dot{\mathbf{r}}_i^2) - \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right] \right) dt = 0 . \end{aligned}$$

Der erste Summand lässt sich direkt integrieren:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) dt = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 .$$

Dieser Ausdruck verschwindet, da wir nur solche Bahnen zur Variation zulassen, die an den Endpunkten mit der tatsächlichen Bahn übereinstimmen:

$$\delta \mathbf{r}_i \Big|_{t=t_1, t_2} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \Big|_{t=t_1, t_2} = 0 . \quad (1.123)$$

Es bleibt also vom d'Alembert'schen Prinzip:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\delta \left(\frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \right) + \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right] dt = 0 . \quad (1.124)$$

Mit Hilfe der Transformationsformeln

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_S, t) , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

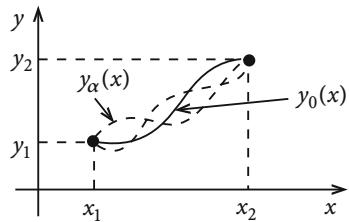
können wir diesen Ausdruck auf generalisierte Koordinaten umschreiben. Nach (1.26) und (1.29) gilt für ein konservatives System:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j = - \sum_{j=1}^S \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta V .$$

Damit lautet (1.124):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 . \quad (1.125)$$

Abb. 1.44 Eindimensionale Veranschaulichung der zum Variationsproblem zugelassenen Schar von Bahnen



Für die letzten beiden Beziehungen haben wir ausgenutzt, dass die Zeiten nicht mitvariieren ($\delta t = 0$), sodass wir z. B. die Variation δ vor das Integral ziehen konnten.

Gleichung (1.125) ist das **Hamilton'sche Prinzip**. Für alle in der Natur ablaufenden Prozesse nimmt das Zeitintegral der Lagrange-Funktion einen Extremwert gegenüber allen virtuellen Nachbarbahnen an, die zwischen denselben Zeitpunkten t_1 und t_2 und denselben Endkonfigurationen q_a, q_e durchlaufen werden.

Das Hamilton'sche Prinzip lässt sich nach den Methoden der Variationsrechnung in ein System von Differentialgleichungen überführen. Wir wollen uns deshalb im nächsten Abschnitt etwas mit der Variationsrechnung beschäftigen.

1.3.2 Elemente der Variationsrechnung

Wie können wir das Hamilton'sche Prinzip konkret ausnutzen, d. h., wie können wir vom Wirkungsfunktional $S\{q(t)\}$ auf die „stationären“ Bahn schließen? Die Aufgabe, die Kurve zu finden, für die ein bestimmtes Linienintegral extremal wird, stellt ein typisches

- ▶ **Variationsproblem**

dar. Wir wollen die Grundzüge zunächst an einem **eindimensionalen Problem** erläutern. Wir definieren als

Konkurrenzschar,

$M \equiv \{y(x); \text{mindestens zweimal differenzierbar}$

mit $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2\}$,

und auf dieser das Funktional:

$$J\{y(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{f}(x) dx , \quad (1.126)$$

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

wobei $y' = dy/dx$ sein soll und $f(u, v, w)$ eine differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen darstellt.

Das Problem besteht darin, herauszufinden, für welches $y(x)$ das Funktional $J\{y(x)\}$ extremal, d. h. „stationär“ wird. Diese Fragestellung erinnert an eine elementare Extremwertaufgabe und wird auch entsprechend behandelt. Wir charakterisieren die in Frage kommenden Kurven $y(x)$ aus M durch einen *Scharparameter* α , der so gewählt sein möge, dass

$$y_{\alpha=0}(x) = y_0(x)$$

die gesuchte extreme Bahn ist. Dies gelingt z. B. durch die folgende *Parameterdarstellung*:

$$y_\alpha(x) = y_0(x) + \gamma_\alpha(x). \quad (1.127)$$

$\gamma_\alpha(x)$ ist dabei eine „fast beliebige“ Funktion, die hinreichend oft differenzierbar sein soll und

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha(x_1) &= \gamma_\alpha(x_2) \equiv 0 & \forall \alpha, \\ \gamma_{\alpha=0}(x) &\equiv 0 & \forall x \end{aligned} \quad (1.128)$$

erfüllen muss. Eine mögliche, sehr einfache Wahl für $\gamma_\alpha(x)$ wäre z. B.

$$\gamma_\alpha(x) = \alpha \eta(x) \quad \text{mit} \quad \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Für festes x ist $\gamma_\alpha(x)$ und damit auch $y_\alpha(x)$ eine ganz normale Funktion von α , die man in eine Taylor-Reihe entwickeln kann:

$$\begin{aligned} y_\alpha(x) &= \alpha \left(\frac{\partial y_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{\partial^2 y_\alpha(x)}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=0} + \dots, \\ y_\alpha(x) &= y_0(x) + \alpha \left(\frac{\partial y_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} + \dots. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen als

- ▶ Variation der Bahn $y_\alpha(x)$

die *Verschiebung* δy der Bahn, die bei einer Veränderung des Parameters α von $\alpha = 0$ auf $d\alpha$ einsetzt:

$$\delta y = y_{d\alpha}(x) - y_0(x) = d\alpha \left(\frac{\partial y_\alpha(x)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}. \quad (1.129)$$

Diese Verschiebung wird bei festgehaltenem x durchgeführt, erinnert deshalb an eine virtuelle Verrückung, die bei festgehaltener Zeit stattfindet.

Ganz analog definieren wir die

Variation des Funktional J{y(x)}

$$\begin{aligned}\delta J &= J\{y_{d\alpha}(x)\} - J\{y_0(x)\} = \left(\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx (f(x, y_{d\alpha}, y'_{d\alpha}) - f(x, y_0, y'_0)) .\end{aligned}\quad (1.130)$$

Wenn es gelingt, ein $y_0(x)$ so zu bestimmen, dass $J(\alpha)$ an der Stelle $\alpha = 0$ für alle $y_\alpha(x)$ extremal wird, dann ist $y_0(x)$ offensichtlich die gesuchte *stationäre* Bahn. Die **Extremwertbedingung** lautet also:

Wähle $y_0(x)$ so, dass

$$\left(\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 \quad \text{für beliebige } y_\alpha(x)$$

gilt. Dies bedeutet nach (1.130):

$$\text{„stationäre“ Bahn} \Leftrightarrow \delta J \stackrel{!}{=} 0 .\quad (1.131)$$

Diese Vorschrift können wir nun weiter auswerten:

$$\frac{d}{d\alpha} J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) .$$

Die Endpunkte x_1, x_2 , sowie überhaupt die Variable x , werden nicht mitvariert. Die α -Differentiationen können also in den Integranden hineingezogen werden:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} .$$

Wegen (1.128) verschwindet der erste Summand. Es bleibt:

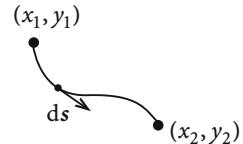
$$\frac{d}{d\alpha} J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} ,$$

oder wegen (1.129) und (1.130):

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y .$$

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Abb. 1.45 Zur Berechnung der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene mit Hilfe der Variationstechnik



Die Variation δy ist bis auf das Verschwinden an den Integralgrenzen beliebig. Deshalb ist die Forderung (1.131) nur dann erfüllbar, wenn die

Euler'sche Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (1.132)$$

erfüllt ist. – Wir schließen einige Bemerkungen an:

1. Die Forderung $\delta J = 0$ ist durch Minima, Maxima oder Wendepunkte realisierbar. Die Entscheidung, was wirklich vorliegt, liefert die zweite Variation $\delta^2 J$. Dies ist für uns hier jedoch uninteressant, da das Hamilton'sche Prinzip nur $\delta S = 0$ fordert. S ist dabei meistens minimal, in einigen Fällen jedoch auch maximal.
2. Die Euler'sche Gleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die ausgeschrieben

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0 \quad (1.133)$$

lautet. $y(x)$ muss also mindestens zweimal differenzierbar sein.

3. Man könnte natürlich fragen, ob nicht auch eine nur einmal differenzierbare Funktion $y(x)$ das Funktional $J\{y(x)\}$ extremal werden lassen kann. Diese Frage kann verneint werden, was jedoch als nicht-triviales Problem der Funktionalanalysis nicht einfach zu beweisen ist.

Wir üben den Formalismus mit drei typischen **Anwendungsbeispielen**:

■ 1) Kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene

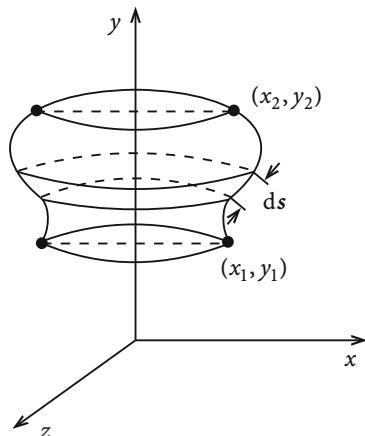
Für das Element der Bogenlänge in der xy -Ebene gilt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx .$$

Die gesamte Bahnlänge ergibt sich dann zu:

$$J = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx . \quad (1.134)$$

Abb. 1.46 Zur Berechnung der Verbindungsline zwischen zwei Punkten der Ebene, die bei Rotation um die y -Achse zu einer minimalen Mantelfläche des entstehenden Hohlkörpers führt



Wir suchen die kürzeste Verbindung und damit das Minimum von J , für das $\delta J = 0$ als notwendige Bedingung erfüllt werden muss. Dies entspricht der obigen Aufgabenstellung. Die Euler'sche Gleichung (1.132) muss für

$$f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

aufgestellt werden. Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

ist

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const}$$

zu fordern. Dies bedeutet $y' = a = \text{const}$. Also ist die kürzeste Verbindung eine Gerade:

$$y(x) = ax + b . \quad (1.135)$$

Die Konstanten a, b sind durch die Forderung festgelegt, dass $y(x)$ durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ geht.

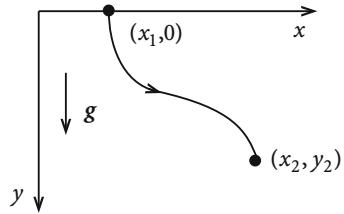
■ 2) Minimale Rotationsfläche

Wir fragen uns, wie die Verbindungsline zwischen den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) beschaffen sein muss, damit die bei Rotation um die y -Achse entstehende Fläche minimal wird. Die Streifenfläche der Breite ds beträgt

$$2\pi x \, ds = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} \, dx .$$

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Abb. 1.47 Geometrie zum Brachystochronenproblem



Dies führt zu der Gesamtfläche

$$J = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} \, dx . \quad (1.136)$$

Wir fordern $\delta J = 0$, sodass die Funktion

$$f(x, y, y') = x \sqrt{1 + y'^2}$$

die Euler'sche Gleichung (1.132) erfüllen muss. Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

bedeutet dies:

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a = \text{const} \Leftrightarrow y' = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} .$$

Bei minimaler Rotationsfläche gilt demnach:

$$y(x) = a \operatorname{arccosh} \left(\frac{x}{a} \right) + b \Leftrightarrow x = a \cosh \left(\frac{y - b}{a} \right) . \quad (1.137)$$

Die Konstanten a und b sind durch die Endpunkte eindeutig festgelegt.

■ 3) Brachystochronenproblem

Auf welchem Weg $y(x)$ gelangt ein reibungslos gleitender Massenpunkt m unter dem Einfluss der Schwerkraft am schnellsten von $(x_1, 0)$ nach (x_2, y_2) ? Die Anfangsgeschwindigkeit sei Null:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \Leftrightarrow \delta J \stackrel{!}{=} 0 .$$

Die Geschwindigkeit v entnehmen wir dem Energiesatz:

$$\frac{m}{2} v^2 - mg y = \text{const} = \frac{m}{2} v_1^2 - mg y_1 = 0 .$$

Daraus folgt:

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Mit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$ bleibt zu berechnen:

$$\delta \int \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.138)$$

Die Funktion

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

muss also die Euler'sche Gleichung (1.132) erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \hat{f}(y, y'), \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} y' + \frac{\partial \hat{f}}{\partial y'} y'' \\ &= -\frac{y'^2}{2y^{3/2}\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2 y''}{(1+y'^2)^{3/2}\sqrt{y}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Euler'sche Gleichung führt zu:

$$(1+y'^2) = -2y y'' + y'^2 + \frac{2y y'^2 y''}{1+y'^2}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit:

$$1+y'^2+2y y''=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}y(1+y'^2)=0.$$

Es folgt mit der später festzulegenden Konstanten a :

$$y'^2 = \frac{a-y}{y}; \quad dx = \sqrt{\frac{y}{a-y}} dy.$$

Wir substituieren

$$y = a \sin^2 \varphi \Rightarrow dy = 2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

und integrieren damit die obige Gleichung:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \int_0^y d\bar{y} \sqrt{\frac{\bar{y}}{a - \bar{y}}} = 2a \int_0^\varphi d\bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \frac{\sin \bar{\varphi}}{\cos \bar{\varphi}} \\ &= 2a \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) . \end{aligned}$$

Wir haben also gefunden:

$$\begin{aligned} x &= a \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + x_1 , \\ y &= a \sin^2 \varphi = \frac{a}{2} (1 - \cos 2\varphi) . \end{aligned}$$

Wir setzen noch

$$R = \frac{a}{2} ; \quad x_1 = R \pi ; \quad \psi = 2\varphi + \pi . \quad (1.139)$$

Damit folgt:

$$x = R(\psi + \sin \psi) ; \quad y = R(1 + \cos \psi) . \quad (1.140)$$

Der Vergleich mit (1.60) zeigt, dass die gesuchte Kurve eine Zykloide darstellt, die am Anfangspunkt $(x_1, 0)$ eine Spitze hat.

1.3.3 Lagrange-Gleichungen

Wir haben zunächst die Variationstheorie des letzten Abschnitts auf mehrere Variablen zu verallgemeinern. Aus der Forderung

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} dx f(x, y_1(x), \dots, y_s(x), y'_1(x), \dots, y'_s(x)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.141)$$

ist die extreme Bahn $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_s(x))$ abzuleiten. Für jede einzelne Komponente definieren wir eine *Konkurrenzschar* M_i :

$M_i = \{y_i(x) ;$ mindestens zweimal differenzierbar
mit $y_i(x_1) = y_{i1}$ und $y_i(x_2) = y_{i2}\}$.

Wir benutzen auch jetzt eine *Parameterdarstellung* für die Komponentenfunktion $y_i(x)$:

$$y_{i\alpha}(x) = y_{i0}(x) + \gamma_{i\alpha}(x) , \quad i = 1, 2, \dots, s . \quad (1.142)$$

Dabei sind $y_{i0}(x)$ die Lösungen des Extremwertproblems und $y_{i\alpha}(x)$ „fast beliebige“, hinreichend oft differenzierbare Funktionen mit

$$\begin{aligned} y_{i\alpha}(x_1) &= y_{i\alpha}(x_2) = 0 & \forall \alpha, i, \\ y_{i\alpha=0}(x) &= 0 & \forall x, i. \end{aligned} \quad (1.143)$$

Die Variationen δy_i der Bahn-Komponenten,

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_{i\alpha}}{\partial \alpha} \right)_{x, \alpha=0} d\alpha, \quad (1.144)$$

und die Variation δJ des Funktionalen,

$$\delta J = \left(\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha, \quad (1.145)$$

sind analog zu den Spezialfällen ($S = 1$) (1.129) bzw. (1.130) definiert. Eine partielle Integration des zweiten Terms in (1.145) ergibt:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial \alpha}.$$

Der erste Summand verschwindet wegen (1.143), sodass für (1.145) bleibt:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.146)$$

Nach Voraussetzung sollen die δy_i bis auf das Verschwinden an den Integrationsgrenzen beliebig wählbar sein. Gleichung (1.141) ist also genau dann erfüllt, wenn die

Euler-Lagrange-Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (1.147)$$

gelten. Wir kommen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück, nämlich der Auswertung des Hamilton'schen Prinzips (1.121). Wir substituieren dazu in (1.147)

$$x \Rightarrow t; \quad y_i \Rightarrow q_i; \quad y'_i \Rightarrow \dot{q}_i; \quad f(x, y, y') \Rightarrow L(t, q, \dot{q})$$

und erhalten dann unmittelbar aus dem Hamilton'schen Prinzip die

Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, S . \quad (1.148)$$

Wir erinnern uns noch einmal an die Voraussetzungen, die zur Ableitung dieser Gleichungen notwendig waren. Sie gelten für **konservative Systeme**, damit die Lagrange-Funktion $L = T - V$ definierbar ist, **mit holonomen Zwangsbedingungen**, sodass die δq_i voneinander unabhängig sind. Unter diesen Voraussetzungen sind also d'Alembert'sches und Hamilton'sches Prinzip äquivalent!

Wir wollen diese Voraussetzungen etwas lockern. Was folgt aus dem Hamilton'schen Prinzip für

konservative Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen in differentieller Form

$$\sum_{m=1}^j a_{im} \dot{q}_m + b_{it} = 0 , \quad i = 1, \dots, p \quad (1.149)$$

Die Lagrange-Funktion $L = T - V$ ist in einem solchen Fall zwar definierbar, jedoch ist der Schluss von (1.146) auf (1.147) wegen der nicht-holonomen Zwangsbedingungen nicht erlaubt. Das Hamilton'sche Prinzip (1.121) hat zunächst nur

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{m=1}^j \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0 \quad (1.150)$$

zur Folge (1.146). Wir schreiben die Zwangsbedingungen (1.149) auf virtuelle Verrückungen ($\delta t = 0$) um (vgl. (1.96))

$$\sum_{m=1}^j a_{im} \delta q_m = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, p$$

und koppeln sie über Lagrange'sche Multiplikatoren λ_i ,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \sum_{m=1}^j a_{im} \delta q_m \right) = 0 ,$$

an die Gleichung (1.150) an:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{m=1}^j \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \right) \delta q_m = 0. \quad (1.151)$$

Mit exakt denselben Überlegungen wie im Anschluss an (1.99) können wir die Multiplikatoren λ_i so wählen, dass jeder Summand für sich in (1.151) bereits Null ist. Wegen der Zwangsbedingungen (1.149) sind nur $j-p$ Koordinaten frei wählbar. Deswegen legen wir fest:

$$\begin{aligned} q_m : \quad m &= 1, \dots, j-p && \text{unabhängig ,} \\ q_m : \quad m &= j-p+1, \dots, j && \text{abhängig .} \end{aligned}$$

Die p Multiplikatoren λ_i werden dann so gewählt, dass die Klammer in der Summe von (1.151) für die „abhängigen“ q_m gleich Null ist. Dies bedeutet dann insgesamt:

Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 1. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{im} \quad (1.152)$$

Zusammen mit (1.149) sind das $(j+p)$ Gleichungen zur Bestimmung von j Koordinaten q_m und p Multiplikatoren λ_i . Auch für konservative Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen erweisen sich damit d'Alembert'sches und Hamilton'sches Prinzip als äquivalent.

1.3.4 Erweiterung des Hamilton'schen Prinzips

Wir wollen die bisherigen Voraussetzungen,

- ▶ konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen,

weiter abschwächen und das Hamilton'sche Prinzip so modifizieren, dass es auch für

- ▶ nicht-konservative Systeme

anwendbar wird. Wir lassen jetzt also zu, dass die *treibenden* Kräfte K_i nicht von einem skalaren Potential ableitbar sind. Das erweiterte Prinzip sollte natürlich so formuliert sein, dass es im Spezialfall konservativer Systeme mit (1.121) übereinstimmt. Wir definieren dazu als

Wirkungsfunktional

$$\tilde{S}\{\mathbf{q}(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} (T - W) dt , \quad (1.153)$$

$$W = - \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{r}_i . \quad (1.154)$$

Das *erweiterte* Hamilton'sche Prinzip besagt, dass die „tatsächliche“ Bahn aus der Forderung

$$\delta \tilde{S} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.155)$$

auf der Konkurrenzschar

$$M = \{\mathbf{q}(t) : \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_a, \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_e\} \quad (1.156)$$

abgeleitet werden kann. Die Menge M der zur Variation zugelassenen Bahnen ist genau wie in (1.118) definiert. Da die Zeit nicht mitvariiert wird, können wir statt (1.155) auch

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - W) dt \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.157)$$

schreiben. Das erweiterte Hamilton'sche Prinzip besagt also, dass die Variation des Zeitintegrals über die Summe aus kinetischer Energie und der bei der Variation der Bahn anfallenden virtuellen Arbeit Null sein muss. Wir führen wie in (1.26) generalisierte Kraftkomponenten Q_j ein:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (1.158)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \Rightarrow d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt \\ \Rightarrow \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\delta t = 0) \end{aligned}$$

folgt für die virtuelle Arbeit:

$$-\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^s \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j . \quad (1.159)$$

Für den Beitrag der kinetischen Energie T finden wir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt ,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \delta q_j \right) dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta q_j|_{t_1}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt .$$

Dies bedeutet:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt . \quad (1.160)$$

Dies setzen wir zusammen mit (1.159) in (1.157) ein:

$$\sum_{j=1}^S \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0 .$$

Wegen der holonomen Zwangsbedingungen sind die δq_j unabhängig voneinander. Also folgt mit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j , \quad j = 1, 2, \dots, S \quad (1.161)$$

exakt dasselbe Ergebnis wie (1.33), das wir mit Hilfe des d'Alembert'schen Prinzips gefunden hatten.

Wir untersuchen zum Schluss noch den Spezialfall des konservativen Systems:

$$K_i = -\nabla_i V \Rightarrow Q_j = -\sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} .$$

Für die virtuelle Arbeit δW ergibt sich damit:

$$\delta W = -\sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^S \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = \delta V .$$

Die Forderung (1.157) lautet somit:

$$\delta \tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \delta S \stackrel{!}{=} 0 .$$

Das *erweiterte* Hamilton'sche Prinzip (1.155) ist also für konservative Systeme mit dem ursprünglichen Prinzip (1.121) identisch.

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Wir haben damit gezeigt, dass alle Aussagen des d'Alembert'schen Prinzips in gleicher Weise auch aus dem Hamilton'schen Integralprinzip folgen. Die beiden Prinzipien sind also völlig äquivalent.

1.3.5 Aufgaben

Aufgabe 1.3.1

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung die kürzeste Verbindung zwischen einem gegebenen Punkt A der xy -Ebene und einer nicht durch A laufenden, zur y -Achse parallelen Geraden g .

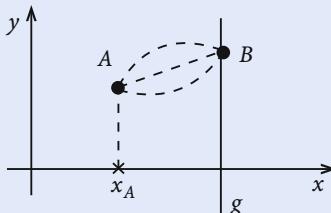


Abb. 1.48 Anordnung zur Bestimmung des kürzesten Abstands zwischen dem Punkt A der xy -Ebene und einer Geraden g

1. Zeigen Sie, dass die kürzeste Verbindung zwischen A und einem festen Punkt B der Geraden g die Strecke \overline{AB} ist.
2. Untersuchen Sie dann **alle** Strecken von A zu irgendwelchen Punkten auf g .

Aufgabe 1.3.2

Bestimmen Sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 auf einem Zylindermantel!

Aufgabe 1.3.3

Es wird die Auslenkung $y(x, t)$ einer schwingenden Saite mit der Massenverteilung $m(x)$ ($= \frac{dm}{dx}(x)$) gesucht.

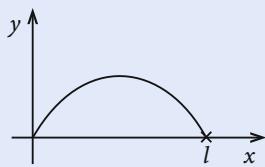


Abb. 1.49 Auslenkung einer schwingenden Saite

1. Wie lautet die kinetische Energie T ?
2. Finden Sie einen Ausdruck für die potentielle Energie V , wenn diese proportional zur beim Schwingen auftretenden Verlängerung der Saite ist.
3. Leiten Sie für kleine Auslenkungen der Saite mit Hilfe des Hamilton'schen Prinzips eine Differentialgleichung für $y(x, t)$ ab.

Aufgabe 1.3.4

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Schwerefeld der Erde ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$). Es führt dabei eine eindimensionale Bewegung $z = z(t)$ aus. Berechnen Sie das Wirkungsfunktional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(z, \dot{z}) dt$$

für die Bahn

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + f(t).$$

Dabei sei $f(t)$ eine an sich beliebige, stetig differenzierbare Funktion mit $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Zeigen Sie, dass S für $f(t) \equiv 0$ minimal wird!

Aufgabe 1.3.5

Gesucht sei die Funktion $y(x)$, für die das Funktional

$$J\{y(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

1.3 Das Hamilton'sche Prinzip

extremal wird. Zeigen Sie, dass für den Fall, dass f nicht explizit von x abhängt ($f = f(y, y')$), die Lösung

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const}$$

befolgt.

Aufgabe 1.3.6

Ein Seil der Länge l liege in der xy -Ebene und sei bei $P_1 = (-d, 0)$ und $P_2 = (d, 0)$ befestigt. Für welche Lage des Seils wird die Fläche F zwischen Seil und der x -Achse maximal?

Hinweis: Koppeln Sie die Zwangsbedingung mit einem Lagrange'schen Multiplikator λ an die Variationsaufgabe, d. h. untersuchen Sie

$$\delta(F - \lambda l) \stackrel{!}{=} 0.$$

Das Resultat von Aufgabe 1.3.5 könnte hilfreich sein!

Aufgabe 1.3.7

Ein Hochspannungskabel hänge zwischen zwei Masten der Höhe H im Abstand A und besitze eine konstante Massendichte

$$\frac{dm}{ds} = \alpha = \text{const} \quad (\text{ds: Linienelement des Kabels})$$

Aufgrund der Schwerkraft ($\propto g$) tendiert das Kabel dazu durchzuhängen. Wäre die Kabellänge L gerade gleich dem Mastenabstand A , so würden starke Seitenspannungen auf die beiden Masten wirken, wodurch das System gegenüber weiteren Belastungen, z. B. durch äußere Witterungsbedingungen, instabil würde. Man wird also von vorneherein $L > A$ zu wählen haben.

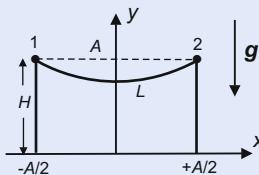


Abb. 1.50 Hochspannungskabel zwischen zwei Masten der Höhe H im Abstand A im Schwerefeld der Erde

1. Welche Kurvenform $y(x)$ wird das Kabel bei gegebenem $L > A$ einnehmen, wenn man davon ausgeht, dass diese minimaler potentieller Energie entspricht?
2. Wie bestimmt sich die optimale Kabellänge?

1.4 Erhaltungssätze

Bei der Bewegung eines mechanischen Systems ändern sich die $2S$ Größen q_j, \dot{q}_j ($j = 1, 2, \dots, S$) im Allgemeinen mit der Zeit. Man findet jedoch bisweilen gewisse Funktionen F_r der q_j, \dot{q}_j , die bei der Bewegung konstant bleiben und nur von den Anfangsbedingungen des Systems bestimmt sind. Unter diesen Funktionen F_r gibt es einige, deren Konstanz mit den Grundeigenschaften von Zeit und Raum (Homogenität, Isotropie) zusammenhängen. Man nennt

- ▶ F_r : Integrale der Bewegung, $r = 1, 2, \dots,$

falls es sich um Funktionen der q_j, \dot{q}_j (**nicht** der \ddot{q}_j) handelt, die für die gesamte Systembahn einen konstanten Wert c_r haben:

$$F_r = F_r(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) = c_r, \quad r = 1, 2, \dots. \quad (1.162)$$

Ein System mit S Freiheitsgraden wird durch S Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben, deren Lösung die Kenntnis von $2S$ Anfangsbedingungen erfordert. Sollten $2S$ Integrale der Bewegung bekannt sein, so wäre demnach das Problem bereits gelöst:

$$q_j = q_j(c_1, c_2, \dots, c_{2S}, t), \quad j = 1, 2, \dots, S.$$

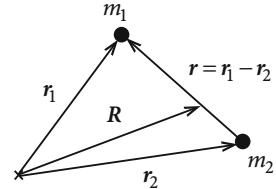
In der Regel werden nicht alle $2S$ der c_r vorliegen. Jedoch kann bereits die Kenntnis einiger dieser c_r viel über die physikalischen Eigenschaften des Systems erfahren lassen und die Integration der Bewegungsgleichungen sehr stark vereinfachen. Es empfiehlt sich deshalb stets, vor der expliziten Auswertung eines physikalischen Problems so viele Integrale der Bewegung wie möglich aufzuspüren.

Gewisse Integrale der Bewegung ergeben sich unmittelbar im Zusammenhang mit den in (1.53) eingeführten **zyklischen Koordinaten**. Die zyklischen Koordinaten q_j zugeordneten **generalisierten Impulse** p_j sind erste Integrale der Bewegung. Man sollte die Koordinatenwahl deshalb stets so treffen, dass möglichst viele q_j zyklisch sind. Wir erläutern das an einem Beispiel:

- ▶ Zweikörperproblem

1.4 Erhaltungssätze

Abb. 1.51 Schwerpunkt- und Relativkoordinaten beim Zweikörperproblem



Bei einer nur vom Abstand abhängigen Paarwechselwirkung

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

empfiehlt sich die Aufspaltung in eine Relativ- und Schwerpunktbewegung (s. Abschn. 3.2, Bd. 1):

$$\text{Gesamtmasse: } M = m_1 + m_2 ,$$

$$\text{reduzierte Masse: } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} ,$$

$$\text{Schwerpunkt: } \mathbf{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) \equiv (X, Y, Z) ,$$

$$\text{Relativkoordinaten: } \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = r (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) .$$

Die Relativbewegung erfolgt so, als ob sich die reduzierte Masse μ im Zentraalfeld $V(\mathbf{r}) = V(r)$ bewegt (s. Abschn. 3.2.1, Bd. 1). Mit den generalisierten Koordinaten

$$q_1 = X, \quad q_2 = Y, \quad q_3 = Z, \quad q_4 = r, \quad q_5 = \vartheta, \quad q_6 = \varphi \quad (1.163)$$

lautet deshalb die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{M}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{\mu}{2} (\dot{q}_4^2 + q_4^2 \dot{q}_5^2 + q_4^2 \sin^2 q_5 \dot{q}_6^2) - V(q_4) . \quad (1.164)$$

Man erkennt sofort, dass

$$q_1, q_2, q_3, q_6$$

zyklisch sind. Dies ergibt unmittelbar vier Integrale der Bewegung. Die ersten drei,

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = M \dot{q}_1 = M \dot{X} = \text{const} ,$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = M \dot{q}_2 = M \dot{Y} = \text{const} ,$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = M \dot{q}_3 = M \dot{Z} = \text{const} ,$$

ergeben zusammengefasst den Schwerpunktsatz für abgeschlossene Systeme ((3.48), Bd. 1):

$$\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{const} . \quad (1.165)$$

Das vierte Integral der Bewegung:

$$p_6 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_6} = \mu q_4^2 \sin^2 q_5 \dot{q}_6 = \mu r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = L_r^{(z)} = \text{const}$$

betrifft die z -Komponente des Relativ-Drehimpulses. Da keine Raumrichtung besonders ausgezeichnet ist, können wir sogar folgern:

$$L_r = \mathbf{const} . \quad (1.166)$$

Hätten wir das Problem in kartesischen Koordinaten formuliert,

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right] ,$$

so wäre keine Koordinate zyklisch, obwohl sich natürlich an dem System nichts geändert hat. Die Erhaltungssätze (1.165) und (1.166) gelten selbstverständlich weiterhin, allerdings ist das nun wesentlich schwieriger zu erkennen.

Im Rahmen der Newton-Formulierung der Klassischen Mechanik (s. Band 1) haben wir eine Reihe von physikalisch fundamentalen Erhaltungssätzen (für Energie, für Impuls, für Drehimpuls usw.) kennen gelernt. Diese finden sich natürlich auch in der Lagrange'schen Formulierung wieder. Sie haben dann jedoch bisweilen eine etwas andere Gestalt, und es ergeben sich neue Gesichtspunkte bei ihrer Interpretation. Wir werden sie in den folgenden Abschnitten als unmittelbare Konsequenzen fundamentaler Symmetrien des mechanischen Systems deuten können (**Noether'sche Theoreme**). Dabei setzen wir, ohne es jeweils explizit noch einmal zu erwähnen,

- ▶ konservative, holonome Systeme

voraus.

1.4.1 Homogenität der Zeit

Wir nennen ein System *zeitlich homogen*, wenn sich seine Eigenschaften als invariant gegenüber Zeittranslationen erweisen. Die Ergebnisse von unter gleichen Randbedingungen durchgeföhrten Messungen sind unabhängig vom Zeitpunkt der Messung. Die Gesamtheit aller möglichen Bahnen des Systems, die zu einer bestimmten Zeit beginnen, ist nicht von

1.4 Erhaltungssätze

der Wahl dieser Anfangszeit abhängig, sondern nur von der Anfangskonfiguration \mathbf{q}_a . Ist $\mathbf{q}(t)$ die Konfigurationsbahn, die das System zwischen den Zeiten t_a und t_e durchläuft, mit den Anfangs- und Endkonfigurationen

$$\mathbf{q}(t_a) = \mathbf{q}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{q}(t_e) = \mathbf{q}_e ,$$

so erfasst die „zeitlich verschobene“ Konfigurationsbahn zwischen $t_a + \Delta t$ und $t_e + \Delta t$ bei zeitlicher Homogenität exakt dieselben Punkte des Konfigurationsraums, wenn nur die Anfangs- und Endkonfigurationen dieselben sind:

$$\mathbf{q}(t_a + \Delta t) = \mathbf{q}_a ; \quad \mathbf{q}(t_e + \Delta t) = \mathbf{q}_e .$$

Dies bedeutet aber, dass die Lagrange-Funktion L des Systems, aus der wir die Bahn deselben ableiten, nicht explizit von der Zeit abhängen kann:

$$\text{zeitliche Homogenität} \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 . \quad (1.167)$$

Das wollen wir nun etwas genauer analysieren. Es folgt zunächst für das totale Zeitdifferential

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^s \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j ,$$

wobei wir im zweiten Schritt die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (1.36) ausgenutzt haben:

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = 0 . \quad (1.168)$$

$\partial L / \partial \dot{q}_j$ ist nach (1.52) der generalisierte Impuls p_j . Wir definieren an dieser Stelle bereits die so genannte

Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L , \quad (1.169)$$

die uns im nächsten Abschnitt noch ausführlich beschäftigen wird. Sie stellt offensichtlich nach (1.168) bei zeitlicher Homogenität des Systems ein Integral der Bewegung dar:

$$\begin{aligned} \text{Homogenität der Zeit} &\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 , \\ \text{„Systembewegung so, dass“ } H &= \text{const} . \end{aligned} \quad (1.170)$$

Wie lässt sich dieser Erhaltungssatz interpretieren? Setzen wir skleronome Zwangsbedingungen voraus, oder genauer, Transformationsformeln $\mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$ der Teilchenkoordinaten, die **nicht** explizit von der Zeit abhängen,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

so ist nach (1.37) und (1.39) die kinetische Energie T eine homogen quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j , d. h.

$$T(a\dot{q}_1, \dots, a\dot{q}_S) \equiv a^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S).$$

Dies bedeutet für beliebige reelle a :

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial (a\dot{q}_j)} \dot{q}_j = 2a T$$

oder speziell für $a = 1$:

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T. \quad (1.171)$$

Da das betrachtete System nach Voraussetzung auch konservativ ist, gilt zusätzlich

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, \dots, S. \quad (1.172)$$

Es folgt somit

$$2T = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_j p_j \dot{q}_j.$$

In diesem Fall gilt also für die Hamilton-Funktion:

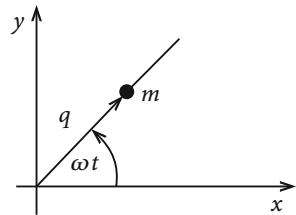
$$H = T + V = E \quad \text{Gesamtenergie}.$$

Gleichung (1.170) besagt dann, dass aus der Homogenität der Zeit der Energiesatz für holonom-skleronome, konservative Systeme folgt.

Warum mussten hier *skleronome Zwangsbedingungen* vorausgesetzt werden? Wir erinnern uns an den charakteristischen Unterschied zwischen der Newton'schen und der Lagrange'schen Formulierung der Mechanik. In der Newton-Mechanik erscheinen alle Kräfte, einschließlich der Zwangskräfte, in den Bewegungsgleichungen, während in der Lagrange-Mechanik die Zwangskräfte eliminiert sind. Nach dem d'Alembert'schen Prinzip leisten Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit. Virtuelle unterscheiden sich von

1.4 Erhaltungssätze

Abb. 1.52 Gleitende Perle auf rotierendem Draht



tatsächlichen Verrückungen durch die Zusatzforderung $\delta t = 0$. Bei skleronomen Zwangsbedingungen ist deshalb *virtuell* = *tatsächlich*, nicht aber bei rheonomen Zwangsbedingungen. Im letzteren Fall können Zwangskräfte *tatsächlich* Arbeit leisten, die dann aber nicht in H erscheint, da die Zwangskräfte im Lagrange-Formalismus eliminiert sind. Der Erhaltungssatz gilt dann nur in der Form (1.170) $H = \text{const}$, wobei H aber nicht als Gesamtenergie interpretiert werden darf.

Wir demonstrieren den Sachverhalt am Beispiel 2) aus Abschn. 1.2.2, der **gleitenden Perle auf einem rotierenden Draht**. Es liegt neben der holonom-skleronomen Zwangsbedingung

$$z = 0$$

auch eine holonom-rheonome Bedingung vor:

$$y = x \tan \omega t .$$

Trotzdem ist die Lagrange-Funktion (1.50)

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2)$$

nicht explizit zeitabhängig. Es gilt also:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

und damit der Erhaltungssatz:

$$H = p \dot{q} - L = \text{const} .$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) = \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 - q^2 \omega^2) \\ &\neq T = T + V = E . \end{aligned}$$

Der Erhaltungssatz ist also **nicht** mit dem Energiesatz identisch!

Abb. 1.53 Zur Illustration der aus der Homogenität des Raumes folgenden zyklischen Koordinate

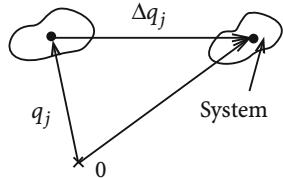
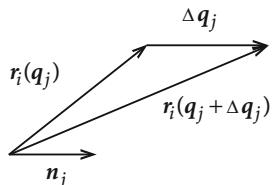


Abb. 1.54 Änderung der Teilchenkoordinaten bei einer Verschiebung des Gesamtsystems um Δq_j in Richtung n_j



1.4.2 Homogenität des Raumes

Ein System heißt *räumlich homogen*, wenn seine Eigenschaften unabhängig vom Ort sind, d. h., wenn eine Verschiebung des gesamten Systems die Messergebnisse nicht ändert. Das ist z. B. dann der Fall, wenn das betrachtete System nur von **Teilchenabständen** abhängigen Kräften unterliegt. Die generalisierte Koordinate q_j sei so gewählt, dass Δq_j einer Translation des gesamten Systems entspricht. Das können z. B. die kartesischen Komponenten des Massenzentrums sein. Dann folgt als hinreichende Bedingung für räumliche Homogenität:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \quad (1.173)$$

q_j ist also zyklisch. Dies ergibt den Erhaltungssatz:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const} . \quad (1.174)$$

Was ist nun aber p_j ? Da das System konservativ sein soll, gilt:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

und damit auch:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} . \quad (1.175)$$

Im letzten Schritt haben wir (1.23) ausgenutzt.

n_j sei der Einheitsvektor in Translationsrichtung. Alle Teilchenkoordinaten ändern sich um den gleichen konstanten Vektor:

$$\Delta \mathbf{q}_j = \Delta q_j \mathbf{n}_j .$$

1.4 Erhaltungssätze

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{\Delta q_j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_i(q_j + \Delta q_j) - \mathbf{r}_i(q_j)}{\Delta q_j} = \lim_{\Delta q_j \rightarrow 0} \frac{\Delta q_j \mathbf{n}_j}{\Delta q_j} = \mathbf{n}_j . \quad (1.176)$$

p_j ist also die zu q_j gehörige Komponente des Gesamtimpulses in Translationsrichtung \mathbf{n}_j :

$$p_j = \mathbf{n}_j \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{P} . \quad (1.177)$$

Da \mathbf{n}_j beliebig gewählt werden kann, gilt der folgende Erhaltungssatz:

Homogenität des Raumes \Leftrightarrow Impulserhaltungssatz

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \text{const} . \quad (1.178)$$

Wir schließen eine kurze Diskussion an:

- Der Koordinate q_j ist die generalisierte Kraftkomponente Q_j zugeordnet:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{n}_j \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{F} . \quad (1.179)$$

Wegen „actio = reactio“ heben sich die *inneren* Kräfte (Teilchenwechselwirkungen) auf, sodass \mathbf{F} die gesamte *äußere* Kraft darstellt. In einem konservativen System gilt (1.29):

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} .$$

Ferner folgt mit (1.176):

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \mathbf{n}_j = 0 .$$

Dies bedeutet:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$$

und damit:

$$Q_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} .$$

Wegen (1.173) ist dann:

$$Q_j = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{F} = \dot{p}_j = 0 . \quad (1.180)$$

Diese Beziehung ist erfüllt, falls

$$\mathbf{F} \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{F} \perp \mathbf{n}_j$$

gilt.

2. Bei äußeren Feldern mit gewissen Symmetrien kann q_j für Translationen in bestimmten Raumrichtungen zyklisch sein, nämlich dann, wenn \mathbf{n}_j orthogonal zu \mathbf{F} ist (s. (1.180)). Wir erkennen damit einen wichtigen Zusammenhang:
- ▶ Impulserhaltung für Symmetrierichtungen.

Beispiele

1) Feld einer unendlichen, homogenen Ebene

Von jedem Punkt der Ebene geht ein kugelsymmetrisches Feld aus, sodass durch Superposition nur eine resultierende z -Komponente bleibt. Die Kraft auf Teilchen i , ausgeübt von allen Punkten der unendlichen (xy) -Ebene, hat also nur eine nicht-verschwindende z -Komponente. Das gilt dann natürlich auch für die Gesamtkraft:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \equiv (0, 0, F) . \quad (1.181)$$

Für $\mathbf{n}_j = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ ist damit (1.180) erfüllt. Dies ergibt als Integrale der Bewegung:

$$P_x = \text{const} ; \quad P_y = \text{const} . \quad (1.182)$$

2) Feld eines unendlichen, homogenen Kreiszylinders

Die Rotationssymmetrie um die Zylinderachse legt die Verwendung von Zylinderkoordinaten nahe (s. Abschn. 1.7.3, Bd. 1):

$$\begin{aligned} \rho, \varphi, z : \quad & x = \rho \cos \varphi ; \quad y = \rho \sin \varphi ; \quad z = z , \\ & \mathbf{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) , \\ & \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) , \\ & \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) . \end{aligned}$$

Da der Kreiszylinder unendlich lang und homogen sein soll, wird das Feld φ - und z -unabhängig sein:

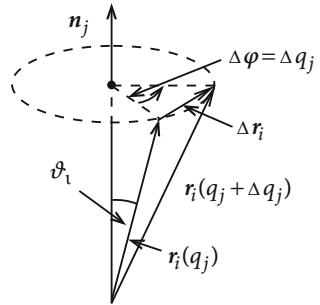
$$\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}_{\rho_i} \Rightarrow \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = (F_x, F_y, 0) . \quad (1.183)$$

Dies bedeutet nach (1.177):

$$P_z = \text{const} . \quad (1.184)$$

1.4 Erhaltungssätze

Abb. 1.55 Zur Illustration der durch die Isotropie des Raumes bedingten zyklischen Koordinate



1.4.3 Isotropie des Raumes

Man nennt ein System *räumlich isotrop*, wenn sich die Eigenschaften des Systems bei beliebigen Drehungen nicht ändern. Wir wählen nun die generalisierte Koordinate q_j so, dass Δq_j einer Drehung des Systems um den Winkel $\Delta\varphi$ um die Achsenrichtung \mathbf{n}_j entspricht (s. Abb. 1.53):

$$|\Delta \mathbf{r}_i| = \Delta q_j r_i \sin \vartheta_i .$$

$\Delta \mathbf{r}_i$ ist orthogonal zu \mathbf{r}_i und zu \mathbf{n}_j . Es gilt also:

$$\Delta \mathbf{r}_i = \Delta q_j \mathbf{n}_j \times \mathbf{r}_i . \quad (1.185)$$

Es folgt als hinreichende Bedingung für räumliche Isotropie:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \quad (1.186)$$

Die so definierte Koordinate q_j ist also zyklisch und führt zu dem Erhaltungssatz:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const} . \quad (1.187)$$

Welche Bedeutung hat p_j ? Da das System wiederum konservativ sein soll, gilt auch jetzt (1.175). Mit

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{\Delta q_j \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta q_j} = \mathbf{n}_j \times \mathbf{r}_i \quad (1.188)$$

folgt deshalb:

$$p_j = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n}_j \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n}_j \cdot \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i) .$$

p_j ist also die Komponente des Gesamtdrehimpulses \mathbf{L} in n_j -Richtung:

$$p_j = \mathbf{n}_j \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{L} . \quad (1.189)$$

Da die Achsenrichtung \mathbf{n}_j beliebig gewählt werden kann, lautet unsere Schlussfolgerung:

Isotropie des Raumes \Leftrightarrow Drehimpulserhaltungssatz

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{const} . \quad (1.190)$$

Auch dieses Ergebnis wollen wir noch kurz kommentieren:

- Der Koordinate q_j ist die Kraftkomponente Q_j zugeordnet, für die mit (1.188)

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{n}_j \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n}_j \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{n}_j \cdot \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{M} \quad (1.191)$$

gefunden wird. Es handelt sich also um die Komponente des Gesamtdrehmoments in Drehrichtung \mathbf{n}_j .

Wegen

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n}_j \times \dot{\mathbf{r}}_i) = 0$$

folgt aus (1.186):

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \quad (1.192)$$

Räumliche Isotropie ist nach (1.191) und (1.192) also damit gleichbedeutend, dass das gesamte, auf das System wirkende Drehmoment \mathbf{M} verschwindet.

- Bei nicht vollständiger räumlicher Isotropie kann (1.192) trotzdem erfüllt werden, wenn die äußeren Felder gewisse Symmetrien aufweisen, sodass \mathbf{M} orthogonal zu bestimmten Raumrichtungen \mathbf{n}_j ist. Das erläutern wir an einigen Beispielen:

■ **a) Feld einer unendlichen, homogenen Ebene**

Wie in (1.181) gilt für die Kraft auf Teilchen i :

$$\mathbf{F}_i \equiv (0, 0, F_i) .$$

Dies bedeutet:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \perp \mathbf{e}_z$$

und ergibt den Erhaltungssatz:

$$L_z = \text{const} . \quad (1.193)$$

1.4 Erhaltungssätze

■ b) Feld eines unendlichen, homogenen Kreiszylinders

Wie in (1.183) benutzen wir zur Darstellung der Kraft \mathbf{F}_i auf Teilchen i Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{r}_i = (\rho_i \cos \varphi_i, \rho_i \sin \varphi_i, z_i) = \rho_i \mathbf{e}_{\rho_i} + z_i \mathbf{e}_z , \quad (1.194)$$

$$\mathbf{F}_i = F_{i\rho} \mathbf{e}_{\rho_i} = F_{i\rho} (\cos \varphi_i, \sin \varphi_i, 0) . \quad (1.195)$$

Das Drehmoment \mathbf{M} ist zwar ungleich Null,

$$\mathbf{M} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_i z_i F_{i\rho} (-\sin \varphi_i, \cos \varphi_i, 0) ,$$

hat aber eine verschwindende z -Komponente:

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{M} = 0 . \quad (1.196)$$

Dies ergibt den Erhaltungssatz:

$$L_z = \text{const} . \quad (1.197)$$

■ c) Feld eines homogenen Kreisringes

Wir wählen die Ringachse als z -Achse. Dann muss das Feld rotationssymmetrisch zur z -Achse sein, sodass sich zur Beschreibung wieder Zylinderkoordinaten empfehlen. Die Kraft \mathbf{F}_i auf Teilchen i kann dann keine φ -Komponente haben:

$$\mathbf{F}_i = F_{i\rho} \mathbf{e}_{\rho} + F_{iz} \mathbf{e}_z = (F_{i\rho} \cos \varphi_i, F_{i\rho} \sin \varphi_i, F_{iz}) . \quad (1.198)$$

Es gilt mit (1.194):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= (\rho_i \mathbf{e}_{\rho_i} + z_i \mathbf{e}_z) \times (F_{i\rho} \mathbf{e}_{\rho_i} + F_{iz} \mathbf{e}_z) \\ &= (-\rho_i F_{iz} + z_i F_{i\rho}) \mathbf{e}_{\varphi_i} \end{aligned}$$

Das bedeutet für das Drehmoment:

$$\mathbf{M} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \equiv (M_x, M_y, 0) , \quad (1.199)$$

sodass auch in diesem Fall (1.196) und (1.197) Gültigkeit haben.

1.4.4 Aufgaben

Aufgabe 1.4.1

Gegeben sei ein konservatives System mit holonomen Zwangsbedingungen. Zudem existiere eine eineindeutige Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\longrightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{q}'(\mathbf{q}, t, \alpha) \\ \mathbf{q}' &\longrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha). \end{aligned}$$

Dabei sei α ein kontinuierlicher Parameter, die Transformationsformeln seien nach diesem stetig differenzierbar. Für $\alpha = 0$ handele es sich um die identische Transformation $\mathbf{q}'(\mathbf{q}, t, \alpha = 0) = \mathbf{q}$. Aus der Lagrange-Funktion wird durch Einsetzen der Transformationsformeln:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha), t) \equiv L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha).$$

Die Transformation sei nun so, dass die Lagrange-Funktion invariant bleibt, d. h.

$$L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left. \frac{\partial q_j(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

ein Integral der Bewegung darstellt (Noether-Theorem)!

Aufgabe 1.4.2

Ein Teilchen der Masse m werde durch die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z)$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass L bei einer Rotation um die z -Achse (Drehwinkel α) invariant bleibt. Finden Sie dann mit der Aussage aus Aufgabe 1.4.1 ein Integral der Bewegung!

Aufgabe 1.4.3

Gegeben sei wie in Aufgabe 1.4.1 ein konservatives System mit holonomen Zwangsbedingungen. Es existiere wieder eine eindeutige Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\longrightarrow \mathbf{q}' = \mathbf{q}'(\mathbf{q}, t, \alpha) \\ \mathbf{q}' &\longrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha) \end{aligned}$$

mit einem kontinuierlichen Parameter α . Die Transformationsformeln seien stetig nach α differenzierbar. Für $\alpha = 0$ handele es sich um die identische Transformation. Aus der Lagrange-Funktion wird durch Einsetzen der Transformationsformeln:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha), t) \equiv L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) .$$

1. Die Transformation sei nun so, dass sich die Lagrange-Funktion wie folgt ändert

$$L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) + \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}', t, \alpha) .$$

Dabei kann $f(\mathbf{q}', t, \alpha)$ eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktion sein („mechanische Eichtransformation“ (1.84)). Zeigen Sie, dass dann

$$\widehat{I}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left. \frac{\partial q_j(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{q}', t, \alpha) \right|_{\alpha=0}$$

ein Integral der Bewegung darstellt!

2. Betrachten Sie als Anwendungsbeispiel den freien Fall der Masse m im homogenen Schwerefeld der Erde: $L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mgx$. Zeigen Sie, dass die Galilei-Transformation

$$x \longrightarrow x' = x + \alpha t$$

die Voraussetzungen von Teil 1. erfüllt und geben Sie die zugehörige Erhaltungsgröße an!

Kontrollfragen

Zu Abschn. 1.1

1. Was versteht man unter Zwangsbedingungen, was unter Zwangskräften?
2. Welche Schwierigkeiten ergeben sich bei der Behandlung eines mechanischen Problems, wenn Zwangsbedingungen vorliegen?
3. Was sind holome, holonom-skleronome, holonom-rheonome, nicht-holome Zwangsbedingungen?

4. Welche Bedingungen müssen generalisierte Koordinaten erfüllen?
5. Wie ist der Konfigurationsraum definiert?

Zu Abschn. 1.2

1. Was versteht man unter einer virtuellen Verrückung, was unter virtueller Arbeit?
2. Formulieren Sie das Prinzip der virtuellen Arbeit.
3. Warum werden Reibungskräfte nicht zu den Zwangskräften gezählt?
4. Was sind generalisierte Kraftkomponenten?
5. Was besagt das d'Alembert'sche Prinzip?
6. Unten welchen Bedingungen folgen aus dem d'Alembert'schen Prinzip die Lagrange-Gleichungen 2. Art?
7. Wie verhalten sich die Lagrange-Gleichungen unter Punkttransformationen?
8. Wie sind verallgemeinerte Impulse definiert?
9. Was ist eine zyklische Koordinate?
10. Wie lautet die Parameterdarstellung der Zykloide?
11. Welche Form haben die aus dem d'Alembert'schen Prinzip folgenden Bewegungsgleichungen für nicht-konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen?
12. Welche Bedingungen müssen „verallgemeinerte Potentiale“ erfüllen? Können sie auch von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängen?
13. Welcher Lagrange-Funktion unterliegt ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld? Wie lauten seine generalisierten Impulse?
14. Wie verhält sich die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchen bei einer Eichtransformation $\varphi \rightarrow \varphi - (\partial/\partial t)\chi; A \rightarrow A + \nabla\chi$? Was passiert dabei mit den Bewegungsgleichungen?
15. Was versteht man unter einer mechanischen Eichtransformation?
16. Wie beschreibt man Systeme, die Reibungskräften unterliegen?
17. Welche physikalische Bedeutung besitzt die Dissipationsfunktion?
18. Erläutern Sie die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.
19. Wie lauten die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 1. Art?
20. Welche physikalische Bedeutung kann den Lagrange'schen Multiplikatoren zugeschrieben werden?

Zu Abschn. 1.3

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen Differential- und Integralprinzipien.
2. Was versteht man unter einer Konfigurationsbahn?
3. Formulieren Sie das Hamilton'sche Prinzip. Welche Bedingungen müssen die zur Variation zugelassenen Bahnen erfüllen?
4. Was ist ein Wirkungsfunktional?
5. Erläutern Sie den Begriff der *Variation des Funktional*s $J\{y(x)\}$.

Kontrollfragen

6. Geben Sie die Euler'sche Gleichung an und skizzieren Sie ihre Herleitung.
7. Was versteht man unter dem Brachystochronenproblem?
8. Wie leitet man aus dem Hamilton'schen Prinzip für konservative Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 1. Art ab?
9. Wie lautet das Hamilton'sche Prinzip für nicht-konservative Systeme? Welches Wirkungsfunktional ist dann zu variieren?
10. Von welcher Art sind die Bewegungsgleichungen, die aus dem „erweiterten“ Hamilton'schen Prinzip folgen?

Zu Abschn. 1.4

1. Was ist ein *Integral der Bewegung*?
2. Warum ist es günstig, in der Lagrange-Formulierung eines physikalischen Problems möglichst viele generalisierte Koordinaten zyklisch zu wählen?
3. Wann nennt man ein System *zeitlich homogen*? Was gilt dann für die Lagrange-Funktion?
4. Wie ist die Hamilton-Funktion definiert?
5. Welcher Erhaltungssatz folgt aus der zeitlichen Homogenität eines physikalischen Systems?
6. Unter welchen Bedingungen ist die Hamilton-Funktion mit der Gesamtenergie identisch?
7. Wann ist ein System als *räumlich homogen* zu bezeichnen? Was gilt dann für die Lagrange-Funktion?
8. Welcher Erhaltungssatz folgt aus der Homogenität des Raumes?
9. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Impulserhaltung und Symmetrierichtungen?
10. Wie manifestiert sich *räumliche Isotropie* in der Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems?
11. Welcher Erhaltungssatz folgt aus räumlicher Isotropie? Was gilt für das Gesamtdrehmoment?
12. Welche Symmetrievereinigung muss an die auf das i -te Teilchen wirkende Kraft gestellt werden, damit die x -Komponente des Drehimpulses ein Integral der Bewegung ist?

Hamilton-Mechanik

2

2.1	Legendre-Transformation	106
2.1.1	Aufgaben	109
2.2	Kanonische Gleichungen	110
2.2.1	Hamilton-Funktion	110
2.2.2	Einfache Beispiele	114
2.2.3	Aufgaben	120
2.3	Wirkungsprinzipien	123
2.3.1	Modifiziertes Hamilton'sches Prinzip	123
2.3.2	Prinzip der kleinsten Wirkung	127
2.3.3	Fermat'sches Prinzip	131
2.3.4	Jacobi-Prinzip	132
2.4	Poisson-Klammer	136
2.4.1	Darstellungsräume	136
2.4.2	Fundamentale Poisson-Klammern	141
2.4.3	Formale Eigenschaften	144
2.4.4	Integrale der Bewegung	146
2.4.5	Bezug zur Quantenmechanik	148
2.4.6	Aufgaben	150
2.5	Kanonische Transformationen	153
2.5.1	Motivation	153
2.5.2	Die erzeugende Funktion	158
2.5.3	Äquivalente Formen der erzeugenden Funktion	162

2.5.4 Beispiele kanonischer Transformationen	165
2.5.5 Kriterien für Kanonizität	169
2.5.6 Aufgaben	172
Kontrollfragen	176

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer

- ▶ formalen Weiterentwicklung der Theorie der Klassischen Mechanik.

Dabei geht es eigentlich nicht so sehr um die Konstruktion neuer Rechenhilfsmittel. Auch bringt die Hamilton-Formulierung der Klassischen Mechanik *keine neue Physik*. Ihr Gültigkeits- und Anwendungsbereich entspricht nämlich ziemlich genau dem der Lagrange-Formulierung. Es geht vielmehr darum, eine tiefere Einsicht in die formale mathematische Struktur der physikalischen Theorie zu gewinnen, und dies durch Untersuchung aller denkbaren Umformulierungen der fundamentalen Prinzipien. Hinzu kommt, dass die Klassische Mechanik wie jede physikalische Theorie nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich besitzt. Es ist jedoch nicht „*a priori*“ klar, welche Darstellung für spätere Verallgemeinerungen besonders günstig ist. Begriffsbildungen und mathematische Zusammenhänge des Hamilton-Formalismus werden sich als hilfreich für einen Anschluss an die Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik erweisen. Das ist letztlich das entscheidende Motiv für die Beschäftigung mit der Hamilton-Mechanik.

Wir wollen einmal in einer gewissen „Bestandsaufnahme“ die bisher kennen gelernten Konzepte gegenüberstellen. Die *Newton-Mechanik* stellt ein sehr allgemeines Konzept dar. Es sind alle Typen von Kräften zugelassen. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen manifestieren sich sehr anschaulich als *Teilchenbahnen*. Die *Newton-Mechanik* ist allerdings nur in Inertialsystemen gültig. In nicht-inertialen Systemen müssen passende *Scheinkräfte* eingeführt werden. Die „unhandlichen“ Zwangskräfte müssen explizit in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. Ferner stellen sich die *Newton-Gleichungen* als nicht forminvariant gegenüber Koordinatentransformationen heraus.

Die *Lagrange-Mechanik* ist dagegen in allen Koordinatensystemen gültig. Ihr besonderer Vorteil liegt darin, dass die „unhandlichen“ Zwangskräfte eliminiert sind. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erweisen sich als forminvariant unter Punkttransformationen. Sie werden aus fundamentalen Prinzipien, dem Differentialprinzip von d'Alembert oder dem Integralprinzip von Hamilton, abgeleitet, die die Newton'schen Axiome ersetzen. In holonomen, konservativen Systemen handelt es sich dabei um S Differentialgleichungen 2. Ordnung für S generalisierte Koordinaten q_1, \dots, q_S , zu deren Lösung $2S$ Anfangsbedingungen vonnöten sind. Da es sich bei den generalisierten Koordinaten um beliebige physikalische Größen handeln kann, also nicht notwendig um *Längen*, werden die Lösungen der Bewegungsgleichungen entsprechend unanschaulich. Sie ergeben erst nach Rücktransformation auf die Teilchenkoordinaten r_1, \dots, r_N die klassischen *Teilchenbahnen*. Darin kann man einen gewissen Nachteil sehen, ebenso wie in der Tatsache, dass es kein einheitliches Konzept für die Behandlung aller denkbaren Typen von Zwangsbedingungen gibt.

Die nun zu besprechende *Hamilton-Mechanik* soll eine Brücke zwischen den klassischen und den nichtklassischen Theorien (Quantenmechanik, Statistische Mechanik) schlagen.

Das wichtigste Ergebnis wird die Erkenntnis sein, dass Klassische Mechanik und Quantenmechanik als verschiedene Realisierungen ein und derselben übergeordneten, abstrakten mathematischen Struktur aufgefasst werden können. – Beim Übergang von der Lagrange- zur Hamilton-Formulierung werden generalisierte Geschwindigkeiten durch generalisierte Impulse ersetzt:

$$(q, \dot{q}, t) \Rightarrow (q, p, t).$$

q und p werden als voneinander unabhängige Variable aufgefasst. Das Resultat dieser Transformationen werden $2S$ Differentialgleichungen **erster** Ordnung für S generalisierte Koordinaten q_1, \dots, q_S und S generalisierte Impulse p_1, \dots, p_S sein. Die Zahl der zur Lösung benötigten Anfangsbedingungen bleibt damit bei $2S$. – Als Methode für den Koordinatenwechsel wird eine so genannte *Legendre-Transformation* gewählt, deren Technik im nächsten Abschnitt vorgestellt werden soll.

2.1 Legendre-Transformation

Wir diskutieren als Einschub ein für die Theoretische Physik wichtiges mathematisches Verfahren zur Variablentransformation:

Gegeben sei eine Funktion $f = f(x)$ mit dem Differential

$$df = \frac{df}{dx} dx = u dx.$$

Gesucht sei eine Funktion $g = g(u)$, für die

$$\frac{dg}{du} = \pm x$$

gilt. Diese findet man leicht wie folgt:

$$\begin{aligned} df &= u dx = d(ux) - x du \\ \Rightarrow d(f - ux) &= -x du \Rightarrow \frac{d}{du}(f - ux) = -x. \end{aligned}$$

Man definiert deshalb:

Legendre-Transformierte von $f(x)$

$$g(u) = f(x) - ux = f(x) - x \frac{df}{dx}. \quad (2.1)$$

2.1 Legendre-Transformation

Warum vollzieht man die Variablentransformation nicht einfach „durch Einsetzen“? An dem folgenden Beispiel kann man sich klar machen, dass diese nicht reversibel wäre. Die Transformation

$$\frac{df}{dx} = u(x) \Rightarrow x = x(u) \Rightarrow \tilde{f}(u) = f(x(u))$$

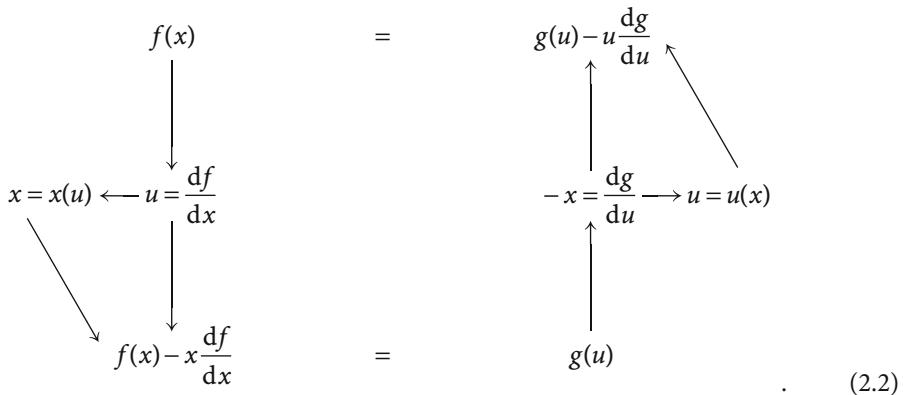
würde zum Beispiel bedeuten, dass die Funktionen

$$f(x) = \alpha x^2 \quad \text{und} \quad \tilde{f}(x) = \alpha(x+c)^2$$

dasselbe $\tilde{f}(u)$ haben:

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{df}{dx} = 2\alpha x \\ \bar{u} = \frac{d\tilde{f}}{dx} = 2\alpha(x+c) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{u}{2\alpha} \\ x = \frac{\bar{u}}{2\alpha} - c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \tilde{f}(u) = \frac{u^2}{4\alpha} \\ \tilde{f}(\bar{u}) = \frac{\bar{u}^2}{4\alpha} \end{array} \right.$$

Die Rücktransformation kann also nicht eindeutig sein. Eine Legendre-Transformation ist dagegen eindeutig, wie das folgende Schema verdeutlicht:



Offensichtlich ist dieses Schema nur anwendbar, wenn noch

$$\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0 \quad (2.3)$$

gilt. Nur dann kann u wirklich eine Variable sein. Aus $(d^2f)/(dx^2) = 0$ würde nämlich $(df)/(dx) = u = \text{const}$ folgen. In dem obigen Schema (2.2) gibt es keinen ausgezeichneten Punkt. Die Rücktransformation ist deshalb eindeutig.

Wir wollen die Theorie auf Funktionen zweier Variablen ausdehnen. Gegeben sei

$$f = f(x, y) \Rightarrow df = u(x, y) dx + v(x, y) dy ,$$

wobei gilt:

$$u(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y, \quad v(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x. \quad (2.4)$$

Gesucht wird

$$g = g(x, v) \Rightarrow dg = u dx - y dv$$

mit

$$u(x, y(x, v)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_v, \quad y(x, v) = - \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)_x. \quad (2.5)$$

Man bezeichnet x als die *passive*, y als die *aktive* Variable. Die gesuchte Funktion $g(x, v)$ findet man wie folgt:

$$\begin{aligned} df &= u dx + v dy = u dx + d(vy) - y dv \\ &\Rightarrow d(f - vy) = u dx - y dv \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial(f - vy)}{\partial x} \right)_v = u, \quad \left(\frac{\partial(f - vy)}{\partial v} \right)_x = -y. \end{aligned}$$

Man definiert nun:

Legendre-Transformierte

$$g(x, v) = f(x, y) - vy = f(x, y) - y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \quad (2.6)$$

von $f(x, y)$ bezüglich y .

Das Transformationsschema (2.2) ist nur leicht abzuändern:

$$\begin{array}{ccc} f(x, y) & = & g(x, v) - v \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)_x \\ \downarrow & & \uparrow \\ y = y(x, v) & \longleftarrow & -y = \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)_x \\ \searrow & \downarrow & \uparrow \\ & f(x, y) - y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x & = g(x, v) \end{array} \quad . \quad (2.7)$$

Die Verallgemeinerung des Verfahrens auf mehr als zwei Variable liegt auf der Hand.

2.1 Legendre-Transformation

2.1.1 Aufgaben

Aufgabe 2.1.1

Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte

1. $g(u)$ der Funktion $f(x) = \alpha x^2$,
2. $g(x, v)$ der Funktion $f(x, y) = \alpha x^2 y^3$.

Aufgabe 2.1.2

Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte

1. $g(u)$ der Funktion $f(x) = \alpha(x + \beta)^2$ (α, β : Konstante)
2. $g(x, v)$ der Funktion

$$f(x, y) = \alpha x^3 y^5.$$

Führen Sie zur Kontrolle die Rücktransformation durch.

Aufgabe 2.1.3

Eine häufige Anwendung findet die Legendre-Transformation in der Thermodynamik (s. Bd. 4 dieses Grundkurses), z. B. bei der Berechnung und Verwendung von „thermodynamischen Potentialen“. Bei diesen handelt es sich um Energiegrößen, die in ihren sog. „natürlichen Variablen“ nützliche, spezielle Eigenschaften aufweisen. Die „innere Energie“ eines Gases U , z. B., besitzt die natürlichen Variablen Entropie S und Volumen V . Eine Änderung der inneren Energie berechnet sich nach

$$dU = TdS - pdV.$$

p ist der Druck und T die Temperatur des Gases. Da S und V nicht immer optimale Variablen im Hinblick auf experimentelle Vorgaben sind, werden alternative Potentiale ins Spiel gebracht:

1. freie Energie: $F = F(T, V)$
2. Enthalpie: $H = H(S, p)$
3. freie Enthalpie: $G = G(T, p)$

Diese unterscheiden sich voneinander und von U durch passende Legendre-Transformationen. Stellen Sie die Zusammenhänge von F , H , G mit U dar und

bestimmen Sie die partiellen Ableitungen dieser Potentiale nach ihren natürlichen Variablen!

2.2 Kanonische Gleichungen

2.2.1 Hamilton-Funktion

Wir transformieren die Lagrange-Funktion,

$$L = L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) ,$$

mit den $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S$ als aktive Variable, die durch die generalisierten Impulse

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \quad i = 1, \dots, S$$

ersetzt werden sollen. Die negative Legendre-Transformierte ist nichts anderes als die bereits in (1.169) kennen gelernte

Hamilton-Funktion

$$H(q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S, t) = \sum_{i=1}^S p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) . \quad (2.8)$$

Wir haben in Abschn. 1.4.1 gesehen, dass sie in enger Beziehung zur Energie des Systems steht. Wir wollen zunächst die aus der Hamilton-Funktion H folgenden Bewegungsgleichungen ableiten. Dazu bilden wir das totale Differential

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^S (dp_i \dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^S \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \end{aligned}$$

Wir nutzen noch die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen aus:

$$dH = \sum_{i=1}^S (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \quad (2.9)$$

2.2 Kanonische Gleichungen

Andererseits gilt natürlich auch:

$$dH = \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt . \quad (2.10)$$

Da q_i, p_i, t unabhängige Koordinaten sind, folgt aus dem direkten Vergleich von (2.9) und (2.10):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad i = 1, \dots, S , \quad (2.11)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad i = 1, \dots, S , \quad (2.12)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} . \quad (2.13)$$

Dies sind die

- ▶ Hamilton'schen Bewegungsgleichungen,

die man auch die

- ▶ Kanonischen Gleichungen

nennt. Das sind $2S$ Bewegungsgleichungen, von 1. Ordnung in der Zeit, die an die Stelle der S Lagrange-Gleichungen treten, die von 2. Ordnung sind. Man beachte die hohe Symmetrie der Gleichungen bezüglich der q_i und der p_i . Sie beschreiben die Bewegung des Systems im abstrakten $2S$ -dimensionalen

- ▶ Phasenraum,

der durch die Variablen q_i und p_i aufgespannt wird.

Wir sollten uns noch etwas mit der physikalischen Bedeutung der Hamilton-Funktion beschäftigen. Dazu erinnern wir uns an die allgemeine Gestalt (1.41) der Lagrange-Funktion L :

$$L = T - V = L_2 + L_1 + L_0 .$$

Die L_i sind dabei homogene Funktionen der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j vom Grad i (1.45). Dies bedeutet (s. (1.171)):

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2L_2 + L_1 . \quad (2.14)$$

Aus (2.8) folgt dann für die Hamilton-Funktion:

$$H = L_2 - L_0 . \quad (2.15)$$

Sie enthält also nicht den Term L_1 . Bei **skleronomen Zwangsbedingungen** (genauer bei $\partial \mathbf{r}_i / \partial t \equiv 0$) sind nach (1.38) und (1.39) $\alpha = \alpha_j = 0$. Dies bedeutet:

$$L_0 = -V, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = T. \quad (2.16)$$

H ist dann mit der Gesamtenergie identisch:

$$H = T + V = E. \quad (2.17)$$

Wegen des fehlenden Terms L_1 gilt das nicht mehr bei **rheonomen Zwangsbedingungen**, die zu $\partial \mathbf{r}_i / \partial t \neq 0$ führen.

Für das totale Zeitdifferential von H finden wir:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^S \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^S \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Totale und partielle Ableitungen von H nach der Zeit sind also identisch:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.18)$$

H ist demnach ein *Integral der Bewegung*, falls keine explizite Zeitabhängigkeit vorliegt:

$$H = \text{const} \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (2.19)$$

Nach (2.17) ist dies der Energiesatz, falls keine rheonomen Zwangsbedingungen vorliegen. Ist dies doch der Fall, so ist $L_1 \neq 0$ und damit H nicht die Gesamtenergie.

Der Hamilton-Formalismus wird insbesondere dann vorteilhaft, wenn zyklische Koordinaten vorliegen. Wir erinnern uns:

$$q_j \text{ zyklisch} \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Leftrightarrow p_j = \text{const} = c_j. \quad (2.20)$$

Dies bedeutet aber auch

$$\dot{p}_j = 0 = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (2.21)$$

sodass eine zyklische Koordinate q_j auch in H nicht erscheint. Der zugehörige Impuls $p_j = c_j$ ist keine echte Variable, sondern durch Anfangsbedingungen festgelegt. H enthält nur noch $(2S-2)$ Variable, die Zahl der Freiheitsgrade hat praktisch von S auf $(S-1)$ abgenommen:

$$H = H(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_S, p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_S, t | c_j). \quad (2.22)$$

2.2 Kanonische Gleichungen

Dagegen enthält die Lagrange-Funktion L noch alle \dot{q}_j , die Zahl der Freiheitsgrade bleibt unverändert:

$$L = L(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) . \quad (2.23)$$

Was den rechentechnischen Aspekt angeht, so kann man sagen, dass der Hamilton- gegenüber dem Lagrange-Formalismus eigentlich nur bei zyklischen Koordinaten einen wirklichen Vorteil bietet. Im so genannten

- ▶ **Routh-Formalismus,**

der eine Zwischenstellung zwischen Lagrange- und Hamilton-Formalismus einnimmt, wird die Legendre-Transformation $\{q, \dot{q}, t\} \rightarrow \{q, p, t\}$ deshalb nur für zyklische Koordinaten durchgeführt, da nur dann ein Vorteil erkennbar ist. Seien

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad \text{zyklische Koordinaten ,}$$

dann sind $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ die aktiven und $q_1, \dots, q_s, \dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_s, t$ die passiven Transformationsvariablen. Dies ergibt die

Routh-Funktion

$$\begin{aligned} R(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_n, \dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_s, t) \\ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = H - \sum_{i=n+1}^s p_i \dot{q}_i . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Für $n = s$ ist natürlich $R = H$ und für $n = 0$ ist $R = -L$. Die Bewegungsgleichungen bestimmen wir über das totale Differential der Routh-Funktion:

$$\begin{aligned} dR &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} \right) dq_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial p_i} \right) dp_i + \sum_{i=n+1}^s \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i + \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) dq_i - \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) dq_i - \sum_{i=n+1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right) dt . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i , \quad i = 1, \dots, n , \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i , \quad i = 1, \dots, n , \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \quad (2.27)$$

Dies entspricht den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für die zyklischen Koordinaten.

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad i = n+1, \dots, S, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -p_i, \quad i = n+1, \dots, S. \quad (2.29)$$

Diese beiden letzten Gleichungen lassen sich zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0, \quad i = n+1, \dots, S \quad (2.30)$$

zusammenfassen. Für die nicht-zyklischen Koordinaten ergeben sich also die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen.

Da $\partial L / \partial q_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, ist auch

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = 0 \Leftrightarrow p_i = \text{const}_i = c_i. \quad (2.31)$$

Zyklische Koordinaten erscheinen also weder in L oder H noch in R . Die zugehörigen Impulse treten nur als durch Anfangsbedingungen festgelegte Parameter auf:

$$R = R(q_{n+1}, \dots, q_S, \dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_S, t | c_1, \dots, c_n). \quad (2.32)$$

Der Routh-Formalismus bringt gegenüber der Hamilton-Formulierung keine entscheidenden rechentechnischen Vorteile. Er hat sich deshalb nicht durchsetzen können. Wir werden im Rahmen unserer Darstellung hier nicht weiter auf ihn eingehen.

2.2.2 Einfache Beispiele

Die Theorie des letzten Kapitels zur Lösung mechanischer Probleme im Rahmen des Hamilton-Formalismus lässt sich in dem folgenden Schema zusammenfassen:

- Generalisierte Koordinaten festlegen:

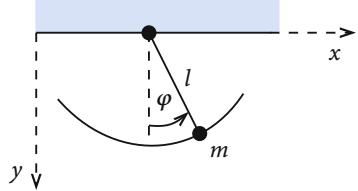
$$\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \dots, q_S).$$

- Transformationsgleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_S, t), & i &= 1, 2, \dots, N. \\ \dot{\mathbf{r}}_i &= \dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \end{aligned}$$

2.2 Kanonische Gleichungen

Abb. 2.1 Pendelschwingung der Masse m als eindimensionales Bewegungsproblem



3. Kinetische und potentielle Energie in den Teilchenkoordinaten formulieren, dann 2. einsetzen:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t) \quad (\text{konservatives System}) .$$

4. Generalisierte Impulse berechnen:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow p_j = p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad j = 1, 2, \dots, S.$$

5. Auflösen nach \dot{q}_j :

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad j = 1, 2, \dots, S.$$

6. Lagrange-Funktion:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) = \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

7. Legendre-Transformation:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

8. Kanonische Gleichungen aufstellen und integrieren.

Wir wollen zur Übung nach diesem Schema die Hamilton-Funktionen und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für ein paar sehr einfache Beispiele ableiten.

■ 1) Pendelschwingung

Der Massenpunkt m unterliegt den Zwangsbedingungen (Abb. 2.1)

$$\begin{aligned} z &= \text{const} = 0, \\ x^2 + y^2 &= l^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

hat also genau einen Freiheitsgrad ($S = 1$). Mit der generalisierten Koordinate

$$q = \varphi$$

folgen die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}x &= l \sin q ; \quad y = l \cos q , \\ \dot{x} &= l \dot{q} \cos q , \quad \dot{y} = -l \dot{q} \sin q .\end{aligned}$$

Kinetische und potentielle Energie lauten dann:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 , \\ V &= -m g y = -m g l \cos q \\ \Rightarrow L &= T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + m g l \cos q .\end{aligned}$$

Daraus leiten wir den generalisierten Impuls p ab:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m l^2 \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m l^2} .$$

Dies setzen wir in $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ein,

$$\tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m l^2} + m g l \cos q ,$$

und führen damit die Legendre-Transformationen durch:

$$\begin{aligned}H &= p \dot{q} - L = \frac{p^2}{m l^2} - \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \Rightarrow H &= \frac{p^2}{2m l^2} - m g l \cos q .\end{aligned}\tag{2.33}$$

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m l^2} \Rightarrow \dot{p} = m l^2 \ddot{q} , \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m g l \sin q\end{aligned}$$

ergeben zusammengesetzt die bekannte *Schwingungsgleichung*:

$$\ddot{q} + \frac{g}{l} \sin q = 0 .\tag{2.34}$$

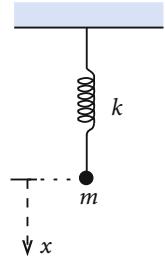
■ 2) Harmonischer Oszillator

Wir denken an eine Feder mit der Federkonstanten k , die dem Hooke'schen Gesetz

$$F = -k x$$

2.2 Kanonische Gleichungen

Abb. 2.2 Feder im Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes als Realisierung des harmonischen Oszillators



folgt, wenn x die Auslenkung aus der Ruhelage darstellt. Die Zwangsbedingungen

$$y = z \equiv 0$$

sorgen für eine eindimensionale Bewegung der Masse m . Mit der generalisierten Koordinate

$$q = x$$

folgt unmittelbar:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2, \quad V = \frac{1}{2} k q^2, \quad L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2.$$

Wir ersetzen in der letzten Gleichung \dot{q} durch den generalisierten Impuls

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}.$$

Mit

$$\tilde{L}(q, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} k q^2$$

finden wir die Hamilton-Funktionen $H = p \dot{q} - \tilde{L}$ des harmonischen Oszillators:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (2.35)$$

Es handelt sich um ein konservatives System mit skleronomen Zwangsbedingungen. Wegen

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H = E = \text{const}$$

ist H mit der konstanten Gesamtenergie E identisch. Formt man dann (2.35) noch etwas um,

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E} = 1, \quad \frac{1}{m \omega_0^2} \quad (2.36)$$

so ergibt sich die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse. Die Bahn des Systems im (q, p) -Phasenraum ist also eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \sqrt{2mE} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}.$$

Die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_0^2 q, \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \Rightarrow \dot{p} = m\ddot{q}\end{aligned}$$

führen direkt zur Schwingungsgleichung:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.37)$$

■ 3) Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die Bewegung eines Teilchens der Masse m und der Ladung \bar{q} im elektromagnetischen Feld haben wir bereits in Abschn. 1.2.3 untersucht. Das Teilchen unterliegt der nicht-konservativen *Lorentz-Kraft*

$$\mathbf{F} = \bar{q}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

wenn \mathbf{v} seine Geschwindigkeit ist. Wir hatten mit (1.78) das verallgemeinerte Potential

$$U = \bar{q}(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

der Lorentz-Kraft abgeleitet, für das

$$Q_j = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = F_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

gilt, wenn man als generalisierte die kartesischen Koordinaten wählt. Für die Lagrange-Funktion ergab sich (1.79):

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + \bar{q}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) - \bar{q}\varphi = T - U.$$

Als generalisierten Impuls, der vom mechanischen Impuls zu unterscheiden ist, haben wir dann

$$\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}} + \bar{q} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.38)$$

Dies führt über

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = m \dot{\mathbf{r}}^2 + \bar{q} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \bar{q}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + \bar{q}\varphi$$

2.2 Kanonische Gleichungen

zur Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \bar{q} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + \bar{q} \varphi(\mathbf{r}, t) , \quad (2.39)$$

die sich als mit der Gesamtenergie identisch erweist, was bei verallgemeinerten Potentialen durchaus nicht selbstverständlich ist. Der Ausdruck (2.39) wird uns in der Quantenmechanik, dann als Hamilton-**Operator**, noch ausführlich beschäftigen.

■ 4) Teilchen ohne Zwang

Selbst wenn das Teilchen keinen Zwangsbedingungen unterliegt, kann die Symmetrie des Problems die Verwendung spezieller krummliniger Koordinaten nahelegen, zum Beispiel, um möglichst viele Koordinaten zyklisch werden zu lassen. Wir wollen deshalb für ein konservatives System die Hamilton-Funktion in den drei gebräuchlichsten Koordinatensystemen formulieren.

■ a) Kartesische Koordinaten (x, y, z)

Da keine Zwangsbedingungen vorliegen sollen, gilt natürlich $H = T + V$ bzw. $L = T - V$:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) . \quad (2.40)$$

Die generalisierten Impulse sind in diesem Fall mit den mechanischen Linearimpulsen identisch:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} ; \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} , \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} . \quad (2.41)$$

■ b) Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

Nach (1.381), Bd. 1 gelten die Transformationsformeln:

$$x = \rho \cos \varphi ; \quad y = \rho \sin \varphi ; \quad z = z .$$

Daraus ergeben sich die Geschwindigkeiten:

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi ; \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi ; \quad \dot{z} = \dot{z} .$$

Kinetische und potentielle Energie,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) ,$$

$$V = V(\rho, \varphi, z) ,$$

führen über die Lagrange-Funktion $L = T - V$ zu den generalisierten Impulsen:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} ; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} ; \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} . \quad (2.42)$$

Mit

$$H = p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L$$

folgt für die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + V(\rho, \varphi, z). \quad (2.43)$$

c) Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

Nach (1.389), Bd. 1 lauten nun die Transformationsformeln:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta.$$

Damit berechnet man leicht:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right); \quad V = V(r, \vartheta, \varphi).$$

Dies ergibt mit $L = T - V$ die generalisierten Impulse:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}; \quad p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m r^2 \dot{\vartheta}; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}. \quad (2.44)$$

Die Hamilton-Funktion lautet dann:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi). \quad (2.45)$$

2.2.3 Aufgaben

Aufgabe 2.2.1

Gegeben seien die Hamilton-Funktion $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ eines mechanischen Systems und ihre Bewegungsgleichungen (2.11), (2.12) und (2.13). Die Lagrange-Funktion ist die negative Legendre-Transformierte der Hamilton-Funktion:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^s p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} - H$$

Leiten Sie über diese Beziehung aus den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 2. Art ab!

2.2 Kanonische Gleichungen

Aufgabe 2.2.2

Bestimmen Sie die Routh-Funktion und die Routh'schen Bewegungsgleichungen für das in Abschn. 1.4 behandelte Zweikörperproblem (Massen m_1, m_2 mit abstandsabhängiger Paarwechselwirkung im ansonsten kräftefreien Raum).

Aufgabe 2.2.3

Ein Teilchen der Masse m führe eine zweidimensionale Bewegung in der xy -Ebene aus unter dem Einfluß der Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y) = -\left(\alpha + \frac{\beta}{r}\right) \mathbf{r} \quad \alpha, \beta: \text{positive Konstanten} .$$

Wählen Sie ebene Polarkoordinaten (ρ, φ) als generalisierte Koordinaten!

1. Stellen Sie die kinetische und die potentielle Energie in ebenen Polarkoordinaten dar!
2. Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_ρ und p_φ !
3. Stellen Sie die Hamilton-Funktion auf! Nennen und interpretieren Sie zwei Integrale der Bewegung (Erhaltungssätze)!

Aufgabe 2.2.4

Die potentielle Energie eines Teilchens der Masse m sei in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) formuliert:

$$V(\rho) = V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} ; \quad V_0 = \text{const} , \quad \rho_0 = \text{const} .$$

1. Wie lautet die Hamilton-Funktion?
2. Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf.
3. Finden Sie drei Erhaltungssätze.

Aufgabe 2.2.5

Ein Kasten gleite reibungslos längs der x -Achse mit konstanter Geschwindigkeit v_0 . Auf dem Kastenboden schwingt ebenfalls in x -Richtung und reibungslos eine Masse m , die durch eine Feder (Federkonstante: k) an der hinteren Kastenwand befestigt ist.

1. Geben Sie die Hamilton-Funktion im ruhenden Koordinatensystem Σ an. Ist H eine Erhaltungsgröße? Ist H gleich der Gesamtenergie E ? Formulieren Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen!
2. Untersuchen Sie dasselbe Bewegungsproblem im mitbewegten Koordinatensystem Σ' !

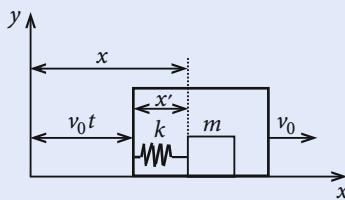


Abb. 2.3 Schwingende Masse im mit konstanter Geschwindigkeit reibungslos gleitenden Kasten

Aufgabe 2.2.6

Gegeben sei ein dreiatomiges Molekül. Dieses führe eindimensionale Schwingungen mit gleicher *Federkonstanten* k aus. x_1, x_2, x_3 seien die Auslenkungen aus der Ruhelage. Die beiden Außenatome haben dieselbe Masse m_1 . Formulieren Sie die Hamilton-Funktion, stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese!

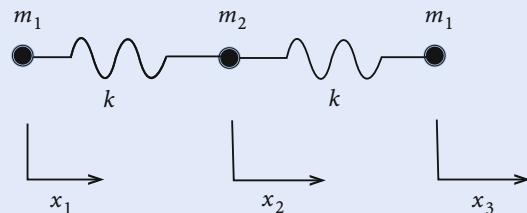


Abb. 2.4 Schwingungen eines dreiatomigen Moleküls

Aufgabe 2.2.7

Ein Massenpunkt m bewegt sich in einem zylindersymmetrischen Potential $V(\rho)$. Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion und die kanonischen Bewegungsgleichungen bezüglich eines Koordinatensystems, das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Symmetrieachse rotiert,

2.3 Wirkungsprinzipien

1. in kartesischen Koordinaten
2. in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 2.2.8

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Ebene unter dem Einfluss einer nicht-konservativen Kraft, die in Richtung auf das Kraftzentrum wirkt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r, \dot{r}, \ddot{r}) \mathbf{e}_r ; \quad F(r, \dot{r}, \ddot{r}) = \frac{\alpha}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2} \right)$$

r ist der Abstand vom Kraftzentrum; α und c sind Konstanten passender Dimension.

Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion des Teilchens!

Beachten Sie, dass die Lagrange-Funktion des Teilchens bereits in Aufgabe 1.2.21 berechnet wurde!

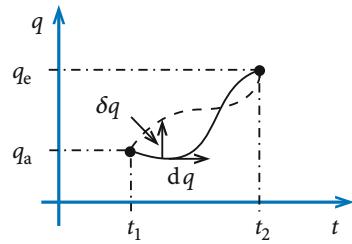
2.3 Wirkungsprinzipien

Wir haben in Abschn. 1.3.3 das Integralprinzip von Hamilton kennen gelernt, aus dem wir die fundamentalen Lagrange-Gleichungen ableiten konnten. Typisch für **Integralprinzipien** ist der Vergleich von **endlichen** Bahnstücken, die das System in einer **endlichen** Zeitspanne durchläuft, mit ihren zugeordneten *gedachten (virtuellen)* Nachbar-Bahnstücken. Nach Art dieser Zuordnung unterscheidet man nun verschiedene Integralprinzipien, von denen wir die wichtigsten in diesem Abschnitt diskutieren und gegenüberstellen wollen.

2.3.1 Modifiziertes Hamilton'sches Prinzip

Wir wollen das in Abschn. 1.3 besprochene Hamilton'sche Prinzip, dessen Vorteil unter anderem auch darin besteht, dass es auch auf Systeme anwendbar ist, die nicht typisch mechanischer Natur sind, nun so umformulieren, dass die Äquivalenz zu den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen klar ist. Dazu erinnern wir uns noch einmal kurz an die wesentlichen Elemente dieses Prinzips. Es besagt, dass die Systembewegung so erfolgt, dass das

Abb. 2.5 Eindimensionale Illustration der im Hamilton'schen Prinzip zur Variation zugelassenen Konfigurationsbahnen



Wirkungsfunktional

$$S\{\mathbf{q}(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt \quad (2.46)$$

auf der Menge M der Konfigurationsbahnen $\mathbf{q}(t)$,

$$M \equiv \{\mathbf{q}(t) : \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_a, \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_e\} , \quad (2.47)$$

für die tatsächliche Bahn extremal wird:

$$(\delta S)_M \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.48)$$

Von entscheidender Bedeutung für die Auswertung des Prinzips ist die **Variationsvorschrift**: Die Variation des Wirkungsfunktionsals S erfolgt durch Variation des Bahnstücks zwischen den festen Endkonfigurationen $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}(t_1)$ und $\mathbf{q}_e = \mathbf{q}(t_2)$. Die Bahnpunkte gehen durch virtuelle Verrückungen δq auseinander hervor, die stets bei festgehaltener Zeit ($\delta t = 0$) durchgeführt werden und deshalb nicht mit tatsächlichen Verrückungen dq identisch zu sein brauchen. Die Auswertung des Hamilton'schen Prinzips erfolgt über eine *Parameterdarstellung* der Konkurrenzbahnen:

$$q_{j\alpha}(t) = q_j(t) + \gamma_{j\alpha}(t) , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (2.49)$$

$q_j(t)$ ist die tatsächliche Bahn und $\gamma_{j\alpha}(t)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion mit

$$\gamma_{j\alpha}(t_1) = \gamma_{j\alpha}(t_2) = 0 \quad \forall \alpha , \quad (2.50)$$

$$\gamma_{j\alpha=0}(t) \equiv 0 . \quad (2.51)$$

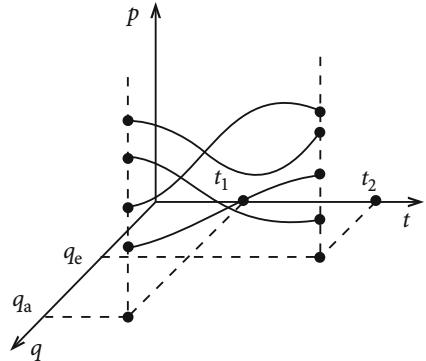
Damit ist dann zu berechnen:

$$\delta S = S\{\mathbf{q}_{d\alpha}(t)\} - S\{\mathbf{q}_0(t)\} = \left(\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha , \quad (2.52)$$

$$\delta \mathbf{q} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}_\alpha}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha . \quad (2.53)$$

2.3 Wirkungsprinzipien

Abb. 2.6 Eindimensionale Illustration der im Modifizierten Hamilton'schen Prinzip zur Variation zugelassenen Konfigurationsbahnen



Damit ist die δ -Variation durch gewöhnliches Differenzieren darstellbar:

$$\delta \Leftrightarrow d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} . \quad (2.54)$$

Auf diese Weise haben wir aus dem Hamilton'schen Prinzip die Lagrange'schen Gleichungen abgeleitet.

Wir ersetzen nun formal im Wirkungsfunktional S die Lagrange-Funktion mit Hilfe des Ausdrucks (2.8) durch die Hamilton-Funktion:

Modifiziertes Hamilton'sches Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \right) \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.55)$$

Neu ist nun, dass die Impulse p_j neben den q_j unabhängige, gleichberechtigte Variable sind. Die Bahnvariation hat deshalb im

- ▶ Phasenraum

zu erfolgen, der durch die q_j und die p_j aufgespannt wird:

$$S = S \{ \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t) \} . \quad (2.56)$$

Bezüglich der Koordinaten q_j gelten dieselben Bedingungen wie in der alten Version (2.47). Analog zu (2.49) führen wir nun auch für die Impulse eine Parameterdarstellung ein:

$$p_{j\alpha}(t) = p_j(t) + \widehat{\gamma}_{j\alpha}(t) , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (2.57)$$

Die Projektion der zugelassenen Phasenraumbahnen auf die (q, t) -Ebene müssen für t_1 und t_2 übereinstimmen. Dagegen muss **nicht** notwendig $\widehat{\gamma}_{j\alpha}(t_1) = \widehat{\gamma}_{j\alpha}(t_2) = 0$ sein; lediglich

$$\widehat{\gamma}_{j\alpha=0}(t) \equiv 0 \quad (2.58)$$

ist zu fordern.

Mit (2.54) und (2.55) haben wir nun auszuwerten:

$$\delta S = d\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^S p_{j\alpha} \dot{q}_{j\alpha} - H(p_\alpha, q_\alpha, t) \right) \right\}_{\alpha=0} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.59)$$

Die Zeiten werden nicht mitvariirt, sodass sich die Ableitung nach α in den Integranden ziehen lässt:

$$0 = \delta S = d\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial p_{j\alpha}}{\partial \alpha} \dot{q}_{j\alpha} + p_{j\alpha} \frac{\partial \dot{q}_{j\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_{j\alpha}} \frac{\partial q_{j\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{j\alpha}} \frac{\partial p_{j\alpha}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}. \quad (2.60)$$

Wir nutzen

$$\frac{\partial \dot{q}_{j\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_{j\alpha}}{\partial \alpha}$$

aus und führen eine partielle Integration durch:

$$d\alpha \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt p_{j\alpha} \frac{\partial \dot{q}_{j\alpha}}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=0} = d\alpha \left\{ p_{j\alpha} \frac{\partial q_{j\alpha}}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - d\alpha \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{p}_{j\alpha} \frac{\partial q_{j\alpha}}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=0}.$$

Da die virtuellen Verrückungen δq_j an den Endpunkten nach Voraussetzung Null sind, verschwindet der erste Term. Mit (2.53) und dem analogen Ausdruck für die Impulse

$$\delta p_j = \left(\frac{\partial p_{j\alpha}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha \quad (2.61)$$

folgt dann aus (2.59):

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^S \left[\delta p_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) - \delta q_j \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \right].$$

$\delta q_j, \delta p_j$ sind beliebig wählbar. Deswegen folgen aus diesem Ausdruck die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (2.11) und (2.12):

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (2.62)$$

2.3 Wirkungsprinzipien

2.3.2 Prinzip der kleinsten Wirkung

Ein weiteres Prinzip geht auf Maupertuis (1747) zurück, das von derselben Aussagekraft wie das Hamilton'sche Prinzip ist. Wir werden es hier formulieren und seine Äquivalenz zum Hamilton'schen Prinzip beweisen. Wir definieren:

Definition 2.3.1 Wirkung

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j dt . \quad (2.63)$$

A hat die Dimension $Energie \cdot Zeit$. Wir formulieren das *Prinzip der kleinsten Wirkung* als

Satz 2.3.1

Für konservative Systeme mit

$$H = T + V = E = \text{const} \quad (2.64)$$

gilt:

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j = 0 \quad (2.65)$$

für die vom System tatsächlich durchlaufene Phasenbahn.

Um den Satz überhaupt verstehen zu können, muss die neue Bahnvariation Δ sehr sorgfältig definiert werden. Die im Hamilton'schen Prinzip (1.121) und (2.55) zur

- ▶ δ -Variation

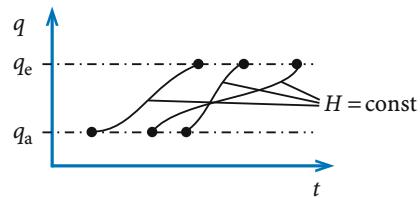
zugelassenen Bahnen gehen durch virtuelle Verrückungen δq , die bei festgehaltener Zeit durchgeführt werden, auseinander hervor. Alle Bahnen nehmen für t_1, t_2 dieselben Endkonfigurationen q_a, q_e an. Gemeinsames Merkmal aller Bahnen ist also dieselbe Durchlaufzeit! Auch bei der

- ▶ Δ -Variation

sollen die Endkonfigurationen fest sein:

$$\Delta q_a = \Delta q_e = 0 . \quad (2.66)$$

Abb. 2.7 Eindimensionale Illustration der im Prinzip der kleinsten Wirkung zur Variation zugelassenen Bahnen



Das gemeinsame Merkmal aller zur Variation zugelassenen Bahnen ist nun dieselbe Hamilton-Funktion:

$$\Delta H = 0 \Leftrightarrow \Delta T = -\Delta V. \quad (2.67)$$

Die *Durchlaufzeiten* für die verschiedenen Bahnstrecken brauchen dagegen nicht dieselben zu sein (Abb. 2.7).

Es kann durchaus sein, dass gewisse Bahnen für beide Variationsverfahren (δ, Δ) zugelassen sind, wobei das System diese aber mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten durchläuft, einmal um eine vorgegebene Durchlaufzeit zu realisieren (δ), zum anderen um $H = \text{const}$ zu gewährleisten (Δ).

Da bei der Δ -Variation die Durchlaufzeiten nicht mehr gleich sein müssen, muss die Zeit nun mitvariiert werden. Wir benutzen auch diesmal eine *Parameterdarstellung* der zur Variation zugelassenen Bahnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\alpha(t_\alpha) &: t_{1\alpha} \leq t_\alpha \leq t_{2\alpha}, \\ \mathbf{q}(t) &: \text{tatsächliche Bahn}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Die Bahnen erfüllen die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\alpha(t_{1\alpha}) &= \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_a \quad \forall \alpha, \\ \mathbf{q}_\alpha(t_{2\alpha}) &= \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_e \quad \forall \alpha. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Über die Parameterdarstellung lassen sich die Bahnvariationen explizit formulieren:

$$\delta\text{-Verfahren} : \delta q = d\alpha \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}, \quad (2.70)$$

$$\Delta\text{-Verfahren} : \Delta q = d\alpha \left(\frac{dq_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = d\alpha \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial \alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{dt_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}. \quad (2.71)$$

Dies kann man wie folgt zusammenfassen:

$$\Delta q = \delta q + \dot{q} \Delta t \quad \text{mit} \quad \Delta t = d\alpha \left. \frac{dt_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (2.72)$$

2.3 Wirkungsprinzipien

Wir haben früher oft ausgenutzt, dass die δ -Variation und Zeitdifferentiationen miteinander vertauscht werden können:

$$\delta \frac{d}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \delta . \quad (2.73)$$

Dies war erlaubt, da die Zeit nicht mitvariert wurde. Dies trifft nun aber für die Δ -Variation nicht mehr zu. Im Allgemeinen wird

$$\Delta \frac{d}{dt} \neq \frac{d}{dt} \Delta \quad (2.74)$$

sein. Darauf ist sorgfältig zu achten. Ansonsten wird auch das Symbol Δ wie ein ganz normales Differential behandelt:

$$\begin{aligned} f = f(\mathbf{q}, t) \Rightarrow \Delta f &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial f}{\partial q_j} \Delta q_j + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \\ &= \sum_{j=1}^S \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j + \left(\sum_{j=1}^S \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t . \end{aligned}$$

Daran liest man ab:

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t . \quad (2.75)$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun das Prinzip der kleinsten Wirkung (2.65) beweisen, wenn wir das Hamilton'sche Prinzip als bekannt voraussetzen. Zunächst gilt:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j = \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(t_2 - t_1) . \quad (2.76)$$

Man beachte, dass für verschiedene Bahnen auch die Endzeiten t_1 und t_2 verschieden sind. Wir beweisen nun, dass A auf der tatsächlichen Bahn extremal wird. Für die Beweisführung ist dabei die tatsächliche Bahn die Bahn, für die das Hamilton'sche Prinzip erfüllt ist:

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(\Delta t_2 - \Delta t_1) . \quad (2.77)$$

Δ kann im ersten Term nicht einfach unter das Integral gezogen werden, da t_1, t_2 mitvariieren müssen. H ist dagegen für alle Bahnen der Konkurrenzschar gleich. Wir setzen:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = I(\mathbf{q}, t_2) - I(\mathbf{q}, t_1) .$$

Für eine gegebene Bahn handelt es sich bei I um eine reine Zeitfunktion. Mit (2.75) folgt nun:

$$\begin{aligned}\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \Delta I(\mathbf{q}, t_2) - \Delta I(\mathbf{q}, t_1) \\ &= \delta I(\mathbf{q}, t_2) - \delta I(\mathbf{q}, t_1) + \dot{I}(\mathbf{q}, t_2) \Delta t_2 - \dot{I}(\mathbf{q}, t_1) \Delta t_1 \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + [L(t) \Delta t]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}\quad (2.78)$$

Der erste Term ist nicht etwa Null, wie vielleicht fälschlicherweise aus dem Hamilton'schen Prinzip gefolgert werden könnte. Letzteres fordert für die Endpunkte $\delta \mathbf{q}_{a,e} = 0$, während hier $\Delta \mathbf{q}_{a,e} = 0$ gilt. Es ist vielmehr:

$$\begin{aligned}\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^S \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \right] dt \\ &= \sum_{j=1}^S \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt = \sum_{j=1}^S \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_{t_1}^{t_2} \\ &= \sum_{j=1}^S \left. \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Delta q_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \Delta t \right) \right|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Mit $\Delta q_j|_{t_1}^{t_2} = 0$ folgt also:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = - \sum_{j=1}^S \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \Delta t \right|_{t_1}^{t_2}.$$

Dies setzen wir in (2.78) ein:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left(L - \sum_{j=1}^S \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right|_{t_1}^{t_2} \right) \Delta t.$$

Mit (2.77) ergibt sich schließlich:

$$\Delta A = \left(L - \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j + H \right) \Delta t \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.79)$$

2.3 Wirkungsprinzipien

Setzen wir noch die Definition (2.8) für die Hamilton-Funktion H ein, so ist die Behauptung $\Delta A = 0$ bewiesen. Unter der Voraussetzung, dass die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen gelten, die wir weiter oben ausgenutzt haben, legt also das Prinzip der kleinsten Wirkung (2.65) die tatsächliche Systembahn fest. Es besitzt damit dieselbe Aussagekraft wie das Hamilton'sche Prinzip.

2.3.3 Fermat'sches Prinzip

Wir wollen das eben diskutierte Prinzip der kleinsten Wirkung noch auf einen Spezialfall, nämlich auf die

$$\text{kräftefreie Bewegung} \Leftrightarrow V = \text{const},$$

anwenden. Da $H = T + V = \text{const}$ vorausgesetzt war, gilt nun sogar:

$$\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j = H + L = 2T = \text{const}. \quad (2.80)$$

Auf allen zugelassenen Bahnen ist demnach die kinetische Energie eine Konstante der Bewegung. Das Prinzip (2.65) vereinfacht sich dann zu der Aussage:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt = \Delta(t_2 - t_1) \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.81)$$

Bei einer kräftefreien Bewegung sucht das System stets die Bahn, auf der die Laufzeit extremal (minimal) wird. Dies ist das zuerst von Fermat formulierte

- ▶ **Prinzip der kürzesten Ankunft,**

das in der geometrischen Optik als *Fermat'sches Prinzip* bekannt ist. Es besagt dort, dass sich der Lichtstrahl zwischen zwei Raumpunkten so bewegt, dass die Laufzeit minimal wird. Es lässt sich zum Beispiel auf die Lichtbrechung (Reflexionsgesetz) anwenden.

Spezialisieren wir uns weiter auf einen

- ▶ **kräftefreien Massenpunkt,**

dann gilt wegen $T = \text{const}$ auch $v = \text{const}$ und aus (2.81) wird:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} v dt = \Delta \int_1^2 ds \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.82)$$

Dies ist das

- Prinzip des kürzesten Weges.

Es bestimmt die kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes auf einer krummen Fläche längs einer so genannten *geodätischen Linie*. Allgemein versteht man darunter die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten auf einer gegebenen Fläche.

2.3.4 Jacobi-Prinzip

Manchmal erscheint es sinnvoll, die Zeit aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung vollständig zu eliminieren, sodass sich die Variation nur noch auf die räumliche Beschaffenheit der Systembahn bezieht. Nach (2.65) gilt zunächst:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j = \Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.83)$$

Für ein N -Teilchensystem lautet die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2T}} \sqrt{\sum_i m_i (d\mathbf{r}_i)^2} .$$

Mit $T = E - V$ folgt dann aus (2.83):

$$\Delta \int_1^2 \sqrt{2(E-V)} \sqrt{\sum_i m_i (d\mathbf{r}_i)^2} \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.84)$$

In dieser Form betrifft die Variation dann tatsächlich nur noch den räumlichen Verlauf der Bahn; Durchlaufzeiten spielen keine Rolle mehr. Δ -Variation und δ -Variation sind dann identisch.

Wir suchen eine noch etwas allgemeinere Darstellung. Wegen $H = E = \text{const}$, was insbesondere auch skleronome Zwangsbedingungen bedeutet, gilt nach (1.38) bis (1.42) für die kinetische Energie T :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,l} \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l . \quad (2.85)$$

μ_{jl} sind die *verallgemeinerten Massen* (1.40). Wir definieren:

$$(d\rho)^2 = \sum_{j,l} \mu_{jl} dq_j dq_l . \quad (2.86)$$

2.3 Wirkungsprinzipien

$d\rho$ ist die allgemeinste Form des Linienelements im S -dimensionalen Konfigurationsraum, dessen Koordinatenachsen die generalisierten Koordinatenachsen q_1, \dots, q_S bilden. In diesem Sinne sind die μ_{jl} die Elemente des so genannten

- metrischen Tensors.

Darunter versteht man in der Differentialgeometrie die Transformationsmatrix zwischen dem Quadrat $(d\rho)^2$ des Linienelements im S -dimensionalen Raum und den infinitesimalen Koordinatenänderungen. Wir erläutern dies an bekannten Beispielen des dreidimensionalen Anschauungsraums:

$$(d\rho)^2 = (dr)^2 \Rightarrow \mu_{jl} = \frac{\partial r}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_l} . \quad (2.87)$$

1) Kartesisch:

$$\begin{aligned} q_1 &= x ; \quad q_2 = y ; \quad q_3 = z ; \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \\ \Rightarrow \mu_{jl} &= \delta_{jl} . \end{aligned} \quad (2.88)$$

2) Zylindrisch:

$$\begin{aligned} q_1 &= \rho ; \quad q_2 = \varphi ; \quad q_3 = z ; \quad \mathbf{r} \equiv (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) , \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= \rho (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) , \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1) . \end{aligned}$$

Die Nicht-Diagonalelemente des metrischen Tensors verschwinden offenbar. Das Koordinatensystem ist *krummlinig-orthogonal*:

$$\mu_{\rho\rho} = 1 ; \quad \mu_{\varphi\varphi} = \rho^2 ; \quad \mu_{zz} = 1 . \quad (2.89)$$

Dies bedeutet:

$$(dr)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2 + (dz)^2 . \quad (2.90)$$

3) Sphärisch:

$$\begin{aligned} q_1 &= r ; \quad q_2 = \vartheta ; \quad q_3 = \varphi , \\ \mathbf{r} &\equiv r(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) , \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = r(\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta) ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r(-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0) .$$

Auch die Kugelkoordinaten stellen ein *krummlinig-orthogonales* Koordinatensystem dar. Die Nicht-Diagonalelemente des metrischen Tensors sind also Null:

$$\mu_{rr} = 1 ; \quad \mu_{\vartheta\vartheta} = r^2 ; \quad \mu_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \vartheta . \quad (2.91)$$

Das Quadrat des Linienelements lautet damit:

$$(d\mathbf{r})^2 = (dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 . \quad (2.92)$$

Die Metrik des Konfigurationsraums ist in der Regel nicht-kartesisch, sondern krummlinig mit im Allgemeinen nicht-verschwindenden Nicht-Diagonalelementen. Nach (2.85) und (2.86) gilt:

$$T = \frac{1}{2} \frac{(d\rho)^2}{(dt)^2} \Leftrightarrow dt = \frac{d\rho}{\sqrt{2T}} . \quad (2.93)$$

Damit wird aus (2.83) das

Jacobi-Prinzip

$$\Delta \int_1^2 \sqrt{E - V(\mathbf{q})} d\rho \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.94)$$

Für den Spezialfall der *kräftefreien* Bewegung gilt:

$$\Delta \int_1^2 d\rho \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.95)$$

Das System sucht die kürzeste Konfigurationsbahn, bewegt sich längs einer *geodätischen Linie* im Konfigurationsraum. Das muss in diesem abstrakten Raum nicht notwendig *geradlinig* heißen.

■ Anwendungsbeispiele

■ 1) Bahn eines kräftefreien Teilchens im dreidimensionalen Anschauungsraum

Da im Jacobi-Prinzip die Zeit nicht mehr vorkommt, sind die Δ - und δ -Variationsverfahren identisch:

$$\Delta \int_1^2 d\rho = \delta \int_1^2 d\rho \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.96)$$

2.3 Wirkungsprinzipien

Wir haben somit zu berechnen:

$$\delta \int_1^2 \sqrt{m(dx^2 + dy^2 + dz^2)} \stackrel{!}{=} 0 .$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \stackrel{!}{=} 0 .$$

Die Variation führen wir über die Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen (1.147) aus:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, y', z') &\equiv \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} &\stackrel{!}{=} 0 = -\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} , \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} &\stackrel{!}{=} 0 = -\frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} . \end{aligned}$$

Daran liest man ab:

$$\begin{aligned} y'^2 &= c_1 (1 + z'^2) ; \quad z'^2 = c_2 (1 + y'^2) \\ \Rightarrow y'^2 &= \text{const}_1 ; \quad z'^2 = \text{const}_2 . \end{aligned}$$

Die Teilchenbahn ist also – nicht überraschend – eine Gerade:

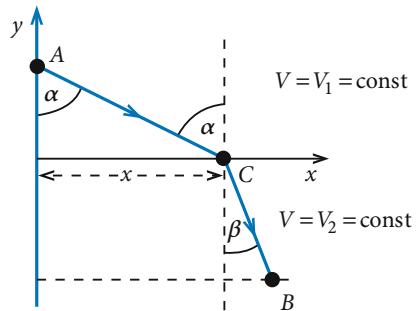
$$\begin{aligned} y(x) &= c x + \bar{c} , \\ z(x) &= d x + \bar{d} . \end{aligned} \quad (c, d, \bar{c}, \bar{d} = \text{const}) \quad (2.97)$$

■ 2) Elektronenoptisches Brechungsgesetz

Die x -Achse sei der Ort eines Potentialsprungs von $V_1 = \text{const}$ nach $V_2 = \text{const}$. In beiden Halbebene führt das Elektron eine kräftefreie Bewegung aus, die nach Beispiel 1) geradlinig verläuft (Abb. 2.8). Wir fragen uns: Wie müssen C und x gewählt werden, damit das Elektron von A nach B gelangt? Ausgangspunkt ist (2.94):

$$\begin{aligned} \Delta \int_A^B \sqrt{2mT} \sqrt{dx^2 + dy^2} &= \Delta \int_A^C \sqrt{2m(E - V_1)} ds + \Delta \int_C^B \sqrt{2m(E - V_2)} ds \\ &= \sqrt{2m(E - V_1)} \Delta \left(\sqrt{x^2 + y_A^2} \right) \\ &\quad + \sqrt{2m(E - V_2)} \Delta \left(\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2} \right) \end{aligned}$$

Abb. 2.8 Kräftefreie Bewegung eines Elektrons in zwei aneinander grenzenden Ebenen konstanten, aber unterschiedlichen Potentials (elektronenoptischen Brechungsgesetz)



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2m(E - V_1)} \left(\frac{dy}{dx} \sqrt{x^2 + y_A^2} \right) \Delta x \\
 &\quad + \sqrt{2m(E - V_2)} \left(\frac{dy}{dx} \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2} \right) \Delta x \\
 &\stackrel{!}{=} 0 .
 \end{aligned}$$

Mit $\Delta x \neq 0$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sqrt{E - V_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} - \sqrt{E - V_2} \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} \\
 &= \sqrt{E - V_1} \sin \alpha - \sqrt{E - V_2} \sin \beta .
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{E - V_2}{E - V_1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} . \quad (2.98)$$

2.4 Poisson-Klammer

2.4.1 Darstellungsräume

Wir wollen in diesem Abschnitt einige abstrakte Begriffe diskutieren, die für die weiteren Überlegungen nützlich sein werden. Ein paar von ihnen haben wir bereits wiederholt benutzt. Wir beginnen mit einer Klassifikation der Darstellungsräume.

■ 1) Konfigurationsraum

Dieser uns schon bekannte Darstellungsräum hat die

Dimension: S

2.4 Poisson-Klammer

und als

$$\text{Achsen: } \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_S) .$$

Beispiel: Linearer, harmonischer Oszillator (s. Beispiel 2 in Abschn. 2.2.2)

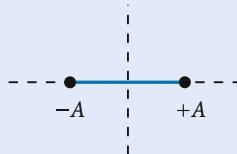


Abb. 2.9 Bahn des linearen, harmonischen Oszillators im Konfigurationsraum

Der Konfigurationsraum ist hier die x -Achse. Die *Konfigurationsbahn* wird von allen x gebildet, für die $|x| \leq A$ gilt.

Durch Angabe der Konfigurationsbahn ist ein mechanisches Problem noch nicht gelöst, da unbekannt bleibt, wo sich das System zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet.

■ 2) Ereignisraum

Dimension : $S + 1$,

Achsen : $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_S)$ und t .

Die *Ereignisbahn* (\mathbf{q}, t) ist konkret bestimbar bei Vorgabe von $2S$ Anfangsbedingungen. Das können die Konfigurationen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten sein, $(\mathbf{q}(t_1), \mathbf{q}(t_2))$, oder aber S generalisierte Koordinaten und die zugehörigen S generalisierten Geschwindigkeiten zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 , $(\mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0))$:

- ▶ Lagrange-Formalismus \Leftrightarrow Ereignisraum.

Beispiel: Linearer, harmonischer Oszillator

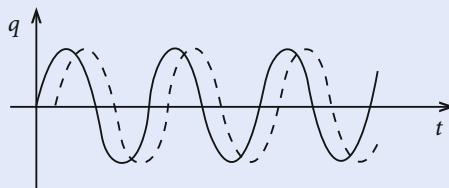


Abb. 2.10 Bahn des linearen, harmonischen Oszillators im Ereignisraum

Wegen $S = 1$ sind zwei Anfangsbedingungen vonnöten, um die Ereignisbahn eindeutig festzulegen.

■ 3) Phasenraum

Dimension : $2S$,

Achsen : $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_S)$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_S)$.

Da die Koordinaten q_j und die Impulse p_j als gleichberechtigte Variable aufzufassen sind, fasst man sie bisweilen auch zu einer *Phase* bzw. zu einem *Phasenvektor* zusammen:

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2S}) \equiv (q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S). \quad (2.99)$$

Als *Phasenbahn* oder *Phasentrajektorie* bezeichnet man die Menge aller Phasen $\boldsymbol{\pi}$, die das physikalische System im Laufe der Zeit annehmen kann.

Beispiel: Linearer, harmonischer Oszillator

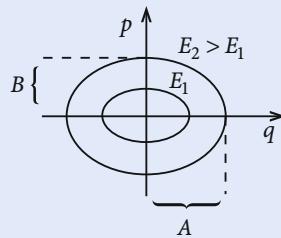


Abb. 2.11 Bahn des linearen, harmonischen Oszillators im Phasenraum für zwei unterschiedliche Energien

Nach (2.36) sind die Phasenbahnen nun Ellipsen

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega_0^2}} = 1$$

mit energieabhängigen Halbachsen:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}; \quad B = \sqrt{2mE}.$$

■ 4) Zustandsraum

Dimension : $2S + 1$,

Achsen : $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_S)$; $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_S)$ und t .

Dies ist der allgemeinste Darstellungsraum (*Phasenraum mit Zeitbelegung*). Alle anderen Räume sind Spezialfälle, d. h. Projektionen des Zustandsraums auf bestimmte Ebenen oder Achsen.

Beispiel: Linearer, harmonischer Oszillator

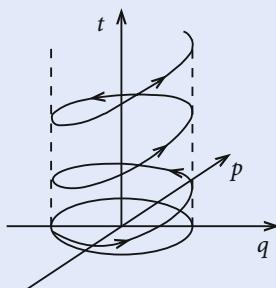


Abb. 2.12 Bahn des linearen, harmonischen Oszillators im Zustandsraum

Die Bahn $\pi(t)$ ist nun eine Spirallinie, die bei Vorgabe einer

$$\begin{aligned} & \text{Anfangsphase} \\ & \boldsymbol{\pi}_0 = \left(q_1^{(0)}, \dots, p_S^{(0)} \right) = \boldsymbol{\pi}(t_0) \end{aligned}$$

für alle Zeiten eindeutig festgelegt ist.

Da die Phasentrajektorie $\boldsymbol{\pi}(t)$ durch Lösung der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen gewonnen wird, also aus Differentialgleichungen **erster** Ordnung abgeleitet wird, genügt die Kenntnis des Phasenpunktes des mechanischen Systems zu einem einzigen Zeitpunkt, um die Phase $\boldsymbol{\pi}(t)$ für alle Zeiten festzulegen:

- ▶ **Hamilton-Formalismus \Leftrightarrow Zustandsraum.**

Bei der Besprechung des Zustandsraums sind wir auf einen Begriff gestoßen, der für die gesamte Physik von Bedeutung ist:

Definition 2.4.1 Zustand ψ :

Minimaler, aber vollständiger Satz von Bestimmungsstücken, der ausreicht, um alle Eigenschaften des Systems daraus ableiten zu können.

Dies ist eine sehr abstrakte Definition, die für jede physikalische Theorie konkretisiert und interpretiert werden muss, da für jede Disziplin die tatsächlich interessierenden Eigenschaften andere sein können.

Welche *Minimalinformation* legt die mechanischen Eigenschaften des Massenpunktes fest? Interessant wären Aussagen über Ort, Impuls, Drehimpuls, Energie u.s.w. Sie brauchen aber nicht alle gleichzeitig gemessen zu werden. Ort und Impuls reichen aus, um die anderen Größen festzulegen. Allerdings müssen auch wirklich **beide** gemessen werden, eine Größe allein ist nicht genug:

$$\begin{array}{l} \text{Jede mechanische Eigenschaft} \\ \text{des Massenpunktes} \end{array} \Leftrightarrow f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) .$$

In gleicher Weise sind die mechanischen Eigenschaften eines allgemeinen N -Teilchen-Systems durch generalisierte Koordinaten und generalisierte Impulse festgelegt:

$$\begin{array}{l} \text{Jede mechanische Eigenschaft} \\ \text{eines physikalischen Systems} \end{array} \Leftrightarrow f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f(\boldsymbol{\pi}) .$$

Dies bedeutet:

$$\begin{array}{l} \text{Zustand } \psi \text{ eines mecha-} \\ \text{nischen Systems} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Punkt } \boldsymbol{\pi} \text{ im} \\ \text{Zustandsraum} . \end{array}$$

Nach unserer Definition des Begriffs *Zustand* muss auch dessen Zeitentwicklung durch Vorgabe eines minimalen Satzes von Bestimmungsstücken zu irgendeinem Zeitpunkt t_0 ($\psi_0 = \psi(t_0)$) bereits eindeutig festgelegt sein:

$$\psi(t) = \psi(t; \psi_0) . \quad (2.100)$$

Mathematisch muss $\psi(t)$ deshalb aus einer Differentialgleichung 1. Ordnung in der Zeit folgen:

$$\dot{\psi}(t) = \tilde{f}(\psi(t)) . \quad (2.101)$$

Dies bedeutet für die Mechanik:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = \tilde{f}(\boldsymbol{\pi}(t)) . \quad (2.102)$$

2.4 Poisson-Klammer

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sind in der Tat von dieser Art. Damit ist auch klar, dass die Konfiguration $\mathbf{q}(t)$ selbst noch kein *Zustand* sein kann, denn die Differentialgleichungen, nach denen sich ihre zeitliche Entwicklung gestaltet, sind von 2. Ordnung in der Zeit (Lagrange'sche Bewegungsgleichungen).

2.4.2 Fundamentale Poisson-Klammern

Wir wollen nun das Konzept der Poisson-Klammern einführen. Dieses erlaubt eine besonders prägnante Formulierung der klassischen Bewegungsgleichungen und der Erhaltungssätze, die wir nun ableiten wollen.

Nach den Vorüberlegungen des letzten Abschnitts wissen wir, dass jede beliebige mechanische Observable als Phasenfunktion

$$f(\boldsymbol{\pi}, t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

darstellbar ist. Wir wollen ihre Bewegungsgleichung untersuchen:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Definition 2.4.2

$f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$: skalare Funktionen der Vektorpaare $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_S)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_S)$.

$$\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \equiv \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right). \quad (2.104)$$

Poisson-Klammer von f mit g .

An dem Klammersymbol auf der linken Seite ist auf die Variablen Bezug genommen, nach denen differenziert wird. Wir werden später zeigen, dass dieses unnötig ist. Die Poisson-Klammer wird sich als unabhängig von der Wahl der kanonischen Variablen herausstellen, in denen sie berechnet wird.

Aus der Bewegungsgleichung (2.103) wird damit:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.105)$$

Dies ist zunächst nur eine abkürzende Schreibweise. Von Bedeutung wird dieses Ergebnis erst, wenn wir gezeigt haben, dass die Poisson-Klammer von der (q, p) -Wahl unabhängig ist.

An (2.104) und (2.105) liest man leicht die folgenden Spezialfälle ab:

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}_{q,p}, \quad (2.106)$$

$$\dot{p}_j = \{p_j, H\}_{q,p}. \quad (2.107)$$

Die nächsten drei Beziehungen bezeichnet man als

fundamentale Poisson-Klammer:

$$\{q_i, q_j\}_{q,p} = 0, \quad (2.108)$$

$$\{p_i, p_j\}_{q,p} = 0, \quad (2.109)$$

$$\{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{ij}. \quad (2.110)$$

Wir begründen nur (2.110). Dazu setzen wir in die Definition (2.104) $f = q_i$ und $g = p_j$ ein:

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\}_{q,p} &= \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^S (\delta_{ik} \delta_{jk} - 0) = \delta_{ij} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt zeigen wir nun, dass die fundamentalen Klammern von der speziellen Wahl der kanonischen Variablen unabhängig sind.

Satz 2.4.1

Seien (q, p) und (Q, P) zwei kanonisch konjugierte Variablensätze, für die jeweils die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen gelten mit:

$$H(q, p) = \tilde{H}(Q, P).$$

2.4 Poisson-Klammer

Dabei soll sich $\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ aus $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ durch Einsetzen von $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ und $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ergeben. Dann gilt:

$$\{Q_i, Q_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0 ; \quad \{P_i, P_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0 , \quad (2.111)$$

$$\{Q_i, P_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \delta_{ij} . \quad (2.112)$$

Beweis

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{d}{dt} Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k,l} \left[\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{k,l} \left[\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right] \\ &= \sum_l \left(-\dot{P}_l \{Q_i, Q_l\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \dot{Q}_l \{Q_i, P_l\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right) . \end{aligned}$$

Der Vergleich liefert:

$$\{Q_i, Q_l\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0 ; \quad \{Q_i, P_l\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \delta_{il} .$$

Über \dot{P}_i findet man ganz analog die dritte Klammer.

Satz 2.4.2

Der Wert einer Poisson-Klammer ist unabhängig von dem Satz kanonischer Koordinaten, der als Basis verwendet wurde.

Beweis

F und G seien beliebige Phasenfunktionen und $(\mathbf{q}, \mathbf{p}), (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ zwei Sätze kanonischer Variablen, für die

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) ; & \mathbf{p} &= \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) , \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) ; & \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

gilt.

$$\begin{aligned}\{F, G\}_{q,p} &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{j,l} \left[\frac{\partial F}{\partial q_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right] \\ &= \sum_l \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \{F, Q_l\}_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_l} \{F, P_l\}_{q,p} \right).\end{aligned}$$

An diesem Ausdruck können wir zwei nützliche Zwischenergebnisse ablesen. Setzen wir speziell $F = Q_k$ und nutzen (2.111) und (2.112) aus, so folgt:

$$\{G, Q_k\}_{q,p} = -\frac{\partial G}{\partial P_k}. \quad (2.113)$$

Setzen wir dagegen $F = P_k$, so ergibt sich:

$$\{G, P_k\}_{q,p} = \frac{\partial G}{\partial Q_k}. \quad (2.114)$$

Diese beiden Zwischenergebnisse werden oben eingesetzt:

$$\{F, G\}_{q,p} = \sum_l \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \left(-\frac{\partial F}{\partial P_l} \right) + \frac{\partial G}{\partial P_l} \frac{\partial F}{\partial Q_l} \right) = \{F, G\}_{Q,P}.$$

Dies war zu beweisen. Wir können somit ab jetzt die Indizes am Klammersymbol weglassen. Die Basis kann aus **irgendwelchen** kanonisch konjugierten Variablen bestehen.

2.4.3 Formale Eigenschaften

Bis jetzt bedeutete die Einführung der Poisson-Klammer lediglich eine Vereinfachung der Schreibweise, die uns der Lösung eines praktischen Problems zunächst keinen Schritt näher bringt. Wichtig sind jedoch einige algebraische Eigenschaften der Klammer, die eine über die Klassische Mechanik hinausgehende Verallgemeinerung zulassen. Wir listen diese jetzt auf und bringen den Beweis, falls nicht offensichtlich, anschließend:

Antisymmetrie:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}; \quad \{f, f\} = 0 \quad \forall f. \quad (2.115)$$

2.4 Poisson-Klammer

Linearität:

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}, \quad c_1, c_2 : \text{Konstante}. \quad (2.116)$$

Nullelement:

$$\{c, g\} = 0 \quad \forall g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad c : \text{Konstante}. \quad (2.117)$$

Produktregel:

$$\{f, gh\} = g \{f, h\} + \{f, g\} h. \quad (2.118)$$

Jacobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (2.119)$$

Gleichungen (2.115) bis (2.117) folgen unmittelbar aus der Definition (2.104) der Klammer. Dasselbe gilt auch für (2.118), wenn man die Produktregel für Differentiationen beachtet. Gleichung (2.119) beweist man etwas langwierig durch Einsetzen oder eleganter wie folgt:

Wir drücken zunächst die Poisson-Klammer durch einen Differentialoperator aus:

$$\{g, h\} = D_g h,$$

wobei

$$D_g = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \equiv \sum_{i=1}^{2S} \alpha_i(g) \frac{\partial}{\partial \pi_i}.$$

Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} & \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = D_f(D_g h) - D_g(D_f h) \\ &= \sum_{i,j} \left[\beta_i(f) \frac{\partial}{\partial \pi_i} \left(\alpha_j(g) \frac{\partial h}{\partial \pi_j} \right) - \alpha_j(g) \frac{\partial}{\partial \pi_j} \left(\beta_i(f) \frac{\partial h}{\partial \pi_i} \right) \right] \\ &= \sum_j \left\{ \sum_i \left[\left(\beta_i(f) \frac{\partial}{\partial \pi_i} \alpha_j(g) \right) - \left(\alpha_i(g) \frac{\partial}{\partial \pi_i} \beta_j(f) \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial \pi_j}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer hängt von f und g , nicht aber von h ab:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = \sum_{j=1}^S \left(A_j \frac{\partial h}{\partial q_j} + B_j \frac{\partial h}{\partial p_j} \right).$$

A_j, B_j sind unabhängig von h . Sie lassen sich deshalb über eine spezielle Wahl von h berechnen:

$h = q_i$:

$$A_i = \{f, \{g, q_i\}\} + \{g, \{q_i, f\}\} = - \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial p_i} \right\} + \left\{ g, \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} = - \frac{\partial}{\partial p_i} \{f, g\} .$$

Hier haben wir (2.113) ausgenutzt, im nächsten Schritt verwenden wir (2.114):

$h = p_i$:

$$B_i = \{f, \{g, p_i\}\} + \{g, \{p_i, f\}\} = \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\} - \left\{ g, \frac{\partial f}{\partial q_i} \right\} = \frac{\partial}{\partial q_i} \{f, g\} .$$

Dies setzen wir oben ein:

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} &= \sum_{j=1}^s \left(- \frac{\partial}{\partial p_j} \{f, g\} \frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j} \{f, g\} \frac{\partial h}{\partial p_j} \right) \\ &= \{\{f, g\}, h\} . \end{aligned}$$

Das war zu beweisen.

2.4.4 Integrale der Bewegung

Nach (2.105) ist die zeitliche Änderung einer Zustandsgröße im Wesentlichen durch die Poisson-Klammer dieser Größe mit der Hamilton-Funktion H gegeben. Dies macht noch einmal die Bedeutung von H klar. Die Hamilton-Funktion bestimmt die zeitliche Entwicklung mechanischer Observabler.

Es sei

$$F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

eine physikalische Größe, die für alle Zeiten denselben Wert hat:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Leftrightarrow F : \text{Integral der Bewegung} . \quad (2.120)$$

Nach (2.105) ist dies genau dann erfüllt, wenn

$$\{H, F\} \stackrel{!}{=} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.121)$$

gilt. Die Konstante der Bewegung kann also durchaus selbst noch explizit von der Zeit abhängen. Ist dies nicht der Fall, so verschwindet die Poisson-Klammer von H mit F . Wir haben damit ein *kompaktes* Kriterium für die Entscheidung, ob ein Integral der Bewegung

2.4 Poisson-Klammer

vorliegt oder nicht. Man vergleiche dies mit der ursprünglichen Definition (1.162) für die Bewegung im Ereignisraum.

Für H gilt:

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.122)$$

Dies entspricht dem früheren Ergebnis (2.18). Hängt H nicht explizit von der Zeit ab, so handelt es sich um ein Integral der Bewegung, das, wie wir wissen, bei skleronomen Zwangsbedingungen mit dem Energiesatz identisch ist.

Satz 2.4.3 Poisson'scher Satz:

Die Poisson-Klammer zweier Integrale der Bewegung ist selbst wieder ein Integral der Bewegung.

Beweis

f, g seien Integrale der Bewegung. Das heißt nach (2.121):

$$\{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial t}; \quad \{H, g\} = \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Wir nutzen die Jacobi-Identität (2.119) aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} \\ &= -\left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \left\{g, \frac{\partial f}{\partial t}\right\} + \{H, \{f, g\}\}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet mit dem Ergebnis aus Aufgabe 2.4.4:

$$\{H, \{f, g\}\} = \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\},$$

sodass mit (2.121) die Behauptung folgt. $\{f, g\}$ ist ebenfalls ein Integral der Bewegung.

Mitunter ist es möglich, durch Anwendung des Poisson'schen Theorems eine ganze Folge von Integralen der Bewegung zu konstruieren. Dies bedeutet dann natürlich einen wichtigen Schritt in Richtung Lösung des Bewegungsproblems. Bisweilen führt die Poisson-Klammer zweier Bewegungsintegrale aber auch nur auf eine triviale Konstante oder einfach auf eine Funktion der Ausgangsintegrale. Das stellt dann natürlich kein neues Bewegungsintegral dar.

2.4.5 Bezug zur Quantenmechanik

Wir wollen für den Moment die konkrete Definition der klassischen Poisson-Klammer vergessen und die

- ▶ abstrakte Klammer: $\{ \dots, \dots \}$

mit den Eigenschaften (2.115) bis (2.119) zum

- ▶ Axiomensystem einer abstrakten mathematischen Struktur

erklären. Eine mögliche **konkrete** Realisierung wäre dann die klassische Poisson-Klammer (2.104). Es gibt aber auch andere denkbare Realisierungen. Eine weitere wichtige trifft

die linearen Operatoren $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \dots$,
dargestellt durch quadratische Matrizen.

Man definiert für diese den so genannten

Kommutator

$$[\widehat{A}, \widehat{B}]_- \equiv \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}. \quad (2.123)$$

Da die Reihenfolge von Operatoren nicht beliebig ist, ist der Kommutator in der Regel von Null verschieden und selbst wieder ein Operator. Versteht man unter *konstantem* \widehat{A} ein Vielfaches der Einheitsmatrix und achtet in (2.118) streng auf die Reihenfolge der Operatoren, dann erfüllt der Kommutator die Axiome (2.115) bis (2.119). Die Realisierung der abstrakten Klammer durch den Kommutator (2.123) bestimmt entscheidend die so genannte

- ▶ Quantenmechanik.

Klassische Mechanik und Quantenmechanik werden in diesem Sinne von derselben übergeordneten, abstrakten mathematischen Struktur regiert. Es handelt sich *lediglich* um unterschiedliche Realisierungen der *abstrakten Klammer*. Die Realisierung *Quantenmechanik* lässt sich in dem folgenden

- ▶ Korrespondenzprinzip

konkretisieren:

2.4 Poisson-Klammer

1. Messbare, physikalische Größe A (*Observable*) \Leftrightarrow hermitescher, linearer Operator \widehat{A} , dargestellt durch eine quadratische Matrix in einem speziellen Vektorraum (*Hilbert-Raum*).
2. Messwerte \Leftrightarrow Eigenwerte oder Erwartungswerte dieser Operatoren.
3. $\{\dots, \dots\} \Leftrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\widehat{A}, \widehat{B}]_-$,
wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ und $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s: Planck'sches Wirkungsquantum.
4. Fundamentalklammern:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j]_- = i\hbar \delta_{ij}, \quad (2.124)$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j]_- = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- = 0. \quad (2.125)$$

5. Hamilton-Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \Leftrightarrow$ Hamilton-Operator $\widehat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t)$.
6. Bewegungsgleichung $\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \widehat{A} = \frac{1}{i\hbar} [\widehat{A}, \widehat{H}]_- + \frac{\partial}{\partial t} \widehat{A}$. (2.126)

Wir wollen zum Schluss an einem einfachen Beispiel demonstrieren, wie sich mit Hilfe der *abstrakten Klammer* physikalische Probleme lösen lassen, ohne auf eine spezielle Realisierung der Klammer Bezug zu nehmen.

Wir suchen die Bewegungsgleichung des *harmonischen Oszillators*, nach (2.35) definiert durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2.$$

Wegen $\partial H / \partial t = 0$ gilt zunächst:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \{p, H\} = \frac{1}{2m} \{p, p^2\} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \{p, q^2\} \\ &= \frac{1}{2m} (p \{p, p\} + \{p, p\} p) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (q \{p, q\} + \{p, q\} q) \\ &= -m \omega_0^2 q. \end{aligned}$$

Ganz analog findet man

$$\dot{q} = \{q, H\} = \frac{p}{m}.$$

Dies sind aber genau die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

ohne dass wir an irgendeiner Stelle die spezielle Definition der abstrakten Klammern als klassische Poisson-Klammer verwendet hätten. Folgerichtig müssen

$$\dot{\hat{p}} = -m \omega_0^2 \hat{q}, \quad (2.127)$$

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{m} \hat{p}. \quad (2.128)$$

auch in der Quantenmechanik die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators sein, wenn man \hat{q} , \hat{p} nach den Vorschriften der Quantenmechanik als Operatoren interpretiert.

2.4.6 Aufgaben

Aufgabe 2.4.1

- Bestimmen Sie die Poisson-Klammern, die aus den kartesischen Komponenten des Impulses \mathbf{p} und des Drehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ eines Massenpunktes gebildet sind.
- Bestimmen Sie die Poisson-Klammern, die aus den Komponenten von \mathbf{L} bestehen.

Aufgabe 2.4.2

Gegeben sei der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ eines Massepunktes m .

- Es sei:

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2.$$

Berechnen Sie:

$$\{\mathbf{L}^2, L_{x,y,z}\}.$$

- Zeigen Sie, dass wenn zwei Komponenten von \mathbf{L} Integrale der Bewegung sind, dieses auch für die dritte gilt. L_x, L_y, L_z sollen nicht explizit zeitabhängig sein!

Aufgabe 2.4.3

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentraalfeld.

1. Wie lautet die Hamilton-Funktion? Welche generalisierten Koordinaten sind günstig?
2. Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass die z -Komponente L_z des Drehimpulses ein Integral der Bewegung ist!

Aufgabe 2.4.4

Zeigen Sie, dass für die Funktionen

$$f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t); \quad g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t); \quad h = h(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

die folgenden Beziehungen gelten:

- 1) $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\},$
- 2) $\frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\},$
- 3) $\{f, g \cdot h\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h.$

Aufgabe 2.4.5

1. Man gebe einen Ausdruck für die Poisson-Klammer des Drehimpulses \mathbf{L} mit einem beliebigen, von \mathbf{r} und \mathbf{p} abhängigen Vektor \mathbf{A} an.
2. Berechnen Sie damit speziell $\{L_i, x_j\}$,
3. $\{L_i, p_j\}$,
4. $\{L_i, L_j\}$ und
5. $\{\mathbf{A}^2, L_j\}.$

Aufgabe 2.4.6

Zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 bewegen sich in einem beliebigen Kraftfeld ohne Zwangsbedingungen. Sie besitzen dabei die Drehimpulse \mathbf{L}_1 und \mathbf{L}_2

- Warum muss für die Poisson-Klammer zwischen diesen beiden Observablen gelten:

$$\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2\} = 0 .$$

- Bestätigen Sie die folgende Beziehung:

$$\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2\} = -(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) .$$

- Verifizieren Sie mit Teil 2.

$$\{\mathbf{L}_1, (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)^n\} = -n(\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)^{n-1} (\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Aufgabe 2.4.7

- Die mechanische Observable $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ sei wie die Hamilton-Funktion H ein Integral der Bewegung. Zeigen Sie, dass dann auch $\partial f / \partial t$ ein Integral der Bewegung ist.
- Betrachten Sie die lineare, kräftefreie Bewegung eines Teilchens der Masse m . Zeigen Sie, dass H ein Integral der Bewegung ist, und verifizieren Sie für die Observable

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}t}{m}$$

die Aussage von Teil 1. Zeigen Sie also, dass sowohl f als auch $\partial f / \partial t$ Integrale der Bewegung sind.

Aufgabe 2.4.8

Kontrollieren Sie, ob für den linearen harmonischen Oszillator die mechanische Observable

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = p \sin \omega t - m\omega q \cos \omega t$$

ein Integral der Bewegung ist.

Bestätigen Sie das Ergebnis durch direkte Berechnung von df/dt !

Aufgabe 2.4.9

$$A = A(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$$

sei eine nicht explizit zeitabhängige Phasenraumfunktion:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 .$$

Die Hamilton-Funktion H des Systems sei ebenfalls nicht explizit zeitabhängig:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 .$$

Drücken Sie die Zeitabhängigkeit von A durch H und $A(0) = A(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ aus!

2.5 Kanonische Transformationen

2.5.1 Motivation

Die Klassische Mechanik kennt vier äquivalente Formulierungen:

1. Newton (Bd. 1),
2. Lagrange (Kap. 1),
3. Hamilton (Kap. 2),
4. Hamilton-Jacobi (Kap. 3).

Der Übergang vom Lagrange- zum Hamilton-Formalismus wurde mathematisch mit Hilfe einer Legendre-Transformation vollzogen. Die Hamilton-Jacobi-Theorie werden wir im nächsten Abschnitt mit Hilfe einer so genannten *kanonischen Transformation* auf der in diesem Kapitel diskutierten Hamilton-Mechanik aufbauen. Dazu sind einige Vorüberlegungen angebracht.

Wir haben früher gezeigt, dass im Lagrange-Formalismus die Wahl der generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_S an sich beliebig ist, nur ihre Gesamtzahl S liegt fest. Die Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 , \quad j = 1, 2, \dots, S ,$$

sind im Konfigurationsraum nämlich *forminvariant gegenüber Punkttransformationen*. Das haben wir in Abschn. 1.2.1 bewiesen. Für die Transformation

$$(q_1, \dots, q_S) \Leftrightarrow (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_S)$$

mit

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(\mathbf{q}, t) ; \quad q_j = q_j(\bar{\mathbf{q}}, t) , \quad j = 1, 2, \dots, S$$

folgen formal unveränderte Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_j} = 0 , \quad j = 1, 2, \dots, S ,$$

wobei die *neue* Lagrange-Funktion \bar{L} aus der *alten* einfach durch Einsetzen der Transformationsformeln hervorgeht:

$$\bar{L} = L(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) = \bar{L}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}, t) .$$

Die Lagrange-Gleichungen sind außerdem invariant gegenüber so genannten *mechanischen Eichtransformationen* (1.84):

$$L \Rightarrow L + L_0 ; \quad L_0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) .$$

f darf dabei eine fast beliebige Funktion von \mathbf{q} und t sein. Die eigentliche Ursache für diese Invarianzen liegt im Wirkungsfunktional $S\{\mathbf{q}(t)\}$ (1.120), das stets für dieselbe Bahn aus M (1.118) extremal wird, unabhängig von der speziellen Koordinatenwahl. Andererseits folgen aber aus der Forderung $\delta S = 0$ die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

Nun haben wir mit dem *modifizierten Hamilton'schen Prinzip* (2.48) eine solche Formulierung kennen gelernt, aus der die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ableitbar sind, wenn man nur die Koordinaten \mathbf{q} und die Impulse \mathbf{p} als selbständige Variable behandelt und unabhängig voneinander variiert. Folgerichtig sind auch die kanonischen Gleichungen gegenüber Punkttransformationen forminvariant, wenn man die Impulse gemäß ihrer Definition

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

passend mittransformiert.

Auch von der *mechanischen Eichtransformation* (1.84) kann man zeigen, dass sie nicht nur eine äquivalente Lagrange-, sondern auch eine äquivalente Hamilton-Funktion liefert. Äquivalent soll dabei heißen, dass die kanonischen Gleichungen, die die Dynamik des Systems bestimmen, ebenso wie die Lagrange-Gleichungen unter dieser Eichtransformation forminvariant bleiben. Das sieht man wie folgt ein: Wegen $\bar{q}_j = q_j$ für alle j und

$$\begin{aligned} \bar{p}_j &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{q}, t) + \sum_{l=1}^S \frac{\partial f}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \end{aligned}$$

ergeben sich aus der mechanischen Eichtransformation die folgenden neuen Variablen:

$$\bar{q}_j = q_j ; \quad \bar{p}_j = p_j + \frac{\partial f}{\partial q_j} . \quad (2.129)$$

Damit konstruieren wir die neue Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \sum_j \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \bar{L} = \sum_j \left(p_j + \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j - L - \frac{d}{dt} f \\ &= H + \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j - \sum_l \frac{\partial f}{\partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial f}{\partial t} . \end{aligned}$$

Mit der so transformierten Hamilton-Funktion,

$$\bar{H} = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q}, t), t) - \frac{\partial f(\mathbf{q}, t)}{\partial t} , \quad (2.130)$$

überprüfen wir die kanonischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_j} = \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_l \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} \\ &= -\dot{p}_j - \sum_l \dot{q}_l \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_l} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} \\ &= -\dot{p}_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_j} f(\mathbf{q}, t) . \end{aligned}$$

Mit (2.129) bleibt:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = -\dot{\bar{p}}_j . \quad (2.131)$$

Analog findet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\bar{p}}_j} &= \sum_{l=1}^S \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial \dot{\bar{p}}_j} = \sum_{l=1}^S \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta_{jl} = \dot{q}_j , \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\bar{p}}_j} &= \dot{\bar{q}}_j . \end{aligned} \quad (2.132)$$

Gleichungen (2.131) und (2.132) zeigen die Forminvarianz der kanonischen Gleichungen. Die obige Ableitung enthält ein sehr wichtiges Detail. Wir haben nämlich zeigen können, dass neben dem Variablensatz

$$q_j, p_j , \quad j = 1, 2, \dots, S$$

auch

$$q_j, p_j + \frac{\partial}{\partial q_j} f(\mathbf{q}, t), \quad j = 1, 2, \dots, S$$

mit beliebigem $f(\mathbf{q}, t)$ ein *kanonisch konjugiertes* Variablenpaar ist. Vorgabe von \mathbf{q} legt also die dazu kanonisch konjugierten Impulse nicht eindeutig fest.

Dies ist typisch für die Hamilton'sche Formulierung der Klassischen Mechanik, für die die Impulse p_j neben den Koordinaten q_j gleichberechtigte Variable sind. Die Klasse der *erlaubten* Transformationen, bei denen Lagrange'sche und Hamilton'sche Bewegungsgleichungen invariant bleiben, ist deshalb wesentlich größer als in der Lagrange-Mechanik. Darin liegt ein Vorteil der Hamilton-Mechanik, den wir im Folgenden genauer untersuchen und ausnutzen wollen.

Unter einer

Phasentransformation

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t); \quad \bar{p}_j = \bar{p}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad j = 1, 2, \dots, S \quad (2.133)$$

versteht man eine Punkttransformation im Phasenraum. Während **alle** Punkttransformationen im Konfigurationsraum zu einer *äquivalenten* Lagrange-Funktion führen, bleiben nicht bei jeder Phasentransformation die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen forminvariant. Andererseits sind aber nur solche Transformationen der Hamilton'schen Mechanik interessant, die die Form der Bewegungsgleichungen nicht verändern. Man bezeichnet sie als *kanonische Transformationen*.

Definition 2.5.1

Die Phasentransformation

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longrightarrow (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$$

heißt **kanonisch**, falls es eine Funktion

$$\bar{H} = \bar{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \quad (2.134)$$

gibt, für die

$$\dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j}; \quad \dot{\bar{p}}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S \quad (2.135)$$

gelten.

2.5 Kanonische Transformationen

Wie dabei \bar{H} aus H hervorgeht, ist eigentlich unwesentlich. Bei dem Invarianzbeweis der Lagrange'schen Gleichungen hatte sich \bar{L} aus L einfach durch Einsetzen ergeben. Ist das bei \bar{H} auch der Fall, gilt also

$$\bar{H} = H(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), t), \quad (2.136)$$

so nennt man die Transformation *kanonisch im engeren Sinne*.

Bevor wir uns praktische Kriterien für kanonische Transformationen erarbeiten, sollen zwei spezielle Beispiele zeigen, was kanonische Transformationen leisten können.

■ 1) Die Phasentransformation

$$\dot{\bar{q}}_j = \dot{\bar{q}}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\dot{p}_j, \quad (2.137)$$

$$\dot{\bar{p}}_j = \dot{\bar{p}}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = q_j \quad (2.138)$$

ist *kanonisch im engeren Sinne*, denn mit

$$\begin{aligned} H &= H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \\ \bar{H} &= \bar{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) = H(\bar{\mathbf{p}}, -\bar{\mathbf{q}}, t) \end{aligned} \quad (2.139)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j} &= \frac{\partial H(\bar{\mathbf{p}}, -\bar{\mathbf{q}}, t)}{\partial \bar{p}_j} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = \dot{\bar{q}}_j, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_j} &= \frac{\partial H(\bar{\mathbf{p}}, -\bar{\mathbf{q}}, t)}{\partial \bar{q}_j} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_j} = -\dot{q}_j = -\dot{\bar{p}}_j. \end{aligned}$$

Die kanonischen Gleichungen bleiben also bei der Transformation (2.137) und (2.138) forminvariant. Diese Phasentransformation vertauscht *Orte* und *Impulse* und macht damit eindrucksvoll klar, dass die begriffliche Zuordnung $\mathbf{q} \Leftrightarrow$ *Ort* und $\mathbf{p} \Leftrightarrow$ *Impuls* im Rahmen der Hamilton'schen Mechanik ziemlich wertlos geworden ist. Man sollte \mathbf{q} und \mathbf{p} als abstrakte, völlig gleichberechtigte, unabhängige Variable ansehen.

■ 2) Zyklische Koordinaten

Wir haben bereits mehrfach erkennen können, dass die *richtige* Wahl der generalisierten Koordinaten q_j ganz entscheidend wichtig für die praktische Lösbarkeit eines mechanischen Problems sein kann. Falls es uns gelänge, die Wahl so zu treffen, dass

- ▶ alle q_j zyklisch

sind, dann ließe sich das Problem trivial lösen, wenn auch noch

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (H: \text{Konstante der Bewegung})$$

angenommen werden darf. „Alle q_j zyklisch“ bedeutet:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j \Leftrightarrow H = H(\mathbf{p}) . \quad (2.140)$$

Es gilt dann:

$$\dot{p}_j = 0 \quad \forall j \Leftrightarrow p_j = \text{const} = c_j . \quad (2.141)$$

Aus der anderen kanonischen Gleichung ergibt sich demnach:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j(p_1, \dots, p_S) = \dot{q}_j(c_1, \dots, c_S) .$$

Dies bedeutet aber

$$\dot{q}_j = \text{const} = \alpha_j \quad \forall j , \quad (2.142)$$

was sich leicht integrieren lässt:

$$q_j = \alpha_j t + d_j , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (2.143)$$

Die α_j sind nach (2.142) und die c_j, d_j über die Anfangsbedingungen bekannt. Durch (2.141) und (2.143) ist das Problem somit elementar gelöst.

Die Frage ist natürlich, ob sich die obige Annahme „alle q_j zyklisch“ wirklich realisieren lässt. Das ist in der Tat im Prinzip möglich und wird in der Hamilton-Jacobi-Theorie (Kap. 3) zur Lösungsmethode ausgebaut. Es ist allerdings zu erwarten, dass die physikalisch *plausiblen*, d. h. nahe liegenden Koordinaten diese Bedingung nicht erfüllen, sondern zunächst passend kanonisch transformiert werden müssen. Die eingehende Untersuchung kanonischer Transformationen dürfte damit ausreichend motiviert sein.

2.5.2 Die erzeugende Funktion

Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen ist das *modifizierte Hamilton'sche Prinzip* (2.55). Dieses besagt, dass die Systembewegung so erfolgt, dass das Wirkungsfunktional

$$S\{\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \right) \quad (2.144)$$

2.5 Kanonische Transformationen

auf der Menge der Phasenbahnen,

$$M = \{(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) : \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_a, \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_e; \mathbf{p}(t_1), \mathbf{p}(t_2) \text{ beliebig}\} , \quad (2.145)$$

für die tatsächliche Bahn extremal wird. Was ist nun bezüglich dieses Prinzips zu beachten, wenn wir eine Phasentransformation

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longrightarrow (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$$

durchführen?

1. Die Randbedingungen können sich ändern! Nach der Transformation haben die Bahnen, die zu M gehören, nicht notwendig alle dieselben Anfangs- und Endkonfigurationen, da

$$\bar{\mathbf{q}}(t_1) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}(t_1), t_1) , \quad (2.146)$$

$$\bar{\mathbf{q}}(t_2) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_e, \mathbf{p}(t_2), t_2) \quad (2.147)$$

von $\mathbf{p}(t_1)$ bzw. $\mathbf{p}(t_2)$ abhängen und damit verschieden sein können.

2. Wenn die Transformation zudem kanonisch sein soll, so muss auch für die neuen Variablen ein modifiziertes Hamilton'sches Prinzip gelten:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^S \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \bar{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \right) \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.148)$$

Dabei trifft die Variation unter Umständen andere Bahnen als die der ursprünglichen Konkurrenzschar (2.145), nämlich solche, die feste Anfangs- und Endkonfigurationen $\bar{\mathbf{q}}_a$ und $\bar{\mathbf{q}}_e$ gemeinsam haben.

Dazu beweisen wir folgenden Satz:

Satz 2.5.1

Die Phasentransformation $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \longrightarrow (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ ist **kanonisch, falls**

$$\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^S \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \bar{H} + \frac{dF_1}{dt} \quad (2.149)$$

gilt. Dabei ist

$$F_1 = F_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t) \quad (2.150)$$

eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktion der „alten“ und der „neuen“ Koordinaten.

Beweis

Wir zeigen zunächst, dass F_1 die Transformation und auch \bar{H} vollständig festlegt, sodass die Bezeichnung

$$F_1 = F_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \Leftrightarrow \text{Erzeugende der Transformation}$$

gerechtfertigt erscheinen wird. – Wir beginnen mit:

$$dF_1 = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt.$$

Zum Vergleich schreiben wir (2.149) um:

$$dF_1 = \sum_{j=1}^S (p_j dq_j - \bar{p}_j d\dot{q}_j) + (\bar{H} - H) dt.$$

Bezüglich F_1 sind \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ und t als unabhängige Variable aufzufassen; deshalb folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}; \quad \bar{p}_j = -\frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_j}; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (2.151)$$

Dadurch ist die Transformation bereits vollständig bestimmt. Sind nämlich \mathbf{q} , \mathbf{p} und F_1 vorgegeben, so löst man

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = p_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

nach $\dot{\mathbf{q}}$ auf und erhält damit die erste Hälfte der Transformationsgleichungen:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

Das setzen wir in

$$\bar{p}_j = -\frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_j} = \bar{p}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

ein und erhalten dann:

$$\bar{p}_j = \bar{p}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).$$

Diese Überlegung setzt wie üblich voraus, dass die Funktion $F_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ alle notwendigen Voraussetzungen bezüglich der Differenzierbarkeit und Invertierbarkeit erfüllt.

2.5 Kanonische Transformationen

Auch die neue Hamilton-Funktion ist durch $F_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ vollständig festgelegt:

$$\overline{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) = H(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), t) + \frac{\partial}{\partial t} F_1(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2.152)$$

Wir zeigen nun im zweiten Schritt, dass die von $F_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ erzeugte Phasentransformation in der Tat kanonisch ist. Dazu betrachten wir das Wirkungsfunktional:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^S \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \overline{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) + \frac{dF_1}{dt} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{j=1}^S \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \overline{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \right) + F_1(\mathbf{q}_e, \dot{\mathbf{q}}(t_2), t_2) - F_1(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}(t_1), t_1). \end{aligned}$$

S muss nun statt nach \mathbf{q} und \mathbf{p} nach $\bar{\mathbf{q}}$ und $\bar{\mathbf{p}}$ variiert werden, wobei das oben unter Punkt 1) Gesagte zu beachten ist:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \delta S &= \delta \{ F_1(\mathbf{q}_e, \dot{\mathbf{q}}(t_2), t_2) - F_1(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}(t_1), t_1) \} \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{j=1}^S \left(\delta \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j + \bar{p}_j \delta \dot{\bar{q}}_j - \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{q}_j} \delta \bar{q}_j - \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{p}_j} \delta \bar{p}_j \right) \right]. \end{aligned}$$

Da $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_e$ für die Variation fest sind, gilt:

$$\delta \{ F_1(\mathbf{q}_e, \dot{\mathbf{q}}(t_2), t_2) - F_1(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}(t_1), t_1) \} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_j} \delta \bar{q}_j \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Wenn wir dann noch umformen,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \bar{p}_j \delta \dot{\bar{q}}_j = \bar{p}_j \delta \bar{q}_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\bar{p}}_j \delta \bar{q}_j,$$

so bleibt:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \sum_{j=1}^S \left(\bar{p}_j + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_j} \right) \delta \bar{q}_j \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^S \left[\delta \bar{p}_j \left(\dot{\bar{q}}_j - \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{p}_j} \right) - \delta \bar{q}_j \left(\dot{\bar{p}}_j + \frac{\partial \overline{H}}{\partial \bar{q}_j} \right) \right]. \quad (2.153)$$

Nach unseren Vorüberlegungen können wir für den ersten Summanden **nicht** schließen, dass $\delta \bar{q}_j$ bei t_1 oder bei t_2 verschwindet. Wegen (2.151) ist aber bereits die

Klammer Null. Wegen der Unabhängigkeit der neuen Variablen \bar{q}_j, \bar{p}_j folgen dann aus (2.153) die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j}; \quad \dot{\bar{p}}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_j}. \quad (2.154)$$

Die durch $F_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t)$ erzeugte Transformation ist also in der Tat kanonisch.

2.5.3 Äquivalente Formen der erzeugenden Funktion

Die $(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}})$ -Abhängigkeit der Erzeugenden F_1 ist eigentlich durch nichts ausgezeichnet. Mit Hilfe von Legendre-Transformationen lassen sich drei weitere Typen von Erzeugenden finden:

$$F_2 = F_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t), \quad (2.155)$$

$$F_3 = F_3(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}}, t), \quad (2.156)$$

$$F_4 = F_4(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t). \quad (2.157)$$

Die *Erzeugenden* verknüpfen jeweils eine *neue* und eine *alte* Koordinate. Die aktuelle Problemstellung entscheidet, welche Form am günstigsten ist. Für alle drei Funktionen gilt ein Satz wie der für F_1 in (2.149) und (2.150), den wir im letzten Abschnitt bewiesen haben. Das wollen wir im Folgenden noch etwas genauer untersuchen.

$$F_2 = F_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t)$$

F_2 erhält man aus F_1 durch eine Legendre-Transformation bezüglich $\bar{\mathbf{q}}$:

$$F_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t) = F_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_j} \bar{q}_j = F_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t) + \sum_{j=1}^S \bar{p}_j \bar{q}_j. \quad (2.158)$$

Mit der (2.151) entsprechenden Beziehung

$$dF_1 = \sum_{j=1}^S (p_j dq_j - \bar{p}_j d\bar{q}_j) + (\bar{H} - H) dt \quad (2.159)$$

ergibt sich für F_2 :

$$dF_2 = dF_1 + \sum_{j=1}^S (\bar{p}_j d\bar{q}_j + \bar{q}_j d\bar{p}_j) = \sum_{j=1}^S (p_j dq_j + \bar{q}_j d\bar{p}_j) + (\bar{H} - H) dt. \quad (2.160)$$

2.5 Kanonische Transformationen

Dies bedeutet:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}; \quad \dot{q}_j = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{p}_j}; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (2.161)$$

Durch Invertieren und Auflösen zeigt man, wie für F_1 im letzten Abschnitt explizit vorgeführt, dass aus (2.161) die Transformationsgleichungen $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ folgen.

Um zu demonstrieren, dass auch F_2 eine kanonische Phasentransformation vermittelt, haben wir zunächst den Ausdruck (2.149) mit (2.160) umzuformen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H &= \sum_{j=1}^S \tilde{p}_j \dot{\tilde{q}}_j - \bar{H} + \frac{dF_1}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^S \tilde{p}_j \dot{\tilde{q}}_j - \bar{H} + \frac{dF_2}{dt} - \sum_{j=1}^S (\tilde{p}_j \dot{q}_j + \dot{\tilde{q}}_j \tilde{p}_j). \end{aligned}$$

Setzt man nun statt (2.149)

$$\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H = - \sum_{j=1}^S \dot{\tilde{q}}_j \tilde{p}_j - \bar{H} + \frac{dF_2}{dt} \quad (2.162)$$

in das modifizierte Hamilton'sche Prinzip ein und variiert nach $\tilde{\mathbf{q}}$ und $\tilde{\mathbf{p}}$, so erkennt man, dass auch F_2 eine kanonische Phasentransformation erzeugt.

$$F_3 = F_3(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$$

F_3 erhält man aus F_1 durch eine Legendre-Transformation bezüglich \mathbf{q} :

$$F_3(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}, t) = F_1(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t) - \sum_{j=1}^S \frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j = F_1(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t) - \sum_{j=1}^S p_j q_j. \quad (2.163)$$

Wir bilden wieder das totale Differential:

$$dF_3 = dF_1 - \sum_{j=1}^S (dp_j q_j + p_j dq_j).$$

Mit (2.159) für dF_1 folgt weiter:

$$dF_3 = - \sum_{j=1}^S (q_j dp_j + \dot{p}_j d\tilde{q}_j) + (\bar{H} - H) dt. \quad (2.164)$$

Daran liest man ab:

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial F_3}{\partial \dot{q}_j}; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (2.165)$$

Wenn wir diese Ausdrücke invertieren und nach $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$ auflösen, so erhalten wir die expliziten, durch F_3 vermittelten Transformationsformeln.

Wir formen den Ausdruck (2.149) mit Hilfe von (2.163) um:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H &= \sum_{j=1}^S \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \bar{H} + \frac{dF_1}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^S \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \bar{H} + \frac{dF_3}{dt} + \sum_{j=1}^S (\dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j) .\end{aligned}$$

Setzt man in diesem Fall nun

$$\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^S (\bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j + \dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j) - \bar{H} + \frac{dF_3}{dt} \quad (2.166)$$

anstelle von (2.149) in das modifizierte Hamilton'sche Prinzip ein und variiert das Wirkungsfunktional nach \bar{q}, \bar{p} , so ergeben sich wieder die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen in der Form (2.154).

$F_4 = F_4(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t)$

F_4 folgt aus F_1 durch eine doppelte Legendre-Transformation bezüglich der beiden Variablen \mathbf{q} und $\bar{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned}F_4(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t) &= F_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t) - \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} q_j + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_j} \bar{q}_j \right) \\ &= F_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t) + \sum_{j=1}^S (\bar{p}_j \bar{q}_j - p_j q_j) .\end{aligned} \quad (2.167)$$

Am totalen Differential

$$\begin{aligned}dF_4 &= dF_1 + \sum_j (d\bar{p}_j \bar{q}_j + \bar{p}_j d\bar{q}_j - dp_j q_j - p_j dq_j) \\ &= \sum_{j=1}^S (p_j dq_j - \bar{p}_j d\bar{q}_j) + (\bar{H} - H) dt \sum_j (\bar{p}_j \bar{q}_j + \bar{p}_j d\bar{q}_j - dp_j q_j - p_j dq_j) \\ &= \sum_{j=1}^S (\bar{q}_j d\bar{p}_j - q_j dp_j) + (\bar{H} - H) dt\end{aligned} \quad (2.168)$$

können wir wieder die partiellen Ableitungen ablesen:

$$\bar{q}_j = \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} ; \quad q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} ; \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} . \quad (2.169)$$

2.5 Kanonische Transformationen

Tab. 2.1 Die vier möglichen Erzeugenden Funktionen für kanonische Transformationen und ihre Transformationsformeln

	\bar{q}	\bar{p}
q	$F_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t)$	$F_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t)$
p	$F_3(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}}, t)$	$F_4(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t)$
	$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}; \bar{p}_j = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_j}$	$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}; \bar{q}_j = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_j}$
	$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}; \bar{p}_j = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}_j}$	$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}; \bar{q}_j = \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j}$

Daraus folgen dann wieder durch Invertieren und Auflösen nach $\bar{\mathbf{q}}$, $\bar{\mathbf{p}}$ die expliziten, durch F_4 vermittelten Transformationsformeln. Zum Beweis der Kanonizität der Phasentransformation setzen wir nun

$$\begin{aligned} \sum_j p_j \dot{q}_j - H &= \sum_j \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \bar{H} + \frac{dF_1}{dt} \\ &= \sum_j \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \bar{H} + \frac{dF_4}{dt} - \sum_j (\dot{\bar{p}}_j \bar{q}_j + \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - \dot{p}_j q_j - p_j \dot{q}_j) \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^S (\dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j - \dot{\bar{p}}_j \bar{q}_j) - \bar{H} + \frac{dF_4}{dt} \quad (2.170)$$

in das modifizierte Hamilton'sche Prinzip ein, variieren nach $\bar{\mathbf{q}}$, $\bar{\mathbf{p}}$ und verifizieren damit die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen. (Dies wird explizit als Aufgabe 2.5.1 durchgeführt!)

Zur besseren Übersicht stellen wir die abgeleiteten Transformationsformeln noch einmal in Tabelle 2.1 zusammen.

Die Zeitabhängigkeit ist in allen vier Fällen gleich:

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.171)$$

2.5.4 Beispiele kanonischer Transformationen

Wir wollen ein paar charakteristische Anwendungen des bislang noch abstrakten Formalismus diskutieren.

■ 1) Vertauschung von Impulsen und Orten

Wir wählen

$$F_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = - \sum_{j=1}^S q_j \dot{q}_j \quad (2.172)$$

und haben dann mit

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = -\dot{q}_j ; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_j} = q_j \quad (2.173)$$

eine Vertauschung von *Impulsen* und *Orten* erzeugt:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \xrightarrow{F_1} (\dot{\mathbf{p}}, -\dot{\mathbf{q}}) . \quad (2.174)$$

Diese Transformation haben wir bereits als vorbereitendes Beispiel mit (2.137) und (2.138) kennen gelernt. Derselbe Effekt lässt sich offenbar auch mit

$$F_4(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t) = - \sum_{j=1}^S p_j \dot{p}_j \quad (2.175)$$

erzielen.

■ 2) Identische Transformation

Wir wählen

$$F_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}, t) = \sum_{j=1}^S q_j \dot{p}_j \quad (2.176)$$

und finden dann mit (2.161):

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \dot{p}_j ; \quad \dot{q}_j = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{p}_j} = q_j . \quad (2.177)$$

Es handelt sich also offensichtlich um die identische Transformation, die man auch durch

$$F_3(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) = - \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j \quad (2.178)$$

hätte erzeugen können.

■ 3) Punkttransformation

Wählen wir

$$F_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}, t) = \sum_{j=1}^S f_j(\mathbf{q}, t) \dot{p}_j , \quad (2.179)$$

2.5 Kanonische Transformationen

so folgt:

$$\bar{q}_j = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_j} = f_j(\mathbf{q}, t) , \quad (2.180)$$

was einer *Punkttransformation* im Konfigurationsraum entspricht, von der wir bereits in Abschn. 2.5.1 behauptet haben, dass sie kanonisch ist.

Als kanonisch konjugierte Variable sind natürlich auch die Impulse von der Punkttransformation betroffen:

$$\bar{p}_j = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{q}_j} = \sum_{l=1}^S \frac{\partial f_l}{\partial q_j} \bar{p}_l . \quad (2.181)$$

Diese Beziehungen sind nach den \bar{p}_l aufzulösen!

■ 4) Harmonischer Oszillator

Wir demonstrieren mit diesem Beispiel, dass eine geeignet gewählte kanonische Transformation tatsächlich die Integration der Bewegungsgleichungen stark vereinfachen, bisweilen sogar überflüssig machen kann.

Nach (2.35) lautet die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 .$$

Wir wählen die folgende *Erzeugende*:

$$F_1(q, \bar{q}) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot \bar{q} . \quad (2.182)$$

Die Transformationsformeln (2.151) ergeben dann:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega_0 q \cot \bar{q} , \quad (2.183)$$

$$\bar{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \frac{1}{\sin^2 \bar{q}} . \quad (2.184)$$

Die eigentlichen Transformationsgleichungen erhalten wir durch Auflösen nach q und p :

$$q = \sqrt{\frac{2\bar{p}}{m \omega_0}} \sin \bar{q} , \quad (2.185)$$

$$p = \sqrt{2\bar{p} m \omega_0} \cos \bar{q} . \quad (2.186)$$

Wegen $\partial F_1 / \partial t = 0$ gilt für die *neue* Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) &= H(q(\bar{q}, \bar{p}), p(\bar{q}, \bar{p})) \\ &= \frac{1}{2m} 2\bar{p} m \omega_0 \cos^2 \bar{q} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{2\bar{p}}{m \omega_0} \sin^2 \bar{q} . \end{aligned}$$

Sie nimmt damit eine besonders einfache Gestalt an:

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \omega_0 \bar{p} . \quad (2.187)$$

Die Koordinate \bar{q} ist nun zyklisch. Dies bedeutet:

$$\bar{p}(t) = \bar{p}_0 = \text{const} . \quad (2.188)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} = \omega_0 , \\ \bar{q}(t) &= \omega_0 t + \bar{q}_0 . \end{aligned} \quad (2.189)$$

Die Lösung ist vollständig, wenn wir noch (2.188) und (2.189) in die Transformationsformeln (2.185) und (2.186) einsetzen:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\bar{p}_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + \bar{q}_0) , \quad (2.190)$$

$$p(t) = \sqrt{2\bar{p}_0 m \omega_0} \cos(\omega_0 t + \bar{q}_0) . \quad (2.191)$$

Das ist die bekannte Lösung des harmonischen Oszillators. \bar{q}_0 und \bar{p}_0 sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass man ein physikalisches Problem durch eine passende kanonische Transformation entscheidend vereinfachen kann, wenn diese z. B. alle Koordinaten zyklisch macht. Die neuen Impulse sind dann sämtlich Integrale der Bewegung. Das alles andere als triviale Problem besteht natürlich darin, die richtige Erzeugende (2.182) zu finden. Dies ist im übrigen die zentrale Problemstellung der Hamilton-Jacobi-Theorie (s. Kap. 3).

■ 5) Mechanische Eichtransformation

Von dieser haben wir bereits in Abschn. 2.5.1 gezeigt, dass sie kanonisch ist. Sie führt mit (2.129) auf die folgenden Transformationsformeln:

$$\bar{q}_j = q_j; \quad \bar{p}_j = p_j + \frac{\partial f}{\partial q_j}; \quad \bar{H} = H - \frac{\partial f}{\partial t} . \quad (2.192)$$

Dabei ist

$$f = f(\mathbf{q}, t)$$

eine beliebige Funktion der Koordinaten und der Zeit. Die Transformation (2.192) entspricht der bereits mehrfach diskutierten Umeichung der Lagrange-Funktion,

$$L \longrightarrow \bar{L} = L + \frac{df}{dt} ,$$

2.5 Kanonische Transformationen

die die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen invariant lässt. Sie wird erzeugt durch:

$$F_2(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) = \sum_{j=1}^S q_j \tilde{p}_j - f(\mathbf{q}, t). \quad (2.193)$$

Mit (2.161) folgt nämlich:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_j &= \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_j} = q_j; \quad \tilde{p}_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \tilde{p}_j - \frac{\partial f}{\partial q_j}, \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - \frac{\partial f}{\partial t}.\end{aligned}$$

Dies entspricht exakt (2.192).

2.5.5 Kriterien für Kanonizität

Wie erkennt man nun, ob eine Phasentransformation

$$\tilde{q}_j = \tilde{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t); \quad \tilde{p}_j = \tilde{p}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad j = 1, 2, \dots, S \quad (2.194)$$

kanonisch ist, wenn die zugehörige erzeugende Funktion nicht explizit bekannt ist? Wir diskutieren dazu zwei Verfahren.

1) Wir lösen (2.194) nach \mathbf{p} und $\tilde{\mathbf{p}}$ auf:

$$p_j = p_j(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t); \quad \tilde{p}_j = \tilde{p}_j(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t). \quad (2.195)$$

Falls die Transformation kanonisch ist, muss es eine erzeugende Funktion $F_1(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}, t)$ geben mit

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}; \quad \tilde{p}_j = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S.$$

Dies bedeutet aber auch:

$$\frac{\partial p_j}{\partial \tilde{q}_m} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tilde{q}_m \partial q_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j \partial \tilde{q}_m} = -\frac{\partial \tilde{p}_m}{\partial q_j}.$$

Wir untersuchen also, ob

$$\left(\frac{\partial p_j}{\partial \tilde{q}_m} \right)_{\substack{q, t \\ \tilde{q}_l, l \neq m}} \stackrel{!}{=} -\left(\frac{\partial \tilde{p}_m}{\partial q_j} \right)_{\substack{q, t \\ \tilde{q}_l, l \neq j}} \quad (2.196)$$

für alle Indexpaare (j, m) gilt. Analog dazu muss natürlich auch gelten:

$$\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_m} \right)_{\bar{q}, t} \stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_j} \right)_{\bar{q}, t} , \quad (2.197)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{q}_m} \right)_{\bar{q}, t} \stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial \bar{p}_m}{\partial \bar{q}_j} \right)_{\bar{q}, t} . \quad (2.198)$$

Es leuchtet unmittelbar ein, dass trotz des einfachen Konzepts die praktische Handhabung dieser Formeln recht mühsam sein wird. Das anschließend zu besprechende zweite Verfahren wird sich als wesentlich bequemer herausstellen.

Die Auflösung der Transformationsformeln (2.194) nach \mathbf{p} und $\bar{\mathbf{p}}$ wie in (2.195) ist natürlich nicht zwingend. Wichtig bei der Auflösung ist nur, dass sie nach einer *alten* und einer *neuen* Koordinate erfolgt. Möglich sind deshalb auch:

$$q_j = q_j(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t) ; \quad \bar{q}_j = \bar{q}_j(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t) \Leftrightarrow F_4(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t) , \quad (2.199)$$

$$q_j = q_j(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}}, t) ; \quad \bar{p}_j = \bar{p}_j(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}}, t) \Leftrightarrow F_3(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}}, t) , \quad (2.200)$$

$$p_j = p_j(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t) ; \quad \bar{q}_j = \bar{q}_j(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t) \Leftrightarrow F_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t) . \quad (2.201)$$

2) Das zweite Verfahren zur Überprüfung der Kanonizität einer Phasentransformation führen wir mit einem Satz ein:

Satz 2.5.2

Die Phasentransformation (2.194) ist genau dann kanonisch, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern in den *neuen* Variablen,

$$\{\bar{q}_i, \bar{p}_j\} = \delta_{ij} , \quad (2.202)$$

$$\{\bar{q}_i, \bar{q}_j\} = \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\} = 0 , \quad (2.203)$$

erfüllt sind.

Beweis

Wir führen den Beweis für **nicht** explizit zeitabhängige Phasentransformationen,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \bar{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) = H(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}), \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}), t) ,$$

2.5 Kanonische Transformationen

die wir also auf *Kanonizität im engeren Sinne* untersuchen. Nach dem in Abschn. 2.4.2 bewiesenen Satz ist die Poisson-Klammer unabhängig von dem Satz kanonischer Variablen, der als Basis verwendet wird. Wir nehmen hier die *alten* Variablen \mathbf{q} und \mathbf{p} . Nach (2.105), der allgemeinen Bewegungsgleichung, gilt zunächst:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{q}}_j &= \{\bar{q}_j, H\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right), \\ \dot{\bar{p}}_j &= \{\bar{p}_j, H\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \sum_{l=1}^S \left(\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right).\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion H lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_l} &= \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_k} \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial p_l} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_k} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial p_l} \right), \\ \frac{\partial H}{\partial q_l} &= \sum_{k=1}^S \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_k} \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial q_l} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_k} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial q_l} \right).\end{aligned}$$

Das setzen wir oben ein:

$$\dot{\bar{q}}_j = \sum_{l,k} \left[\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_k} \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial p_l} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_k} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial p_l} \right) - \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial p_l} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_k} \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial q_l} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_k} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial q_l} \right) \right].$$

Dies lässt sich wie folgt zusammenfassen:

$$\dot{\bar{q}}_j = \sum_k \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_k} \{\bar{q}_j, \bar{q}_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_k} \{\bar{q}_j, \bar{p}_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right]. \quad (2.204)$$

Auf die gleiche Weise findet man:

$$\dot{\bar{p}}_j = \sum_k \left[-\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_k} \{\bar{q}_k, \bar{p}_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_k} \{\bar{p}_j, \bar{p}_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right]. \quad (2.205)$$

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen,

$$\dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j}; \quad \dot{\bar{p}}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_j}, \quad (2.206)$$

gelten also genau dann, wenn (2.202) und (2.203) erfüllt sind. Genau dies aber war zu beweisen.

Der Satz (2.202), (2.203) stellt ein recht handliches Kriterium für die Kanonizität der betreffenden Phasentransformation dar.

2.5.6 Aufgaben

Aufgabe 2.5.1

$(q, p) \rightarrow (\bar{q}, \bar{p})$ sei eine Phasentransformation, für die

$$\sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^S (\dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j - \dot{\bar{p}}_j \bar{q}_j) - \bar{H} + \frac{dF_4}{dt}$$

gilt, wobei $F_4 = F_4(\bar{p}, t)$ eine beliebige Funktion der *alten* und der *neuen* Impulse ist. Zeigen Sie:

1. \bar{H} und die Phasentransformation

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(q, p, t); \quad \bar{p}_j = \bar{p}_j(q, p, t)$$

sind vollständig durch die *Erzeugende* F_4 festgelegt.

2. Die durch F_4 vermittelte Transformation ist kanonisch.

Aufgabe 2.5.2

Können zwei Komponenten des Drehimpulses (z. B. L_x, L_y) gleichzeitig als kanonische Impulse auftreten?

Aufgabe 2.5.3

Untersuchen Sie, ob die folgende Transformation kanonisch ist:

$$\bar{q} = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right); \quad \bar{p} = q \cot p.$$

Aufgabe 2.5.4

q, p seien kanonisch konjugierte Variable. Durch die Transformation

$$\begin{aligned}\bar{q} &= \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) , \\ \bar{p} &= 2(1 + \sqrt{q} \cos p) \sqrt{q} \sin p\end{aligned}$$

werden neue Koordinaten \bar{q}, \bar{p} definiert.

1. Zeigen Sie, dass die Transformation kanonisch ist.
2. Zeigen Sie, dass die Transformation durch

$$F_3(p, \bar{q}, t) = -(\mathrm{e}^{\bar{q}} - 1)^2 \tan p$$

erzeugt wird.

Aufgabe 2.5.5

1. p und q seien kanonisch konjugierte Variable. Ist die folgende Transformation kanonisch?

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \hat{q}(p, q) = \arcsin \frac{q}{\sqrt{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}} \\ \hat{p} &= \hat{p}(p, q) = \frac{1}{2} \left(\alpha q^2 + \frac{p^2}{\alpha} \right)\end{aligned}$$

α ist eine reelle Konstante.

2. Welche Transformation vermittelt die folgende Erzeugende?

$$F_1(q, \hat{q}) = \frac{1}{2} \alpha q^2 \cot \hat{q}$$

Aufgabe 2.5.6

Gegeben seien ein mechanisches System mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m} p^2 q^4 + \frac{k}{2q^2}$$

und die *Erzeugende* einer kanonischen Transformation:

$$F_1(q, \bar{q}) = -\sqrt{mk} \frac{\bar{q}}{q} .$$

- Wie lauten die Transformationsformeln

$$p = p(\bar{q}, \bar{p}) ; \quad q = q(\bar{q}, \bar{p}) ?$$

- Wie lautet die *neue* Hamilton-Funktion

$$\overline{H} = \overline{H}(\bar{q}, \bar{p}) ?$$

- Geben Sie die Lösung des Problems in den Variablen \bar{q}, \bar{p} an.

Aufgabe 2.5.7

Ein System werde durch die Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{3}{2}\beta qp \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

beschrieben, wobei q und p konjugierte Variable seien.

- Welche Phasentransformation $(q, p) \rightarrow (\hat{q}, \hat{p})$ wird von der Erzeugenden

$$F_2(q, \hat{p}) = \alpha q^2 \hat{p}^3 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

vermittelt?

- Zeigen Sie, dass die Transformation in der Tat kanonisch ist.
- Geben Sie

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$$

an.

- Wie lauten die Bewegungsgleichungen der „neuen“ Variablen \hat{q} und \hat{p} ?

Aufgabe 2.5.8

Für welche Werte α und β ist die Phasentransformation

$$\bar{q} = q^\alpha \cos(\beta p) ; \quad \bar{p} = q^\alpha \sin(\beta p)$$

kanonisch?

Aufgabe 2.5.9

Für ein eindimensionales physikalisches System werde eine Variablentransformation

$$(q, p) \longrightarrow (\bar{q}, \bar{p})$$

durchgeführt, wobei gelten soll:

$$\bar{q} = q^k p^l ; \quad \bar{p} = q^m p^n ; \quad k, l, m, n \in \mathbb{R} .$$

1. Wie müssen k, l, m, n gewählt werden, damit die Transformation kanonisch ist?
2. Welche (kanonische) Transformation ergibt sich speziell für $m = 0$?
3. Bestimmen Sie die Erzeugenden der kanonischen Transformationen aus 1), wenn diese vom Typ

$$F_1 = F_1(q, \bar{q})$$

sind!

4. Wie sähe eine Erzeugende vom Typ

$$F_2 = F_2(q, \bar{p})$$

aus?

Aufgabe 2.5.10

Ein Elektron (Masse m , Ladung $-e$) befindet sich in einem homogenen Magnetfeld

$$\mathbf{B} = (0, 0, B) = \text{rot } \mathbf{A} .$$

Für das Vektorpotential \mathbf{A} gelte die Coulomb-Eichung:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 .$$

1. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} B(-y, x, 0)$$

eine denkbare Darstellung des mehrdeutigen Vektorpotentials ist.

2. Setzen Sie

$$q_1 = x , \quad q_2 = y , \quad q_3 = z .$$

Verifizieren Sie die folgende Form der Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p_3^2}{2m} + H_0$$

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(p_1 - \frac{1}{2} m \omega_c q_2 \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_2 + \frac{1}{2} m \omega_c q_1 \right)^2$$

mit

$$\omega_c = \frac{eB}{m} .$$

3. Betrachten Sie ab jetzt ausschließlich $H_0 (= H(p_3 \equiv 0))$. Eine Phasentransformation

$$(q, p) \longrightarrow (\hat{q}, \hat{p})$$

werde durch die Erzeugende

$$F_1(q, \hat{q}) = m\omega_c \left(q_1 \hat{q}_1 + q_2 \hat{q}_2 - \hat{q}_1 \hat{q}_2 - \frac{1}{2} q_1 q_2 \right)$$

bewirkt. Berechnen sie die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} q &= q(\hat{q}, \hat{p}), & p &= p(\hat{q}, \hat{p}), \\ \hat{q} &= \hat{q}(q, p), & \hat{p} &= \hat{p}(q, p). \end{aligned}$$

4. Wie sieht die transformierte Hamilton-Funktion

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$$

aus? Welches Bewegungsproblem bleibt zu lösen?

5. Versuchen Sie die Transformationsformeln aus Teil 3. auf eine Erzeugende vom Typ

$$F_2 = F_2(q, \hat{p})$$

zurückzuführen.

Kontrollfragen

Zu Abschn. 2.1

- Worin besteht die Zielsetzung der Hamilton-Mechanik?
- Stellen Sie die Vor- und Nachteile der Newton'schen und der Lagrange'schen Formulierung der Klassischen Mechanik gegenüber.
- Welche Variablentransformation findet beim Übergang von der Lagrange- zur Hamilton-Mechanik statt?
- Wie ist die Legendre-Transformierte der Funktion $f(x, y)$ bezüglich der Variablen y definiert?

Zu Abschn. 2.2

1. Was sind die aktiven, was die passiven Variablen bei der Transformation von der Lagrange- auf die Hamilton-Funktion?
2. Formulieren Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.
3. Unter welchen Voraussetzungen ist H mit der Gesamtenergie des Systems identisch?
4. Zeigen Sie, dass totales und partielles Zeitdifferential von H identisch sind.
5. Welchen Vorteil bringen zyklische Koordinaten im Hamilton-Formalismus?
6. Was ist die Idee des Routh-Formalismus? Wie hängt die Routh- mit der Hamilton-Funktion zusammen?
7. Wie findet man die Hamilton-Funktion eines physikalischen Systems?
8. Wie lautet die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators?
9. Welcher Hamilton-Funktion unterliegt die Bewegung eines Teilchens der Masse m und der Ladung \bar{q} im elektromagnetischen Feld?
10. Formulieren Sie die Hamilton-Funktionen in Zylinder- und in Kugelkoordinaten für ein Teilchen der Masse m , das einer konservativen Kraft, aber keinen Zwangsbedingungen unterliegt.

Zu Abschn. 2.3

1. Nennen und kommentieren Sie die wichtigsten Integralprinzipien der Klassischen Mechanik.
2. Was versteht man unter dem *modifizierten Hamilton'schen Prinzip*?
3. Formulieren Sie präzise die Variationsvorschrift für das *modifizierte Hamilton'sche Prinzip*.
4. Worin sehen Sie charakteristische Unterschiede zwischen dem *ursprünglichen* und dem *modifizierten* Hamilton'schen Prinzip?
5. Wie ist die *Wirkung A* definiert?
6. Was besagt das *Prinzip der kleinsten Wirkung*?
7. Wodurch unterscheiden sich die Variationsvorschriften für das Hamilton'sche Prinzip und das Prinzip der kleinsten Wirkung?
8. Welchen Spezialfall betrifft das *Fermat'sche Prinzip*?
9. Was versteht man unter dem *Prinzip der kürzesten Ankunft*, was unter dem *Prinzip des kürzesten Weges*?
10. Wie unterscheidet sich das Jacobi-Prinzip vom *Prinzip der kleinsten Wirkung*?
11. Was versteht man unter dem *metrischen Tensor*?
12. Formulieren Sie das Jacobi-Prinzip für die kräftefreie Bewegung.

Zu Abschn. 2.4

1. Ist durch Angabe der Konfigurationsbahn ein mechanisches Problem gelöst? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Was versteht man unter dem *Ereignisraum*?
3. In welchen Darstellungsräumen spielen sich Lagrange- und Hamilton-Formalismus ab?
4. Wie sieht die *Ereignisbahn* des linearen, harmonischen Oszillators aus, wie seine *Phasenbahn*?
5. Definieren Sie den Zustandsraum.
6. Was bedeutet der Begriff *Zustand* ψ ?
7. Welche Minimalinformation wird benötigt, um sämtliche mechanischen Eigenschaften eines allgemeinen N -Teilchensystems festzulegen?
8. Warum muss die Zeitentwicklung eines Zustands ψ aus einer Differentialgleichung erster Ordnung folgen?
9. Warum ist die Konfiguration $\mathbf{q}(t)$ eines mechanischen Systems noch kein *Zustand*?
10. Wie ist die Poisson-Klammer definiert?
11. Formulieren Sie die Bewegungsgleichung einer beliebigen Phasenfunktion $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ mit Hilfe der Poisson-Klammer.
12. In welcher Weise hängt die Poisson-Klammer von der Wahl der kanonischen Variablen (\mathbf{q}, \mathbf{p}) ab?
13. Wie lauten die *fundamentalen Poisson-Klammern*?
14. Zählen Sie einige formale Eigenschaften der Poisson-Klammer auf.
15. Wie lautet die Jacobi-Identität?
16. Wie kann man die Poisson-Klammer benutzen, um zu sehen, dass $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ein Integral der Bewegung darstellt?
17. Was besagt der *Poisson'sche Satz*?
18. Erläutern Sie, warum man die Klassische Mechanik und die Quantenmechanik als verschiedene Realisierungen derselben mathematischen Struktur auffassen kann.

Zu Abschn. 2.5

1. Was ist die tiefere Ursache für die Invarianz der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen gegenüber Punkttransformationen im Konfigurationsraum und gegenüber mechanischen Eichtransformationen?
2. Wie ändert sich die Hamilton-Funktion bei einer mechanischen Eichtransformation? Was passiert dabei mit den kanonischen Bewegungsgleichungen?
3. Sind durch die generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_s die generalisierten Impulse p_j eindeutig festgelegt?
4. Was versteht man unter einer Phasentransformation?
5. Welche Bedeutung haben kanonische Transformationen? Wann nennt man sie *kanonisch im engeren Sinne*?
6. Nennen Sie im Zusammenhang mit dem modifizierten Hamilton'schen Prinzip ein erstes Kriterium dafür, dass eine Phasentransformation $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$ kanonisch ist.
7. Was versteht man unter der *Erzeugenden* einer kanonischen Transformation?
8. Welche Typen von erzeugenden Funktionen für kanonische Transformationen kennen Sie? Was ist deren gemeinsames Merkmal?

9. Nennen Sie mindestens zwei erzeugende Funktionen für eine Phasentransformation, die Impulse und Orte miteinander vertauscht.
10. Welche *Erzeugende* vermittelt eine identische Transformation?
11. Wie sieht die *Erzeugende* für eine Punkttransformation im Konfigurationsraum aus?
Was passiert dabei mit den kanonischen Impulsen?
12. Nennen Sie mindestens zwei Kriterien für die Kanonizität einer Phasentransformation.

Hamilton-Jacobi-Theorie

3

Kapitel 3

3.1	Hamilton-Jacobi-Gleichung	183
3.2	Die Lösungsmethode	186
3.3	Hamilton'sche charakteristische Funktion	191
3.4	Separation der Variablen	194
3.5	Wirkungs- und Winkelvariable	200
3.5.1	Periodische Systeme	200
3.5.2	Wirkungs- und Winkelvariable	203
3.5.3	Das Kepler-Problem	207
3.5.4	Entartung	214
3.5.5	Bohr-Sommerfeld'sche Atomtheorie	216
3.6	Der Übergang zur Wellenmechanik	217
3.6.1	Wellengleichung der Klassischen Mechanik	218
3.6.2	Einschub über Lichtwellen	222
3.6.3	Der Ansatz der Wellenmechanik	225
3.7	Aufgaben	228
	Kontrollfragen	230

Die Überlegungen des letzten Abschnitts zu den kanonischen Transformationen lassen eine solche Mannigfaltigkeit an Transformationsmöglichkeiten erkennen, dass sich daraus eigentlich auch ergiebige

- ▶ allgemeine Lösungsverfahren für mechanische Probleme

konstruieren lassen sollten. Wir untersuchen deshalb nun, auf welche Weise eine Hamilton-Funktion H transformiert werden muss, damit die Lösung des physikalischen Problems möglichst einfach, vielleicht sogar trivial wird. Die folgenden Methoden böten sich zum Beispiel an:

1. Man wähle die Transformation so, dass in den neuen Variablen \bar{q}, \bar{p} die transformierte Hamilton-Funktion \bar{H} ein bekanntes, bereits gelöstes Problem formuliert (z. B. harmonischer Oszillator, s. Aufgabe 2.5.6!).
2. Man wähle die Transformation so, dass alle neuen Koordinaten \bar{q}_j zyklisch sind.

In Abschn. 2.5.1 hatten wir bereits gezeigt, dass dann die Integration der Bewegungsgleichungen trivial wird, wenn wir noch

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

annehmen dürfen. Es bleibt dann lediglich:

$$\begin{aligned}\bar{p}_j &= \alpha_j = \text{const} , \quad j = 1, \dots, S , \\ \bar{H} &= \bar{H}(\alpha) ; \quad \omega_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_j} , \\ \bar{q}_j &= \omega_j t + \beta_j , \quad j = 1, 2, \dots, S .\end{aligned}$$

Die $2S$ Konstanten α_j, β_j sind schließlich durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

3. Man wähle die Transformation so, dass

$$\bar{q}_j = \beta_j = \text{const} ; \quad \bar{p}_j = \alpha_j = \text{const} , \quad j = 1, 2, \dots, S .$$

Die Lösung ergibt sich dann *einfach* durch Umkehrung der Transformation,

$$q = q(\beta, \alpha, t) ; \quad p = p(\beta, \alpha, t) ,$$

wobei die β_j, α_j erneut durch Anfangsbedingungen bestimmt sind.

Das Problem ist nur, wie findet man die zu 1. bis 3. passenden kanonischen Transformationen?

3.1 Hamilton-Jacobi-Gleichung

Das Verfahren 1. ist natürlich sehr speziell und nur im Einzelfall durchführbar. Die Verfahren 2. und 3. sind allgemeiner, wobei 3. gegenüber 2. den Vorteil besitzt, auch für Systeme mit expliziter Zeitabhängigkeit der Hamilton-Funktion anwendbar zu sein. Wir wollen uns deshalb hier auf das Verfahren 3. konzentrieren:

Gesucht ist also eine kanonische Transformation, durch die die *neuen* Variablen \tilde{q} und \tilde{p} zeitlich konstant werden. Das gilt sicher, wenn die Transformation für die *neue* Hamilton-Funktion

$$\overline{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0 \quad (3.1)$$

erreicht. Das würde nämlich trivialerweise

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}_j &= \frac{\partial \overline{H}}{\partial \tilde{p}_j} = 0 \Rightarrow \tilde{q}_j = \beta_j = \text{const ,} & j &= 1, 2, \dots, S , \\ \dot{\tilde{p}}_j &= -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \tilde{q}_j} = 0 \Rightarrow \tilde{p}_j = \alpha_j = \text{const ,} & j &= 1, 2, \dots, S\end{aligned}$$

bedeuten. Es ist zweckmäßig, aber keinesfalls notwendig, die Erzeugende F vom Typ F_2 ,

$$F_2 = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) ,$$

zu wählen. Dann gilt nach (2.161):

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} ; \quad \dot{\tilde{q}}_j = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_j} .$$

Setzen wir dies in (3.1) ein, so ergibt sich die

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

$$H\left(q_1, \dots, q_S, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_S}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 . \quad (3.2)$$

Aus dieser Gleichung muss die Erzeugende F_2 bestimmt werden. Wir wollen diese Gleichung ein wenig diskutieren, um dann ein praktikables Lösungsverfahren formulieren zu können.

1. Die Lösung heißt aus Gründen, die später klar werden:

- ▶ **Hamilton'sche Wirkungsfunktion** $F_2 = S$.

2. Die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung (HJD) stellt eine

**nicht-lineare, partielle Differentialgleichung 1. Ordnung
für F_2 in $(S+1)$ Variablen q_1, \dots, q_S, t**

dar und ist damit im Allgemeinen mathematisch nicht ganz einfach zu behandeln. *Nicht-linear* ist sie, da H quadratisch von den Impulsen und damit von $\partial F_2 / \partial q_j$ abhängt. Es treten nur partielle Ableitungen 1. Ordnung nach den q_j und nach t auf.

3. Die HJD enthält $(S+1)$ verschiedene Ableitungen der gesuchten Funktion F_2 . Es treten nach der Integration demnach $(S+1)$ Integrationskonstanten auf. Da die HJD F_2 aber nur in der Form $\partial F_2 / \partial q_j$ oder $\partial F_2 / \partial t$ enthält, ist mit F_2 auch stets $F_2 + C$ Lösung. Von den Integrationskonstanten ist also eine trivial additiv:

Lösung:

$$F_2(q_1, \dots, q_S, t | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_S) + \alpha_{S+1} . \quad (3.3)$$

α_{S+1} ist unwichtig, da in die Transformationsformeln (2.161) nur die Ableitungen von F_2 eingehen. Man nennt (3.3) eine **vollständige Lösung** der HJD.

4. Die HJD bestimmt nur die q - und t -Abhängigkeiten der Lösung $F_2 = F_2(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$ und macht damit keine Aussage über die Impulse \tilde{p}_j . Wir wollen aber, dass die $\tilde{p}_j = \text{const}$ sind, haben deshalb die Freiheit, die Integrationskonstanten mit den neuen Impulsen zu identifizieren:

$$\tilde{p}_j = \alpha_j , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (3.4)$$

Mit diesen Überlegungen konstruieren wir nun das folgende **Lösungsverfahren**:

- Man formuliere $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, setze $p_j = (\partial F_2 / \partial q_j)$ ein und stelle die HJD auf.
- Man löse die HJD für F_2 ,

$$F_2 = S(q_1, \dots, q_S, t | \alpha_1, \dots, \alpha_S) , \quad (3.5)$$

und identifizierte die Integrationskonstanten mit den *neuen* Impulsen:

$$\tilde{p}_j = \alpha_j , \quad j = 1, \dots, S . \quad (3.6)$$

- Man setze:

$$\bar{q}_j = \frac{\partial S(\mathbf{q}, t | \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} = \bar{q}_j(\mathbf{q}, t | \boldsymbol{\alpha}) = \beta_j , \quad j = 1, \dots, S . \quad (3.7)$$

Das sind S Gleichungen, die nach den Koordinaten q_1, \dots, q_S aufzulösen sind:

$$q_j = q_j(t | \beta_1, \dots, \beta_S, \alpha_1, \dots, \alpha_S) = q_j(t | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) , \quad j = 1, \dots, S . \quad (3.8)$$

3.1 Hamilton-Jacobi-Gleichung

d) Man berechne die Impulse aus

$$p_j = \frac{\partial S(\mathbf{q}, t | \boldsymbol{\alpha})}{\partial q_j} = p_j(\mathbf{q}, t | \boldsymbol{\alpha}), \quad j = 1, \dots, S \quad (3.9)$$

und setze die Koordinaten aus (3.8) darin ein:

$$p_j = p_j(t | \beta_1, \dots, \beta_S, \alpha_1, \dots, \alpha_S) = p_j(t | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}), \quad j = 1, \dots, S. \quad (3.10)$$

e) Die Anfangsbedingungen

$$q_j^{(0)} = q_j(t = t_0); \quad p_j^{(0)} = p_j(t = t_0), \quad j = 1, \dots, S$$

liefern mit (3.9):

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(t_0; \mathbf{p}^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}). \quad (3.11)$$

Über (3.8) ist dann auch $\boldsymbol{\beta}$ bestimmt:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(t_0; \mathbf{p}^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}). \quad (3.12)$$

f) Die so bestimmten $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ werden in (3.8) und (3.10) eingesetzt, womit das mechanische Problem gelöst ist.

Wir wollen zum Schluss noch die

- ▶ **physikalische Bedeutung der HJD-Lösung**

diskutieren. Bisher war $F_2 = S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}, t)$ lediglich die Erzeugende einer speziellen kanonischen Transformation, die für $\overline{H} \equiv 0$ sorgt, oder gleichbedeutend damit für

$$\pi \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \xrightarrow{S} \overline{\pi} \equiv (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \text{const}. \quad (3.13)$$

Die totale zeitliche Ableitung von S macht die physikalische Bedeutung klarer:

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial \dot{p}_j} \dot{\dot{p}}_j \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Für $F_2 = S$ gilt speziell:

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_j} = p_j; \quad \dot{\dot{p}}_j \equiv 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = \overline{H} - H = -H.$$

Damit bleibt:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H = L. \quad (3.14)$$

S ist also gerade die vom Hamilton'schen Prinzip her bekannte *Wirkungsfunktion*

$$S = \int L dt + \text{const} \quad (3.15)$$

für ein System, das zur Zeit $t = t_0$ die Anfangsbedingungen $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(0)}$ erfüllt. Gleichung (3.15) dient hier natürlich nur der physikalischen Interpretation der HJD-Lösung, kann nicht etwa zur Bestimmung von S verwendet werden. Dazu müssten $\mathbf{q}(t)$ und $\dot{\mathbf{q}}(t)$ für die tatsächliche Systembewegung bekannt sein, um in L eingesetzt werden zu können. Dann wäre das Problem aber bereits vollständig gelöst.

Es ist interessant festzustellen, dass wir früher aus dem Hamilton'schen Prinzip mit Hilfe des **bestimmten** Wirkungsintegrals

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

die Lagrange'schen und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ableiten konnten. Diese legen dann über eine Anfangsphase $\pi^{(0)}$ die gesamte Phasenbahn $\pi(t)$ fest:

$$\pi^{(0)} \equiv (\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{p}^{(0)}) \xrightarrow{\int_{t_1}^{t_2} L dt} \pi(t) \equiv (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) , \quad (3.16)$$

Die Lösung der HJD ist dagegen das **unbestimmte** Wirkungsintegral (3.15), das nun praktisch als Erzeugende für die Umkehrtransformation zu (3.16) interpretiert werden kann:

$$\pi(t) \equiv (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \xrightarrow{\int L dt + \text{const}} \bar{\pi} \equiv (\beta, \alpha) . \quad (3.17)$$

3.2 Die Lösungsmethode

Wir wollen am einfachen Beispiel des linearen harmonischen Oszillators das im letzten Abschnitt entwickelte Hamilton-Jacobi-Verfahren illustrieren. Das soll zur besonderen Verdeutlichung streng nach dem dort dargestellten Muster erfolgen.

Zu a): Die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators lautet nach (2.35):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 . \quad (3.18)$$

Gesucht wird die kanonische Transformation, aus der sich $\bar{H} = 0$ ergibt. Die zugehörige Erzeugende sei von der Form

$$F_2 = F_2(q, \bar{p}, t) = S(q, \bar{p}, t) \quad (3.19)$$

mit

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} . \quad (3.20)$$

Nach (3.2) lautet dann die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 . \quad (3.21)$$

Zu b): Wir wählen den folgenden Lösungsansatz:

$$S(q, \bar{p}, t) = W(q | \bar{p}) + V(t | \bar{p}) . \quad (3.22)$$

Einsetzen in die HJD liefert:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 = - \frac{\partial V}{\partial t} .$$

Der Ansatz (3.22), den man auch einen **Separationsansatz** nennt, führt also dazu, dass wir die HJD in einen nur von q abhängigen Anteil (linke Seite) und einen nur von t abhängigen Anteil (rechte Seite) zerlegen können. Beide Seiten der Gleichung müssen dann aber notwendig für sich bereits konstant sein. Die ursprüngliche, partielle Differentialgleichung zerfällt damit in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 = \alpha , \quad (3.23)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha . \quad (3.24)$$

Gleichung (3.24) liefert unmittelbar

$$V(t) = -\alpha t + V_0 , \quad (3.25)$$

wobei die additive Konstante V_0 unbedeutend ist. Aus (3.23) folgt:

$$\left(\frac{dW}{dq} \right)^2 = m^2 \omega_0^2 \left(\frac{2\alpha}{m \omega_0^2} - q^2 \right) . \quad (3.26)$$

Die gesuchte Erzeugende lautet damit:

$$S(q, \alpha, t) = m \omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m \omega_0^2} - q^2 - \alpha t} . \quad (3.27)$$

Das unbestimmte Integral liefert die unwesentliche Konstante α_{S+1} . Es handelt sich um ein Standardintegral, sodass die Integration ohne Schwierigkeiten ausgeführt werden kann:

$$S(q, \alpha, t) = m \omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2\alpha}{m \omega_0^2} - q^2} + \frac{\alpha}{m \omega_0^2} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m \omega_0^2}{2|\alpha|}} \right) \right] - \alpha t + C. \quad (3.28)$$

Das ist an dieser Stelle aber unnötig, da uns später nur die partiellen Ableitungen von S interessieren werden.

Wir identifizieren die Konstante α mit dem *neuen* Impuls:

$$\bar{p} = \alpha. \quad (3.29)$$

Zu c): Wir setzen:

$$\bar{q} = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \stackrel{!}{=} \text{const} = \beta. \quad (3.30)$$

Dies bedeutet nach (3.27):

$$\beta = \frac{1}{\omega_0} \int dq \left\{ \frac{2\alpha}{m \omega_0^2} - q^2 \right\}^{-1/2} - t.$$

Es handelt sich wiederum um ein Standard-Integral:

$$\beta + t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left(q \omega_0 \sqrt{\frac{m}{2\alpha}} \right). \quad (3.31)$$

Die Auflösung nach q ergibt:

$$q = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sin(\omega_0(t + \beta)) = q(t | \beta, \alpha). \quad (3.32)$$

Die *neue* Koordinate $\bar{q} = \beta$ hat offensichtlich die Dimension *Zeit*.

Zu d): Wir benutzen nun (3.9) und (3.26),

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dW}{dq} = m \omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m \omega_0^2} - q^2}, \quad (3.33)$$

und setzen darin (3.32) ein:

$$p = \sqrt{2\alpha m} \cos(\omega_0(t + \beta)) = p(t | \beta, \alpha). \quad (3.34)$$

3.2 Die Lösungsmethode

Zu e): Um konkret sein zu können, wählen wir die folgenden Anfangsbedingungen:

$$t = t_0 = 0 : \quad p^{(0)} = 0 ; \quad q^{(0)} = q_0 \neq 0 . \quad (3.35)$$

Damit können wir über (3.33) α festlegen:

$$\alpha = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q_0^2 . \quad (3.36)$$

Da das System am Umkehrpunkt q_0 nur potentielle Energie besitzt ($p^{(0)} = 0$), ist

$$\alpha = E = \text{Gesamtenergie} .$$

Wir setzen nun (3.35) und (3.36) in (3.31) ein:

$$\beta = \frac{1}{\omega_0} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2 \omega_0} . \quad (3.37)$$

Die Wirkungsfunktion S erzeugt also in diesem Bereich eine kanonische Transformation, die auf einen generalisierten Impuls $\tilde{p} = \alpha$ führt, der mit der Gesamtenergie E identisch ist, und auf eine generalisierte Koordinate $\tilde{q} = \beta$, die eine (konstante) Zeit darstellt. Energie und Zeit sind also offenbar kanonisch konjugierte Variable!

Zu f): Die vollständige Lösung erhalten wir schließlich, indem wir α und β in (3.32) und (3.34) einsetzen:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \cos \omega_0 t ; \quad p(t) = -\sqrt{2Em} \sin \omega_0 t . \quad (3.38)$$

Das ist die bekannte Lösung des harmonischen Oszillators.

Wir wollen an diese Diskussion noch zwei Zusatzüberlegungen anschließen:

1. Die Lösung der HJD ist eine Erzeugende vom Typ $F_2(q, \tilde{p}, t)$. Wir wollen einmal mit Hilfe der obigen Resultate die Aufstellung eines anderen Typs von Erzeugender demonstrieren. Es handele sich um $F_1 = F_1(q, \tilde{q}, t)$. Zunächst gilt mit (3.29) und (3.32):

$$\tilde{p} = \alpha = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 \sin^{-2} (\omega_0 (t + \tilde{q})) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}} . \quad (3.39)$$

Dies setzen wir in (3.34) ein:

$$p = m \omega_0 q \cot (\omega_0 (t + \tilde{q})) \stackrel{!}{=} \frac{\partial F_1}{\partial q} . \quad (3.40)$$

Eine erste Integration von (3.40) liefert:

$$F_1(q, \bar{q}, t) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot(\omega_0(t + \bar{q})) + f_1(\bar{q}, t) . \quad (3.41)$$

Diesen Ausdruck leiten wir partiell nach \bar{q} ab und vergleichen ihn mit (3.39). Dann folgt notwendig:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{q}} = 0 .$$

F_1 muss außerdem die HJD (3.2) erfüllen:

$$-\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 .$$

Dies bedeutet mit (3.40) und (3.41),

$$-\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2}{\sin^2(\omega_0(t + \bar{q}))} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 (\cot^2(\omega_0(t + \bar{q})) + 1) ,$$

was sich wiederum nur durch

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$$

erfüllen lässt. Bis auf eine unwesentliche additive Konstante bleibt also als Erzeugende:

$$F_1(q, \bar{q}, t) = \frac{1}{2} m \omega_0 q^2 \cot(\omega_0(t + \bar{q})) . \quad (3.42)$$

Bis auf die Zeitabhängigkeit haben wir diesen Ausdruck bereits in (2.182) als Erzeugende einer kanonischen Transformation für den harmonischen Oszillatoren kennengelernt.

2. Wir hatten in (3.15) festgestellt, dass die Lösung der HJD mit dem unbestimmten Wirkungsintegral identisch ist. Dies wollen wir einmal am harmonischen Oszillatoren überprüfen. Mit (3.33) in (3.27) gilt zunächst:

$$S(q, \alpha, t) = \int dq p - \alpha t .$$

Wir setzen (3.38) ein:

$$S(q, \alpha, t) = 2E \int dt \sin^2 \omega_0 t - E t , \quad (\alpha = E) . \quad (3.43)$$

Andererseits gilt für die Oszillatortrajektorie nach (3.38):

$$L = T - V = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 = E (\sin^2 \omega_0 t - \cos^2 \omega_0 t) = 2E \sin^2 \omega_0 t - E .$$

Damit folgt aus (3.43) das erwartete Ergebnis:

$$S = \int L dt + C .$$

3.3 Hamilton'sche charakteristische Funktion

Die Integration der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung des harmonischen Oszillators im letzten Abschnitt wurde vor allem durch den *Separationsansatz* (3.22) möglich, der q - und t -Abhängigkeiten additiv voneinander trennt. Eine solche Separation ist immer dann sinnvoll, wenn die *alte* Hamilton-Funktion die Zeit nicht explizit enthält:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H : \text{Integral der Bewegung} .$$

Dann lautet die HJD (3.2):

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_S}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 . \quad (3.44)$$

Die gesamte Zeitabhängigkeit steckt nun im zweiten Summanden, sodass der Ansatz

$$S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t) = W(\mathbf{q} | \bar{\mathbf{p}}) - Et \quad (3.45)$$

naheliegt, durch den die Zeitabhängigkeit vollständig aus der HJD (3.44) eliminiert wird:

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_S}\right) = E . \quad (3.46)$$

Die Konstante E ist in der Regel, bei skleronomen Zwangsbedingungen nämlich, die Gesamtenergie des Systems. Die Funktion $W(\mathbf{q} | \bar{\mathbf{p}})$ wird

- ▶ **Hamilton'sche charakteristische Funktion**

genannt. E ist natürlich über W von den *neuen* Impulsen $\bar{p}_j = \alpha_j$ abhängig:

$$E = E(\alpha_1, \dots, \alpha_S) . \quad (3.47)$$

Die durch die Funktion S aus (3.45) erzeugte kanonische Transformation ist dann durch

$$\bar{q}_j = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} t ; \quad p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} \quad (3.48)$$

gegeben.

Man kann aber $W(\mathbf{q} | \bar{\mathbf{p}})$ auch als eigenständige Erzeugende einer kanonischen Transformation (*im engeren Sinne*) auffassen, d. h. nicht mehr nur als Teil von $S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t)$. W ist vom Typ F_2 , erzeugt damit die Transformation

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} ; \quad \bar{q}_j = \frac{\partial W}{\partial \bar{p}_j} ; \quad \bar{H} = H , \quad (3.49)$$

wobei wir

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H = E = \text{const} \quad (3.50)$$

voraussetzen. Wir fordern von der Erzeugenden W , dass durch sie

$$\text{alle } \dot{q}_j \text{ zyklisch} \Leftrightarrow \text{alle } \dot{p}_j = \alpha_j = \text{const} \quad (3.51)$$

werden. Das entspricht nun dem zu Beginn des Kap. 3 vorgestellten Lösungsverfahren 2. Aus (3.50) folgt dann einfach durch Einsetzen:

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E(\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (3.52)$$

also trotz der nun etwas anderen Zielsetzung (3.51) dieselbe Differentialgleichung wie in (3.46).

Da nach Konstruktion

$$\bar{H} = H = E(\bar{\mathbf{p}}) = \bar{H}(\bar{\mathbf{p}}) \quad (3.53)$$

gilt, lassen sich die kanonischen Bewegungsgleichungen trivial integrieren:

$$\dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = \omega_j, \quad (3.54)$$

$$\bar{q}_j(t) = \omega_j t + \beta_j = \frac{\partial W}{\partial \bar{p}_j}. \quad (3.55)$$

Wir wollen auch hier zur Verdeutlichung die **Lösungsmethode** noch einmal skizzieren:

- a) Wir stellen die HJD in der Form (3.52) auf!
- b) Wir suchen die vollständige Lösung für W mit Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_s$:

$$W = W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (3.56)$$

- c) Wir identifizieren:

$$\bar{p}_j = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (3.57)$$

- d) Wir lösen die HJD (3.52) nach

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = p_j(q, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \quad (3.58)$$

auf oder differenzieren die Lösung W entsprechend.

3.3 Hamilton'sche charakteristische Funktion

e) Wir setzen

$$E = E(\boldsymbol{\alpha}) \quad (3.59)$$

und bilden:

$$\omega_j = \frac{\partial E}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (3.60)$$

Gleichung (3.59) wird nach reinen Zweckmäßigkeitsgesichtspunkten angesetzt. Wir nennen zwei plausible Beispiele:

1) Mit dem Ansatz

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^S \frac{\alpha_j^2}{2m} \quad (3.61)$$

führt die gesuchte Transformation wegen

$$\overline{H} = H = \sum_{j=1}^S \frac{\tilde{p}_j^2}{2m} \quad (3.62)$$

auf die Hamilton-Funktion \overline{H} eines Systems von freien Massenpunkten. Die in H vorhandene Wechselwirkung wird also wegtransformiert, und die Lösungen des Problems haben dann nach (3.55) die bekannte Gestalt der kräftefreien Bewegung von Massenpunkten:

$$\tilde{q}_j(t) = \frac{\alpha_j}{m} t + \beta_j. \quad (3.63)$$

Dies entspricht im Übrigen dem Verfahren 1., wie wir es zu Beginn von Kap. 3 bereits angedeutet hatten.

2) Man könnte auch daran denken,

$$E(\alpha_1, \dots, \alpha_S) = \alpha_1 \quad (3.64)$$

zu setzen. Man identifiziert dann den *neuen* Impuls \tilde{p}_1 mit α_1 und die anderen $S - 1$ Impulse \tilde{p}_j mit den $S - 1$ wesentlichen Integrationskonstanten der vollständigen Lösung W der HJD (3.52). Dann wird

$$\omega_j = \delta_{j1} \quad (3.65)$$

und für die neuen Koordinaten gilt:

$$\tilde{q}_1 = t + \beta_1; \quad \tilde{q}_j = \beta_j, \quad j = 2, \dots, S. \quad (3.66)$$

f) Wir lösen

$$\tilde{q}_j = \omega_j(\boldsymbol{\alpha}) t + \beta_j = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.67)$$

nach

$$q_j = q_j(t, \alpha, \beta) \quad (3.68)$$

auf und setzen die Lösung dann in (3.58) ein:

$$p_j = p_j(t, \alpha, \beta) . \quad (3.69)$$

g) Mit den Anfangsbedingungen

$$q_j^{(0)} = q_j(t = t_0) ; \quad p_j^{(0)} = p_j(t = t_0)$$

folgt aus (3.58):

$$\alpha = \alpha(p^{(0)}, q^{(0)}) . \quad (3.70)$$

Mit (3.68) und (3.69) ergibt sich dann noch:

$$\beta = \beta(p^{(0)}, q^{(0)}) . \quad (3.71)$$

Durch Einsetzen von α und β in (3.68) und (3.69) ist dann das Problem vollständig gelöst.

Denken wir zum Schluss noch etwas über die physikalische Bedeutung der Hamilton'schen charakteristischen Funktion W nach. Wir hatten in (3.15) gesehen, dass die Lösung der *vollen* HJD (3.2) mit dem unbestimmten Wirkungsintegral $\int L dt$ identisch ist. Wir können auch W eine ähnliche Interpretation zuschreiben.

$$W = W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial W}{\partial \dot{p}_j} \dot{\dot{p}}_j \right) = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j . \quad (3.72)$$

W entspricht also der *Wirkung A*, die in (2.65) zur Formulierung des *Prinzips der kleinsten Wirkung* verwendet wurde:

$$W = \int \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j dt = \int \sum_{j=1}^S p_j dq_j . \quad (3.73)$$

A ist das bestimmte, W das unbestimmte Integral.

3.4 Separation der Variablen

Ist das Hamilton-Jacobi-Verfahren in der bislang besprochenen Form überhaupt hilfreich? Man ersetzt schließlich $2S$ gewöhnliche (Hamilton'sche) Differentialgleichungen durch eine partielle Differentialgleichung. Letztere sind aber im Allgemeinen wesentlich schwieriger zu lösen. Die Methode stellt deshalb auch nur dann ein wirklich mächtiges, den anderen

3.4 Separation der Variablen

Verfahren überlegenes Hilfsmittel dar, wenn sich die HJD *separieren* lässt. Was das bedeutet, wollen wir uns in diesem Abschnitt klar machen.

Wir setzen voraus, dass H nicht explizit von der Zeit abhängt, also ein Integral der Bewegung darstellt. Die kanonische Transformation erfolgt durch die charakteristische Funktion $W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}})$ des letzten Abschnitts. Wir können dann die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung in der Form (3.52) verwenden:

$$H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = E. \quad (3.74)$$

Wir nehmen einmal an, q_1 und $\partial W / \partial q_1$ erscheinen in H nur in der Form

$$f\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right),$$

die keine anderen q_j , $\partial W / \partial q_j$, $j > 1$, enthält, sodass sich (3.74) wie folgt schreiben lässt:

$$H\left(q_2, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}, f\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right)\right) = E. \quad (3.75)$$

Dann empfiehlt sich der folgende Ansatz:

$$W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) = \overline{W}(q_2, \dots, q_s, \dot{\mathbf{p}}) + W_1(q_1, \dot{\mathbf{p}}). \quad (3.76)$$

Einsetzen in (3.75) liefert:

$$H\left(q_2, \dots, q_s, \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_s}, f\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)\right) = E. \quad (3.77)$$

Nehmen wir einmal an, wir hätten die Lösung für W bereits gefunden. Dann muss (3.77) nach Einsetzen von (3.76) zur Identität werden, d. h. für alle q_1 erfüllt sein. Eine Änderung der Koordinate q_1 darf sich bezüglich H nicht bemerkbar machen. Da q_1 aber nur in f eingeht, muss f selbst konstant sein:

$$f\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}\right) = C_1, \quad (3.78)$$

$$H\left(q_2, \dots, q_s, \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \overline{W}}{\partial q_s}; C_1\right) = E. \quad (3.79)$$

Da die neuen Impulse \dot{p}_j nach Konstruktion sämtlich konstant sind, ist W_1 nur von q_1 abhängig. Wir können deshalb in (3.78) die partielle durch die entsprechende totale Ableitung ersetzen. Was haben wir mit (3.78) und (3.79) erreicht? (3.78) ist eine **gewöhnliche** Differentialgleichung für W_1 , (3.79) nach wie vor eine partielle Differentialgleichung, allerdings mit einer um eins kleineren Zahl unabhängiger Variablen.

In gewissen Fällen lassen sich so sukzessive alle Koordinaten abtrennen und die vollständige Lösung der HJD in Verallgemeinerung von (3.76) wie folgt ansetzen:

$$W = \sum_{j=1}^S W_j(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_S) . \quad (3.80)$$

Dadurch wird die HJD dann in **S gewöhnliche** Differentialgleichungen der Form

$$H_j\left(q_j, \frac{dW_j}{dq_j}, \alpha_1, \dots, \alpha_S\right) = \alpha_j \quad (3.81)$$

zerlegt. Man sagt in einem solchen Fall, die HJD sei in den Koordinaten q_j **separabel**. Jede Gleichung in (3.81) enthält nur eine Koordinate q_j , und die entsprechende Ableitung von W_j nach q_j , sollte sich deshalb in der Regel einfach nach dW_j/dq_j auflösen und integrieren lassen. Ob eine Separation der Form (3.80) wirklich möglich ist, hängt allerdings sehr stark von der Wahl der generalisierten Koordinaten q_j und natürlich von der Gestalt der Hamilton-Funktion ab. Gelingt es zum Beispiel, Koordinaten zu finden, für die sich die Terme der Hamilton-Funktion wie folgt additiv gruppieren lassen,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^S H_j(q_j, p_j) ,$$

so führt der Ansatz (3.80) ersichtlich direkt auf (3.81).

Für den **Spezialfall**, dass nur eine Koordinate nicht zyklisch ist, ist eine Separation immer möglich:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \text{ nicht-zyklisch} \\ q_{j, j > 1} \text{ zyklisch} \end{array} \right\} \Rightarrow p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \alpha_j = \text{const} , \quad j > 1 . \quad (3.82)$$

Welcher Ansatz ist nun in einem solchen Fall zweckmäßig? Nach Konstruktion erzeugt W eine Transformation auf ausnahmslos zyklische Koordinaten. q_2, \dots, q_S sind aber bereits zyklisch. Für diese sollte W deshalb die **identische Transformation** (2.176) sein:

$$F_2(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) = \sum_{j=2}^S q_j \tilde{p}_j . \quad (3.83)$$

Mit $\tilde{p}_j = \alpha_j$ bietet sich dann der folgende Ansatz für W an:

$$W = W_1(q_1) + \sum_{j=2}^S \alpha_j q_j . \quad (3.84)$$

Die HJD (3.74) wird damit zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung für W_1 :

$$H\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}, \alpha_2, \dots, \alpha_S\right) = E . \quad (3.85)$$

3.4 Separation der Variablen

Gleichung (3.84) lässt sich natürlich dahingehend verallgemeinern, dass man nicht nur für den Fall, dass alle q_j bis auf eines zyklisch sind, einen solchen Ansatz verwendet, sondern dass man ganz generell **jede** zyklische Koordinate q_i durch einen Ansatz der Form

$$W = \overline{W}(q_{j, j \neq i}, \dot{\mathbf{p}}) + \alpha_i q_i \quad (3.86)$$

absepariert.

Für nicht-zyklische Koordinaten gibt es kein allgemeines Verfahren zur Separation. Trotzdem dürfte die Hamilton-Jacobi-Methode wohl das erfolgreichste Hilfsmittel zum Auffinden allgemeiner Lösungen von Bewegungsgleichungen sein. Das soll zum Schluss an zwei Beispielen demonstriert werden:

1) Ebene Bewegung eines Teilchens im Zentraalfeld *Zentraalfeld* bedeutet $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Als generalisierte Koordinaten bieten sich Kugelkoordinaten an, wobei die *ebene Bewegung* für $\vartheta = \text{const}$ sorgt. Es bleiben also

$$q_1 = r; \quad q_2 = \varphi. \quad (3.87)$$

Damit lautet die Hamilton-Funktion (2.45):

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r). \quad (3.88)$$

φ ist offensichtlich zyklisch und damit

$$p_\varphi = \alpha_\varphi = \text{const} \quad (\text{Bahndrehimpuls}). \quad (3.89)$$

Nach (3.86) empfiehlt sich dann für die charakteristische Funktion W der Ansatz:

$$W = W_1(r) + \alpha_\varphi \varphi. \quad (3.90)$$

Da für dieses Beispiel $\partial H / \partial t = 0$ ist und ferner die Zwangsbedingung (*Bewegung in der Ebene*) skleronom ist, lautet die zu lösende HJD:

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + V(r) = \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2} \right\} + V(r) = E. \quad (3.91)$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\frac{dW_1}{dr} = \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}. \quad (3.92)$$

Die charakteristische Funktion W ist dann:

$$W = \int dr \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2} + \alpha_\varphi \varphi}. \quad (3.93)$$

Dabei ist im ersten Summanden natürlich das unbestimmte Integral gemeint.

Wir wählen nun wie in (3.65),

$$E = \alpha_1 \Leftrightarrow \omega_j = \delta_{j1}, \quad (3.94)$$

und bekommen dann aus den Transformationsgleichungen (3.66) und (3.67):

$$t + \beta_1 = \bar{q}_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial E} = \int dr \frac{m}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}}. \quad (3.95)$$

Die Umkehrung liefert dann $r = r(t; \alpha, \beta)$.

$$\beta_2 = \bar{q}_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = - \int dr \frac{\frac{\alpha_\varphi}{r^2}}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}} + \varphi. \quad (3.96)$$

Wir setzen noch

$$\beta_2 = \varphi_0, \quad x = \frac{1}{r}, \quad \alpha_\varphi = L$$

und haben dann mit

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}(E - V(1/x)) - x^2}} \quad (3.97)$$

nach Umkehrung die bekannte Bahngleichung $r = r(\varphi)$ des Zentralkraftproblems gefunden. L ist mit dem Bahndrehimpuls identisch. Die Ergebnisse (3.95) und (3.97) haben in der Newton-Mechanik wesentlich mehr Rechenaufwand erfordert ((2.256), (2.257), Bd. 1). Anfangsbedingungen legen β_1, φ_0, E, L fest.

2) Teilchen im Schwerkraftefeld Die Hamilton-Funktion $H = T + V = E$ ist klar:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz. \quad (3.98)$$

x und y sind zyklisch und damit die zugehörigen Impulse konstant:

$$p_x = \alpha_x = \text{const}; \quad p_y = \alpha_y = \text{const}. \quad (3.99)$$

3.4 Separation der Variablen

Der passende Ansatz für die charakteristische Funktion W ist dann:

$$W = W_1(z) + \alpha_x x + \alpha_y y . \quad (3.100)$$

Damit lautet die HJD:

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dW_1}{dz} \right)^2 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2 \right\} + mgz = E .$$

Es folgt dann unmittelbar:

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \int dz \sqrt{2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2} \\ &= -\frac{1}{3m^2g} \{2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2\}^{3/2} + C . \end{aligned}$$

Für die charakteristische Funktion gilt also:

$$W = -\frac{1}{3m^2g} \{2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2\}^{3/2} + \alpha_x x + \alpha_y y . \quad (3.101)$$

Wir setzen wieder $E = \alpha_1$ und haben dann gemäß (3.66):

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial E} = -\frac{1}{mg} \{2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2\}^{1/2} , \\ \bar{q}_2 &= \beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_x} = x + \frac{\alpha_x}{m^2g} \{2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2\}^{1/2} , \\ \bar{q}_3 &= \beta_3 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_y} = y + \frac{\alpha_y}{m^2g} \{2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2\}^{1/2} . \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile folgt:

$$z(t) = -\frac{1}{2}g (t + \beta_1)^2 + \frac{2mE - (\alpha_x^2 + \alpha_y^2)}{2m^2g} . \quad (3.102)$$

Setzen wir die erste Zeile in die beiden anderen ein, so ergibt sich weiter:

$$x(t) = \beta_2 + \frac{\alpha_x}{m} (t + \beta_1) , \quad (3.103)$$

$$y(t) = \beta_3 + \frac{\alpha_y}{m} (t + \beta_1) . \quad (3.104)$$

Der Rest wird durch Anfangsbedingungen geregelt. Wir wählen

$t = 0 :$

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = z(0) = 0 ; \\ p_x(0) &= p_0 ; \quad p_y(0) = p_z(0) = 0 . \end{aligned} \quad (3.105)$$

Daraus leiten wir ab:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_x = \text{const} = p_0 , \\ p_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = \alpha_y = \text{const} = 0 , \\ p_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = \left\{ 2m(E - mgz) - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ 2m(E - mgz) - p_0^2 \right\}^{1/2} , \\ p_z(0) &= 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2m}p_0^2 . \end{aligned}$$

Mit (3.102) bis (3.105) folgt noch:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 .$$

Dies ergibt dann die bekannte Lösung:

$$z(t) = -\frac{1}{2}g t^2 ; \quad x(t) = \frac{p_0}{m} t ; \quad y(t) \equiv 0 . \quad (3.106)$$

3.5 Wirkungs- und Winkelvariable

3.5.1 Periodische Systeme

Wir diskutieren nun eine wichtige Modifikation des Hamilton-Jacobi-Verfahrens, das auf

- ▶ periodische Systeme

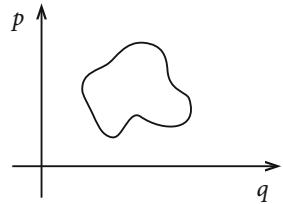
zugeschnitten ist, bei denen man sich häufig mehr für die Frequenzen der Bewegung als z. B. für die konkrete Gestalt der Bahn interessiert.

Was heißt **periodisch**?

Bei einem Freiheitsgrad ($S = 1$) ist das unmittelbar evident. Nach einer gewissen Zeit τ , der Periode des Systems, wird der Ausgangszustand wieder erreicht. Der Phasenraum ist die zweidimensionale (p, q) -Ebene. Man unterscheidet dabei zwei Typen von Periodizitäten:

3.5 Wirkungs- und Winkelvariable

Abb. 3.1 Einfaches Beispiel für eine Libration



■ 1) Libration

Die Phasenbahn ist eine geschlossene Kurve:

$$\begin{aligned} q(t + \tau) &= q(t) , \\ p(t + \tau) &= p(t) . \end{aligned} \quad (3.107)$$

q und p sind periodisch mit gleicher Frequenz. Das ist typisch für schwingende Systeme wie Pendel, Feder usw., die sich zwischen zwei Zuständen verschwindender kinetischer Energie bewegen.

Beispiel: Linearer harmonischer Oszillatator

Die Phasenbahn ist eine Ellipse, wie wir als Beispiel zu (2.99) diskutiert haben:

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega_0^2}} , \quad H = E .$$

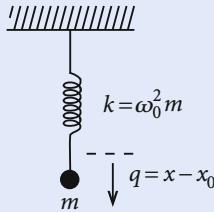


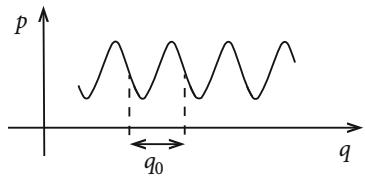
Abb. 3.2 Der lineare, harmonische Oszillatator als Beispiel für ein periodisches System (Libration)

■ 2) Rotation

p ist auch in diesem Fall periodisch,

$$p(t + \tau) = p(t) , \quad (3.108)$$

Abb. 3.3 Einfaches Beispiel für eine Rotation



q dagegen nicht mehr. Die Koordinate ändert sich vielmehr in der Periode τ um einen konstanten Wert q_0 :

$$q(t + \tau) = q(t) + q_0 . \quad (3.109)$$

Die Phasenbahn ist nun offen, wobei p jedoch eine periodische Funktion von q ist.

Beispiel

Achsendrehung eines starren Körpers:

$$q = \varphi ; \quad q_0 = 2\pi .$$

Bisweilen lassen sich beide Bewegungstypen an ein- und demselben System beobachten, z. B. beim **Pendel**.

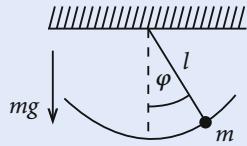


Abb. 3.4 Das Pendel als Beispiel für ein periodisches System (Rotation)

Die Hamilton-Funktion des Pendels haben wir in Abschn. 2.2.2 abgeleitet (2.33):

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mg l \cos \varphi = E .$$

Für den generalisierten Impuls hatten wir gefunden:

$$p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi} = \pm \sqrt{2ml^2(E + mg l \cos \varphi)} .$$

p_φ ist der Drehimpuls des Pendels und als solcher reell. Der Radikand muss also positiv sein:

$$\cos \varphi \geq -\frac{E}{mg l} .$$

- a) $E > mg l$: Alle Winkel φ sind möglich. Das Pendel *überschlägt sich*. Es handelt sich um eine

Rotation.

- b) $-mg l < E < mg l$: Nur ein begrenzter Winkelbereich $[-\varphi_0, \varphi_0]$ mit $\cos \varphi_0 = -(E/mg l)$ ist möglich. Es handelt sich also um eine

Libration.

Für Systeme mit $S > 1$ Freiheitsgraden heißt die Bewegung **periodisch**, falls die Projektion der Phasenbahn auf jede (q_j, p_j) -Ebene periodisch im obigen Sinne ist. Dabei brauchen nicht alle (q_j, p_j) -Sätze periodisch mit derselben Frequenz zu sein, sodass die Bahn im $2S$ -dimensionalen Phasenraum dann nicht notwendig einfach periodisch ist. Wenn die Frequenzen der projizierten Bahnen nicht in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, so ergibt sich eine offene Phasenraumbahn. Man nennt die Bewegung dann **bedingt periodisch**.

Bei Systemen, für die sich die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung vollständig separieren lässt, für die also (3.80) und (3.81) gelten, lässt sich die Periodizität einfach überprüfen.

$$\begin{aligned} W &= \sum_{j=1}^S W_j(q_j; \alpha), \\ p_j &= \frac{\partial W}{\partial q_j} = \frac{dW_j}{dq_j} = p_j(q_j; \alpha). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Die projizierten Bahnen sind in einem solchen Fall unabhängig voneinander. Falls $p_j(q_j)$ für jedes $j = 1, \dots, S$ eine geschlossene Kurve oder eine periodische Funktion im Sinne von (3.107) bzw. (3.108) und (3.109) ist, dann ist die Systembewegung insgesamt periodisch.

3.5.2 Wirkungs- und Winkelvariable

Die Betrachtungen dieses Abschnitts betreffen ausschließlich periodische Systeme.

Wir fassen noch einmal das Wesentliche des Hamilton-Jacobi-Verfahrens zusammen:

Gesucht wird eine kanonische Transformation

$$(q, p) \longrightarrow (\bar{q}, \bar{p})$$

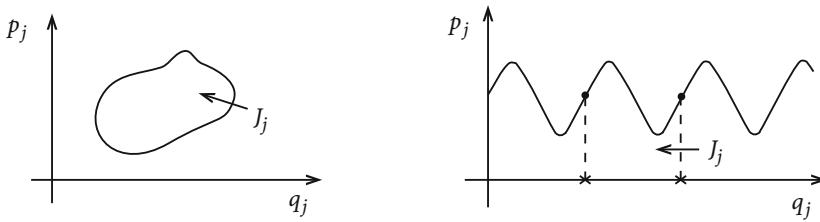


Abb. 3.5 Zur Festlegung der Wirkungsvariablen einer Libration (links) bzw. einer Rotation (rechts)

so, dass gilt:

$$\begin{aligned}\bar{p}_j &= \text{const} \quad \forall j, \\ \bar{q}_j &= \begin{cases} \text{const} & \forall j \\ \text{zyklisch} & \forall j \end{cases} \Leftrightarrow S(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t), \\ &\Leftrightarrow W(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}).\end{aligned}$$

Die Erzeugenden S und W sind dabei Lösungen der HJD mit Integrationskonstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_S$, die man mit den *neuen* Impulsen identifiziert:

$$\bar{p}_j = \alpha_j \quad \forall j.$$

Man hätte natürlich genauso gut irgendwelche Funktionen der α_j mit den \bar{p}_j gleichsetzen können. Die

► **Wirkungsvariablen J_j**

sind ganz spezielle Funktionen der α_j :

$$J_j = \oint p_j dq_j, \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (3.111)$$

Integriert wird über eine volle Periode der Libration bzw. der Rotation.

Wir setzen wie in (3.110) ein separables System voraus und können dann für (3.111) schreiben:

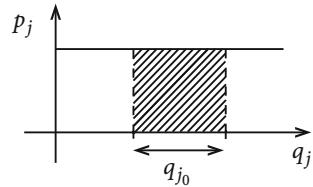
$$J_j = \oint \frac{dW_j(q_j; \boldsymbol{\alpha})}{dq_j} dq_j = J_j(\boldsymbol{\alpha}). \quad (3.112)$$

J_j stellt also den **Zuwachs** der Erzeugenden W dar, den diese pro q_j -Umlauf erfährt. In (3.112) ist q_j lediglich eine Integrationsvariable, sodass die Wirkungsvariable J_j also in der Tat nur von den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_S$ abhängt und damit als *neuer* Impuls \bar{p}_j brauchbar ist. Da die Variablenpaare (q_j, p_j) unabhängig voneinander sind, sind es natürlich auch die J_j . Die Umkehrung von (3.112) liefert:

$$\alpha_j = \alpha_j(J_1, \dots, J_S), \quad j = 1, 2, \dots, S. \quad (3.113)$$

3.5 Wirkungs- und Winkelvariable

Abb. 3.6 Wirkungsvariable für den Spezialfall einer zyklischen Koordinate



Damit wird die Hamilton'sche charakteristische Funktion W von den J_1, \dots, J_S abhängig:

$$W = W(q_1, \dots, q_S; J_1, \dots, J_S) . \quad (3.114)$$

Wegen (3.64)

$$H = \bar{H} = \alpha_1(J) \quad (3.115)$$

ist dann auch die *neue* Hamilton-Funktion ausschließlich eine Funktion der J_j :

$$\bar{H} = \bar{H}(J_1, \dots, J_S) . \quad (3.116)$$

Einen Spezialfall stellt

$$q_j \text{ zyklisch} \Leftrightarrow p_j = \text{const}$$

dar, da dann die Phasenbahn parallel zur q_j -Achse verläuft. Diesem Grenzfall einer periodischen Bewegung kann eine willkürliche Periode q_{j0} zugeordnet werden. Da q_j bei Rotationen meistens einen Winkel darstellt, vereinbart man $q_{j0} = 2\pi$. Dies bedeutet für die zugehörige Wirkungsvariable:

$$J_j = 2\pi p_j , \quad \text{falls } q_j \text{ zyklisch} . \quad (3.117)$$

Wir kommen nun zur

- Winkelvariablen ω_j ,

die man als die zu J_j konjugierte Variable einführt:

$$\tilde{p}_j = J_j \Leftrightarrow \tilde{q}_j = \omega_j , \quad j = 1, 2, \dots, S .$$

Nach Konstruktion (s. (3.116)) sind alle \tilde{q}_j zyklisch. Die ω_j lassen sich aus W ableiten:

$$\omega_j = \frac{\partial W}{\partial J_j} , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (3.118)$$

Mit der Hamilton'schen Bewegungsgleichung für $\dot{\tilde{q}}_j$ folgt:

$$\dot{\omega}_j = \frac{\partial}{\partial J_j} \bar{H}(J) = v_j(J_1, \dots, J_S) = \text{const} . \quad (3.119)$$

Die Integration ist dann trivial:

$$\omega_j = \nu_j t + \beta_j , \quad j = 1, 2, \dots, S . \quad (3.120)$$

Dies entspricht dem in Abschn. 3.3 erläuterten Verfahren. Darin besteht aber nicht der besondere Vorteil dieser Methode. Dieser wird klar, wenn man sich einmal die physikalische Bedeutung der Wirkungs- und Winkelvariablen anschaut. Wir berechnen zu diesem Zweck die Änderung von ω_i bei einer Änderung der Koordinaten q_j über einen vollen Zyklus:

$$\begin{aligned} \Delta_j \omega_i &= \oint_j d\omega_i = \oint_j \frac{\partial \omega_i}{\partial q_j} dq_j = \oint_j \frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial J_i} dq_j \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_j \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} J_j . \end{aligned}$$

ω_i ändert sich also nur, wenn $q_j = q_i$ ist, und dann gerade um 1:

$$\Delta_j \omega_i = \delta_{ij} . \quad (3.121)$$

Dies bedeutet mit (3.120), wenn τ_i die Periode von q_i ist:

$$\Delta_i \omega_i = \nu_i \tau_i = 1 . \quad (3.122)$$

Es ist also:

$$\nu_i = \frac{1}{\tau_i} : \quad \text{Frequenz der zu } q_i \text{ gehörenden periodischen Bewegung} .$$

Hierin liegt die eigentliche Bedeutung der Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen, die eine Bestimmung der Frequenzen periodischer Bewegungen gestattet, ohne die vollständige Lösung für die Systembewegung präparieren zu müssen. Man kann die Frequenzen ν direkt berechnen, ohne zurück auf die eigentlichen Koordinaten transformieren zu müssen. Unser Standardbeispiel

- ▶ linearer harmonischer Oszillatator

soll erneut dazu dienen, das Verfahren zu demonstrieren.

Die Phasenbahn ist eine Ellipse, das System also periodisch. Aus

$$\overline{H} = H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 = \alpha_1$$

folgt:

$$p = \pm m \omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m \omega_0^2} - q^2} = \frac{dW}{dq} .$$

3.5 Wirkungs- und Winkelvariable

Die Nullstellen des Radikanden definieren die Umkehrpunkte:

$$q_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m \omega_0^2}} .$$

Wegen $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ ist auf dem Weg $q_- \rightarrow q_+$ $p > 0$, auf dem Rückweg $q_+ \rightarrow q_-$ dagegen $p < 0$. Damit können wir die Wirkungsvariable berechnen:

$$\begin{aligned} J &= \oint p dq = 2 \int_{q_-}^{q_+} p dq = 2m \omega_0 \int_{q_-}^{q_+} \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m \omega_0^2} - q^2} dq \\ &= 2m \omega_0 \left[\frac{1}{2} q \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m \omega_0^2} - q^2} + \frac{\alpha_1}{m \omega_0^2} \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m \omega_0^2}}} \right]_{q_-}^{q_+} = \frac{2\pi}{\omega_0} \alpha_1 . \end{aligned}$$

Die *neue* Hamilton-Funktion des linearen harmonischen Oszillators hat damit die einfache Gestalt:

$$\overline{H} = \alpha_1 = \frac{\omega_0}{2\pi} J . \quad (3.123)$$

Für die Frequenz ν der periodischen Bewegung folgt dann das erwartete Ergebnis:

$$\nu = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J} = \frac{1}{2\pi} \omega_0 . \quad (3.124)$$

3.5.3 Das Kepler-Problem

Das Beispiel des harmonischen Oszillators diente nur der Illustration. Der volle Nutzen der Methode zeigt sich erst bei anspruchsvoller Problemen der Planeten- und Atommechanik.

Das Kepler-Problem ist durch das Potential

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r} \quad (k > 0) \quad (3.125)$$

charakterisiert. Konkrete Realisierungen sind zum Beispiel:

$$\begin{aligned} k &= \gamma m M &\Leftrightarrow & \text{Gravitation} && ((2.261), \text{Bd. 1}) , \\ k &= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} &\Leftrightarrow & \text{Coulomb} && ((2.258), \text{Bd. 1}) \end{aligned} \quad (3.126)$$

Die Hamilton-Funktion lautet in den wegen (3.125) angemessenen Kugelkoordinaten, wenn man (2.45) benutzt:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} p_\varphi^2 \right) - \frac{k}{r}. \quad (3.127)$$

Für die verallgemeinerten Impulse hatten wir bereits in (2.44) gefunden:

$$p_r = m \dot{r}, \quad (3.128)$$

$$p_\vartheta = m r^2 \dot{\vartheta}, \quad (3.129)$$

$$p_\varphi = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = L_z = \text{const}. \quad (3.130)$$

φ ist zyklisch. Deswegen ist die z -Komponente des Drehimpulses $p_\varphi = L_z$ eine Konstante der Bewegung. Damit lautet die HJD:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right] - \frac{k}{r} = \alpha_1 = E. \quad (3.131)$$

Das Problem ist separierbar:

$$W = W_r(r) + W_\vartheta(\vartheta) + W_\varphi(\varphi). \quad (3.132)$$

Da φ zyklisch ist, wählen wir für W_φ die identische Transformation:

$$W_\varphi = \alpha_\varphi \varphi, \quad (3.133)$$

$$\alpha_\varphi = p_\varphi = L_z = \text{const}. \quad (3.134)$$

Wir sortieren die HJD (3.131) passend um:

$$\frac{1}{2m} r^2 \left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 - kr - Er^2 = -\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dW_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right].$$

Die linke Seite ist nur von r , die rechte nur von ϑ abhängig. Jede Seite muss also für sich bereits konstant sein:

$$\left(\frac{dW_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} = \alpha_\vartheta^2 = \text{const} \quad (3.135)$$

$$\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2} = 2m \left(E + \frac{k}{r} \right) \quad (3.136)$$

$\alpha_1, \alpha_\vartheta, \alpha_\varphi$ sind die drei gesuchten Integrationskonstanten. Man überzeugt sich leicht, dass es sich bei α_ϑ^2 um das Quadrat des Gesamtdrehimpulses handelt:

$$L_x = y p_z - z p_y = -m r^2 (\sin \varphi \dot{\vartheta} + \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi}),$$

$$L_y = z p_x - x p_z = m r^2 (\cos \varphi \dot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi}),$$

$$L_z = x p_y - y p_x = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}.$$

3.5 Wirkungs- und Winkelvariable

Damit gilt:

$$|\mathbf{L}|^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = m^2 r^4 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}. \quad (3.137)$$

Der Vergleich mit (3.135) zeigt:

$$\alpha_\vartheta^2 = |\mathbf{L}|^2. \quad (3.138)$$

α_1 (3.131), α_φ (3.134) und α_ϑ (3.138) sind also Integrationskonstanten mit elementarer physikalischer Bedeutung.

Wir können nun daran denken, die Wirkungsvariablen zu berechnen:

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = \oint \frac{dW_\varphi}{d\varphi} d\varphi = \alpha_\varphi \oint d\varphi, \quad (3.139)$$

$$J_\vartheta = \oint p_\vartheta d\vartheta = \oint \frac{dW_\vartheta}{d\vartheta} d\vartheta = \oint \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta, \quad (3.140)$$

$$J_r = \oint p_r dr = \oint \frac{dW_r}{dr} dr = \oint \sqrt{2m \left(E + \frac{k}{r} \right) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}} dr. \quad (3.141)$$

Wir wollen diese Ausdrücke nacheinander detailliert auswerten. J_φ ist sehr einfach:

$$J_\varphi = 2\pi \alpha_\varphi. \quad (3.142)$$

Bei der Berechnung von J_ϑ ist zu beachten, dass p_ϑ als Impuls reell sein muss.

$$p_\vartheta = \alpha_\varphi \sqrt{a^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}},$$

$$a^2 = \frac{\alpha_\vartheta^2}{\alpha_\varphi^2} \geq 1.$$

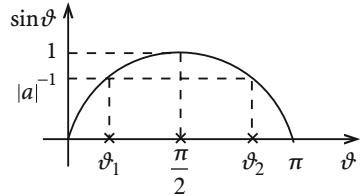
Es gibt also Umkehrpunkte mit

$$\sin \vartheta_{1,2} = |a|^{-1} \leq 1.$$

In (3.140) haben wir deshalb einmal die positive, einmal die negative Wurzel zu nehmen:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &\longrightarrow \vartheta_2 : & p_\vartheta = m r^2 \dot{\vartheta} > 0 : & + \sqrt{a^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}}, \\ \vartheta_2 &\longrightarrow \vartheta_1 : & p_\vartheta < 0 : & - \sqrt{a^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}}. \end{aligned}$$

Abb. 3.7 Zur Festlegung der Integrationsgrenzen bei der Berechnung der Wirkungsvariablen J_ϑ des Kepler-Problems



Es bleibt dann zu berechnen:

$$J_\vartheta = 2\alpha_\varphi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} +\sqrt{a^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta = 2i \alpha_\varphi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\Delta d\vartheta}{\sin \vartheta},$$

$$\Delta = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Einer guten Integraltafel entnimmt man:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\Delta}{\sin \vartheta} d\vartheta = \left[-\frac{1}{2} \ln(\Delta + \cos \vartheta) + \frac{1}{2} \ln(\Delta - \cos \vartheta) + a \ln(a \cos \vartheta + \Delta) \right] \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

Man überprüft durch Differenzieren, dass die rechte Seite in der Tat Stammfunktion des Integranden $\Delta / \sin \vartheta$ ist. Mit

$$\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1; \quad \cos \vartheta_1 = -\cos \vartheta_2 > 0; \quad \Delta(\vartheta_1) = \Delta(\vartheta_2) = 0,$$

so wie

$$\ln(\cos \vartheta_2) = \ln(-\cos \vartheta_1) = \ln(\cos \vartheta_1) \pm i\pi$$

folgt weiter:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\Delta}{\sin \vartheta} d\vartheta = \pm i\pi(a - 1)$$

J_ϑ muss insgesamt positiv sein, deswegen gilt hier das untere Vorzeichen:

$$J_\vartheta = 2\pi (\alpha_\vartheta - \alpha_\varphi). \quad (3.143)$$

Man beachte, dass die beiden Winkelanteile J_φ, J_ϑ noch völlig unabhängig vom Typ des Zentralfeldes sind. Die Form (3.125) ging noch an keiner Stelle in die Rechnung ein. Das geschieht erst bei der noch verbleibenden Bestimmung des J_r -Integrals.

Bevor wir dies tun, wollen wir jedoch das Ergebnis (3.143) noch einmal auf andere, etwas elegantere Art ableiten. Wir nutzen aus, dass die Bewegung in einer festen Bahnebene erfolgt, da $L_z = \text{const}$ und die z -Richtung durch nichts ausgezeichnet ist, sodass sogar $L =$

3.5 Wirkungs- und Winkelvariable

const sein muss. Dann können wir aber den Zuwachs dW der Erzeugenden in zwei verschiedenen Koordinatensätzen berechnen:

1. Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) :

$$p_\varphi = L_z = \alpha_\varphi = \text{const} .$$

2. Ebene Polarkoordinaten der Bahnebene $(\rho, \bar{\varphi})$:

$$p_{\bar{\varphi}} = \bar{L}_z = |\mathbf{L}| = \alpha_\vartheta = \text{const} .$$

Im letzten Schritt haben wir noch (3.138) benutzt:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial W}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial W}{\partial \dot{p}_j} \underbrace{\dot{p}_j}_{=0} \right) = \sum_j p_j \dot{q} .$$

Mit dieser Beziehung können wir für dW schreiben:

$$dW = p_r dr + p_\varphi d\varphi + p_\vartheta d\vartheta = p_\rho d\rho + p_{\bar{\varphi}} d\bar{\varphi} .$$

Da die Radialanteile natürlich in beiden Koordinatensystemen dieselben sind, gilt weiter:

$$p_\vartheta d\vartheta = p_{\bar{\varphi}} d\bar{\varphi} - p_\varphi d\varphi = \alpha_\vartheta d\bar{\varphi} - \alpha_\varphi d\varphi .$$

Damit berechnet sich die Wirkungsvariable J_ϑ wie in (3.143) zu

$$J_\vartheta = \oint p_\vartheta d\vartheta = \alpha_\vartheta \oint d\bar{\varphi} - \alpha_\varphi \oint d\varphi = 2\pi(\alpha_\vartheta - \alpha_\varphi) .$$

Es bleibt schließlich noch das J_r -Integral zu berechnen. Für dieses gilt nach (3.141) bis (3.143):

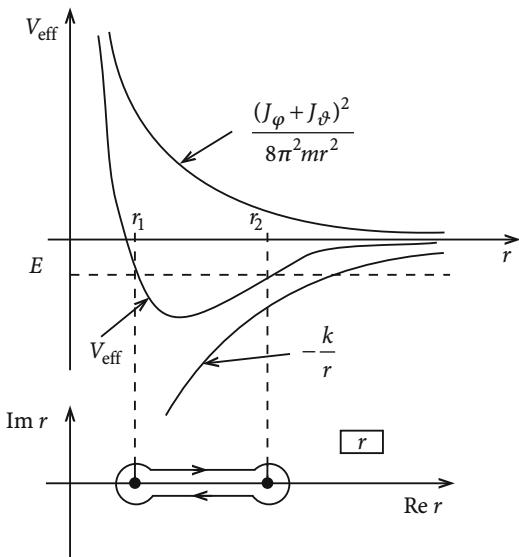
$$\begin{aligned} J_r &= \oint \sqrt{2m \left(E + \frac{k}{r} \right) - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 r^2}} dr \\ &= \oint \sqrt{2m(E - V_{\text{eff}}(r))} dr , \end{aligned} \tag{3.144}$$

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m r^2} . \tag{3.145}$$

Für gebundene Zustände, die wir hier voraussetzen wollen (periodische Bewegung), muss

$$E < 0$$

Abb. 3.8 Illustration des Integrationsweges für die Berechnung der Wirkungsvariablen J_r des Kepler-Problems



sein. Die Umkehrpunkte $r_{1,2}$ ergeben sich als Nullstellen des Radikanden in (3.144):

$$0 < r_1 \leq r \leq r_2 < \infty .$$

Wir haben hier erneut zu beachten, dass

$$p_r = m\dot{r} \begin{cases} > 0 & \text{für } r_1 \rightarrow r_2 , \\ < 0 & \text{für } r_2 \rightarrow r_1 . \end{cases} \quad (3.146)$$

Man hat also in (3.144) einmal die positive, einmal die negative Wurzel zu nehmen. Die direkte Integration ist ziemlich umständlich. Es ist deshalb empfehlenswert, eine **komplexe Integration** durchzuführen. Die entsprechende Technik werden wir in Abschn. 4.4 von Band 3 dieser Reihe im Detail vorstellen. Wir müssen hier also etwas vorgreifen. Der Leser, dem die *komplexe Integration* nicht vertraut ist, möge die nächsten Zeilen bis Gleichung (3.150) überspringen.

Wir wählen den in Abb. 3.8 angedeuteten Integrationsweg in der komplexen r -Ebene. Da die Funktionswerte auf dem *Hinweg* ($r_1 \rightarrow r_2$) positiv sind und auf dem *Rückweg* ($r_2 \rightarrow r_1$) negativ, enthält die Integration beide Zweige der zweideutigen Wurzelfunktion. In dem beim Umfahren des Integrationsweges zur **linken** Hand liegenden Gebiet ist die Funktion jedoch eindeutig. Lediglich an der Schnittkante zwischen den beiden Verzweigungspunkten r_1, r_2 haben die Funktionswerte eine Unstetigkeit. Wenn wir den skizzierten Integrationsweg auf die Strecke $\overline{r_1 r_2}$ zusammenziehen, erhalten wir mit Hilfe des Residuensatzes ((4.386), Bd. 3):

$$J_r = 2\pi i \cdot (\text{Residuen der zur linken Hand liegenden Pole}) .$$

3.5 Wirkungs- und Winkelvariable

Der Integrand in (3.144) hat in dem interessierenden Gebiet Pole bei $r = 0$ und $r = \infty$:

$$J_r = 2\pi i (a_{-1}(0) + a_{-1}(\infty)) \quad (3.147)$$

(a_{-1} : Symbol für das Residuum). Betrachten wir zunächst den Pol bei $r = 0$. Dort verhält sich der Integrand wie $[(1+x)^{-1/2} = 1 - (1/2)x + 0(x^2)]$:

$$\frac{1}{r} \sqrt{-\alpha_9^2} \sqrt{1 - \frac{2m}{\alpha_9^2} (Er^2 + kr)} = \frac{i\alpha_9}{r} \left[1 - \frac{m}{\alpha_9^2} (Er^2 + kr) + 0(r^2) \right].$$

Das Residuum lautet also:

$$a_{-1}(0) = i\alpha_9. \quad (3.148)$$

Um die Stelle $r = \infty$ zu diskutieren, transformieren wir:

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow dr = -\frac{1}{u^2} du.$$

$r \rightarrow \infty$ bedeutet also $u \rightarrow 0$. Der Integrand in (3.144) schreibt sich nun:

$$-\frac{1}{u^2} \sqrt{2mE} \sqrt{1 + \frac{k}{E} u - \frac{\alpha_9^2 u^2}{2mE}} = -\frac{1}{u^2} \sqrt{2mE} \left(1 + \frac{k}{2E} u - \frac{\alpha_9^2 u^2}{4mE} + 0(u^2) \right).$$

Das Residuum ist der Koeffizient zum $(1/u)$ -Term:

$$a_{-1}(\infty) = -\sqrt{2mE} \frac{1}{2} \frac{k}{E} = -\frac{i}{2} k \sqrt{\frac{2m}{-E}}. \quad (3.149)$$

Wir setzen (3.148) und (3.149) in (3.147) ein und haben dann:

$$J_r = -2\pi \alpha_9 + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}. \quad (3.150)$$

Wegen $\alpha_9 = (1/2\pi)(J_\vartheta + J_\varphi)$ können wir auch schreiben:

$$J_r = -(J_\vartheta + J_\varphi) + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}. \quad (3.151)$$

Da $\bar{H} = E = \alpha_1$ gilt, können wir nun die *neue* Hamilton-Funktion durch die Wirkungsvariablen ausdrücken:

$$\bar{H}(J_r, J_\vartheta, J_\varphi) = -\frac{2\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\vartheta + J_\varphi)^2}. \quad (3.152)$$

Die drei Frequenzen,

$$\nu_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial J_j}, \quad j = r, \vartheta, \varphi,$$

der periodischen Bewegung sind offensichtlich alle gleich:

$$\nu = \frac{4\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\vartheta + J_\varphi)^3}. \quad (3.153)$$

Man sagt, die Bewegung sei **vollständig entartet**. Sie ist **einfach periodisch**. Für ein Potential der Form (3.125) ist die Bahn bei negativer Gesamtenergie E geschlossen. Nach einer Periode nehmen die Winkel ϑ , φ und der Radius r wieder ihre Ausgangswerte an. Man beachte, dass die Entartung bezüglich der Winkel ϑ und φ bereits eine Eigenschaft **aller** Zentralfelder ist. Das erkennt man an (3.144), wo E mit J_φ, J_ϑ in der Form $(J_\varphi + J_\vartheta)$ verknüpft ist, ohne dass wir $V(\mathbf{r}) = V(r)$ hätten spezifizieren müssen. Wir können mit (3.151) und (3.153) noch ein interessantes Nebenergebnis ableiten:

$$\begin{aligned} (J_r + J_\vartheta + J_\varphi)^3 &= \pi^3 k^3 \frac{(2m)^{3/2}}{(-E)^{3/2}}, \\ \tau = \frac{1}{\nu} &= \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Die Periode der Bewegung hängt also mit der großen Halbachse ((2.271), Bd. 1),

$$a = -\frac{k}{2E},$$

auf die folgende Art zusammen:

$$\tau^2 \sim a^3. \quad (3.155)$$

Diese Beziehung kennen wir als **drittes Kepler'sches Gesetz** ((2.278), Bd. 1).

3.5.4 Entartung

Wir haben in Abschn. 3.5.1 die Bewegung eines Systems im 2S-dimensionalen Phasenraum **periodisch** genannt, wenn die Projektion der Bahn auf jede der S (q_j, p_j) -Ebenen periodisch im Sinne einer Libration oder Rotation ist, wobei die Frequenzen

$$\nu_j = \frac{1}{\tau_j}, \quad j = 1, 2, \dots, S \quad (3.156)$$

durchaus verschieden sein können. **Einfach periodisch** heißt die Phasenbahn, wenn nach einer hinreichend langen Zeit die Phase wieder ihren Ausgangswert annimmt. Dazu müssen allerdings die Frequenzen ν_j rationale Vielfache voneinander sein. Andernfalls heißt die Phasenbahn **bedingt periodisch**.

3.5 Wirkungs- und Winkelvariable

Wenn die Frequenzen v_j in rationalen Verhältnissen zueinander stehen,

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 ; \quad p_2 v_2 = p_3 v_3 ; \quad \dots ; \quad p_{S-1} v_{S-1} = p_S v_S ; \quad p_i \in \mathbb{N} ,$$

dann gibt es offensichtlich $(S - 1)$ unabhängige Beziehungen der Art:

$$\sum_{j=1}^S n_j^{(l)} v_j = 0 , \quad l = 1, 2, \dots, S-1 , \quad n_j^{(l)} \in \mathbb{Z} . \quad (3.157)$$

Man sagt, das System sei **m -fach entartet**, wenn es $m \leq (S - 1)$ Beziehungen dieser Art gibt. **Vollständig entartet** ist die Bewegung bei $m = S - 1$. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn wie beim Kepler-Problem alle v_j gleich sind. Eine *einfach periodische*, d. h. geschlossene Phasenbahn ist also stets vollständig entartet.

Bei m -facher Entartung können die m Entartungsbedingungen benutzt werden, um die periodische Bewegung statt durch S nur durch $(S - m)$ Frequenzen zu beschreiben. Das lässt sich wie folgt bewerkstelligen: Man führt eine kanonische Transformation

$$(\omega, J) \longrightarrow (\bar{\omega}, \bar{J}) \quad (3.158)$$

mit der Erzeugenden

$$F_2(\omega, \bar{J}) = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^S \bar{J}_l n_j^{(l)} \omega_j + \sum_{l=m+1}^S \bar{J}_l \omega_l . \quad (3.159)$$

durch. Der zweite Summand entspricht der identischen Transformation (2.176):

$$\bar{\omega}_l = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{J}_l} = \begin{cases} \sum_{j=1}^S n_j^{(l)} \omega_j & \text{für } l = 1, \dots, m , \\ \omega_l & \text{für } l = m + 1, \dots, S . \end{cases} \quad (3.160)$$

Für die *neuen* Frequenzen haben wir dann:

$$\bar{v}_l = \dot{\bar{\omega}}_l = \begin{cases} \sum_{j=1}^S n_j^{(l)} v_j = 0 & \text{für } l = 1, \dots, m , \\ v_l & \text{für } l = m + 1, \dots, S . \end{cases} \quad (3.161)$$

Nach der Transformation gibt es also nur noch $S - m$ unabhängige, von Null verschiedene Frequenzen. In der ersten Zeile in (3.161) stehen gerade die m Entartungsbedingungen. Da andererseits stets

$$\bar{v}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{J}_j}$$

gelten muss, kann die Hamilton-Funktion immer so geschrieben werden, dass sie nur von $S - m$ Wirkungsvariablen abhängt:

$$\bar{H} = \bar{H}(\bar{J}_{m+1}, \dots, \bar{J}_S) . \quad (3.162)$$

Für die im letzten Kapitel untersuchte *Kepler-Bewegung* ist $S = 3$, und es liegen zwei Entartungsbedingungen vor:

$$\nu_\varphi - \nu_\vartheta = 0 ; \quad \nu_\vartheta - \nu_r = 0 . \quad (3.163)$$

Dies führt gemäß (3.159) zu der folgenden Erzeugenden:

$$F_2 = (\omega_\varphi - \omega_\vartheta) \bar{J}_1 + (\omega_\vartheta - \omega_r) \bar{J}_2 + \omega_r \bar{J}_3 . \quad (3.164)$$

Mit (3.160) folgt weiter:

$$\bar{\omega}_1 = \omega_\varphi - \omega_\vartheta ; \quad \bar{\omega}_2 = \omega_\vartheta - \omega_r ; \quad \bar{\omega}_3 = \omega_r . \quad (3.165)$$

Dies bedeutet wegen (3.163) für die Frequenzen:

$$\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = 0 ; \quad \bar{\nu}_3 = \nu_r . \quad (3.166)$$

Die Erzeugende F_2 legt auch die neuen Wirkungsvariablen fest; denn

$$J_j = \frac{\partial F_2}{\partial \omega_j}$$

führt mit (3.164) zu:

$$J_\varphi = \bar{J}_1 ; \quad J_\vartheta = -\bar{J}_1 + \bar{J}_2 ; \quad J_r = -\bar{J}_2 + \bar{J}_3 .$$

Aufgelöst nach den \bar{J}_j ergibt dies:

$$\bar{J}_1 = J_\varphi ; \quad \bar{J}_2 = J_\varphi + J_\vartheta ; \quad \bar{J}_3 = J_\varphi + J_\vartheta + J_r . \quad (3.167)$$

Die transformierte Hamilton-Funktion \bar{H} hängt damit nur noch von einer Wirkungsvariablen ab (3.152):

$$\bar{H} = -\frac{2\pi^2 m k^2}{\bar{J}_3^2} = \bar{H}(\bar{J}_3) , \quad (3.168)$$

$$\nu = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{J}_3} = \frac{4\pi^2 m k^2}{\bar{J}_3^3} . \quad (3.169)$$

3.5.5 Bohr-Sommerfeld'sche Atomtheorie

Den vielleicht spektakulärsten Erfolg der Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen stellt die Bohr'sche Atomtheorie dar, deren Quantenhypothese sich am einfachsten über Wirkungsvariable formulieren lässt.

Definition 3.5.1

J heißt **Eigenwirkungsvariable**, falls die zugehörige Frequenz ungleich Null und nicht entartet ist.

Im Beispiel des letzten Abschnitts ist \bar{J}_3 eine solche Eigenwirkungsvariable. In der Klassischen Mechanik gibt es keine Beschränkung bezüglich des Wertebereichs von J . Experimentelle Beobachtungen im Rahmen der Atomphysik erfordern dagegen das Aufstellen der klassisch nicht beweisbaren

- ▶ Quantenhypothese.

Wenn J eine Eigenwirkungsvariable ist, dann ist die Systembewegung nur auf solchen Bahnen zugelassen, für die gilt:

$$J = n h , \quad (3.170)$$

$n \in \mathbb{N}$, $h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ (*Plancksches Wirkungsquantum*).

Wir betrachten als Beispiel das

- ▶ Wasserstoff-Atom \Leftrightarrow Kepler-Problem mit $k = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0}$.

Die Energie des H̄llenelektrons ist nach (3.168):

$$E = -\frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi \epsilon_0)^2 \bar{J}_3^2} . \quad (3.171)$$

Sie ist **gequantelt**, da \bar{J}_3 eine Eigenwirkungsvariable darstellt.

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} , \quad n = 1, 2, \dots , \quad (3.172)$$

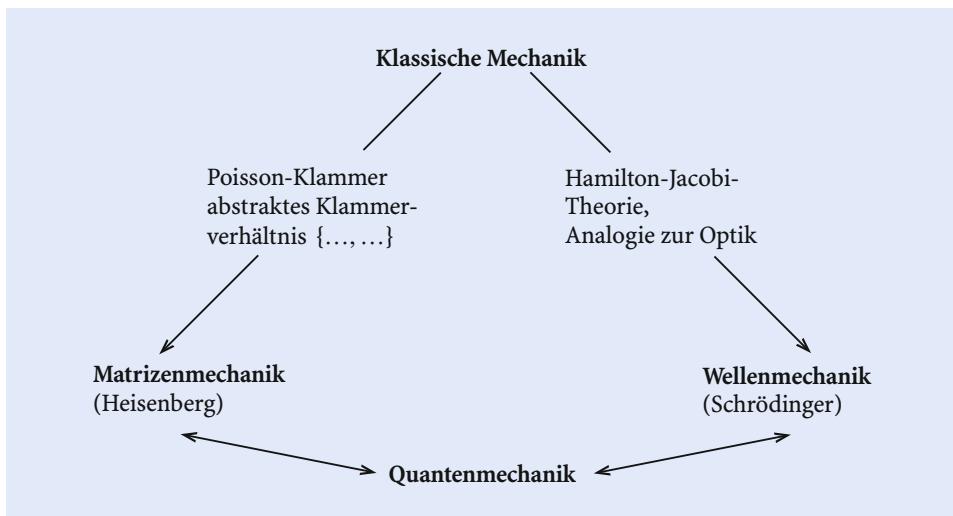
$$E_R = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi \epsilon_0)^2 h^2} = 13,61 \text{ eV} , \quad \text{Rydberg-Energie} . \quad (3.173)$$

n ist die so genannte **Hauptquantenzahl**. Gleichung (3.172) entspricht exakt dem korrekten quantenmechanischen Resultat.

3.6 Der Übergang zur Wellenmechanik

Die Anwendung der Klassischen Mechanik auf atomistische Probleme hat in der Bohr-Sommerfeld'schen Atomtheorie zu spektakulären Erfolgen geführt, hinterlässt jedoch auch

gravierende Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment, ist insbesondere auf *willkürlich erscheinende Hypothesen* aufgebaut. Wir brauchen so etwas wie eine Verallgemeinerung der makroskopisch korrekten Klassischen Mechanik, um auch mikroskopische (atomare) Systeme beschreiben zu können. Dies wurde bereits in Abschn. 2.4.5 andeutungsweise versucht, als wir über die klassische Poisson-Klammer auf eine übergeordnete mathematische Struktur geschlossen haben, die neben der Klassischen Mechanik weitere Realisierungen zulässt, zum Beispiel die Quantenmechanik in Form der so genannten **Matrizenmechanik**. Wir werden jetzt eine Analogiebetrachtung zur Optik benutzen, um die Klassische Mechanik als Grenzfall der Quantenmechanik in Form der so genannten **Wellenmechanik** zu interpretieren:



3.6.1 Wellengleichung der Klassischen Mechanik

Die folgenden Betrachtungen gelten für Systeme mit

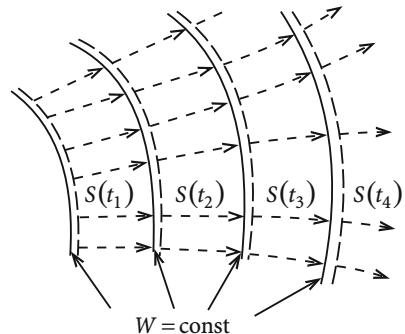
$$H = T + V = E = \text{const} , \quad (3.174)$$

d. h., die Hamilton-Funktion ist nicht explizit zeitabhängig, und es liegen auch keine rheonomen Zwangsbedingungen vor. Nach (3.45) können wir dann die Zeitabhängigkeit der **Wirkungsfunktion** abseparieren:

$$S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}, t) = W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) - Et . \quad (3.175)$$

Zur Erinnerung: S ist eine Erzeugende vom Typ F_2 , die zu $\bar{H} = 0$ und damit zu $\dot{\mathbf{p}} = \text{const}$, $\dot{\mathbf{q}} = \text{const}$ führt. Die charakteristische Funktion $W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}})$ ist zeitunabhängig, und

Abb. 3.9 Wirkungswellenfronten im Konfigurationsraum



wegen $\hat{\mathbf{p}} = \alpha = \text{const}$ gilt somit:

$$W = \text{const} \Leftrightarrow \text{feste Fläche im Konfigurationsraum}.$$

Die Flächen $S = \text{const}$ bewegen sich dagegen im Konfigurationsraum, sie schieben sich mit der Zeit t über die festliegenden W -Flächen hinweg. Sie bilden im Konfigurationsraum fortschreitende Wellenfronten der so genannten

► **Wirkungswellen.**

Wir fragen uns:

1. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die S -Flächen?
2. Welche physikalische Bedeutung hat die Bewegung der Wirkungswellen?

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass das betrachtete System aus einem einzigen Teilchen besteht,

$$\mathbf{q} = (x, y, z), \quad (3.176)$$

sodass der Konfigurationsraum mit dem dreidimensionalen Anschauungsraum übereinstimmt. Die

► **Wellengeschwindigkeit u**

ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines bestimmten Punktes der Front der Wirkungswelle. Da die Flächenkonstanten S mit der Zeit ihre Gestalt ändern werden, ist auch die Wellengeschwindigkeit nicht für alle Punkte der Wellenfront gleich. Man betrachte zwei benachbarte Punkte im Konfigurationsraum bzw. im Ereignisraum:

$$\begin{aligned} A &= (x, y, z) && \text{zur Zeit } t, \\ B &= (x + dx, y + dy, z + dz) && \text{zur Zeit } t + dt. \end{aligned}$$

Von A nach B ändert sich die Wirkungsfunktion um dS :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz \\ &= -E dt + \nabla W \cdot dr . \end{aligned} \quad (3.177)$$

Wie schnell müssen wir uns von A nach B bewegen, damit sich die Wirkung S **nicht** ändert, um also mit der Wirkungswelle mitzuwandern? Aus der Forderung

$$dS \stackrel{!}{=} 0 = -E dt + (\nabla W \cdot u) dt$$

folgt mit (3.177):

$$\nabla W \cdot u = E . \quad (3.178)$$

u ist senkrecht zur Wellenfront orientiert. ∇W steht senkrecht auf der Fläche $W = \text{const}$, ist somit parallel oder antiparallel zu u gerichtet:

$$|u| = \frac{|E|}{|\nabla W|} . \quad (3.179)$$

W ist eine Erzeugende vom Typ F_2 . Nach den allgemeinen Transformationsformeln (2.161) gilt deshalb in unserem Fall hier für den Teilchenimpuls p :

$$p = \nabla W . \quad (3.180)$$

Der Teilchenimpuls und damit die gesamte Teilchenbahn verlaufen ebenfalls senkrecht zur Wellenfront $S = \text{const}$, bzw. $W = \text{const}$. **Wirkungswellen- und Teilchengeschwindigkeit sind also (anti-)parallel!** Für die Beträge gilt

$$u = \frac{|E|}{|\nabla W|} = \frac{|E|}{p} = \frac{|E|}{m v}$$

und damit:

$$u v = \frac{|E|}{m} = \text{const} . \quad (3.181)$$

Teilchen- und Wirkungswellengeschwindigkeit sind also (anti-)parallel orientiert, wobei ihre Beträge umgekehrt proportional zueinander sind.

Grenzfälle:

$$E = T \Rightarrow u = \frac{v}{2} , \quad (3.182)$$

$$E = V \Rightarrow u = \infty , \text{ da } v = 0 . \quad (3.183)$$

Wir ziehen ein erstes Fazit: Es gibt offensichtlich zwei Arten von Bewegungen, die für die Beschreibung des Systems vollkommen äquivalent sind:

- 1) Eigentliche Teilchenbewegung,
- 2) Wirkungswellen.

Hier deutet sich ein

- ▶ Teilchen-Welle-Dualismus

an, der für die Quantenmechanik grundlegend wichtig werden wird. Um diesen Aspekt weiter zu vertiefen, formen wir die vertraute Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung der Teilchenbewegung in eine Wellengleichung für die Wirkungswellen um:

$$u = \frac{|E|}{p} = \frac{|E|}{\sqrt{2mT}} = \frac{|E|}{\sqrt{2m(E-V)}} . \quad (3.184)$$

Die HJD lautet

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + V = E \quad (3.185)$$

oder kürzer:

$$|\nabla W|^2 = 2m(E-V) . \quad (3.186)$$

Der Vergleich mit (3.184) liefert

$$|\nabla W|^2 = \frac{E^2}{u^2} . \quad (3.187)$$

Dies stimmt natürlich mit (3.179) überein. Wirkungswellen und Teilchenbewegung sind also beides Lösungen der HJD. Wegen

$$\nabla W = \nabla S \quad \text{und} \quad -E = \frac{\partial S}{\partial t}$$

erhalten wir aus (3.187) die

Wellengleichung der Klassischen Mechanik

$$(\nabla S)^2 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 . \quad (3.188)$$

Was haben wir erreicht? Die Wellengleichung (3.188) ist sicher eine sehr angemessene Formulierung der Klassischen Mechanik, wenn es um die Beschreibung atomarer Systeme geht.

- ▶ Sie ist allerdings nicht exakt!

Wir suchen deshalb eine neue Theorie, die die Klassische Mechanik als einen gewissen Grenzfall enthält, selbst aber einen größeren Gültigkeitsbereich als diese besitzt. Eine solche Theorie kann natürlich nicht aus unseren bisherigen Kenntnissen der Klassischen Mechanik **abgeleitet** werden.

Wir sind vielmehr gezwungen, einen möglichst plausiblen **Ansatz** zu konstruieren, dessen Rechtfertigung dann letztlich aus einem Vergleich mit dem experimentellen Befund gefolgert werden muss.

Dabei hilft uns nun die obige Formulierung der Klassischen Mechanik in Form einer Wellengleichung. Ein ganz analoges Problem wurde nämlich in der Optik bewältigt.

Idee:

Ist die Klassische Mechanik im Rahmen der zu suchenden übergeordneten Theorie vielleicht so etwas wie die geometrische Optik in der allgemeinen Lichtwellentheorie?

Bei sehr vielen optischen Problemen braucht man nicht die vollständige Lichtwellentheorie anzuwenden. Es reichen Hilfsvorstellungen wie

- ▶ „Lichtstrahlen“ $\hat{=}$ Bahnen von „Lichtteilchen“

aus, um mit quasigeometrischen Überlegungen vernünftige Resultate zu erzielen. Dieser Vorstellung sind allerdings Grenzen gesetzt, wenn Beugungsphänomene relevant werden. Dann muss Licht als Wellenbewegung aufgefasst werden, bei der Flächen konstanter Phase mit der Geschwindigkeit u durch den Raum wandern. Die angedeutete Analogie wollen wir im Folgenden noch etwas genauer untersuchen.

3.6.2 Einschub über Lichtwellen

Heute weiß man, dass „Licht“ ein elektromagnetischer Vorgang ist, der durch die

skalare Wellengleichung der Optik

$$\nabla^2 \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.189)$$

3.6 Der Übergang zur Wellenmechanik

beschrieben wird. Hierin sind:

$$\begin{aligned}\varphi &: && \text{skalares elektromagnetisches Potential ,} \\ c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1} &: && \text{Lichtgeschwindigkeit des Vakuums ,} \\ n &: && \text{Brechzahl, i. a. } n = n(\mathbf{r}) , \\ u = c/n &: && \text{Lichtgeschwindigkeit im Medium .}\end{aligned}$$

Wir suchen nach einfachen Lösungen der Wellengleichung. Dazu setzen wir zunächst

$$n = \text{const}$$

voraus. Dann löst der folgende Ansatz (*ebene Welle*)

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.190)$$

offenbar die Gleichung, falls noch

$$k = \omega \frac{n}{c} = \frac{2\pi v}{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.191)$$

gilt. Dabei haben wir

$$\omega = 2\pi v ; \quad u = v \lambda \quad (3.192)$$

ausgenutzt. Die Richtung von \mathbf{k} (*Wellenvektor*) definiere die z -Achse. \mathbf{k}_0 sei der Wellenvektor im Vakuum ($n = 1$):

$$\mathbf{k} = n \mathbf{k}_0 ; \quad \omega = c k_0 . \quad (3.193)$$

Wir können damit die Lösung (3.190) auch wie folgt schreiben:

$$\varphi = \varphi_0 e^{i k_0 (nz - ct)} . \quad (3.194)$$

Es sei nun

$$n = n(\mathbf{r}) \neq \text{const} .$$

Die Ortsabhängigkeit der Brechzahl verursacht Störungen (*Beugungen*) der Lichtwelle; die ebene Welle (3.194) ist nicht mehr Lösung von (3.189). Streng genommen hat auch die Wellengleichung nicht mehr die Gestalt (3.189). Damit diese in guter Näherung dennoch gültig bleibt, und die Lösung φ zumindest noch die Struktur (3.194) besitzt, ist zu fordern:

$$|\nabla n(\mathbf{r})| \ll \frac{n(\mathbf{r})}{\lambda}$$

Das charakterisiert den **Grenzfall der geometrischen Optik** (Abschn. 4.3.16, Bd. 3):

n(r) ist nur schwach räumlich veränderlich, sodass n ≈ const über Gebiete der Ausdehnung λ angenommen werden darf.

Dann sollte auch φ noch angenähert die Gestalt (3.194) haben. Man macht deshalb den folgenden **Ansatz**:

$$\varphi = \exp(A(\mathbf{r}) + i k_0 (L(\mathbf{r}) - c t)) . \quad (3.195)$$

Der erste Term legt die Amplitude fest, ist somit natürlich konstant für $n = \text{const}$. Man nennt

$$L(\mathbf{r}) : \text{ „Lichtweg“, „Eikonal“}$$

mit $L(\mathbf{r}) = nz$, falls $n = \text{const}$. Wir setzen den Ansatz (3.195) nun in die Wellengleichung (3.189) ein:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \varphi [\nabla (A(\mathbf{r}) + i k_0 L(\mathbf{r}))] , \\ \nabla^2 \varphi &= \varphi \left[(\nabla (A(\mathbf{r}) + i k_0 L(\mathbf{r})))^2 + \nabla^2 (A(\mathbf{r}) + i k_0 L(\mathbf{r})) \right] \\ &= \varphi \left[(\nabla A(\mathbf{r}))^2 - k_0^2 (\nabla L(\mathbf{r}))^2 + 2i k_0 (\nabla A(\mathbf{r})) \cdot (\nabla L(\mathbf{r})) \right. \\ &\quad \left. + \nabla^2 A(\mathbf{r}) + i k_0 \nabla^2 L(\mathbf{r}) \right] . \end{aligned}$$

Die Wellengleichung (3.189) liefert somit:

$$\begin{aligned} 0 &= i k_0 \left[\nabla^2 L(\mathbf{r}) + 2 (\nabla A(\mathbf{r})) \cdot (\nabla L(\mathbf{r})) \right] \\ &\quad + \left[\nabla^2 A(\mathbf{r}) + (\nabla A(\mathbf{r}))^2 - k_0^2 (\nabla L(\mathbf{r}))^2 + n^2 k_0^2 \right] . \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil dieser Beziehung müssen für sich genommen bereits verschwinden:

$$\nabla^2 L(\mathbf{r}) + 2 (\nabla A(\mathbf{r})) \cdot (\nabla L(\mathbf{r})) = 0 , \quad (3.196)$$

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}) + (\nabla A(\mathbf{r}))^2 + k_0^2 \left(n^2 - (\nabla L(\mathbf{r}))^2 \right) = 0 . \quad (3.197)$$

Noch ist alles exakt. Die Annahmen der

- ▶ geometrischen Optik

lassen sich nun wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}) &: \text{ schwach } \mathbf{r}\text{-abhängig ,} \\ \lambda_0 &\ll \text{ Änderungen im Medium .} \end{aligned}$$

λ_0 ist die Lichtwellenlänge im Vakuum. Wegen $k_0^2 = 4\pi^2/\lambda_0^2$ dominiert dann der letzte Term in (3.197). Das ergibt in guter Näherung die so genannte

Eikonalgleichung der geometrischen Optik

$$(\nabla L(\mathbf{r}))^2 = n^2 = \frac{c^2}{u^2} . \quad (3.198)$$

3.6 Der Übergang zur Wellenmechanik

Die Lösungen definieren Flächen konstanter Phase ($L = \text{const}$), d. h. Wellenfronten. Die Strahlentrajektorien (*Lichtstrahlen*) verlaufen senkrecht zu diesen Wellenfronten.

Die Eikonalgleichung (3.198) ist formal identisch mit der Wellengleichung (3.188) der Klassischen Mechanik. Zwischen der Klassischen Mechanik und der geometrischen Optik besteht insofern eine Analogie, als die Klassische Mechanik über die Wirkungsfunktion S (bzw. W) dieselben Aussagen macht wie die geometrische Optik über das Eikonal L .

3.6.3 Der Ansatz der Wellenmechanik

Die Überlegungen des letzten Abschnitts legen den folgenden Versuch einer Verallgemeinerung der Klassischen Mechanik nahe:

**Klassische Mechanik \Leftrightarrow geometrisch-optischer Grenzfall
einer Wellenmechanik.**

Wir erweitern die bisherige Theorie in dem Sinne, dass wir nun die

- ▶ Teilchenbewegung als Wellenbewegung

interpretieren. Die endgültige Rechtfertigung für diese Vorstellung können wir natürlich nur aus einem späteren Vergleich zwischen Theorie und Experiment ableiten. Wir benutzen, zunächst versuchsweise, die folgenden Zuordnungen:

$$(\nabla W)^2 = \frac{E^2}{u^2} \Leftrightarrow (\nabla L)^2 = n^2 \quad (3.199)$$

$$W \Leftrightarrow L \quad (3.200)$$

$$\frac{|E|}{u} = \sqrt{2m(E - V)} \Leftrightarrow n = \frac{c}{u}. \quad (3.201)$$

Dies soll nicht etwa bedeuten, dass die einzelnen Terme exakt gleich wären. Sie sollen einander nur entsprechen. Sie könnten zum Beispiel proportional zueinander sein.

Falls das Teilchen wirklich als Welle interpretierbar ist, so sollten wir ihm auch eine Wellenlänge λ und eine Frequenz v zuordnen können. Nach (3.200) ist W zu L analog. Dann dürfte aber

$$S = W - Et$$

der gesamten Phase

$$k_0(L - ct)$$

in (3.195) entsprechen. Das bedeutet $E \sim c k_0$ und damit

$$E \sim v .$$

Der Proportionalitätsfaktor muss die Dimension einer *Wirkung* haben:

$$E = h v . \quad (3.202)$$

Dies ist das **Energiespektrum der Teilchenwelle**. Weiter gilt:

$$u = \lambda v \Rightarrow \lambda = \frac{u}{v} = \frac{E/p}{E/h} .$$

Die **Wellenlänge des Teilchens** kann also als

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3.203)$$

festgelegt werden. Das Experiment bestätigt diese Relationen, falls nur

- ▶ **h : Planck'sches Wirkungsquantum**

(3.170). Wir sehen, dass Energie und Impuls des Teilchens Frequenz und Wellenlänge der **Teilchenwelle** festlegen. Damit lässt sich also die Teilchenbewegung als Wellenbewegung interpretieren.

Wir wollen nun die Klassische Mechanik genauso zu einer Wellenmechanik ausbauen, wie man die geometrische Optik zur Wellenoptik ergänzt hat. Zur Wellenoptik gelangt man durch exaktes Lösen der Wellengleichung (3.189). Mit

$$\varphi \approx e^{-i\omega t} \quad (3.204)$$

wird daraus eine **zeitunabhängige Wellengleichung**

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\omega^2}{u^2} \varphi = \nabla^2 \varphi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \varphi = 0 . \quad (3.205)$$

φ beschreibt gewissermaßen den *Zustand* der Lichtwelle. Analog möge der **Zustand** des Teilchens durch die

- ▶ **Wellenfunktion** $\psi = \psi(r, t)$

beschrieben sein, wobei eine genauere physikalische Interpretation der Disziplin *Quantenmechanik* vorbehalten sei. Dann folgt mit

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{h^2} p^2 = \frac{1}{\hbar^2} 2m(E - V) ; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

durch Analogie aus der Wellengleichung (3.205)

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0 . \quad (3.206)$$

Dies ist die berühmte zeitunabhängige

- ▶ Schrödinger-Gleichung,

die die gesamte Quantenmechanik regiert.

Wir multiplizieren schließlich noch (3.206) mit $\hbar^2/2m$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t) . \quad (3.207)$$

dies ist eine **Eigenwertgleichung** für den so genannten

Hamilton-Operator

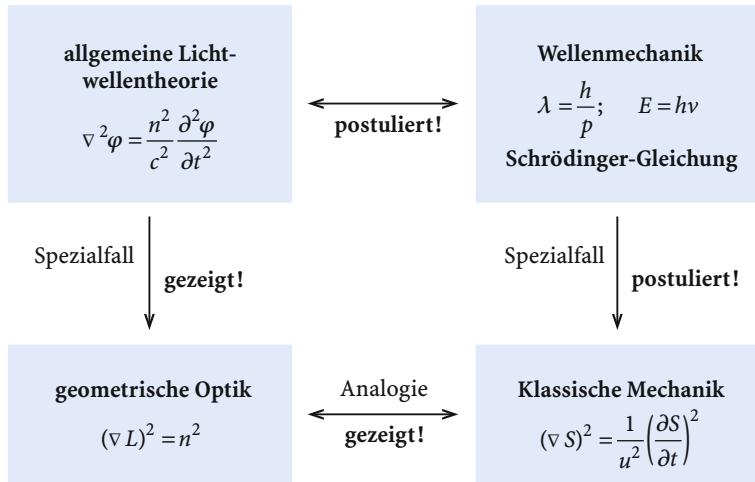
$$\overline{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) , \quad (3.208)$$

$$\overline{H}\psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t) . \quad (3.209)$$

Dieser ergibt sich aus der klassischen Hamilton-Funktion $H(q, p)$, indem man die dynamischen Variablen q, p durch entsprechende Operatoren ersetzt. Offensichtlich gilt die folgende Zuordnung (*Ortsdarstellung*):

$$\hat{q} \Rightarrow \mathbf{r} ; \quad \hat{p} \Rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla . \quad (3.210)$$

Wir beschließen dieses Kapitel mit einer schematischen Zusammenfassung unserer Schlussfolgerungen:



3.7 Aufgaben

Aufgabe 3.7.1

Formulieren Sie die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für ein kräftefreies Teilchen und lösen Sie diese für die charakteristische Funktion W .

Aufgabe 3.7.2

Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m im Potential

$$V(x) = -bx$$

auf und lösen Sie das Bewegungsproblem mit den Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = x_0; \quad \dot{x}(t=0) = v_0.$$

Aufgabe 3.7.3

Ein Teilchen der Masse m führe eine eindimensionale Bewegung im Potential

$$V(q) = c e^{\gamma q} \quad c, \gamma \in \mathbb{R}$$

3.7 Aufgaben

durch. Berechnen Sie $q(t)$ und $p(t)$ nach der Hamilton-Jacobi-Methode. Benutzen Sie als *charakteristische* Funktion $W(q, \hat{p})$ eine Erzeugende vom Typ $F_2(q, \hat{p})$.

Aufgabe 3.7.4

Ein Teilchen der Masse m führe eine zweidimensionale Bewegung in der x - y -Ebene im Potential

$$V(x, y) = c(x - y) \quad (c = \text{const})$$

durch. Lösen Sie die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die charakteristische Funktion $W(x, y, \hat{p}_x, \hat{p}_y)$. Benutzen Sie die Anfangsbedingungen:

$$x(t=0) = y(t=0) = 0$$

$$\dot{x}(t=0) = v_{0x} > 0$$

$$\dot{y}(t=0) = 0 .$$

Aufgabe 3.7.5

Stellen Sie für den zweidimensionalen harmonischen Oszillatoren in kartesischen Koordinaten die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung auf und lösen Sie diese. Finden Sie $x(t)$ und $y(t)$.

Aufgabe 3.7.6

Gegeben sei der lineare harmonische Oszillatator:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$$

Führen Sie im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie eine kanonische Transformation der Gestalt durch, dass die „neue“ Koordinate \hat{q} und der „neue“ Impuls \hat{p} Konstante der Bewegung sind:

$$(q, p) \xrightarrow{S} (\alpha, \beta) .$$

Die Erzeugende S sei vom Typ $F_3 = F_3(p, \hat{q}, t)$. Berechnen Sie $q(t)$ und $p(t)$ mit den Anfangsbedingungen:

$$t = 0: p(0) = p_0 = 0 , \quad q(0) = q_0 > 0 .$$

In welchem Zusammenhang steht die Erzeugende S mit dem Wirkungsfunktional des Hamiltonschen Prinzips?

Aufgabe 3.7.7

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen die Frequenzen eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit paarweise verschiedenen Kraftkonstanten.

Aufgabe 3.7.8

Betrachten Sie den dreidimensionalen harmonischen Oszillator der letzten Aufgabe für den Fall, dass alle Kraftkonstanten gleich sind. Transformieren Sie das Ergebnis der letzten Aufgabe auf Eigenwirkungsvariable.

Kontrollfragen

Zu Abschn. 3.1

1. Welche kanonischen Transformationen kennen Sie, durch die die Integrationen der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen quasi-trivial werden können?
2. Wie lautet die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung? Skizzieren Sie ihre Motivation und ihre Ableitung.
3. Welchen Typ Differentialgleichung stellt die HJD dar? Welche Funktion soll mit ihr bestimmt werden?
4. Wie nennt man die Lösung der HJD? Begründen Sie diese Bezeichnung.
5. Skizzieren Sie das Lösungsverfahren, mit dem sich über die HJD Probleme der Klassischen Mechanik berechnen lassen.

Zu Abschn. 3.2

1. Wie lautet die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung des linearen harmonischen Oszillators?
2. Was versteht man unter einem Separationsansatz? Nennen Sie einen passenden für die Lösung der HJD des linearen harmonischen Oszillators.
3. Von welchem Typ muss die *Erzeugende* sein, die die HJD erfüllt?

Zu Abschn. 3.3

1. Wann ist ein Separationsansatz für die HJD-Lösung, der q - und t -Abhängigkeiten voneinander trennt, sinnvoll?
2. Wie ist die Hamilton'sche charakteristische Funktion definiert?
3. Man kann die Hamilton'sche charakteristische Funktion als Erzeugende einer kanonischen Transformation auffassen. Von welchem Typ ist diese Transformation? Was soll sie bewirken?
4. Wann führt die durch die Hamilton'sche charakteristische Funktion bewirkte Transformation auf die Hamilton-Funktion eines Systems von freien Massenpunkten?
5. Beschreiben Sie die physikalische Bedeutung der Hamilton'schen charakteristischen Funktion.

Zu Abschn. 3.4

1. Wann ist die Hamilton-Jacobi-Methode überhaupt von Nutzen?
2. Unter welchen Voraussetzungen empfiehlt sich ein Separationsansatz für die Lösung der HJD?
3. Wann nennt man die HJD *separabel* in den Koordinaten q_j ?
4. Welche Gestalt hat die Hamilton'sche charakteristische Funktion im Fall von zyklischen Koordinaten?

Zu Abschn. 3.5

1. Was versteht man unter einer Libration, was unter einer Rotation?
2. Wann ist die Bewegung eines Pendels eine Libration, wann eine Rotation?
3. Wann ist eine mehrdimensionale ($S > 1$) Bewegung periodisch? Wann nennt man sie *bedingt periodisch*?
4. Wie überprüft man leicht bei vollständig separablen Systemen die Periodizität?
5. Wie sind Wirkungs- und Winkelvariable definiert?
6. Erläutern Sie den Vorteil der Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen. Für welche Systeme ist die Methode anwendbar?
7. Wie ändert sich die Winkelvariable ω_i , wenn die Koordinate q_i ihre volle Periode durchläuft?
8. Wie lautet die Hamilton-Funktion \bar{H} des linearen harmonischen Oszillators nach Transformation auf Wirkungsvariable?
9. Wie berechnet man die Frequenz ν_i der periodischen q_i -Bewegung?
10. Wie lautet die HJD für das Kepler-Problem?
11. Zeigen Sie, dass das Kepler-Problem in Kugelkoordinaten vollständig separierbar ist.
12. Hängen die Wirkungsvariablen J_φ, J_θ beim Kepler-Problem in irgendeiner Form vom Typ des Zentralfeldes ab?

13. Wie hängt die transformierte Hamilton-Funktion \bar{H} des Kepler-Problems von den Wirkungsvariablen J_r, J_θ, J_ϕ ab?
14. Wann nennt man die Kepler-Bewegung *vollständig entartet*?
15. Wann heißt eine Bewegung *einfach periodisch*, wann *bedingt periodisch*?
16. Wann nennt man ein System *m-fach entartet*?
17. Wann ist eine *einfach periodische* Phasenbahn *vollständig entartet*?
18. Wie viele unabhängige Frequenzen sind zur Beschreibung einer *m-fach entarteten*, *S-dimensionalen* Bahn vonnötig?
19. Wie lauten die Entartungsbedingungen für die Kepler-Bewegung?
20. Was ist eine Eigenwirkungsvariable?
21. Formulieren Sie die Quantenhypothese.
22. Wenden Sie die Quantenhypothese auf die Bewegung des Elektrons im Wasserstoffatom an.

Zu Abschn. 3.6

1. Erläutern Sie den Begriff der *Wirkungswelle*.
2. Was versteht man unter der Geschwindigkeit \mathbf{u} der Wirkungswelle?
3. Welche Richtung hat \mathbf{u} ?
4. Was können Sie für ein System, das nur aus einem einzigen Teilchen besteht, bezüglich Richtung und Betrag von Teilchen- und Wirkungswellengeschwindigkeit aussagen? Was gilt konkret, wenn die Gesamtenergie nur aus kinetischer Energie besteht?
5. Erläutern Sie den Begriff *Teilchen-Welle-Dualismus* für die Klassische Mechanik.
6. Was versteht man unter der Wellengleichung der Klassischen Mechanik?
7. Wie lautet die skalare Wellengleichung der Optik? Was ist ihre Lösung bei konstanter Brechzahl?
8. Definieren Sie den Begriff *Eikonal*.
9. Formulieren Sie die Annahmen der *geometrischen Optik*.
10. Wie lautet die Eikonalgleichung der geometrischen Optik?
11. Erläutern Sie die Analogie zwischen der Eikonalgleichung der geometrischen Optik und der Wellengleichung der Klassischen Mechanik.
12. Auf welche Weise lassen sich einem mechanischen Teilchen Frequenz und Wellenlänge zuordnen?
13. Durch welche Analogiebetrachtung wird die Wellenfunktion eines Teilchens eingeführt?
14. Wie lautet die Schrödinger-Gleichung des Teilchens?
15. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Hamilton-Funktion und Hamilton-Operator?

Lösungen der Übungsaufgaben

Abschnitt 1.2.7

Lösung zu Aufgabe 1.2.1

Wir schließen an Beispiel 2) in Abschn. 1.2.2 an. Wir hatten dort als allgemeine Lösung

$$r(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$$

abgeleitet. Die Anfangsbedingungen liefern für A und B die Bestimmungsgleichungen:

$$r_0 = A + B ; \quad -r_0 \omega = (A - B) \omega .$$

Dies bedeutet $A = 0$ und $B = r_0$. Die Lösung lautet dann:

$$r(t) = r_0 e^{-\omega t} .$$

In diesem Spezialfall bewegt sich die Perle mit abnehmender Geschwindigkeit auf den Drehpunkt zu, um dort dann zur Ruhe zu kommen.

Lösung zu Aufgabe 1.2.2

1. Wir berechnen die Zwangskraft zweckmäßig nach (1.112). Sinnvoll ist die Verwendung von Zylinderkoordinaten r, φ, z . Transformationsformeln ((1.381), Bd. 1):

$$x = r \cos \varphi ; \quad y = r \sin \varphi ; \quad z = z .$$

Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned}f_1(\mathbf{r}, t) &= z = 0 \\f_2(\mathbf{r}, t) &= \varphi - \omega t = 0.\end{aligned}$$

Gradient in Zylinderkoordinaten ((1.388), Bd. 1):

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Das bedeutet:

$$\nabla f_1 = (0, 0, 1) = \mathbf{e}_z; \quad \nabla f_2 = \left(0, \frac{1}{r}, 0 \right) = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi.$$

Zwangskraft nach (1.112):

$$\mathbf{Z} = \sum_{v=1}^2 \lambda_v \nabla f_v = \lambda_1 \mathbf{e}_z + \lambda_2 \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi.$$

λ_1 und λ_2 sind zunächst unbestimmte Lagrangesche Multiplikatoren. Da in diesem Beispiel keine *treibende* Kraft vorliegt ($\mathbf{K} \equiv 0$), gilt nach (1.111) in Zylinderkoordinaten ((2.19), Bd. 1):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + m\ddot{z}\mathbf{e}_z \stackrel{!}{=} \mathbf{Z}.$$

Die Zwangsbedingungen haben zur Folge:

$$\ddot{z} = 0; \quad \dot{\varphi} = \omega; \quad \ddot{r} - r\omega^2 = 0.$$

Es bleibt also (komponentenweise) zu lösen:

$$\begin{aligned}m(\ddot{r} - r\omega^2) &= 0 \\2m\dot{r}\omega &= \lambda_2 \frac{1}{r} \\0 &= \lambda_1.\end{aligned}$$

Damit liegen die Lagrangeschen Multiplikatoren fest:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 2mr\dot{r}\omega.$$

Die Zwangskraft

$$\mathbf{Z} = 2m\dot{r}\omega \mathbf{e}_\varphi$$

erfüllt also in der Tat die frühere (Abschn. 1.2.2), *plausible* Annahme: $\mathbf{Z} \perp \mathbf{e}_r$. Es bleibt die Bewegungsgleichung (wie früher),

$$\ddot{r} = r \omega^2 ,$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$r(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} .$$

Die angegebenen Anfangsbedingungen führen auf $A = B = r_0/2$ und damit zu:

$$r(t) = \frac{r_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = r_0 \cosh(\omega t) \quad \leadsto \quad \dot{r}(t) = r_0 \omega \sinh(\omega t) .$$

Damit haben wir auch die explizite Zeitabhängigkeit der Zwangskraft bestimmt:

$$\mathbf{Z}(t) = 2mr_0 \omega^2 \sinh(\omega t) \mathbf{e}_\varphi .$$

2. Mit (1.113) berechnen wir:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} = +2m\dot{r}\omega^2 = 2mr_0^2 \omega^3 \cosh(\omega t) \sinh(\omega t) .$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.3

1. Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z &= 0 && \text{(skleronom)} \\ y - x \tan \omega t &= 0 && \text{(rheonom)} . \end{aligned}$$

Beide Zwangsbedingungen sind holonom, damit die Zahl der Freiheitsgrade $S = 3 - 2 = 1$. Eine passende generalisierte Koordinate ist natürlich der Abstand $q = r$ der Perle vom Drehpunkt.

2. Transformationsformeln:

$$x = q \cos \omega t ; \quad y = q \sin \omega t$$

damit folgt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{q} \cos \omega t - q\omega \sin \omega t \\ \dot{y} &= \dot{q} \sin \omega t + q\omega \cos \omega t\end{aligned}$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) = T(q, \dot{q})$$

potentielle Energie:

$$V = mg y = mgq \sin \omega t = V(q, t)$$

Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2) - mgq \sin \omega t$$

3. Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}; \quad \frac{\partial L}{\partial q} = mq\omega^2 - mg \sin \omega t$$

zu lösen:

$$\ddot{q} - q\omega^2 + g \sin \omega t = 0$$

wir starten mit der zugehörigen homogenen Gleichung:

$$\ddot{q} - q\omega^2 = 0$$

allgemeine Lösung

$$q_0(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t}.$$

Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$q_s(t) = \gamma \sin \omega t \quad (\omega \neq 0).$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung:

$$-\gamma \omega^2 \sin \omega t - \omega^2 \gamma \sin \omega t + g \sin \omega t = 0$$

$$-2\gamma \omega^2 + g = 0 \rightsquigarrow \gamma = \frac{g}{2\omega^2}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$q(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t .$$

4. Wir benutzen die gegebenen Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} q(t=0) &= r_0 \rightsquigarrow r_0 = \alpha + \beta \\ \dot{q}(t=0) &= 0 \rightsquigarrow \omega(\alpha - \beta) + \frac{g}{2\omega} = 0 \\ &\rightsquigarrow 2\alpha = r_0 - \frac{g}{2\omega^2} \\ &\rightsquigarrow \alpha = \frac{r_0}{2} - \frac{g}{4\omega^2}; \quad \beta = \frac{r_0}{2} + \frac{g}{4\omega^2} \end{aligned}$$

Das ergibt die vollständige Lösung:

$$q(t) = \frac{r_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) - \frac{g}{4\omega^2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t .$$

Wir bilden die erste zeitliche Ableitung

$$\dot{q}(t) = \frac{r_0 \omega}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) - \frac{g}{4\omega} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) + \frac{g}{2\omega} \cos \omega t .$$

Für große Zeiten gilt:

$$\dot{q}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} r_0 \omega - \frac{g}{4\omega} \right) e^{\omega t} .$$

Die Perle bewegt sich nach außen, falls $\dot{q}(t \rightarrow \infty) > 0$ ist, d. h.

$$\omega^2 > \frac{g}{2r_0} .$$

5. Die Zwangskraft ist an sich schwer formulierbar. Es handelt sich aber im mitrotierenden Koordinatensystem um ein effektiv eindimensionales Problem:

$$m\ddot{r} = -F_g + F_z .$$

F_g ist die in Drahtrichtung wirkende Komponente der Schwerkraft:

$$F_g = mg \sin \omega t .$$

F_z ist die Zentrifugalkraft, für die allgemein gilt ((2.79), Bd. 1):

$$F_z = -m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = -m(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2) = m\mathbf{r}\omega^2.$$

Der letzte Schritt gilt, da $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{r} orthogonal zueinander sind. Setzen wir $F_z = m\omega^2 r$ in die obige Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich nach Herauskürzen der Masse m :

$$\ddot{r} - \omega^2 r + g \sin \omega t = 0.$$

Das ist identisch mit der Lagrange-Gleichung aus Teil 3.

Lösung zu Aufgabe 1.2.4

1. Zwangsbedingungen:

$$\varphi - \omega t = 0; \quad z - \alpha\rho^2 = 0 \quad \leadsto \quad S = 3 - 2 = 1 \quad \text{Freiheitsgrade}.$$

2. Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \quad \leadsto \quad \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \quad \leadsto \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \\ z &= \alpha\rho^2 \quad \leadsto \quad \dot{z} = 2\alpha\rho\dot{\rho}. \end{aligned}$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2\dot{\varphi}^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 4\alpha^2\rho^2\dot{\rho}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(1 + 4\alpha^2\rho^2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 \\ V &= mgz = mg\alpha\rho^2. \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(1 + 4\alpha^2\rho^2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m(\omega^2 - 2\alpha g)\rho^2.$$

3. Spezialfall:

$$\omega = \sqrt{2\alpha g}.$$

Die Lagrange-Funktion vereinfacht sich zu:

$$L = \frac{1}{2}m(1 + 4\alpha^2\rho^2)\dot{\rho}^2.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m(1 + 4\alpha^2\rho^2)\dot{\rho} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m((1 + 4\alpha^2\rho^2)\ddot{\rho} + 8\alpha^2\rho\dot{\rho}^2) \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} &= 4m\alpha^2\rho\dot{\rho}^2.\end{aligned}$$

Bewegungsgleichung

$$(1 + 4\alpha^2\rho^2)\ddot{\rho} + 4\alpha^2\rho\dot{\rho}^2 = 0.$$

Multiplizieren mit $\dot{\rho}$ ergibt:

$$(1 + 4\alpha^2\rho^2)\dot{\rho}\ddot{\rho} + 4\alpha^2\rho\dot{\rho}^3 = \frac{d}{dt}(1 + 4\alpha^2\rho^2)\dot{\rho}^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Das bedeutet, dass $(1 + 4\alpha^2\rho^2)\dot{\rho}^2$ ein Integral der Bewegung darstellt.

Lösung zu Aufgabe 1.2.5

1.

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z,$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi; \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2.$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} &= 0 = m \ddot{\rho} - m \rho \dot{\phi}^2 + \frac{V_0}{\rho}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 = m \rho^2 \ddot{\phi} + 2m \rho \dot{\rho} \dot{\phi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 = m \ddot{z}.\end{aligned}$$

3. φ und z sind zyklisch \Rightarrow

$$\begin{aligned}p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \rho^2 \dot{\phi} = \text{const} : && z\text{-Komponente des Drehimpulses}, \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} = \text{const} : && z\text{-Komponente des Impulses}.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.6

1. Die kinetische Energie:

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}},$$

setzt sich zusammen aus einem Translationsanteil (m : Masse des Zylinders)

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\phi}^2,$$

und einem Rotationsanteil

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J (\dot{\phi} + \dot{\vartheta})^2,$$

wobei

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$

das Trägheitsmoment des Zylinders ist. Die Abrollbedingung lautet:

$$\begin{aligned}R d\varphi &= r d\vartheta \\ \Rightarrow \dot{\vartheta} &= - \frac{R}{r} \dot{\phi}.\end{aligned}$$

Die potentielle Energie ist:

$$V = mg(R - r)(1 - \cos \varphi).$$

Daraus folgt die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 - mg(R - r)(1 - \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{2}m\left((R - r)^2 + \frac{1}{2}r^2\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2\right)\dot{\varphi}^2 - mg(R - r)(1 - \cos \varphi) \\ &= \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R - r)\cos \varphi - mg(R - r). \end{aligned}$$

2. Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(R - r)\sin \varphi$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m(R - r)^2\ddot{\varphi}$$

folgt die Bewegungsgleichung für φ :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{g}{R - r} \sin \varphi.$$

3. Für kleine Ausschläge $\varphi \ll 1$ kann man nähern:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &\approx \varphi \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{2}{3} \frac{g}{R - r} \varphi. \end{aligned}$$

Mit

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{g}{R - r}}$$

ist die allgemeine Lösung dann

$$\varphi(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

wobei a und b durch Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Lösung zu Aufgabe 1.2.7

- Zylinderkoordinaten (r, φ, z) erscheinen zunächst günstig.

Zwangsbedingung:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{r}{z} \\ \Leftrightarrow z &= r \cot \alpha\end{aligned}$$

Freiheitsgrade:

$$S = 3 - 1 = 2$$

generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = r; \quad q_2 = \varphi$$

Transformationsformeln:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = r \cot \alpha$$

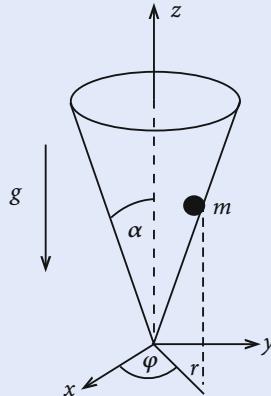


Abb. A.1

- Lagrange-Funktion:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - 2\dot{r}r\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \dot{r}^2 \cot^2 \alpha$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2} \{ (1 + \cot^2 \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \}$$

$$V = mgz = mgr \cot \alpha$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2} [(1 + \cot^2 \alpha) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] - mgr \cot \alpha$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m (1 + \cot^2 \alpha) \ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m (r \dot{\varphi}^2 - g \cot \alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m (r^2 \ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow (1 + \cot^2 \alpha) \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 + g \cot \alpha = 0 \quad (r \neq 0)$$

$$r \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

3. φ ist zyklisch

$$\Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

Drehimpulserhaltung!

Lösung zu Aufgabe 1.2.8

1. Die Zwangsbedingungen sind:

$$z_1 = z_2 = 0$$

$$x_1 = y_2 = 0$$

$$x_2^2 + y_1^2 = l^2$$

Das System hat demnach einen Freiheitsgrad. Mit φ als generalisierter Koordinate ergeben sich die Transformationsformeln:

$$x_2 = l \cos \varphi$$

$$y_1 = l \sin \varphi$$

Damit ist die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m}{2} \dot{y}_1^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

und die potentielle Energie:

$$V = mgy_1 + 0 = mgl \sin \varphi$$

Die Lagrange-Funktion ist dann:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \sin \varphi$$

2. Die Lagrange'sche Bewegungsgleichung für φ ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \cos \varphi \\ \Rightarrow \quad 0 &= \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cos \varphi \end{aligned}$$

Man multipliziere mit $\dot{\varphi}$ und integriere:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \cos \varphi \dot{\varphi} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l} \sin \varphi &= c = \text{const} \\ \Rightarrow \quad \dot{\varphi} &= \sqrt{2 \left(c - \frac{g}{l} \sin \varphi \right)} \end{aligned}$$

Dies lässt sich dann mittels Variablentrennung weiter integrieren:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\sin\varphi\right)}} \\ \Rightarrow t - t_0 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\sin\varphi'\right)}} \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ und c ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Für „kleine Winkel“ vereinfacht sich die Lösung zu:

$$t - t_0 = -\frac{l}{g} \left(\sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\varphi\right)} - \sqrt{2\left(c - \frac{g}{l}\varphi_0\right)} \right).$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.9

Die Bewegung kann aufgeteilt werden in eine Translation des Schwerpunkts S und eine Rotation des Stabes um den Schwepunkt in der xy -Ebene. Für letztere brauchen wir das Trägheitsmoment des Stabes ((4.11), Bd. 1):

$$J = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{n} \times \mathbf{r})^2.$$

\mathbf{n} ist der Einheitsvektor in Drehachsenrichtung. Zur Berechnung von J benutzen wir Zylinderkoordinaten $\bar{\rho}, \bar{\varphi}, z$. Die z -Achse sei mit der Stabachse identisch. Dann entspricht die Drehachse der x -Achse (oder gleichbedeutend der y -Achse):

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (1, 0, 0) \times (\bar{\rho} \cos \bar{\varphi}, \bar{\rho} \sin \bar{\varphi}, z) = (0, -z, \bar{\rho} \sin \bar{\varphi}).$$

Es bleibt zu berechnen:

$$\begin{aligned} J &= \rho_0 \int_0^R \bar{\rho} d\bar{\rho} \int_0^{2\pi} d\bar{\varphi} \int_{-L}^{+L} dz (z^2 + \bar{\rho}^2 \sin^2 \bar{\varphi}) \\ &\simeq J = \frac{1}{3} M L^2 \left(1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \right) \xrightarrow{R \ll L} \frac{1}{3} M L^2. \end{aligned}$$

Kinetische Energie:

Translation:

$$T_S = \frac{1}{2}M(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2) = \frac{1}{2}M((-L\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (L\dot{\varphi} \cos \varphi)^2) = \frac{1}{2}ML^2 \dot{\varphi}^2 .$$

Rotation:

$$T_R = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}ML^2 \left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2\right) \dot{\varphi}^2 \xrightarrow{R \ll L} \frac{1}{6}ML^2 \dot{\varphi}^2 .$$

Potentielle Energie:

$$V = Mgy = MgL \sin \varphi .$$

Lagrange-Funktion:

$$\hat{L} = T - V = \frac{2}{3}ML^2 \dot{\varphi}^2 - MgL \sin \varphi .$$

Lagrange-Bewegungsgleichung (2. Art):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{4}{3}ML^2 \ddot{\varphi} ; \quad \frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi} = -MgL \cos \varphi \\ &\simeq \ddot{\varphi} + \frac{3g}{4L} \cos \varphi = 0 . \end{aligned}$$

Mit der Substitution $\varphi \rightarrow \varphi - \pi/2$ ergibt sich eine Differentialgleichung vom Schwingungstyp wie beim mathematischen Pendel (2.124, Bd.1). Zu einer echten Schwingung kommt es allerdings nicht, da der Stab nur von $\varphi = \pi/2$ bis $\varphi = 0$ „fällt“, um dann bei $\varphi = 0$ am Erdboden „aufzuschlagen“. Die Lösung der Bewegungsgleichung stellt ein elliptisches Integral dar.

Lösung zu Aufgabe 1.2.10

1. Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 &= 0 : \quad \text{holonom-skleronom ,} \\ \frac{y}{x} - \tan \omega t &= 0 : \quad \text{holonom-rheonom .} \end{aligned}$$

2. $q = \vartheta$

$$x = R \sin \vartheta \cos \omega t ,$$

$$y = R \sin \vartheta \sin \omega t ,$$

$$z = R \cos \vartheta .$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (R^2 \sin^2 \vartheta \omega^2 + R^2 \dot{\vartheta}^2) .$$

Der erste Summand resultiert aus der Rotation des Ringes, der zweite aus der Bewegung auf dem Ring.

$$V = mgR(1 - \cos \vartheta) .$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2} R^2 (\omega^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) - mgR(1 - \cos \vartheta) .$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= mR^2 \ddot{\vartheta} , \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= mR^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - mgR \sin \vartheta \\ \Rightarrow \ddot{\vartheta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \vartheta \right) \sin \vartheta &= 0 . \end{aligned}$$

3. $\vartheta \ll 1 : \cos \vartheta \approx 1, \sin \vartheta \approx \vartheta$.

Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$\ddot{\vartheta} + \bar{\omega}^2 \vartheta = 0 ,$$

$$\bar{\omega}^2 = \frac{g}{R} - \omega^2$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$\vartheta(t) = A \cos \bar{\omega}t + B \sin \bar{\omega}t .$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.11

1. Es gibt vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} l &= r + S, \quad (\text{Fadenlänge}), \\ z(m) &= 0, \\ x(M) &= 0, \\ y(M) &= 0. \end{aligned}$$

2. Bei vier Zwangsbedingungen bleiben $6 - 4 = 2$ Freiheitsgrade. Wir brauchen also zwei generalisierte Koordinaten

$$q_1 = \varphi; \quad q_2 = S.$$

Wir lesen am Bild die Transformationsformeln ab:

$$\begin{aligned} x(m) &= r \cos \varphi = (l - S) \cos \varphi, \\ y(m) &= r \sin \varphi = (l - S) \sin \varphi, \\ z(M) &= -S \\ \Rightarrow \dot{x}(m) &= -\dot{S} \cos \varphi - (l - S) \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ \dot{y}(m) &= -\dot{S} \sin \varphi + (l - S) \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{z}(M) &= -\dot{S}. \end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2(m) + \dot{y}^2(m)) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2(M) = \frac{1}{2}(m + M)\dot{S}^2 + \frac{1}{2}m(l - S)^2\dot{\varphi}^2.$$

Potentielle Energie:

$$V = Mg z(M) = -MgS.$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m + M)\dot{S}^2 + \frac{1}{2}m(l - S)^2\dot{\varphi}^2 + MgS.$$

Wir erkennen, dass die Koordinate φ zyklisch ist. Dies bedeutet:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l - S)^2\dot{\varphi} = \text{const} = J\dot{\varphi} = L_0.$$

Dies ist der Drehimpulserhaltungssatz. Es sind zwar

$$J = J(t) \quad \text{und} \quad \dot{\phi} = \dot{\phi}(t)$$

zeitlich veränderliche Größen. Das Produkt ist aber konstant.

Für die zweite Koordinate $q_2 = S$ stellen wir die Lagrange'sche Bewegungsgleichung auf:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{S}} &= (m + M)\ddot{S}, \\ \frac{\partial L}{\partial S} &= -m(l - S)\dot{\phi}^2 + Mg = -\frac{L_0^2}{m(l - S)^3} + Mg \\ \Rightarrow (m + M)\ddot{S} + \frac{L_0^2}{m(l - S)^3} - Mg &= 0. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit \dot{S} und integrieren:

$$\frac{1}{2}(m + M)\dot{S}^2 + \frac{L_0^2}{2m(l - S)^2} - MgS = \text{const.}$$

Das aber ist der Energiesatz:

$$T + V = E = \text{const.}$$

3. Gleichgewicht bedeutet:

$$\ddot{S} = 0.$$

Dann gilt aber auch:

$$\begin{aligned} \frac{L_0^2}{m(l - S)^3} &= Mg \Rightarrow S = S_0 = \text{const.}, \\ \omega_0 = \dot{\phi}_0 &= \frac{L_0}{m(l - S_0)^2} = \sqrt{\frac{Mg}{m(l - S_0)}}. \end{aligned}$$

Wir lesen an der Bewegungsgleichung ab:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} > \omega_0 &\Leftrightarrow \ddot{S} < 0 \Leftrightarrow \ddot{z}(M) > 0 : M \text{ rutscht nach oben!} \\ \dot{\phi} < \omega_0 &\Leftrightarrow \ddot{S} > 0 \Leftrightarrow \ddot{z}(M) < 0 : M \text{ rutscht nach unten!} \end{aligned}$$

4. Für den Spezialfall $\omega = \dot{\phi} = 0$ folgt aus der Bewegungsgleichung:

$$\ddot{S} = \frac{M}{m + M}g.$$

Dies ist der verzögerte, freie Fall der Masse M .

Lösung zu Aufgabe 1.2.12

1. Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mg(1 - \cos \varphi)l,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg l \sin \varphi \underset{\text{kleine Ausschläge}}{\approx} -mg l \varphi$$

⇒ Schwingungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Spezielle Randbedingung $\varphi(0) = 0$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega_0 t.$$

2. Die Fadenspannung ist die Zwangskraft, die die konstante Fadenlänge l realisiert.

$m \ddot{\mathbf{r}}(t)$: Kraft, die an der Masse m angreift.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) &= l \dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow m \ddot{\mathbf{r}}(t) &= ml \ddot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} + ml \dot{\varphi}^2(t) \begin{pmatrix} -\cos \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) \end{pmatrix} \\ &= mg \mathbf{e}_x - Z \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Daraus bestimmen wir die Fadenspannung:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= Z \mathbf{e}_r, \\ Z &= mg(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r) - m \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r = \cos \varphi(t) \\ \Rightarrow Z &= mg \cos \varphi(t) + ml \dot{\varphi}^2(t). \end{aligned}$$

Kleine Pendelausschläge $\cos \varphi(t) \approx 1 - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(t)$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow Z &= mg \left(1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 \sin^2 \omega_0 t \right) + ml\omega_0^2 \varphi_0^2 \cos^2 \omega_0 t \\ &= mg \left(1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 + \frac{1}{2}\varphi_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \varphi_0^2 \cos^2 \omega_0 t \right) \\ \Rightarrow Z &= mg \left(1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 + \frac{3}{2}\varphi_0^2 \cos^2 \omega_0 t \right).\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.13

1. Die Zwangsbedingungen sind:

$$\begin{aligned}z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - l^2 &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow s = 3 - 2 = 1$ Freiheitsgrad

2. Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi & y &= r \sin \varphi \\ \Rightarrow \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi & \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi\end{aligned}$$

kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

potentielle Energie:

$$V = -mgx = -mgr \cos \varphi$$

Lagrange-Funktion:

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \varphi$$

3. Seien:

$$q_1 := \varphi, \quad q_2 := r.$$

Allgemein gilt für m Variable und p holonome Zwangsbedingungen:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} dq_j + b_{it} dt = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

hier $m = 2$ Variable ($q_1 = \varphi$, $q_2 = r$) und $p = 1$ Zwangsbedingung:

$$\begin{aligned} q_2 &= r = l = \text{const} \\ \Rightarrow \quad dq_2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad a_{11} &= 0, \quad a_{12} = 1, \quad b_{1t} = 0 \end{aligned}$$

Allgemein gilt für die Zwangskräfte:

$$Q_j = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_{ij}$$

wobei die λ_i Lagrange'sche Multiplikatoren sind. Hier:

$$Q_1 = Q_\varphi = 0, \quad Q_2 = Q_r = \lambda$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = Q_\varphi &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \\ &= \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) + mgr \sin \varphi \\ &= mr^2 \ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr \sin \varphi \\ \lambda = Q_r &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} \\ &= \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi \\ &= m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi \\ \Rightarrow \quad 0 &= \ddot{\varphi} + \frac{2\dot{r}}{r} \dot{\varphi} + \frac{g}{r} \sin \varphi \\ \frac{Q_r}{m} &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi \end{aligned}$$

Mit $r = l$ und $\ddot{r} = 0$ folgt aus der Bewegungsgleichung für r für die Fadenspannung Q_r :

$$Q_r = -m(l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi)$$

(vgl. Lösung zu Aufgabe 1.2.12, Teil 1)

4. Mit $\dot{r} = 0$, der Kleinwinkelnäherung

$$\varphi \ll 1 \Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi$$

und der Definition

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{g}{l}}$$

folgt die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$\varphi(t) = \alpha \sin \omega_0 t + \beta \cos \omega_0 t$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 &\Rightarrow \beta &= 0 \\ \dot{\varphi}(0) = \alpha \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}} \varphi_0 &\Rightarrow \alpha &= \varphi_0\end{aligned}$$

ist die Lösung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega_0 t$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.14

1. Mit den kartesischen Koordinaten des Blockes der Masse M

$$X = s \cos \alpha , \quad Y = s \sin \alpha$$

und den Koordinaten der Masse m

$$x = s \cos \alpha + l \sin \varphi , \quad y = s \sin \alpha - l \cos \varphi$$

lässt sich die kinetische Energie in s und φ ausdrücken als:

$$T = \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{M}{2} (\dot{s}^2 \cos^2 \alpha + \dot{s}^2 \sin^2 \alpha) + \frac{m}{2} (\dot{s}^2 \cos^2 \alpha + 2l\dot{s}\dot{\varphi} \cos \alpha \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{s}^2 \sin^2 \alpha + 2l\dot{s}\dot{\varphi} \sin \alpha \sin \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi)$$

Mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

vereinfacht sich dies zu:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mls\dot{\varphi} \cos(\alpha - \varphi).$$

Mit der potentiellen Energie

$$V = Mgs \sin \alpha + mg(s \sin \alpha - l \cos \varphi).$$

ergibt sich dann für die Lagrange-Funktion:

$$L = T - V \\ = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mls\dot{\varphi} \cos(\alpha - \varphi) - (M+m)gs \sin \alpha - mgl \cos \varphi$$

2. Lagrange-Bewegungsgleichung bezüglich s :

$$0 = (M+m)\ddot{s} + ml(\ddot{\varphi} \cos(\alpha - \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha - \varphi)) + (M+m)g \sin \alpha \\ \Rightarrow \ddot{s} = -g \sin \alpha - \frac{ml}{M+m}(\ddot{\varphi} \cos(\alpha - \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha - \varphi))$$

Lagrange-Bewegungsgleichung bezüglich φ :

$$0 = ml^2\ddot{\varphi} + mls\dot{\varphi} \sin(\alpha - \varphi) \\ + ml\dot{s} \cos(\alpha - \varphi) - mls\dot{\varphi} \sin(\alpha - \varphi) + mgl \sin \varphi \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{\ddot{s}}{l} \cos(\alpha - \varphi)$$

spezielle Lösung:

$$\varphi = \varphi_0 = \text{const} \\ \Rightarrow \ddot{s} = -g \sin \alpha = -g \frac{\sin \varphi_0}{\cos(\alpha - \varphi_0)} \\ \Rightarrow s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2 \sin \alpha \\ \varphi(t) = \alpha$$

(s_0 und v_0 aus Anfangsbedingungen)

3. Einsetzen der Dgl. für \ddot{s} in Dgl. für $\ddot{\varphi}$ ergibt:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= \frac{g}{l} (\sin \alpha \cos(\alpha - \varphi) - \sin \varphi) \\ &\quad + \frac{m}{M+m} (\ddot{\varphi} \cos(\alpha - \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha - \varphi)) \cos(\alpha - \varphi) \\ &= \frac{g}{l} \cos \alpha \sin(\alpha - \varphi) \\ &\quad + \frac{m}{M+m} (\ddot{\varphi} \cos^2(\alpha - \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha - \varphi) \cos(\alpha - \varphi))\end{aligned}$$

Dabei wurde das Additionstheorem

$$\sin(\alpha - \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi$$

ausgenutzt.

Für $M \gg m$ lässt sich nähern:

$$\begin{aligned}\frac{m}{M+m} &\approx 0 \\ \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} &\approx -\frac{g}{l} \cos \alpha \sin(\varphi - \alpha)\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \cos \alpha}$$

und der Näherung für kleine Winkelausschläge ($\varphi \approx \alpha$)

$$\sin(\varphi - \alpha) \approx \varphi - \alpha$$

ergibt sich die Schwingungsgleichung:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= -\omega^2(\varphi - \alpha) \\ \Rightarrow \quad \varphi(t) &= \alpha + \hat{\varphi} \sin(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

($\hat{\varphi}$ und δ aus Anfangsbedingungen)

Lösung zu Aufgabe 1.2.15

1. Es gibt fünf holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

1. $z_1 = 0$
2. $z_2 = 0$
3. $-y_1 / -x_1 = \tan \alpha$
4. $-y_2 / x_2 = \tan \beta$
5. $r_1 + r_2 = l$

Damit besitzt das System $s = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ Freiheitsgrade.

2. $s = 1 \Rightarrow 1$ generalisierte Koordinate, z. B.:

$$q = r_1$$

Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}x_1 &= -q \cos \alpha \\y_1 &= -q \sin \alpha \\z_1 &= 0 \\x_2 &= (l - q) \cos \beta \\y_2 &= -(l - q) \sin \beta \\z_2 &= 0\end{aligned}$$

3. kinetische Energie:

$$\begin{aligned}T &= \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\&= \frac{m_1}{2} \dot{q}^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \frac{m_2}{2} \dot{q}^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \\&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2\end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$\begin{aligned}V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\&= -m_1 g q \sin \alpha - m_2 g (l - q) \sin \beta\end{aligned}$$

\Rightarrow Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}L &= T - V \\&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2 + m_1 g q \sin \alpha + m_2 g (l - q) \sin \beta\end{aligned}$$

4. Lagrange'sche Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= (m_1 + m_2)\ddot{q} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta)g \\ \Rightarrow \quad \ddot{q} &= \frac{m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta}{m_1 + m_2} g \quad \text{„verzögerter“ freier Fall}\end{aligned}$$

Integration der Bewegungsgleichung unter Verwendung der Anfangsbedingungen liefert:

$$q(t) = r_1(t) = \frac{1}{2} \frac{m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta}{m_1 + m_2} g t^2 + r_0$$

System im Gleichgewicht heißt:

$$\begin{aligned}q(t) &= \text{const} \\ \Rightarrow \quad 0 &= m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta \\ \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

5. Jetzt wird die 5. Zwangsbedingung nicht zur Eliminierung der Variablen benutzt. Damit werden zwei generalisierte Koordinaten benötigt:

$$q_1 = r_1 ; \quad q_2 = r_2$$

Aus $r_1 + r_2 = l = \text{const}$ folgt dann:

$$\begin{aligned}dq_1 + dq_2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad a_{11} &= a_{12} = 1\end{aligned}$$

⇒ für die generalisierten Zwangskräfte:

$$Q_1 = Q_2 = \lambda$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + m_1 g q_1 \sin \alpha + m_2 q_2 \sin \beta$$

⇒ Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= Q_i = \lambda \quad i = 1, 2 \\ \Rightarrow \quad m_1 \ddot{q}_1 - m_1 g \sin \alpha &= \lambda \\ m_2 \ddot{q}_2 - m_2 g \sin \beta &= \lambda\end{aligned}$$

Aus der 5. Zwangsbedingung folgt:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 + \dot{q}_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 \\ \Rightarrow \quad \ddot{q}_1 - g \sin \alpha &= \frac{\lambda}{m_1} \\ -\ddot{q}_1 - g \sin \beta &= \frac{\lambda}{m_2} \\ \Rightarrow \quad -g (\sin \alpha + \sin \beta) &= \lambda \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)\end{aligned}$$

Damit ist die Zwangskraft „Fadenspannung“:

$$Q = \lambda = -g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

Im Gleichgewicht gilt (s. letzte Teilaufgabe):

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{m_2} &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \\ \Rightarrow \quad \sin \alpha + \sin \beta &= \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \sin \alpha \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} \sin \alpha\end{aligned}$$

Damit ist die Fadenspannung im Gleichgewicht:

$$Q_0 = -m_1 g \sin \alpha = -m_2 g \sin \beta$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.16

1. Ausgangspunkt seien zwei körperfeste kartesische Koordinatensysteme mit parallelen Achsen, wie in der Skizze angedeutet. Koordinatenursprünge auf der Mitte der jeweiligen Zylinderachse. Drehachsen:

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_z .$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ seien die Auflagepunkte des Fadens, also die Angriffspunkte der Fadenspannung:

$$\mathbf{r}_1 = (0, R_1, z_1) ; \quad \mathbf{r}_2 = (0, -R_2, z_2) .$$

Fadenspannungen:

$$\mathbf{F}_1 = (F, 0, 0) = -\mathbf{F}_2 .$$

Drehmomente:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\text{ex}}^{(1)} &= (0, R_1, z_1) \times (F, 0, 0) = (0, z_1 F, -R_1 F) \\ \mathbf{M}_{\text{ex}}^{(2)} &= (0, -R_2, z_2) \times (-F, 0, 0) = (0, -z_2 F, -R_2 F) .\end{aligned}$$

Achsenparallele Komponenten:

$$\mathbf{M}_{\text{ex}}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_1 = R_1 F ; \quad \mathbf{M}_{\text{ex}}^{(2)} \cdot \mathbf{n}_2 = R_2 F .$$

Drehimpulssatz ((4.17), Bd. 1):

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = R_1 F ; \quad J_2 \ddot{\varphi}_2 = R_2 F .$$

Trägheitsmomente der Zylinder mit homogener Massendichte nach ((4.13), Bd. 1):

$$J_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 ; \quad J_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 .$$

Abrollbedingung:

$$\begin{aligned}x_2 &= \text{const} + R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2 \\ \rightsquigarrow \ddot{x}_2 &= R_1 \ddot{\varphi}_1 + R_2 \ddot{\varphi}_2 .\end{aligned}$$

Translation von Zylinder 2 nach Schwerpunktsatz:

$$M_2 \ddot{x}_2 = M_2 g - F .$$

Damit folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}M_2 R_1 \ddot{\varphi}_1 + M_2 R_2 \ddot{\varphi}_2 &= M_2 g - F \\ \rightsquigarrow M_2 R_1 \frac{R_1 F}{J_1} + M_2 R_2 \frac{R_2 F}{J_2} &= M_2 g - F \\ \rightsquigarrow F \left(1 + \frac{R_1^2 M_2}{J_1} + \frac{R_2^2 M_2}{J_2} \right) &= M_2 g \\ \rightsquigarrow F \left(1 + 2 \frac{M_2}{M_1} + 2 \right) &= M_2 g .\end{aligned}$$

Damit gilt für die Fadenspannung:

$$F = \frac{M_1 M_2}{3M_1 + 2M_2} g .$$

2. Generalisierte Koordinaten: φ_1, φ_2

Zwangsbedingung: Abwickeln des Fadens:

$$\begin{aligned} x_2 &= \text{const} + R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2 \\ \rightsquigarrow \dot{x}_2 &= R_1 \dot{\varphi}_1 + R_2 \dot{\varphi}_2 \\ \ddot{x}_2 &= R_1 \ddot{\varphi}_1 + R_2 \ddot{\varphi}_2 . \end{aligned}$$

Kinetische und potentielle Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 \\ V &= -M_2 g(x_2 - \text{const}) . \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} M_2 (R_1 \dot{\varphi}_1 + R_2 \dot{\varphi}_2)^2 + M_2 g (R_1 \varphi_1 + R_2 \varphi_2) .$$

3. Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0 \quad i = 1, 2 .$$

Wir berechnen die $i = 1$ -Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= J_1 \dot{\varphi}_1 + M_2 R_1 (R_1 \dot{\varphi}_1 + R_2 \dot{\varphi}_2) \\ \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= J_1 \ddot{\varphi}_1 + M_2 R_1 (R_1 \ddot{\varphi}_1 + R_2 \ddot{\varphi}_2) \\ &= \left(\frac{1}{2} M_1 + M_2 \right) R_1^2 \ddot{\varphi}_1 + M_2 R_1 R_2 \ddot{\varphi}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= M_2 g R_1 . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als erste Bewegungsgleichung:

$$\left(\frac{1}{2} M_1 + M_2 \right) R_1 \ddot{\varphi}_1 + M_2 R_1 R_2 \ddot{\varphi}_2 = M_2 g . \quad (1)$$

Wir berechnen die $i = 2$ -Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= J_2 \dot{\varphi}_2 + M_2 R_2 (R_1 \dot{\varphi}_1 + R_2 \dot{\varphi}_2) \\ \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= J_2 \ddot{\varphi}_2 + M_2 R_2 (R_1 \ddot{\varphi}_1 + R_2 \ddot{\varphi}_2) \\ &= \frac{3}{2} M_2 R_2^2 \ddot{\varphi}_2 + M_2 R_2 R_1 \ddot{\varphi}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= M_2 g R_2.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als zweite Bewegungsgleichung:

$$\frac{3}{2} R_2 \ddot{\varphi}_2 + R_1 \ddot{\varphi}_1 = g. \quad (2)$$

Wir setzen $R_2^2 \ddot{\varphi}_2$ aus (2) in (1) ein:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} M_1 + M_2\right) R_1 \ddot{\varphi}_1 + \frac{2}{3} M_2 g - \frac{2}{3} M_2 R_1 \ddot{\varphi}_1 &= M_2 g \\ \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{3} M_2\right) R_1 \ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{3} M_2 g.\end{aligned}$$

Das ist die Bewegungsgleichung für φ_1 :

$$R_1 \ddot{\varphi}_1 = \frac{2 M_2}{3 M_1 + 2 M_2} g. \quad (3)$$

Die für φ_2 folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}R_2 \ddot{\varphi}_2 &= \frac{2}{3} g - \frac{2}{3} \frac{2 M_2}{3 M_1 + 2 M_2} g = \frac{2}{3} g \frac{3 M_1 + 2 M_2 - 2 M_2}{3 M_1 + 2 M_2} \\ \rightsquigarrow R_2 \ddot{\varphi}_2 &= \frac{2 M_1}{3 M_1 + 2 M_2} g.\end{aligned}$$

Bei gegebenen Anfangsbedingungen trivial integrierbar:

$$\ddot{x}_2 = R_1 \ddot{\varphi}_1 + R_2 \ddot{\varphi}_2 = 2g \frac{M_1 + M_2}{3 M_1 + 2 M_2}.$$

Das entspricht dem „verzögerten“ freien Fall. Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich leicht:

$$x_2(t) = \frac{M_1 + M_2}{3 M_1 + 2 M_2} g t^2.$$

4. Die Newton-Mechanik liefert nach Teil 1. für die Fadenspannung:

$$M_2 \ddot{x}_2 = M_2 g - F \rightsquigarrow F = M_2 g \left(1 - \frac{2M_1 + 2M_2}{3M_1 + 2M_2} \right).$$

Das ist das „alte“ Ergebnis der Newton-Mechanik aus Teil 1.

$$F = \frac{M_1 M_2}{3M_1 + 2M_2} g.$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.17

1. Die Zwangsbedingung ist das Abrollen des Vollzylinders im Hohlzylinder, d. h.:

$$\begin{aligned} \text{Kreisbogen } \widehat{AB} &= \text{Kreisbogen } \widehat{AC} \\ \Leftrightarrow R(\psi + \varphi) &= r\chi \end{aligned}$$

Als generalisierte Koordinaten eignen sich:

$$q_1 := \varphi \quad q_2 := \psi$$

2. Der Hohlzylinder pendelt auf fester Achse um seinen Schwerpunkt. Damit ist dessen potentielle Energie konstant (= 0). Die potentielle Energie des Vollzylinders ist:

$$V_V = -mg(R - r) \cos \varphi$$

Die kinetische Energie der Zylinder setzt sich zusammen aus der Translation des Schwerpunkts S des Vollzylinders

$$T_t = \frac{1}{2}m(R - r)^2 \dot{\varphi}^2$$

und der Rotation der beiden Zylinder

$$T_r = \frac{1}{2}J_H \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_V (\dot{\chi} - \dot{\varphi})^2.$$

Dabei sind

$$J_H = MR^2 \quad \text{und} \quad J_V = \frac{1}{2}mr^2$$

das Trägheitsmoment des Hohl- bzw. Vollzylinders (Nachrechnen!). Mit der Abrollbedingung

$$\chi = \frac{R}{r}(\psi + \varphi)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\left(\frac{R}{r}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}) - \dot{\varphi}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}MR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\left(\frac{R^2}{r^2}(\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2) - 2\frac{R}{r}(\dot{\psi}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2) + \dot{\varphi}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}R^2\left(M + \frac{1}{2}m\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{1}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Damit ist die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= T - V = T_r - V_V \\ &= \frac{1}{2}R^2\left(M + \frac{1}{2}m\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos\varphi \end{aligned}$$

3. ψ ist zyklisch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0 \\ \Rightarrow p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = R^2\left(M + \frac{1}{2}m\right)\dot{\psi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\varphi} = \text{const} \\ \Rightarrow 0 &= R^2\left(M + \frac{1}{2}m\right)\ddot{\psi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\varphi} \\ \Rightarrow \ddot{\psi} &= -\frac{m(R-r)}{2R\left(M + \frac{1}{2}m\right)}\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mg(R-r)\sin\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\dot{\psi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\psi} \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mR(R-r)\ddot{\psi} + mg(R-r)\sin\varphi \\ \Rightarrow 0 &= \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}R\ddot{\psi} + g\sin\varphi \end{aligned}$$

Nach Ersetzen von $\ddot{\psi}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(R-r) \left[3 - \frac{mR}{2R\left(M + \frac{1}{2}m\right)} \right] \ddot{\varphi} + g\sin\varphi \\ &= \frac{1}{2}(R-r) \frac{3M+m}{M+\frac{1}{2}m} \ddot{\varphi} + g\sin\varphi \end{aligned}$$

Damit ist die Bewegungsgleichung für φ :

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{2M+m}{3M+m} \frac{g}{R-r} \sin\varphi$$

4. Die übliche Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ für kleine Auslenkungen führt auf die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi = 0$$

mit der Eigenfrequenz

$$\omega_\varphi = \sqrt{\frac{2M+m}{3M+m} \frac{g}{R-r}}$$

und bekannter Lösung $\varphi(t)$. Weiterhin ergibt sich $\psi(t)$ aus

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \frac{m(R-r)}{2R\left(M + \frac{1}{2}m\right)} \frac{2M+m}{3M+m} \frac{g}{R-r} \varphi(t) \\ &= \frac{mg}{R(3M+m)} \varphi(t) \end{aligned}$$

durch Integration mit entsprechenden Anfangsbedingungen.

Lösung zu Aufgabe 1.2.18

1. Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 = 0 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= l^2 \\ \Rightarrow S &= 6 - 3 = 3 \text{ Freiheitsgrade} \end{aligned}$$

generalisierte Koordinaten:

x, y : Schwerpunktkoordinaten

φ : Winkel der Hantel gegen x -Achse

Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{l}{2} \cos \varphi ; \quad y_1 = y - \frac{l}{2} \sin \varphi \\ x_2 &= x + \frac{l}{2} \cos \varphi ; \quad y_2 = y + \frac{l}{2} \sin \varphi \end{aligned}$$

2. Reibungskräfte:

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= -\alpha \dot{x}_1 = -\alpha \left(\dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \right) \\ F_{y_1} &= -\alpha \dot{y}_1 = -\alpha \left(\dot{y} - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \right) \\ F_{x_2} &= -\alpha \dot{x}_2 = -\alpha \left(\dot{x} - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \right) \\ F_{y_2} &= -\alpha \dot{y}_2 = -\alpha \left(\dot{y} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

generalisierte Kräfte:

$$Q_j = F_{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + F_{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + F_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial q_j} + F_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial q_j}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x} &= 1 ; \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = \frac{l}{2} \sin \varphi \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} &= 1 ; \quad \frac{\partial x_2}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = -\frac{l}{2} \sin \varphi \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} &= 0 ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = 1 ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = -\frac{l}{2} \cos \varphi \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} &= 0 ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial y} = 1 ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = \frac{l}{2} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_x &= F_{x_1} + F_{x_2} = -2\alpha \dot{x} \\
Q_y &= F_{y_1} + F_{y_2} = -2\alpha \dot{y} \\
Q_\varphi &= \frac{l}{2} \left(F_{x_1} \sin \varphi - F_{x_2} \sin \varphi - F_{y_1} \cos \varphi + F_{y_2} \cos \varphi \right) \\
&= \frac{l}{2} \sin \varphi \underbrace{\left(F_{x_1} - F_{x_2} \right)}_{-\alpha l \dot{\varphi} \sin \varphi} - \frac{l}{2} \cos \varphi \underbrace{\left(F_{y_1} - F_{y_2} \right)}_{+\alpha l \dot{\varphi} \cos \varphi} \\
&= -\frac{1}{2} \alpha l^2 \dot{\varphi}
\end{aligned}$$

3. Bewegungsgleichungen:

holonome Zwangsbedingungen; nicht-konservative Kräfte (1.33):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = x, y, \varphi$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi ; \quad \dot{y}_1 = \dot{y} - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \\
\dot{x}_2 &= \dot{x} - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi ; \quad \dot{y}_2 = \dot{y} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 \right) \\
&= m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + m \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad m \ddot{x} &= -\alpha \dot{x} \\
m \ddot{y} &= -\alpha \dot{y} \\
m \ddot{\varphi} &= -\alpha \dot{\varphi}
\end{aligned}$$

4. allgemeine Lösungen:

$$q_i(t) = \alpha_i + \beta_i \exp \left(-\frac{\alpha t}{m} \right)$$

α_i, β_i aus Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
x(0) = y(0) = 0 ; \quad \varphi(0) = 0 \\
\Rightarrow \quad \alpha_i &= -\beta_i \\
\Rightarrow \quad q_i(t) &= \alpha_i \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha t}{m} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\dot{q}_i(0) = \frac{\alpha_i \alpha}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \alpha_x &= v_x \frac{m}{\alpha} \\ \alpha_y &= v_y \frac{m}{\alpha} \\ \alpha_\varphi &= \omega \frac{m}{\alpha} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.19

1. Zwangsbedingungen:

$$z = \text{const} = 0$$

$$y = (a(t) - x) \tan \alpha$$

Zwangsbedingung für y soll **nicht** zur Verringerung der Koordinatenzahl benutzt werden!

$$q_1 = x ; \quad q_2 = y$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

2. Zwangsbedingung in differentieller Form:

$$0 = (\dot{a}(t)dt - dx) \sin \alpha - dy \cos \alpha$$

Mit der Notation nach (1.95):

$$a_{11} = -\sin \alpha ; \quad a_{12} = -\cos \alpha$$

verallgemeinerte Zwangskräfte:

$$Q_x = -\lambda \sin \alpha ; \quad Q_y = -\lambda \cos \alpha$$

λ : Lagrange'scher Multiplikator
Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= Q_\alpha ; \quad \alpha = x, y \\ m\ddot{x} &= -\lambda \sin \alpha \\ m\ddot{y} + mg &= -\lambda \cos \alpha\end{aligned}$$

Zusätzliche Bestimmungsgleichung aus Zwangsbedingung 1. durch zweimalige Zeitdifferentiation:

$$\ddot{y} = (c - \ddot{x}) \tan \alpha$$

\ddot{x}, \ddot{y} einsetzen:

$$\begin{aligned}-g - \frac{\lambda}{m} \cos \alpha &= \left(c + \frac{\lambda}{m} \sin \alpha \right) \tan \alpha \\ -g \cos \alpha - \frac{\lambda}{m} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= c \sin \alpha \\ \Rightarrow \quad \lambda &= -mg \cos \alpha - cm \sin \alpha \\ Q_x &= m \sin \alpha (g \cos \alpha + c \sin \alpha) \\ Q_y &= m \cos \alpha (g \cos \alpha + c \sin \alpha)\end{aligned}$$

3. Bewegungsgleichung für $x(t)$:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= Q_x \\ \Rightarrow \quad \ddot{x} &= \sin \alpha (g \cos \alpha + c \cos \alpha) = \text{const}\end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sin \alpha (g \cos \alpha + c \sin \alpha) t^2 + x_0$$

$y(t)$ durch Integration der Bewegungsgleichung oder direkt aus der Zwangsbedingung:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} ct^2 - x(t) \right) \tan \alpha$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.20

1. Solange sich der Massenpunkt auf der Kugeloberfläche befindet, lautet die Zwangsbedingung:

$$R \geq z \geq z_0 : \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 .$$

Unterhalb der „Absprunghöhe“ z_0 ist die Zwangsbedingung aber:

$$z_0 \geq z : \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 > 0 .$$

Im allgemeinen Fall sind die Zwangsbedingungen also nicht geeignet, um die Zahl der Variablen zu verringern.

Mit Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) als verallgemeinerte Koordinaten und den Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

ist die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \end{aligned}$$

und die potentielle Energie:

$$V = mgz = mgr \cos \vartheta .$$

Damit ist die Lagrange-Funktion allgemein:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \vartheta .$$

2. Auf der Kugeloberfläche, d. h. im Bereich $R \geq z \geq z_0$, sind die Zwangsbedingungen holonom:

$$r = R = \text{const}$$

Es bleibt:

$$L = L(\vartheta, \varphi) = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \vartheta .$$

Die Bewegungsgleichungen für ϑ und φ lauten dann:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= mR^2 \ddot{\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = mR^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 + mgR \sin \vartheta \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt} (mR^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.\end{aligned}$$

Die Koordinate φ ist zyklisch. Damit ist:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Die z -Komponente des Drehimpulses bzgl. des Ursprungs ist Integral der Bewegung, denn die Schwerkraft wirkt in z -Richtung und damit wirkt kein Drehmoment in z -Richtung.

3. Zwangsbedingung für $R \geq z \geq z_0$:

$$\begin{aligned}r - R &= 0 \\ \Rightarrow dr &= 0, \quad \dot{r} = 0.\end{aligned}$$

Lagrange-Gleichung 1. Art für r mit der Zwangskraft Q_r :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= Q_r \\ m\ddot{r} - mr(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + mg \cos \vartheta &= Q_r.\end{aligned}$$

Mit

$$r = R = \text{const}, \quad \dot{r} = 0$$

und der Geschwindigkeit

$$v^2 = R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)$$

bleibt:

$$Q_r = mg \cos \vartheta - \frac{mv^2}{R}$$

Der Absprungpunkt $z_0 = R \cos \vartheta_0$ ist gekennzeichnet durch:

$$\begin{aligned}Q_r(z_0) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{mgz_0}{R} &= \frac{mv_0^2}{R} \\ \Rightarrow z_0 &= \frac{v_0^2}{g}\end{aligned}$$

wobei v_0 aus dem Energieerhaltungssatz bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned}\frac{m}{2}v_0^2 + mgz_0 &= mgR \\ \Rightarrow v_0^2 &= 2g(R - z_0).\end{aligned}$$

Damit ist die Bestimmungsgleichung für z_0 :

$$\begin{aligned}z_0 &= 2(R - z_0) \\ \Rightarrow z_0 &= \frac{2}{3}R.\end{aligned}$$

Danach bewegt sich der Massenpunkt im freien Fall mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}z &= z_0 = \frac{2}{3}R \\ v &= v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.21

F hat nur eine Radialkomponente:

$$F_r = \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2} \right)$$

Wir setzen

$$U(r, \dot{r}) = \frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right)$$

und verifizieren durch Einsetzen, dass

$$Q_r = F_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

gilt.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \right] &= -\frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \right] &= 2 \frac{\dot{r}}{r c^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \right] &= \frac{2}{r^2 c^2} (r \ddot{r} - \dot{r}^2), \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \right] &= \frac{\alpha}{r^2} \left(\frac{2r \ddot{r}}{c^2} - \frac{2\dot{r}^2}{c^2} + 1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} (\dot{r}^2 - 2r \ddot{r}) \right) = F_r.\end{aligned}$$

Das obige $U(r, \dot{r})$ ist also in der Tat das verallgemeinerte Potential der Kraft F . Da die Bewegung in der Ebene erfolgen soll,

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi,$$

gilt für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Die Lagrange-Funktion lautet demnach:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right).$$

Wir geben eine alternative Lösung an, die etwas systematischer erscheint:

Für das verallgemeinerte Potential $U(r, \dot{r})$ muss gelten:

$$F = Q_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

Die Lösung lässt sich nur erraten. Wegen der zweiten Ableitung in F wird folgender Ansatz gewählt:

$$U(r, \dot{r}) = \alpha f(r) + \alpha g(r) \dot{r}^2$$

Einsetzen von F und diesem Ansatz für U in obige Gleichung und Sortieren nach Zeitableitungen von r :

$$\begin{aligned}F &= \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r \ddot{r}}{c^2} \right) &= \frac{d}{dt} (2g\dot{r}) - (f' + g'\dot{r}^2) \\ &= (2g\ddot{r} + 2g'\dot{r}^2) - (f' + g'\dot{r}^2) \\ \frac{2}{c^2 r} \ddot{r} - \frac{1}{c^2 r^2} \dot{r}^2 + \frac{1}{r^2} &= 2g\ddot{r} + g'\dot{r}^2 - f'.\end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten von \ddot{r} liefert:

$$g(r) = \frac{1}{c^2 r} . \quad \Rightarrow \quad g'(r) = -\frac{1}{c^2 r^2} ,$$

was konsistent mit dem Koeffizienten von \dot{r}^2 ist. Der Vergleich der restlichen Terme liefert:

$$f'(r) = -\frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad f(r) = \frac{1}{r} + \text{const} .$$

Die Integrationskonstante ist frei wählbar und wird der Einfachheit halber Null gesetzt. Damit ist das verallgemeinerte Potential:

$$U(r, \dot{r}) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{c^2 r} \dot{r}^2 = \frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) .$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.22

1. $x_M = R \varphi$ (Rollbedingung!) ; $y_M = R$.
2. Massenpunkt:

$$\begin{aligned} x_m &= x_M - R \sin \varphi = R(\varphi - \sin \varphi) , \\ y_m &= y_M - R \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi) . \end{aligned}$$

Dies ist die *gewöhnliche* Zykloide (s. Beispiel 4) in Abschn. 1.2.2). Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_S &= \frac{M \mathbf{r}_M + \frac{1}{2} M \mathbf{r}_m}{M + \frac{1}{2} M} = \frac{2}{3} \mathbf{r}_M + \frac{1}{3} \mathbf{r}_m \\ \Rightarrow x_S &= x_M - \frac{1}{3} R \sin \varphi = R \left(\varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi \right) , \\ y_S &= y_M - \frac{1}{3} R \cos \varphi = R \left(1 - \frac{1}{3} \cos \varphi \right) . \end{aligned}$$

Dies ist die so genannte *verkürzte* Zykloide.

3. T_m : kinetische Energie des Massenpunktes

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) , \\ \dot{x}_m &= R\dot{\varphi}(1 - \cos \varphi) ; \quad \dot{y}_m = R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \Rightarrow T_m &= mR^2\dot{\varphi}^2(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

(T_M : Kinetische Energie der Scheibe).

T_M setzt sich aus einem Rotations- und einem Translationsanteil zusammen:

$$\begin{aligned} T_M &= T_M^{\text{rot}} + T_M^{\text{tr}} , \\ T_M^{\text{tr}} &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 . \end{aligned}$$

Für den Rotationsanteil benötigen wir das Trägheitsmoment J der Scheibe bezüglich einer Achse durch den Scheibenmittelpunkt (D = Dicke der Scheibe):

$$\begin{aligned} J &= \int r^2 dm = \rho_0 \int r^2 d^3r = \frac{M}{\pi R^2 D} \iiint dz r^3 dr d\varphi \\ &= \frac{M}{\pi R^2 D} D 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}MR^2 . \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} T_M^{\text{rot}} &= \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 \\ \Rightarrow T_M &= \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 . \end{aligned}$$

Die gesamte kinetische Energie ist dann:

$$T(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 \left[\frac{3}{2} + (1 - \cos \varphi) \right] .$$

Die potentielle Energie V lässt sich ebenfalls in Beiträge des Massenpunktes und der Scheibe zerlegen:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= V_m + V_M = mg y_m + C_m + V_M \\ &= -\frac{1}{2}MgR \cos \varphi + \frac{1}{2}MgR + C_m + V_M . \end{aligned}$$

Der Beitrag der Scheibe ist konstant. Die Wahl des Nullpunktes ist frei. Wir können die Konstante C_m dann natürlich so wählen, dass

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}MgR \cos \varphi$$

bleibt.

4.

$$L = T(\varphi, \dot{\varphi}) - V(\varphi) = \frac{1}{2}M \left[R^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{5}{2} - \cos \varphi \right) + gR \cos \varphi \right].$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= MR^2 \dot{\varphi} \left(\frac{5}{2} - \cos \varphi \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= MR^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{5}{2} - \cos \varphi \right) + MR^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2}M \left[R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - gR \sin \varphi \right] \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} \left(5 - 2 \cos \varphi \right) + \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \right) \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Vereinfachung für kleine Schwingungen:

$$\begin{aligned} \varphi \ll 1 : \quad \cos \varphi &\approx 1, \quad \sin \varphi \approx \varphi, \quad \dot{\varphi}^2 \approx 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{3R} \varphi &\approx 0 \Rightarrow \omega^2 \approx \frac{g}{3R}. \end{aligned}$$

5. Die Bewegung der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse

$$M_{\text{tot}} = M + m = \frac{3}{2}M$$

wird durch die Gesamtkraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z} - \frac{3}{2}Mg \mathbf{e}_y$$

bewirkt. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten deshalb:

$$\frac{3}{2}M (\ddot{x}_S, \ddot{y}_S) = \left(Z_x, Z_y - \frac{3}{2}Mg \right).$$

x_S, y_S haben wir bereits in 2. berechnet.

$$\begin{aligned}\dot{x}_S &= R \dot{\varphi} \left(1 - \frac{1}{3} \cos \varphi \right), \quad \dot{y}_S = \frac{1}{3} R \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \Rightarrow \ddot{x}_S &= \frac{1}{3} R \left(\ddot{\varphi} (3 - \cos \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right), \\ \ddot{y}_S &= \frac{1}{3} R \left(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right).\end{aligned}$$

Die Zwangskraft hat also die Komponenten:

$$\begin{aligned}Z_x &= \frac{1}{2} M R \left(\ddot{\varphi} (3 - \cos \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right), \\ Z_y &= \frac{1}{2} M R \left(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \frac{3g}{R} \right).\end{aligned}$$

6. Bedingung für *Abheben*: $Z_y \stackrel{!}{=} 0$

Wegen $\partial L / \partial t = 0$ und skleronome Zwangsbedingungen gilt der Energiesatz:

$$E = T + V = \frac{1}{2} M \left[R^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{5}{2} - \cos \varphi \right) - g R \cos \varphi \right] = \text{const.}$$

Wir drücken E durch die Anfangsgeschwindigkeit v aus:

$$E = \frac{1}{2} M \left[v^2 \left(\frac{5}{2} - 1 \right) - g R \right], \quad v = R \dot{\varphi}|_{\varphi=0} = \dot{x}_M(\varphi=0).$$

Es gilt also für beliebige φ :

$$\frac{3}{2} v^2 - g R = R^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{5}{2} - \cos \varphi \right) - g R \cos \varphi.$$

Wir bestimmen v aus der Bedingung $Z_y = 0$ bei $\varphi = 2\pi/3$, benötigen nach Teil 5. also $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ an der Stelle $\varphi = 2\pi/3$:

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \sin \varphi &= \frac{1}{2} \sqrt{3}; \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \\ \dot{\varphi}^2 \left(\varphi = \frac{2\pi}{3} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{R^2} - \frac{g}{R} \right).\end{aligned}$$

Nach Teil 4. gilt:

$$\begin{aligned}6\ddot{\varphi} \left(\varphi = \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{g}{R} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} \left(\varphi = \frac{2\pi}{3} \right) &= -\frac{\sqrt{3}}{24} \left(\frac{v^2}{R^2} + \frac{g}{R} \right).\end{aligned}$$

Bestimmungsgleichung für v :

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} Z_y \left(\varphi = \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} M R \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \ddot{\varphi} \left(\varphi = \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \left(\varphi = \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{3g}{R} \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= -\frac{1}{16} \left(\frac{v^2}{R^2} + \frac{g}{R} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{v^2}{R^2} - \frac{g}{R} \right) + \frac{3g}{R} \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{51}{5} g R . \end{aligned}$$

7. Trägheitsmoment:

$$J_S = J_{mS} + J_{MS} ,$$

J_S : Trägheitsmoment des gesamten Systems bezüglich Schwerpunkt S,

J_{mS} : Beitrag der Zusatzmasse,

J_{MS} : Beitrag der Scheibe.

Nach dem Steiner'schen Satz (Abschn. 4.2.4, Bd. 1) gilt:

$$J_{MS} = J + M \left[(x_M - x_S)^2 + (y_M - y_S)^2 \right] .$$

J ist das in 3. berechnete Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich einer Achse durch den Scheibenmittelpunkt.

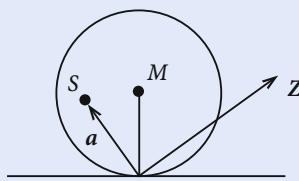
$$\begin{aligned} J_{MS} &= \frac{1}{2} M R^2 + M \left(\frac{1}{9} R^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{9} R^2 \cos^2 \varphi \right) = \frac{11}{18} M R^2 , \\ J_{mS} &= \frac{1}{2} M \left[(x_m - x_S)^2 + (y_m - y_S)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} M \left(\frac{4}{9} R^2 \sin^2 \varphi + \frac{4}{9} R^2 \cos^2 \varphi \right) = \frac{4}{18} M R^2 \\ \Rightarrow J_S &= \frac{5}{6} M R^2 . \end{aligned}$$

Die Zwangskraft \mathbf{Z} greift am Auflagepunkt an. Sie bewirkt ein Drehmoment um S und damit die Rotation der Scheibe (Abb. A.2):

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \times \mathbf{Z} = (a_x Z_y - a_y Z_x) \mathbf{e}_z .$$

Da die Rotationsbewegung ausschließlich durch die Zwangskraft \mathbf{Z} bewirkt wird, lautet die Bewegungsgleichung:

$$J_S \ddot{\varphi} = a_x Z_y - a_y Z_x .$$

**Abb. A.2**

Für den Vektor \mathbf{a} gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \left(- (x_M - x_S), y_S, 0 \right) = \left(-\frac{1}{3}R \sin \varphi, R \left(1 - \frac{1}{3} \cos \varphi \right), 0 \right) \\
 \Rightarrow J_S \ddot{\varphi} &= \left(-\frac{1}{3}R \sin \varphi \right) \frac{1}{2}MR \left(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \frac{3g}{R} \right) \\
 &\quad - R \left(1 - \frac{1}{3} \cos \varphi \right) \frac{1}{2}MR \left(\ddot{\varphi}(3 - \cos \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) \\
 \Rightarrow 5\ddot{\varphi} &= -\ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{3g}{R} \sin \varphi \\
 &\quad - \ddot{\varphi} (9 - 6 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) - \dot{\varphi}^2 (3 \sin \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) \\
 \Rightarrow \ddot{\varphi} (15 - 6 \cos \varphi) &+ 3\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{3g}{R} \sin \varphi = 0, \\
 \Rightarrow \ddot{\varphi} (5 - 2 \cos \varphi) &+ \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \right) \sin \varphi = 0.
 \end{aligned}$$

Dies stimmt mit der Bewegungsgleichung in Teil 4. überein!

Lösung zu Aufgabe 1.2.23

1. Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Die Koordinate φ ist zyklisch:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{const.}$$

Der Drehimpuls ist ein Integral der Bewegung.

2. Wegen Vernachlässigung der kinetischen Energie in radialer Richtung gilt $\dot{r}^2 \approx 0$:

$$T = \frac{1}{2}m r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{L_z^2}{2mr^2}.$$

Die geleistete Arbeit W entspricht der Änderung der kinetischen Energie (Energiesatz!):

$$W = T(r=R) - T(r=R_0) = \frac{L_z^2}{2m} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right).$$

3. Ja! Die Lagrange-Funktion ist dieselbe wie unter 1., φ nach wie vor zyklisch.
 4. Aus $\dot{r}(t) = -b t$ folgt die Zwangsbedingung:

$$r(t) = -\frac{1}{2}b t^2 + R_0 \quad (\text{holonom-rheonom}).$$

Die diese Zeitabhängigkeit hervorrufende Zwangskraft Z ist die einzige wirkende Kraft. Deswegen gilt:

$$m \ddot{r} = Z.$$

In ebenen Polarkoordinaten ist (s. (2.13), Bd. 1):

$$\ddot{r} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi.$$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt:

$$\begin{aligned} (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{r m} \frac{d}{dt} L_z = 0 \\ \Rightarrow Z &= m(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r = -m(b + r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r = -\left(m b + \frac{L_z^2}{m r^3(t)}\right) \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m b^2 t^2 + \frac{L_z^2}{2m r^2} = -m b (r - R_0) + \frac{L_z^2}{2m r^2} \\ \Rightarrow W &= -m b (R - R_0) + \frac{L_z^2}{2m} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right). \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.24

1. Zwangsbedingung:

$$r = l - R_0 \varphi \quad (\text{holonom-skleronom}).$$

Ortsvektor des Massenpunktes:

$$\mathbf{r}(P) = \mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{r}},$$

wobei $\mathbf{R}_0 = R_0(\cos \varphi, \sin \varphi)$ und $\bar{\mathbf{r}} = r \mathbf{e}_\varphi = r(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ ist.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbf{r}(P) &= (R_0 \cos \varphi - (l - R_0 \varphi) \sin \varphi, R_0 \sin \varphi + (l - R_0 \varphi) \cos \varphi) , \\ \dot{\mathbf{r}}(P) &= (-R_0 \dot{\varphi} \sin \varphi + R_0 \dot{\varphi} \sin \varphi - (l - R_0 \varphi) \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ &\quad R_0 \dot{\varphi} \cos \varphi - R_0 \dot{\varphi} \cos \varphi - (l - R_0 \varphi) \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ &= -(l - R_0 \varphi) \dot{\varphi} \mathbf{e}_r .\end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2(P) = \frac{1}{2} m (l - R_0 \varphi)^2 \dot{\varphi}^2 .$$

Die Koordinate φ ist **nicht** zyklisch wie in der vorigen Aufgabe. Der Drehimpuls L_z ist also **keine** Erhaltungsgröße.

Wegen der holonom-skleronomen Zwangsbedingung und wegen $\partial L / \partial t = 0$ gilt jedoch der Energiesatz:

$$E = \text{const} = T .$$

2. Der Energiesatz erspart bereits eine Integration:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{\frac{2E}{m}}}{l - R_0 \varphi} ; \quad t = 0 : \quad v_0 = \frac{l \sqrt{\frac{2E}{m}}}{l} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \\ \Rightarrow \dot{\varphi} &= \frac{v_0}{l - R_0 \varphi} .\end{aligned}$$

Dies lässt sich umschreiben:

$$v_0 = l \dot{\varphi} - R_0 \varphi \dot{\varphi} \Rightarrow v_0 t = l \varphi - \frac{1}{2} R_0 \varphi^2 + C .$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt unmittelbar $C = 0$. Wir lösen nach φ auf:

$$\varphi = \frac{l}{R_0} \pm \sqrt{\frac{l^2}{R_0^2} - \frac{2}{R_0} v_0 t} .$$

Wegen $\varphi(0) = 0$ kann nur das Minuszeichen richtig sein:

$$\varphi(t) = \frac{l}{R_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2R_0}{l^2} v_0 t} \right) .$$

Nach der Zeit t_0 ist der Faden voll aufgewickelt, d. h.:

$$R_0 \varphi(t = t_0) = l .$$

Dies bedeutet:

$$t_0 = \frac{1}{2} \frac{l^2}{R_0 v_0} .$$

3.

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(l - R_0 \varphi)^2 \dot{\varphi} .$$

Drehimpuls bezüglich 0:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= mr(P) \times \dot{\mathbf{r}}(P) \\ &= m(R_0 \mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\varphi) \times (- (l - R_0 \varphi) \dot{\varphi}) \mathbf{e}_r \\ &= -mr(l - R_0 \varphi) \dot{\varphi} (\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r) \\ &= m(l - R_0 \varphi)^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.25

1. Wir berechnen zunächst das Trägheitsmoment der Walze. Dazu verwenden wir Zylinderkoordinaten r, φ, \tilde{z} . Die \tilde{z} -Richtung falle mit der Zylinderachse zusammen. Für die Massendichte gilt nach Voraussetzung:

$$\rho(r, \varphi, \tilde{z}) = \alpha r .$$

Wie groß ist α ? Wir drücken α durch die Masse M der Walze aus:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\text{Walze}} d^3 r \rho(\mathbf{r}) = 2\pi h \alpha \int_0^R r^2 dr = 2\pi h \alpha \frac{1}{3} R^3 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{3M}{2\pi h R^3} . \end{aligned}$$

Trägheitsmoment bezüglich \tilde{z} -Achse:

$$J = \int_{\text{Walze}} r^2 dm = \int_{\text{Walze}} r^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 r = 2\pi h \alpha \int_0^R r^4 dr = \frac{3M}{R^3} \frac{1}{5} R^5 = \frac{3}{5} M R^2 .$$

Im Bereich $0 \leq z \leq l$ führt die Masse m eine eindimensionale Bewegung aus, d. h. ohne Seitenbewegung:

generalisierte Koordinate: z ,

Zwangsbedingung: $z = R\varphi$.

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}M+m\right)\dot{z}^2.$$

Potentielle Energie:

$$V = mg(l + R - z) \quad (\text{Minimum bei vollständig abgewickeltem Faden}).$$

Lagrange-Funktion:

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}M+m\right)\dot{z}^2 - mg(l + R - z).$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \left(\frac{3}{5}M+m\right)\ddot{z} \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial z} = mg \\ \Rightarrow \ddot{z} &= \frac{m}{m + \frac{3}{5}M}g. \end{aligned}$$

Die Masse m führt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung aus (*verzögerter Fall!*).

Mit den Anfangsbedingungen

$$z(t=0) = 0; \quad \dot{z}(t=0) = 0$$

folgt:

$$z(t) = \frac{1}{2} \frac{m}{m + \frac{3}{5}M} g t^2.$$

2. Für $z > l$ kommt die Seitenbewegung hinzu. An Abb. A.3 liest man für den Ortsvektor \mathbf{r}_m der Masse m ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_m &= (R \cos \varphi, l + R \sin \varphi) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_m &= R \dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi). \end{aligned}$$

$R\dot{\varphi}$ ist natürlich nun nicht mehr gleich \dot{z} !

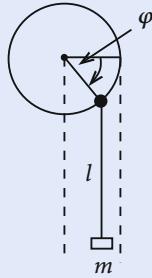


Abb. A.3

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{3}{5}M\right)R^2\dot{\varphi}^2.$$

Potentielle Energie:

$$V = mgR(1 - \sin \varphi).$$

Lagrange-Funktion:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\left(m + \frac{3}{5}M\right)R^2\dot{\varphi}^2 - mgR(1 - \sin \varphi).$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \left(m + \frac{3}{5}M\right)R^2\ddot{\varphi} - mgR \cos \varphi \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{m}{m + \frac{3}{5}M} g \cos \varphi. \end{aligned}$$

Man vergleiche mit dem entsprechenden Ergebnis aus Teil 1. Von $z = l$ ($\varphi = 0$) bis $z = l + R$ ($\varphi = \pi/2$) nimmt $\ddot{\varphi}$ monoton auf Null ab. Wenn dann noch $M \gg m$ angenommen werden darf, so ist $\ddot{\varphi} \approx 0$. Dies bedeutet:

$$\dot{\varphi} \approx \dot{\varphi}_l = \text{const} \quad (\dot{\varphi}_l \text{ aus 1. bekannt!})$$

Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} z &= l + R \sin \varphi \approx l + R \sin [\dot{\varphi}_l(t - t_l)], \\ \dot{z} &= R \dot{\varphi} \cos \varphi \approx R \dot{\varphi}_l \cos [\dot{\varphi}_l(t - t_l)], \\ \ddot{z} &= R \ddot{\varphi} \cos \varphi - R \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \approx -R \dot{\varphi}_l^2 \sin [\dot{\varphi}_l(t - t_l)]. \end{aligned}$$

t_l ist die Zeit, nach der der Faden auf seine volle Länge abgewickelt ist. Sie lässt sich mit dem Ergebnis aus Teil 1. berechnen:

$$l = \frac{1}{2} \frac{m}{m + \frac{3}{5}M} g t_l^2 \Rightarrow t_l = \sqrt{\frac{2l \left(m + \frac{3}{5}M \right)}{mg}}.$$

Im Bereich $l \leq z \leq l+R$ ist $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ und damit $\ddot{z} < 0$. Es findet also eine Bremsung statt.

Wir müssen noch die Seitenbewegung diskutieren:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \approx R \cos [\dot{\varphi}_l (t - t_l)] , \\ \dot{x} &= -R \dot{\varphi} \sin \varphi \approx -R \dot{\varphi}_l \sin [\dot{\varphi}_l (t - t_l)] , \\ \ddot{x} &= -R \ddot{\varphi} \sin \varphi - R \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \approx -R \dot{\varphi}_l^2 \cos [\dot{\varphi}_l (t - t_l)] . \end{aligned}$$

3.

$$m \ddot{z} = mg - Z \Rightarrow Z = m(g - \ddot{z}) .$$

$0 \leq z \leq l$:

$$Z = mg \left(1 - \frac{m}{m + \frac{3}{5}M} \right) = m \frac{3M}{3M + 5m} g = \text{const} \approx mg .$$

$l \leq z \leq l+R$:

$$\ddot{z} \approx -R \dot{\varphi}_l^2 \sin \varphi .$$

Nach Teil 1. gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_l &= \frac{1}{R} \dot{z} (t = t_l) = \frac{1}{R} \frac{m}{m + \frac{3}{5}M} g \sqrt{\frac{2l \left(m + \frac{3}{5}M \right)}{mg}} \\ \Rightarrow R \dot{\varphi}_l^2 &= \frac{1}{R} \frac{m}{m + \frac{3}{5}M} g 2l \\ \Rightarrow \ddot{z} &\approx -\frac{2}{R} g l \frac{5m}{3M} \sin \varphi \\ \Rightarrow Z &\approx mg \left(1 + \frac{10lm}{3MR} \sin \varphi \right) . \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1.2.26

1. Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 = 0 & \quad (\text{ebene Bewegung}), \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (2a)^2 & \quad (\text{konstanter Abstand}). \end{aligned}$$

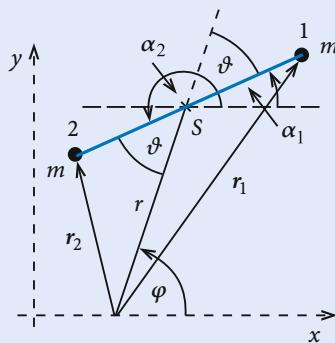


Abb. A.4

$p = 3$: Zahl der Zwangsbedingungen

⇒ Zahl der Freiheitsgrade:

$$S = 3N - p = 6 - 3 = 3.$$

Wir brauchen also drei generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = r; \quad q_2 = \varphi; \quad q_3 = \vartheta.$$

Kinetische Energie:

$$T = T_S + T_E,$$

T_S : Schwerpunktbewegung, *Bahnbewegung*; T_E : Eigendrehung um S .

$$\text{Schwerpunkt: } \mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2),$$

$$\text{Gesamtmasse: } M = m_1 + m_2 = 2m,$$

$$\begin{aligned}
T_S &= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 = m (\dot{R}_x^2 + \dot{R}_y^2) , \\
R_x = r \cos \varphi &\Rightarrow \dot{R}_x = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi , \\
R_y = r \sin \varphi &\Rightarrow \dot{R}_y = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\
&\Rightarrow T_S = m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) .
\end{aligned}$$

Eigendrehung:

$$\begin{aligned}
T_E &= \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a^2 \dot{\alpha}_2^2 ; \\
\alpha_1 &= \varphi - \vartheta ; \quad \alpha_2 = \pi + \alpha_1 = \pi + \varphi - \vartheta \\
\Rightarrow T_E &= m a^2 (\dot{\varphi} - \dot{\vartheta})^2 .
\end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned}
V &= -m \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) , \\
r_2 &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2r a \cos(\pi - \vartheta)} = \sqrt{r^2 + a^2 + 2r a \cos \vartheta} , \\
r_1 &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2r a \cos \vartheta} .
\end{aligned}$$

Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}
L = T_S + T_E - V &= m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + m a^2 (\dot{\varphi} - \dot{\vartheta})^2 \\
&+ m \gamma \left[(r^2 + a^2 + 2r a \cos \vartheta)^{-1/2} + (r^2 + a^2 - 2r a \cos \vartheta)^{-1/2} \right] .
\end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$q_1 = r :$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= 2m \ddot{r} , \\
\frac{\partial L}{\partial r} &= 2m r \dot{\varphi}^2 - m \gamma \left[\frac{r + a \cos \vartheta}{(r^2 + a^2 + 2r a \cos \vartheta)^{3/2}} + \frac{r - a \cos \vartheta}{(r^2 + a^2 - 2r a \cos \vartheta)^{3/2}} \right] \\
\Rightarrow \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 &= -\frac{1}{2} \gamma \left[\frac{r + a \cos \vartheta}{(r^2 + a^2 + 2r a \cos \vartheta)^{3/2}} + \frac{r - a \cos \vartheta}{(r^2 + a^2 - 2r a \cos \vartheta)^{3/2}} \right] .
\end{aligned}$$

$q_2 = \varphi : \varphi$ ist zyklisch!

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2m r^2 \dot{\varphi} + 2m a^2 (\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}) = \text{const} .$$

$$q_3 = \vartheta :$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= -2m a^2 (\ddot{\varphi} - \ddot{\vartheta}) , \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= m \gamma r a \left[\frac{\sin \vartheta}{(r^2 + a^2 + 2ra \cos \vartheta)^{3/2}} - \frac{\sin \vartheta}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{3/2}} \right] \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} &= \ddot{\vartheta} - \frac{\gamma r}{2a} \sin \vartheta \left[\frac{1}{(r^2 + a^2 + 2ra \cos \vartheta)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta)^{3/2}} \right]. \end{aligned}$$

2. *Bahndrehimpuls* $\hat{=} \text{ Drehimpuls des Schwerpunktes:}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_B &= \mathbf{R} \times \mathbf{P} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \times M \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= (2mr^2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_z . \end{aligned}$$

Eigendrehimpuls $\hat{=} \text{ Drehimpuls bezüglich } S:$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_E &= \sum_{i=1}^2 m_i a^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{pmatrix} \times \dot{\alpha}_i \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \\ \cos \alpha_i \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^2 m_i a^2 \dot{\alpha}_i (\cos^2 \alpha_i + \sin^2 \alpha_i) \mathbf{e}_z = 2m a^2 (\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}) \mathbf{e}_z . \end{aligned}$$

Gesamtdrehimpuls der Hantel:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}_B + \mathbf{L}_E = 2m [r^2 \dot{\varphi} + a^2 (\dot{\varphi} - \dot{\vartheta})] \mathbf{e}_z = p_\varphi \mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \mathbf{L} &= \mathbf{const} , \quad \text{da } \varphi \text{ zyklisch ist} . \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (1+x)^{-3/2} &= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \dots \\ \Rightarrow \frac{1}{r_{1,2}^3} &= \frac{1}{r^3} \left[1 + \left(\frac{a^2}{r^2} \pm 2\frac{a}{r} \cos \vartheta \right) \right]^{-3/2} \\ &= \frac{1}{r^3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} \pm 2\frac{a}{r} \cos \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8} \left(\frac{a^4}{r^4} + 4\frac{a^2}{r^2} \cos^2 \vartheta \pm 4\frac{a^3}{r^3} \cos \vartheta \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{35}{16} \left(\frac{a^6}{r^6} \pm 6\frac{a^5}{r^5} \cos \vartheta + 12\frac{a^4}{r^4} \cos^2 \vartheta \pm 8\frac{a^3}{r^3} \cos^3 \vartheta \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{1}{r^3} \left[1 \mp 3 \frac{a}{r} \cos \vartheta + \frac{3}{2} \frac{a^2}{r^2} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{5}{2} \frac{a^3}{r^3} \cos \vartheta (3 - 7 \cos^2 \vartheta) \right] \\
\Rightarrow & \frac{r + a \cos \vartheta}{r_1^3} + \frac{r - a \cos \vartheta}{r_2^3} \\
&\approx \frac{1}{r^3} \left[2r + 3 \frac{a^2}{r} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \right. \\
&\quad \left. - 6 \frac{a^2}{r} \cos^2 \vartheta + 5 \frac{a^4}{r^3} \cos^2 \vartheta (3 - 7 \cos^2 \vartheta) \right] \\
&= \frac{1}{r^2} \left[2 + 3 \frac{a^2}{r^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + 5 \frac{a^4}{r^4} \cos^2 \vartheta (3 - 7 \cos^2 \vartheta) \right] . \\
\Rightarrow & \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r^3} \left(-\frac{6a}{r} \cos \vartheta + 5 \frac{a^3}{r^3} \cos \vartheta (3 - 7 \cos^2 \vartheta) + \dots \right) \\
&= -\frac{\cos \vartheta}{r^3} \frac{a}{r} \left(6 - 5 \frac{a^2}{r^2} (3 - 7 \cos^2 \vartheta) + \dots \right)
\end{aligned}$$

Damit schreiben wir die Bewegungsgleichungen aus Teil 1. um:

$$q_1 = r :$$

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma}{r^2} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} \right) (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots \right].$$

$$q_2 = \varphi \text{ (unverändert):}$$

$$\frac{d}{dt} [r^2 \dot{\varphi} + a^2 (\dot{\varphi} - \dot{\vartheta})] = 0 .$$

$$q_3 = \vartheta :$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\vartheta} + \frac{3}{2} \frac{\gamma}{r^3} \sin 2\vartheta - \frac{5}{4} \frac{\gamma}{r^3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin 2\vartheta (3 - 7 \cos^2 \vartheta) + \dots$$

(unter Berücksichtigung von $\sin 2\vartheta = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta$).

Für $a/r \rightarrow 0$ vereinfachen sich diese Gleichungen weiter zu:

$$\begin{aligned}
&\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 + \frac{\gamma}{r^2} \approx 0 , \\
&\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \approx 0 , \\
&\ddot{\varphi} - \ddot{\vartheta} - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{r^3} \sin 2\vartheta \approx 0 .
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen enthalten **keine** ϑ -Anteile. Die Bahnbewegung $r = r(\varphi)$ ist damit von der Eigenbewegung, gekennzeichnet durch ϑ , entkoppelt.

4. Fall 1:



Abb. A.5

Die Hantelstange sei stets auf P gerichtet

$$\Rightarrow \vartheta = 0 = \text{const} \Rightarrow \dot{\vartheta} = 0 .$$

Gleichförmige Kreisbewegung:

$$r = R = \text{const} ; \quad \dot{\varphi} = \omega_1 = \text{const} .$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} q_1 &= r : \quad -R \omega_1^2 = -\frac{\gamma}{R^2} \left[1 + 3 \frac{a^2}{R^2} + \dots \right] , \\ q_2 &= \varphi : \quad \frac{d}{dt} \left[R^2 \omega_1 + a^2 \omega_1 \right] = 0 , \\ q_3 &= \vartheta : \quad 0 = 0 . \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen sind identisch erfüllt, die erste liefert:

$$\omega_1^2 = \frac{\gamma}{R^3} \left[1 + 3 \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right] .$$

Fall 2:

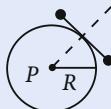


Abb. A.6

Die Hantelstange liege stets tangential zum Kreis:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{const} \Rightarrow \dot{\vartheta} = 0 .$$

Gleichförmige Kreisbewegung:

$$r = R = \text{const} ; \quad \dot{\varphi} = \omega_2 = \text{const} .$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} q_1 = r : \quad -R \omega_2^2 &= -\frac{\gamma}{R^2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{R^2} + \dots \right], \\ q_2 = \varphi : \quad \frac{d}{dt} \left[R^2 \omega_2 + a^2 \omega_2 \right] &= 0, \\ q_3 = \vartheta : \quad 0 &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen sind wieder identisch erfüllt, die erste liefert:

$$\omega_2^2 = \frac{\gamma}{R^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{R^2} \right).$$

Der zitierte Satz gilt natürlich auch für die Hantelbewegung. Nur ist wegen der Inhomogenität des Gravitationsfeldes in den beiden obigen Fällen die Gesamtkraft unterschiedlich!

Lösung zu Aufgabe 1.2.27

Bewegungsgleichungen zu L_1 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L_1}{\partial x_i} = 0 \rightsquigarrow m\ddot{x}_i = qE_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Bewegungsgleichungen zu L_2 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L_2}{\partial x_i} = 0 \rightsquigarrow m\ddot{x}_i = qE_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Beide Lagrange-Funktionen führen zu denselben Bewegungsgleichungen, sind also äquivalent, beschreiben gleichermaßen die Bewegung des geladenen Teilchens im konstanten, homogenen elektrischen Feld E . Das Ergebnis wird verständlich, wenn man bedenkt, dass gilt:

$$\frac{d}{dt}(qE \cdot rt) = qE \cdot \dot{r}t + qE \cdot \dot{r}.$$

Damit hängen die beiden Funktionen durch eine mechanische Eichtransformation (1.84) miteinander zusammen:

$$L_1 = L_2 + \frac{d}{dt}(qE \cdot rt) \equiv L_2 + \frac{d}{dt}f(r, t).$$

Das erklärt die Äquivalenz!

Abschnitt 1.3.5

Lösung zu Aufgabe 1.3.1

Mit der Notation aus Abschn. 1.3.2 gilt:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx .$$

Zu variieren ist also das Funktional

$$J = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx .$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} f(x, y, y') &= f(y') = \sqrt{1 + y'^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} . \end{aligned}$$

Für die Variation δJ hatten wir im Anschluss an (1.131) abgeleitet:

$$\delta J = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right|_A^B + \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx .$$

Dies bedeutet hier:

$$\delta J = \left. \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \delta y \right|_A^B - \int_A^B \left(\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \delta y dx .$$

1. Zunächst sind A und B fest für alle Kurven der Konkurrenzschar. Es gilt deshalb:

$$\delta y(A) = \delta y(B) = 0 .$$

Der erste Summand im obigen Ausdruck für δJ verschwindet also. Die Forderung $\delta J = 0$ führt bei sonst beliebigem δy auf

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const} \Leftrightarrow y' = m = \text{const} .$$

Die kürzeste Verbindung zwischen A und B ist also die Strecke \overline{AB} (s. Beispiel 1) in Abschn. 1.3.2).

2. Jetzt besteht die Konkurrenzschar aus allen **Strecken** von A zu **beliebigen** Punkten B auf der Geraden g, die parallel zur y-Achse orientiert sein muss, damit für **alle** Strecken x_A und x_B fest sind. Für jede zur Variation zugelassenen Kurve gilt also $y' = \text{const}$, sodass nun der zweite Summand im obigen δJ -Ausdruck verschwindet. Der erste Summand ist dagegen ungleich Null, da nun nur A fest ist:

$$\delta y(A) = 0 ; \quad \delta y(B) \neq 0 .$$

Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \delta J &= \frac{y'(B)}{\sqrt{1 + y'^2(B)}} \delta y(B) \\ &\Rightarrow y'(B) = 0 . \end{aligned}$$

Die stationäre Bahn hat also die Steigung Null. Es handelt sich deshalb um das Lot von A auf die Gerade g.

Lösung zu Aufgabe 1.3.2

Linienelement in Zylinderkoordinaten:

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z .$$

Hier gilt $d\rho = 0$, da $\rho \equiv R = \text{const}$. Bogenlänge:

$$ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{R^2 d\varphi^2 + dz^2} = \sqrt{R^2 + z'^2} d\varphi ; \quad z = z(\varphi) .$$

Die Länge der Verbindungsstrecke berechnet sich aus:

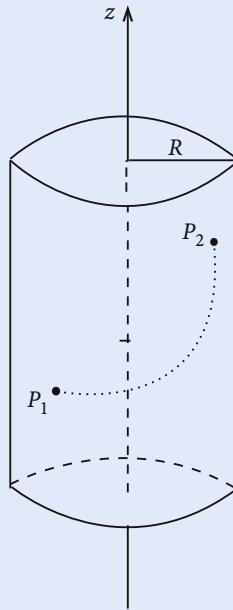
$$S = \int_1^2 ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{R^2 + z'^2} d\varphi \rightsquigarrow f(\varphi, z, z') = \sqrt{R^2 + z'^2} .$$

Die Forderung, dass S minimal ist, führt auf die Euler-Gleichung:

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial f}{\partial z'} \stackrel{!}{=} 0 .$$

Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

**Abb. A.7**

ist

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \text{const} = c = \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}}$$

und damit

$$z' = \frac{cR}{1 - c^2} = d = \text{const.}$$

Die kürzeste Verbindung ist also eine Schraubenlinie:

$$z(\varphi) = d \varphi + \hat{d} .$$

Lösung zu Aufgabe 1.3.3

1. Unter *Massenverteilung* ist *Masse pro Länge* zu verstehen:

$$m(x) = \frac{dm}{dx} .$$

Für die kinetische Energie T gilt dann

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \dot{y}^2 dx$$

mit

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}(x, t) .$$

2. Ansatz:

$$V = \alpha \left(\int_0^l ds - l \right); \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} .$$

Mit $y' = dy/dx$ folgt:

$$V = \alpha \left(\int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx - l \right) .$$

3. Kleine Auslenkung bedeutet auch *kleines* y' ,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + y'^2} &\approx 1 + \frac{1}{2} y'^2 \\ \Rightarrow V &\approx \frac{\alpha}{2} \int_0^l y'^2 dx . \end{aligned}$$

Wirkungsfunktional:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l (m(x) \dot{y}^2 - \alpha y'^2) dx \right] dt .$$

Die Konkurrenzschar besteht aus Kurven, deren Auslenkungen an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ Null sind (Zwangbedingungen!) und zu den Zeiten t_1 und t_2 fest vorgegeben sind (Hamilton'sches Prinzip!).

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (m(x) \dot{y} \delta \dot{y} - \alpha y' \delta y') dx dt \\ &= \int_0^l m(x) [\dot{y} \delta y]_{t_1}^{t_2} dx - \alpha \int_{t_1}^{t_2} [y' \delta y]_0^l dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (m(x) \ddot{y} - \alpha y'') \delta y dx dt . \end{aligned}$$

Da δy an den Grenzen verschwindet, bleibt:

$$0 = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (m(x)\ddot{y} - \alpha y'') \delta y \, dx \, dt .$$

δy ist ansonsten frei wählbar, sodass bereits

$$m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gelten muss. Dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Für den Spezialfall einer *homogenen* Massenverteilung $m(x) = m/l$ ergibt sich die *einfache* Wellengleichung.

Lösung zu Aufgabe 1.3.4

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz$$

Es gilt für die angegebene Bahn:

$$\dot{z}(t) = -gt + \dot{f}$$

Wirkungsfunktional:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} (-gt + \dot{f})^2 - mg \left(-\frac{1}{2} gt^2 + f \right) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} g^2 t^2 - mg t \dot{f} + \frac{m}{2} \dot{f}^2 + \frac{1}{2} mg^2 t^2 - mgf \right) \\ &= mg^2 \int_{t_1}^{t_2} dt t^2 + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{f}(t)^2 - mg \int_{t_1}^{t_2} dt (t \dot{f} + f) \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt t \dot{f} &= \underbrace{tf \Big|_{t_1}^{t_2}}_{= 0, \text{ wegen } f(t_1) = f(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} dt f . \end{aligned}$$

Es bleibt:

$$S = mg^2 \cdot \frac{1}{3} (t_2^3 - t_1^3) + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{f}(t)^2 .$$

Der erste Summand ist unabhängig von $f(t)$. Der zweite ist minimal für

$$\dot{f}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \text{const} .$$

Wegen $f(t_1) = f(t_2) = 0$ muss dann also

$$f(t) \equiv 0$$

sein.

Lösung zu Aufgabe 1.3.5

Setze:

$$g(y, y') \equiv f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} ; \quad f = f(y, y')$$

Damit:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y} y' - y' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - y' \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' \\ &= y' \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' \right) \\ &= y' \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nach der Eulerschen Gleichung (1.132) ist die Klammer null.

Damit ist:

$$g(y, y') = f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const} .$$

Lösung zu Aufgabe 1.3.6

$y(x)$: Lage des Seils in der xy -Ebene

$F = \int_{-d}^{+d} dx y(x)$: Fläche zwischen Seil und x -Achse

$$l = \int_1^2 dS = \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_1^2 dx \sqrt{1 + y'^2} : \text{Seillänge !}$$

Variationsaufgabe:

$$\delta (F - \lambda l) = \int_{-d}^{+d} dx \underbrace{\left(y(x) - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right)}_{f=f(y,y')}$$

Voraussetzungen von Aufgabe 1.3.5 sind erfüllt:

$$\begin{aligned} f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} &= \text{const} \\ \Rightarrow y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} &\stackrel{!}{=} a = \text{const} \\ \Leftrightarrow y - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} &= a \end{aligned}$$

nach y'^2 auflösen:

$$\begin{aligned} (y - a)^2 &= \frac{\lambda^2}{1 + y'^2} \Rightarrow 1 + y'^2 = \frac{\lambda^2}{(y - a)^2} \\ \Rightarrow y'^2 &= \frac{\lambda^2}{(y - a)^2} - 1 = \frac{\lambda^2 - (y - a)^2}{(y - a)^2} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - a)^2}}{y - a} \\ \Rightarrow dx &= \frac{y - a}{\sqrt{\lambda^2 - (y - a)^2}} dy = \frac{d}{dy} \left(-\sqrt{\lambda^2 - (y - a)^2} \right) dy \\ \Rightarrow x - b &= -\sqrt{\lambda^2 - (y - a)^2}; \quad b = \text{const}. \end{aligned}$$

Bedeutet:

$$(x - b)^2 + (y - a)^2 = \lambda^2 \Rightarrow \text{Kreis mit Radius } \lambda \text{ und Mittelpunkt bei } (b, a)$$

a, b und λ aus Randpunkten und Nebenbedingung.

$$P_1 : (-d - b)^2 + (-a)^2 = \lambda^2$$

$$P_2 : (d - b)^2 + (-a)^2 = \lambda^2$$

Subtraktion:

$$(d + b)^2 - (d - b)^2 = 0 \Leftrightarrow 4db = 0 \Rightarrow \underline{b = 0}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\lambda^2 - d^2}$$

Seillänge:

$$l = \int_{-d}^{+d} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\begin{aligned} \text{s. o.} \quad y - a &= \sqrt{\lambda^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \\ \Rightarrow 1 + y'^2 &= 1 + \frac{x^2}{\lambda^2 - x^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2} \\ \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \end{aligned}$$

damit gilt:

$$l = \int_{-d}^{+d} dx \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \lambda \int_{-d}^{+d} dx \frac{d}{dx} \arcsin \frac{x}{\lambda} = 2\lambda \arcsin \frac{d}{\lambda}$$

$\Rightarrow \lambda$ durch l und d festgelegt $\Rightarrow a$ bestimmt!

Lösung zu Aufgabe 1.3.7

1. Potentielle Energie des Kabels im Schwerefeld der Erde:

$$V = \int_1^2 dmgy = \alpha g \int_1^2 dsy = \alpha g \int_{-(A/2)}^{+(A/2)} dx \sqrt{dx^2 + y'^2} y .$$

Jede zur Variation zugelassene Kurvenform hat ihre Endpunkte bei 1 und 2 und besitzt eine zunächst fest vorgegebene Länge L :

$$L = \int_1^2 ds = \int_{-(A/2)}^{+(A/2)} dx \sqrt{1 + y'^2}. \quad (1)$$

Diese Nebenbedingung wird wie in Aufgabe 1.3.6 durch einen Lagrangeschen Multiplikator λ in die Variation einbezogen:

$$\delta J \stackrel{!}{=} 0; \quad J = \int_{-(A/2)}^{+(A/2)} dx (\alpha gy - \lambda) \sqrt{1 + y'^2}.$$

Das für die Eulersche Gleichung vorgesehene Funktional,

$$f(x, y, y') = (\alpha gy - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} \equiv f(y, y')$$

ist nicht explizit von x abhängig. Deshalb gilt nach Aufgabe 1.3.5:

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c = \text{const.}$$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned} & (\alpha gy - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} - (\alpha gy - \lambda) \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \\ \Leftrightarrow & c \sqrt{1 + y'^2} = \alpha gy - \lambda \\ \Leftrightarrow & y'^2 = \frac{(\alpha gy - \lambda)^2}{c^2} - 1 \\ \Leftrightarrow & dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{(\alpha gy - \lambda)^2}{c^2} - 1}} \\ \Leftrightarrow & x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{(\alpha gy - \lambda)^2}{c^2} - 1}} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{c}{\alpha g} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad \left(z = \frac{\alpha gy - \lambda}{c} \right). \end{aligned}$$

Wir haben also gefunden:

$$x(y) = \frac{c}{\alpha g} \operatorname{arc cosh} \left(\frac{\alpha gy - \lambda}{c} \right) + d.$$

Die Umkehrung liefert die gesuchte Kurvenform:

$$y(x) = \frac{c}{\alpha g} \cosh\left(\frac{\alpha g}{c}(x - d)\right) + \frac{\lambda}{\alpha g}.$$

Diese Gleichung muss von den Aufhängungspunkten $(-A/2, H)$ und $(+A/2, H)$ erfüllt werden. Das liefert zusammen mit der Nebenbedingung (1) drei Bestimmungsgleichungen für die drei noch unbekannten Größen c, d und λ . Damit liegt für gegebenes L die energetische günstigste Kurvenform des Kabels fest.

2. Mit der Lösung $y(x)$ aus Teil 1. für vorgegebenes L berechnen wir die potentielle Energie V des Kabels. Das Minimum von V als Funktion von L liefert uns dann die optimale Kabellänge!

Abschnitt 1.4.4

Lösung zu Aufgabe 1.4.1

$$L' = L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = L(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha), t).$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right) \\ &= \sum_{j=1}^S \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right). \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen und die stetige Differenzierbarkeit der q_j ausgenutzt. Dieser Ausdruck gilt so für beliebige α , also auch für $\alpha = 0$:

$$\left. \frac{\partial L'}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}.$$

Nach Voraussetzung soll nun aber die Lagrange-Funktion bei der Koordinatentransformation invariant bleiben. L' kann deshalb nicht explizit von α abhängen:

$$\left. \frac{\partial L'}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 .$$

Damit ergibt sich unmittelbar das Noether-Theorem:

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^s \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

Jede Transformation, die L invariant lässt, führt demnach auf eine Erhaltungsgröße.

Lösung zu Aufgabe 1.4.2

Rotation um z -Achse ((1.320), Bd. 1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z' \end{pmatrix} .$$

$\alpha = 0$ bedeutet die identische Abbildung. Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}' \cos \alpha + \dot{y}' \sin \alpha \\ \dot{y} &= -\dot{x}' \sin \alpha + \dot{y}' \cos \alpha \\ \dot{z} &= \dot{z}' . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 .$$

Ganz analog findet man:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2 \\ z &= z' . \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion ist also invariant gegenüber der hier vollzogenen Koordinatentransformation:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') .$$

Damit sind die Voraussetzungen des Noether-Theorems aus Aufgabe 1.4.1 erfüllt.

Zur Berechnung des Integrals der Bewegung benötigen wir nach Aufgabe 1.4.1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x(\mathbf{q}', \alpha)}{\partial \alpha} &= -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = y \\ \frac{\partial y(\mathbf{q}', \alpha)}{\partial \alpha} &= -x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = -x \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} &= 0.\end{aligned}$$

Damit finden wir die folgende Erhaltungsgröße:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \cdot (-x) = m\dot{x}y - m\dot{y}x = p_x \cdot y - p_y \cdot x = L_z = \text{const.}$$

Die z -Komponente des Drehimpulses ist also ein Integral der Bewegung!

Lösung zu Aufgabe 1.4.3

1. Es gilt natürlich auch jetzt wie in der Lösung zu Aufgabe 1.4.1:

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right).$$

Allerdings ist nun:

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}', t, \alpha) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{q}', t, \alpha).$$

Das Integral der Bewegung lautet deshalb:

$$\widehat{I}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left. \frac{\partial q_j(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{q}', t, \alpha) \right|_{\alpha=0} = \text{const.}$$

2.

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mgx.$$

Die Galilei-Transformation

$$x \longrightarrow x' = x + \alpha t$$

erfüllt die Voraussetzungen, die wir an die Transformation stellen müssen. Mit $\dot{x} = \dot{x}' - \alpha$ folgt für die „neue“ Lagrange-Funktion:

$$L' (x', \dot{x}', t, \alpha) = \frac{m}{2} (\dot{x}' - \alpha)^2 - mg(x' - \alpha t) = L(x', \dot{x}') + \frac{d}{dt} f(x', t, \alpha) .$$

Dabei haben wir definiert:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x', t, \alpha) &= -\alpha m \dot{x}' + \frac{m}{2} \alpha^2 + mg \alpha t \\ \simeq f(x', t, \alpha) &= -\alpha m x' + \frac{m}{2} \alpha^2 t + \frac{1}{2} mg \alpha t^2 \\ \simeq \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= -mx + \frac{1}{2} mgt^2 . \end{aligned}$$

Mit

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -m \dot{x} t$$

folgt nach Teil 1.:

$$\widehat{I}(x, \dot{x}, t) = -m \dot{x} t + mx - \frac{1}{2} mgt^2 = m \left(x - \dot{x} t - \frac{1}{2} gt^2 \right) .$$

Das ist das bekannte Ergebnis für den freien Fall. Mit

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \\ \dot{x}(t) &= v_0 - gt \end{aligned}$$

ist

$$\widehat{I} = mx_0$$

mit Sicherheit eine Erhaltungsgröße, wenn auch eine triviale!

Abschnitt 2.1.1

Lösung zu Aufgabe 2.1.1

1.

$$\begin{aligned} f(x) = \alpha x^2 &\Rightarrow u = \frac{df}{dx} = 2\alpha x \Rightarrow x = \frac{u}{2\alpha} \\ &\Rightarrow f(x) - x \frac{df}{dx} = -\alpha x^2 \\ &\Rightarrow g(u) = -\frac{u^2}{4\alpha}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x, y) = \alpha x^2 y^3 &\Rightarrow v = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = 3\alpha x^2 y^2 \\ &\Rightarrow y^2 = \frac{v}{3\alpha x^2} \\ &\Rightarrow f(x, y) - y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = -2\alpha x^2 y^3 = -2\alpha x^2 \frac{v^{3/2}}{(3\alpha x^2)^{3/2}} \\ &\Rightarrow g(x, v) = -\frac{2}{3} \frac{v^{3/2}}{(3\alpha x^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.1.2

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha (x + \beta)^2 \\ \Rightarrow u &= \frac{df}{dx} = 2\alpha (x + \beta) \Rightarrow x = \frac{u}{2\alpha} - \beta \\ \Rightarrow f(x) - x \frac{df}{dx} &= \alpha \left(\frac{u}{2\alpha} \right)^2 - u \left(\frac{u}{2\alpha} - \beta \right) \\ &= \beta u - \frac{u^2}{4\alpha} \\ &= g(u) \end{aligned}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
 g(u) &= \beta u - \frac{u^2}{4\alpha} \\
 \Rightarrow -x &= \frac{dg}{du} = \beta - \frac{u}{2\alpha} \quad \Rightarrow \quad u = (\beta + x) 2\alpha \\
 \Rightarrow g(u) - u \frac{dg}{du} &= \beta u - \frac{u^2}{4\alpha} - \beta u + \frac{u^2}{2\alpha} \\
 &= \frac{u^2}{4\alpha} = \alpha (\beta + x)^2 \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \alpha x^3 y^5 \\
 \Rightarrow v &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = 5\alpha x^3 y^4 \quad \Rightarrow \quad y^4 = \frac{v}{5\alpha x^3} \\
 \Rightarrow f(x, y) - y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x &= \alpha x^3 y^5 - 5\alpha x^3 y^5 \\
 &= -4\alpha x^3 y^5
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x, v) = -4\alpha x^3 \frac{v^{5/4}}{(5\alpha x^3)^{5/4}}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
 y &= - \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)_x = +5\alpha x^3 \frac{v^{1/4}}{(5\alpha x^3)^{5/4}} \\
 \Rightarrow v^{5/4} &= y^5 (5\alpha x^3)^{5/4} \\
 \Rightarrow g(x, v) - v \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)_x &= -4\alpha x^3 \frac{v^{5/4}}{(5\alpha x^3)^{5/4}} + 5\alpha x^3 \frac{v^{5/4}}{(5\alpha x^3)^{5/4}} \\
 &= \alpha x^3 \frac{v^{5/4}}{(5\alpha x^3)^{5/4}} \\
 &= \alpha x^3 y^5 = f(x, y)
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.1.3

1. Legendre-Transformation mit S als aktive Variable:

$$F(T, V) = U - S \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = U - TS .$$

Am Differential erkennt man, dass F eine Funktion von T und V ist:

$$dF = dU - SdT - TdS = -SdT - pdV .$$

Partielle Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = -S ; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -p .$$

2. Legendre-Transformation mit V als aktive Variable:

$$H(S, p) = U - V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = U + pV .$$

Am Differential erkennt man, dass H eine Funktion von S und p ist:

$$dH = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp .$$

Partielle Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p = T ; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S = V .$$

3. Legendre-Transformation mit S und V als aktive Variable:

$$G(T, p) = U - S \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V - V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = U - TS + pV .$$

Am Differential erkennt man, dass G eine Funktion von T und p ist:

$$dG = dU - SdT - TdS + pdV + Vdp = -SdT + Vdp .$$

Partielle Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S ; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = V .$$

Abschnitt 2.2.3

Lösung zu Aufgabe 2.2.1

Gegeben:

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t); \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Für das Differential dL der Lagrange-Funktion,

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^S p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} - H = \sum_{j=1}^S p_j \dot{q}_j - H,$$

gilt mit den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{j=1}^S \left(p_j d\dot{q}_j + dp_j \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) - \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^S (p_j d\dot{q}_j + \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial H}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Für das totale Differential dL muss natürlich auch gelten:

$$dL = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Der Vergleich liefert:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}; \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, S.$$

Das war zu zeigen.

Lösung zu Aufgabe 2.2.2

- Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2 ,$
 reduzierte Masse: $\mu = (m_1 m_2) / M ,$
 Relativkoordinate: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 ,$
 Massenmittelpunkt: $\mathbf{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = (X, Y, Z) ,$
 generalisierte Koordinaten: $X, Y, Z, r, \vartheta, \varphi .$

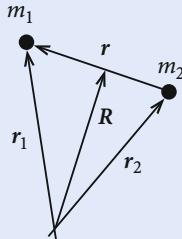


Abb. A.8

Lagrange-Funktion nach (1.164):

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - V(r) .$$

X, Y, Z, φ sind zyklisch. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P_x &= M \dot{X} = \text{const} = C_x , \\ P_y &= M \dot{Y} = \text{const} = C_y , \\ P_z &= M \dot{Z} = \text{const} = C_z , \\ P_\varphi &= \mu r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const} = C_\varphi . \end{aligned}$$

Legendre-Transformation bezüglich $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\varphi} :$

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, P_x, P_y, P_z, P_\varphi) \\ = \frac{1}{2M} (C_x^2 + C_y^2 + C_z^2) + \frac{C_\varphi^2}{2\mu r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + V(r) \\ = R(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta} \mid C_x, C_y, C_z, C_\varphi) . \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

r, ϑ nicht-zyklisch:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j}$$

$$q_j = r : -\mu \ddot{r} = -\frac{C_\varphi^2}{\mu r^3 \sin^2 \vartheta} - \mu r \dot{\vartheta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$q_j = \vartheta : -\mu r^2 \ddot{\vartheta} = -\frac{C_\varphi^2 \cos \vartheta}{\mu r^2 \sin^3 \vartheta}$$

X, Y, Z, φ zyklisch:

$$\dot{X} = \frac{\partial R}{\partial P_x} = \frac{\partial R}{\partial C_x} = \frac{C_x}{M},$$

$$\dot{Y} = \frac{\partial R}{\partial P_y} = \frac{\partial R}{\partial C_y} = \frac{C_y}{M},$$

$$\dot{Z} = \frac{\partial R}{\partial P_z} = \frac{\partial R}{\partial C_z} = \frac{C_z}{M},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial R}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial R}{\partial C_\varphi} = \frac{C_\varphi}{\mu r^2 \sin^2 \vartheta},$$

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial R}{\partial X} = 0; \quad \dot{P}_y = -\frac{\partial R}{\partial Y} = 0; \quad \dot{P}_z = -\frac{\partial R}{\partial Z} = 0,$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 2.2.3

1.

$$\mathbf{r} = (x, y) = \rho(\cos \varphi, \sin \varphi) = \rho \mathbf{e}_\rho \rightsquigarrow r = |\mathbf{r}| = \rho$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}(\cos \varphi, \sin \varphi) + \rho \dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi)^2 = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2).$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\left(\alpha + \frac{\beta}{r}\right)\mathbf{r} = -(\alpha\rho + \beta)\mathbf{e}_\rho \\ &\stackrel{!}{=} -\nabla V \stackrel{((1.388), \text{ Bd.1})}{=} -\left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) \\ &\simeq \frac{\partial V}{\partial \rho} = \alpha\rho + \beta; \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} \equiv 0 \\ &\simeq V(\rho) = \frac{1}{2}\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma. \end{aligned}$$

Die Konstante γ ist unbedeutend.

2. Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} \alpha \rho^2 - \beta \rho$$

Generalisierte Impulse:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi}.$$

3.

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{p_\rho}{m}; \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \\ &\simeq L^*(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right) - \frac{1}{2} \alpha \rho^2 - \beta \rho. \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion:

$$H = p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} - L^* = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{2} \alpha \rho^2 + \beta \rho.$$

Integrale der Bewegung:

- $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ und skleronome Zwangsbedingungen (Bewegung in der Ebene) \simeq

$$H = T + V = E = \text{const} \quad \underline{\text{Energieerhaltung}}.$$

- $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \simeq \varphi$: zyklisch \simeq

$$p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad \underline{\text{Drehimpulserhaltung}}.$$

Lösung zu Aufgabe 2.2.4

1. Wir haben in Aufgabe 1.2.5 die Lagrange-Funktion berechnet:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Die generalisierten Impulse lauten dann:

$$\begin{aligned} p_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}; \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \\ \Rightarrow H &= p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Dies ergibt die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + V_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

2. Hamilton'sche Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{V_0}{\rho}, \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \\ \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}; \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

3. Erhaltungssätze

φ, z sind zyklisch. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= m\rho^2\dot{\varphi} = \text{const} : \quad \text{Drehimpulssatz}, \\ p_z &= m\dot{z} = \text{const} : \quad \text{Impulssatz}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(q, t) = 0$. Daraus folgt:

$$H = E = \text{const} : \quad \text{Energiesatz}.$$

Lösung zu Aufgabe 2.2.5

1. Σ : ruhendes Koordinatensystem

Zwangsbedingungen:

$$1\text{-dim. Bewegung} \Rightarrow z = y = 0$$

$$q = x$$

Feder „entspannt“ für $x' = d$

kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

potentielle Energie:

$$V = \frac{k}{2} (x' - d)^2 = \frac{k}{2} (x - v_0 t - d)^2$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (x - v_0 t - d)^2$$

verallgemeinerter Impuls:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \\ \Rightarrow L^*(x, p_x, t) &= \frac{p_x^2}{2m} - \frac{k}{2} (x - v_0 t - d)^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} - L = \frac{p_x^2}{m} - L^* \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2} (x - v_0 t - d)^2 \end{aligned}$$

offensichtlich:

$$H = T + V = E$$

aber:

$$\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 ; \quad \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$$

$\Rightarrow H$ **keine** Erhaltungsgröße

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_x = m\ddot{x} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -k(x - v_0 t - d) \\ \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx &= k(v_0 t + d)\end{aligned}$$

2. \mathcal{L}' : mitbewegtes Koordinatensystem

$$\begin{aligned}x' &= x - v_0 t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}' = \dot{x} - v_0 \\ \Rightarrow \quad \bar{L}(x', \dot{x}') &= \frac{m}{2}(\dot{x}' + v_0)^2 - \frac{k}{2}(x' - d)^2 \\ \Rightarrow \quad p'_x &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}'} = m(\dot{x}' + v_0) \\ \Rightarrow \quad \bar{L}^*(x', p'_x) &= \frac{p'^2}{2m} - \frac{k}{2}(x' - d)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \bar{H} &= p'_x \dot{x}' - \bar{L}^*(x', p'_x) \\ &= p'_x \left(\frac{p'_x}{m} - v_0 \right) - \frac{p'^2}{2m} + \frac{k}{2}(x' - d)^2 \\ \Rightarrow \quad \bar{H} &= \frac{p'^2}{2m} - p'_x v_0 + \frac{k}{2}(x' - d)^2\end{aligned}$$

Umgekehrte Situation wie unter 1.:

$$\bar{H} \neq E = \frac{p'^2}{2m} + \frac{k}{2}(x' - d)^2$$

\bar{H} ist **nicht** die Gesamtenergie.

aber:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{H} : \quad \text{Integral der Bewegung}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial p'_x} = \frac{p'_x}{m} - v_0 \\ \Rightarrow p'_x &= m(\dot{x}' + v_0) \quad \Rightarrow \quad \dot{p}'_x = m\ddot{x}' \\ \dot{p}'_x &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x'} = -k(x' - d)\end{aligned}$$

Kombination:

$$m\ddot{x}' + kx' = kd$$

ungedämpfter harmonischer Oszillatator mit zeitunabhängiger äußerer Kraft!

Lösung zu Aufgabe 2.2.6

Das System besitzt holonom-skleronome Zwangsbedingungen und ist konservativ. Die Hamilton-Funktion ist damit mit der Gesamtenergie identisch und ein Integral der Bewegung:

$$H = T + V = E = \text{const.}$$

Die Kräfte sind konservativ:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= +k(x_2 - x_1) \mathbf{e}_x = -\nabla_1 V \\ \mathbf{F}_2 &= +k(x_3 - x_2) \mathbf{e}_x - k(x_2 - x_1) \mathbf{e}_x = -\nabla_2 V \\ \mathbf{F}_3 &= -k(x_3 - x_2) \mathbf{e}_x = -\nabla_3 V.\end{aligned}$$

Das führt zu der potentiellen Energie:

$$V = \frac{1}{2}k \left((x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right).$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2.$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k \left((x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right).$$

Generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \rightsquigarrow \dot{x}_1 = \frac{p_1}{m_1} \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \rightsquigarrow \dot{x}_2 = \frac{p_2}{m_2} \\ p_3 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_1 \dot{x}_3 \rightsquigarrow \dot{x}_3 = \frac{p_3}{m_1}. \end{aligned}$$

Impulse in die Lagrange-Funktion einsetzen:

$$L^*(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m_1} (p_1^2 + p_3^2) + \frac{1}{2m_2} p_2^2 - \frac{1}{2} k \left((x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right).$$

Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^3 p_j \dot{x}_j - L^*(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \\ &= \frac{1}{2m_1} (p_1^2 + p_3^2) + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + \frac{1}{2} k \left((x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right). \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

■

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1} \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2) \\ \rightsquigarrow \ddot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} \dot{p}_1 = -\frac{k}{m_1} (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

⇒

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1} (x_1 - x_2) = 0. \quad (1)$$

■

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2) \\ \rightsquigarrow \ddot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \dot{p}_2 = \frac{k}{m_2} (x_1 - 2x_2 + x_3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{k}{m_2}(-x_1 + 2x_2 - x_3) = 0 . \quad (2)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_3 + \frac{k}{m_1}(x_3 - x_2) = 0 . \quad (3)$$

Lösungsansatz:

$$x_i(t) = \alpha_i e^{i\omega t} \quad i = 1, 2, 3 .$$

Eingesetzt in (1), (2) und (3) ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem für die Koeffizienten α_i :

$$\begin{aligned} -\alpha_1 \omega^2 + \frac{k}{m_1}(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0 \\ -\alpha_2 \omega^2 + \frac{k}{m_2}(2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3) &= 0 \\ -\alpha_3 \omega^2 + \frac{k}{m_1}(\alpha_3 - \alpha_2) &= 0 . \end{aligned}$$

Eine nicht-triviale Lösung erfordert das Verschwinden der Säkulardeterminante:

$$\left| \begin{array}{ccc} -\omega^2 + \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} & 0 \\ -\frac{k}{m_2} & -\omega^2 + 2\frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} \\ 0 & -\frac{k}{m_1} & -\omega^2 + \frac{k}{m_1} \end{array} \right| \stackrel{!}{=} 0 .$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1} \right)^2 \left(-\omega^2 + 2\frac{k}{m_2} \right) - \frac{2k^2}{m_1 m_2} \left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1} \right) \stackrel{!}{=} 0 .$$

Die erste Lösung (*Eigenfrequenz*) kann direkt abgelesen werden:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} . \quad (4)$$

Die beiden anderen Lösungen ergeben sich aus

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1}\right) \left(-\omega^2 + 2\frac{k}{m_2}\right) - \frac{2k^2}{m_1 m_2} \stackrel{!}{=} 0 ,$$

d. h.

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{k}{m_1} + 2\frac{k}{m_2}\right) \stackrel{!}{=} 0 .$$

Die beiden anderen *Eigenfrequenzen* lauten damit:

$$\omega_2 = 0 \quad (5)$$

$$\omega_3 = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right)} . \quad (6)$$

Um die Amplituden α_i zu bekommen, setzen wir die Lösungen (4), (5), (6) in das homogene Gleichungssystem ein.

- $\omega = \omega_1$

Man findet unmittelbar:

$$\alpha_2 = 0 ; \quad \alpha_1 = -\alpha_3 .$$

Das mittlere Atom ist in Ruhe, die beiden äußeren schwingen mit gleicher Amplitude gegenphasig.

- $\omega = \omega_2$

Auch hier ist die Lösung einfach:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 .$$

Das entspricht einer einfachen Translation ohne Relativbewegung der drei Atome.

■ $\omega = \omega_3$

Es gilt

$$-\alpha_1 k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} \right) + \frac{k}{m_1} (\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \rightsquigarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1} \alpha_2 .$$

Die zweite Gleichung des homogenen Gleichungssystems lautet für $\omega = \omega_3$:

$$-\alpha_2 k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} \right) + \frac{k}{m_2} (2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3) = 0 \rightsquigarrow \alpha_1 = \alpha_3 .$$

Die beiden äußeren Atome schwingen mit gleicher Amplitude gleichphasig, das mittlere mit modifizierter Amplitude dazu gegenphasig.

Die allgemeine Schwingung ist dann eine Überlagerung der drei diskutierten Fundamentalschwingungen.

Lösung zu Aufgabe 2.2.7

Σ' : Inertialsystem; Achsen: x', y', z'

Σ : beschleunigtes (rotierendes) Nicht-Inertialsystem; Achsen: x, y, z

Rotation um $z = z'$ -Achse mit $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$

Bewegungsgleichung ((2.77), Bd. 1):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - \underbrace{m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})}_{\text{Corioliskraft}}$$

aufßerdem

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

Gibt es V_{tot} , aus dem auch die Scheinkräfte folgen? Wenn ja, wie sieht dies aus?

1. Zentrifugalkraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(z)} &= -m(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = -m \{ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2 \} \\ &= -m \{ \omega^2 z \mathbf{e}_z - \omega^2 \mathbf{r} \} \\ &= m\omega^2 (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y) \\ \Rightarrow \quad V^{(z)} &= -\frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Kontrolle:

$$\mathbf{F}^{(z)} = - \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) V^{(z)} = m\omega^2 (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)$$

2. Corioliskraft

$$\mathbf{F}^{(c)} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = 2m(\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega})$$

vergleiche Lorentz-Kraft:

$$\begin{aligned} 2m &\longleftrightarrow \hat{q} \quad \text{Ladung} \\ \boldsymbol{\omega} &\longleftrightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \end{aligned}$$

⇒ verallgemeinertes Potential gemäß (1.78):

$$V^{(c)} = -2m\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$$

mit:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} &\Rightarrow \mathbf{A} = \frac{\omega}{2}(-y, x, 0) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ \Rightarrow V^{(c)}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) &= -m(\dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \\ &= -m\omega(-\dot{x}y + \dot{y}x) \\ &= -m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned}$$

⇒ verallgemeinerte Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho) - V^{(z)} - V^{(c)} \\ &= T - V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + m\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned}$$

1. kartesisch

generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\omega y &\Rightarrow \dot{x} &= \frac{p_x}{m} + \omega y \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x &\Rightarrow \dot{y} &= \frac{p_y}{m} - \omega x \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} &\Rightarrow \dot{z} &= \frac{p_z}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^* &= \frac{m}{2} \left(\frac{p_x}{m} + \omega y \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{p_y}{m} - \omega x \right)^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \\
&\quad + m\omega \left(\frac{p_y x}{m} - \omega x^2 - \frac{p_x y}{m} - \omega y^2 \right) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \\
&= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + (p_x \omega y - p_y \omega x) + \frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \\
&\quad + \frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - m\omega^2 (x^2 + y^2) + \omega (p_y x - p_x y) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \\
L^* &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2})
\end{aligned}$$

Mit

$$\dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z = \frac{1}{m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \omega y p_x - \omega x p_y$$

ergibt sich dann für die Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \omega (x p_y - y p_x) + V(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + \omega y ; \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \omega p_y - \frac{\partial V}{\partial x} \\
\dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} - \omega x ; \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\omega p_x - \frac{\partial V}{\partial y} \\
\dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} ; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

z ist zyklisch, p_z damit eine Erhaltungsgröße!

2. zylindrisch

$$\begin{aligned}
x &= \rho \cos \varphi ; \quad y = \rho \sin \varphi ; \quad z = z \\
\Rightarrow \quad \dot{x} &= \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi ; \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \\
\Rightarrow \quad x \dot{y} - y \dot{x} &= \rho \dot{\rho} \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi \\
&\quad - \rho \dot{\rho} \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi \\
&= \rho^2 \dot{\varphi}
\end{aligned}$$

\Rightarrow Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho) + \frac{1}{2} m \omega^2 \rho^2 + m \omega \rho^2 \dot{\varphi}$$

generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned} p_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} + m\omega\rho^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \omega \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \end{aligned}$$

damit:

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{m}{2} \left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \left(\frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \omega \right)^2 + \frac{p_z^2}{m^2} \right) \\ &\quad - V(\rho) + \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2 + m\omega \rho^2 \left(\frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \omega \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) - \rho^2 \frac{p_\varphi \omega}{\rho^2} \\ &\quad + \frac{m}{2} \rho^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2 + \omega p_\varphi - m\omega^2 \rho^2 - V(\rho) \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) - V(\rho) \end{aligned}$$

außerdem:

$$p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} = \frac{1}{m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) - p_\varphi \omega$$

\Rightarrow

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) - \omega p_\varphi + V(\rho)$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m}; \quad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \omega; \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z$ und φ zyklisch

\Rightarrow 2 Erhaltungssätze:

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} + m\omega\rho^2 = \text{const} ; \quad p_z = m\dot{z} = \text{const} .$$

Lösung zu Aufgabe 2.2.8

Die Bewegung erfolgt in einer Ebene, z.B. der xy -Ebene, ohne weitere Zwangsbedingungen. Als generalisierte Koordinaten empfehlen sich deshalb ebene Polarkoordinaten r, φ :

$$x = r \cos \varphi ; \quad y = r \sin \varphi .$$

Das verallgemeinerte Potential U der nicht-konservativen Kraft F wurde in Aufgabe 1.2.21 bestimmt und führte dort zu der Lagrange-Funktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) .$$

Fasst man die geschwindigkeitsabhängigen Terme zu einer „verallgemeinerten“ kinetischen Energie T^* zusammen, so lässt sich auch schreiben:

$$\begin{aligned} L &= T^*(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) - V(r) \\ T^*(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2} \left(m - \frac{2\alpha}{rc^2}\right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 \\ V(r) &= \frac{\alpha}{r} . \end{aligned}$$

Generalisierte Impulse:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}} = \left(m - \frac{2\alpha}{rc^2}\right) \dot{r} \rightsquigarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m - \frac{2\alpha}{rc^2}} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \rightsquigarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \\ p_r \dot{r} &= \frac{p_r^2}{m - \frac{2\alpha}{rc^2}} ; \quad p_\varphi \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi^2}{mr^2} . \end{aligned}$$

Lagrange-Funktion als Funktion von Koordinaten und Impulsen:

$$\begin{aligned} L^*(r, \varphi, p_r, p_\varphi) &= \frac{1}{2} \left(m - \frac{2\alpha}{rc^2} \right) \left(\frac{p_r}{m - \frac{2\alpha}{rc^2}} \right)^2 + \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{p_\varphi}{mr^2} \right)^2 - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2(m - \frac{2\alpha}{rc^2})} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) &= p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L^*(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = T^*(r, \varphi, p_r, p_\varphi) + V(r) \\ &= \frac{p_r^2}{2(m - \frac{2\alpha}{rc^2})} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}. \end{aligned}$$

Abschnitt 2.4.6

Lösung zu Aufgabe 2.4.1

- Für beliebige Phasenfunktionen $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ gilt nach (2.114):

$$\{f, p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_j}.$$

Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} \{L_x, p_x\} &= \frac{\partial}{\partial x} (y p_z - z p_y) = 0, \\ \{L_x, p_y\} &= \frac{\partial}{\partial y} (y p_z - z p_y) = p_z, \\ \{L_x, p_z\} &= \frac{\partial}{\partial z} (y p_z - z p_y) = -p_y. \end{aligned}$$

Analog findet man die anderen Klammern:

$$\{L_i, p_j\} = \varepsilon_{ijl} p_l,$$

wobei $(i, j, l) = (x, y, z)$ und zyklisch, ε_{ijl} : total antisymmetrischer Einheitstensor.

2.

$$\begin{aligned}
 \{L_x, L_x\} &= \{L_y, L_y\} = \{L_z, L_z\} = 0, \\
 \{L_x, L_y\} &= \{y p_z - z p_y, z p_x - x p_z\} \\
 &= \{y p_z, z p_x\} - \underbrace{\{z p_y, z p_x\}}_{=0} - \underbrace{\{y p_z, x p_z\}}_{=0} + \{z p_y, x p_z\} \\
 &= y \{p_z, z\} p_x + x \{z, p_z\} p_y = -y p_x + x p_y \\
 &= L_z.
 \end{aligned}$$

Ganz analog ergeben sich die anderen Klammern:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijl} L_l,$$

wobei $(i, j, l) = (x, y, z)$ und zyklisch.

Lösung zu Aufgabe 2.4.2

1. Benutze Aufgabe 2.4.1, Teil 2:

$$\begin{aligned}
 \{L^2, L_x\} &= \{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x\} = \{L_y^2 + L_z^2, L_x\} \\
 &= L_y \{L_y, L_x\} + \{L_y, L_x\} L_y + L_z \{L_z, L_x\} + \{L_z, L_x\} L_z \\
 &= -L_y L_z - L_z L_y + L_z L_y + L_y L_z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

analog:

$$\{L^2, L_y\} = \{L^2, L_z\} = 0$$

2. Die Aussage folgt direkt aus dem Poisson'schen Satz. Als Beispiel sei der Fall untersucht, dass L_x und L_y Integrale der Bewegung sind. Wegen

$$\frac{\partial L_x}{\partial t} = \frac{\partial L_y}{\partial t} = 0$$

sind L_x und L_y Integrale der Bewegung, falls gilt:

$$\{H, L_x\} = \{H, L_y\} = 0$$

Jacobi-Identität:

$$\begin{aligned} 0 &= \{L_x, \{L_y, H\}\} + \{H, \{L_x, L_y\}\} + \{L_y, \{H, L_x\}\} \\ &= 0 + \{H, \{L_x, L_y\}\} + 0 \\ &= \{H, L_z\} \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} = 0$$

folgt, dass L_z auch Integral der Bewegung ist.

Lösung zu Aufgabe 2.4.3

1. Teilchen ohne Zwang im Zentraalfeld:

$$V(\mathbf{r}) = V(r) .$$

Kugelkoordinaten sind offensichtlich günstig. Die Hamilton-Funktion wurde bereits in (2.45) abgeleitet:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r) .$$

Für die Impulse gilt dabei (2.44):

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2 \dot{\vartheta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} . \end{aligned}$$

Man erkennt natürlich bereits hier, dass φ zyklisch ist, der zugehörige generalisierte Impuls also ein Integral der Bewegung.

2. Wegen

$$\begin{aligned}
 L_z &= xp_y - yp_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \\
 &= m(r \sin \vartheta \cos \varphi (\dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r\dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \cos \varphi) \\
 &\quad - r \sin \vartheta \sin \varphi (\dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r\dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - r \sin \vartheta \dot{\varphi} \sin \varphi)) \\
 &= m(r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \sin^2 \varphi) \\
 &= mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

ist

$$p_\varphi = L_z .$$

Poisson-Klammer:

$$\{H, L_z\} = \{H, p_\varphi\} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

L_z ist nicht explizit zeitabhängig: $\partial L_z / \partial t = 0$. Gemäß (2.121) ist L_z damit ein Integral der Bewegung!

Lösung zu Aufgabe 2.4.4

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial p_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q_j} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^s \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial g}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial t} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial t} \right) \right] \\
 &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} .
 \end{aligned}$$

2. Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \\
 &= -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (\text{Jacobi-Identität}) \\
 &= \left\{ f, \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \left\{ \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} \\
 &= \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} + \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\}.
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \{f, gh\} &= \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j}(gh) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j}(gh) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^s \left(h \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} + g \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - g \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_j} - h \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) \\
 &= h \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) + g \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial h}{\partial q_j} \right) \\
 &= h \{f, g\} + g \{f, h\}.
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.4.5

1. Für eine beliebige Phasenfunktion $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ gilt ((2.113), (2.114)):

$$\begin{aligned}
 \{f, p_j\} &= \frac{\partial f}{\partial q_j} \\
 \{f, q_j\} &= -\frac{\partial f}{\partial p_j}
 \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ und $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist dann:

$$\begin{aligned}
 L_i &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j p_k \\
 \{L_i, A_m\} &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \{x_j p_k, A_m\} \\
 &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} (x_j \{p_k, A_m\} + \{x_j, A_m\} p_k)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial A_m}{\partial p_j} p_k - x_j \frac{\partial A_m}{\partial x_k} \right)$$

2. Speziell für x_m ist dann:

$$\begin{aligned} \{L_i, x_m\} &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_m}{\partial p_j} p_k - x_j \frac{\partial x_m}{\partial x_k} \right) = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} (-x_j \delta_{mk}) \\ &= \sum_j \varepsilon_{imj} x_j \end{aligned}$$

3. Analog:

$$\begin{aligned} \{L_i, p_m\} &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \delta_{mj} p_k \\ &= \sum_k \varepsilon_{imk} p_k \end{aligned}$$

4. Für die Drehimpulskomponenten ist nach der Formel aus Teil 1.:

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} \left(\frac{\partial L_j}{\partial p_k} p_l - x_k \frac{\partial L_j}{\partial x_l} \right)$$

Mit Einsetzen von

$$\begin{aligned} L_j &= \sum_{mn} \varepsilon_{jmn} x_m p_n \\ \frac{\partial L_j}{\partial p_k} &= \sum_{mn} \varepsilon_{jmn} x_m \delta_{nk} = \sum_m \varepsilon_{jm} x_m = - \sum_m \varepsilon_{jkm} x_m \\ \frac{\partial L_j}{\partial x_l} &= \sum_{mn} \varepsilon_{jmn} \delta_{ml} p_n = \sum_m \varepsilon_{jlm} p_m \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\{L_i, L_j\} = - \sum_{klm} \varepsilon_{ikl} (\varepsilon_{jkm} x_m p_l + \varepsilon_{jlm} x_k p_m)$$

Mit

$$\begin{aligned} \sum_k \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jkm} &= \delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj} \\ \sum_l \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jlm} &= -\delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kj} \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\{L_i, L_j\} &= -\delta_{ij} \sum_l x_l p_l + x_i p_j + \delta_{ij} \sum_k x_k p_k - x_j p_i \\ &= x_i p_j - x_j p_i \\ &= \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k\end{aligned}$$

5. Mit

$$\mathbf{A}^2 = \sum_m A_m^2$$

ist:

$$\{L_i, \mathbf{A}^2\} = 2 \sum_{jkm} \varepsilon_{ijk} A_m \left(\frac{\partial A_m}{\partial p_j} p_k - x_j \frac{\partial A_m}{\partial x_k} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 2.4.6

- Das Zwei-Teilchensystem besitzt sechs Freiheitsgrade und wird deshalb durch sechs kartesische Koordinaten ($x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3}; \alpha = 1, 2$) und die sechs zugehörigen Impulse ($p_{\alpha 1}, p_{\alpha 2}, p_{\alpha 3}; \alpha = 1, 2$) beschrieben. Für die Drehimpulse gilt:

$$\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) \quad \alpha = 1, 2.$$

Dann lautet die Poisson-Klammer:

$$\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2\} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{L}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1)}{\partial x_{\alpha j}} \frac{\partial \mathbf{L}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2)}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial \mathbf{L}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1)}{\partial p_{\alpha j}} \frac{\partial \mathbf{L}_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2)}{\partial x_{\alpha j}} \right).$$

Für jedes $\alpha = 1, 2$ ist in den beiden Produkten innerhalb der Klammer ein Faktor gleich null, da nach den falschen Koordinaten abgeleitet wird. Daraus folgt die Behauptung!

- Wir benutzen das Ergebnis aus Aufgabe 2.4.1 und das aus Teil 1.:

$$\begin{aligned}\{L_{11}, \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2\} &= \sum_j \{L_{11}, L_{1j} L_{2j}\} = \sum_j \{L_{11}, L_{1j}\} L_{2j} \\ &= \sum_{jk} \varepsilon_{1jk} L_{1k} L_{2j} = \sum_{jk} \varepsilon_{1jk} L_{2j} L_{1k} \\ &= (\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_1)_1 = -(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2)_1.\end{aligned}$$

Das gilt so analog für die beiden anderen Komponenten. Damit folgt die Behauptung:

$$\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2\} = -(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2).$$

3. Beweis durch vollständige Induktion mit dem Ergebnis aus Teil 2. als Induktionsanfang. Die Behauptung sei richtig für $n = k$. Wir schließen auf $k + 1$:

$$\begin{aligned}\left\{\mathbf{L}_1, (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)^{k+1}\right\} &= \left\{\mathbf{L}_1, (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)^k\right\} (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2) \\ &\quad + (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)^k \{\mathbf{L}_1, (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)\} \\ &= -k (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)^{k-1} (\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2) \\ &\quad - (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)^k (\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2) \\ &= -(k+1) (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2)^k (\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2).\end{aligned}$$

Das beweist die Behauptung!

Lösung zu Aufgabe 2.4.7

1. Die Bewegungsgleichung für die Observable f ist:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Mit

$$f \text{ Integral der Bewegung} \Leftrightarrow \{f, H\} = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

und

$$H \text{ Integral der Bewegung} \Leftrightarrow \{H, H\} = -\frac{\partial H}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

ist dann:

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, H\right\} &= \frac{\partial}{\partial t} \{f, H\} - \left\{f, \frac{\partial H}{\partial t}\right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \text{ Integral der Bewegung}\end{aligned}$$

2.

$$H = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H \quad \text{Integral der Bewegung}$$

$$\begin{aligned} \{f, H\} &= \left\{ q - \frac{pt}{m}, \frac{p^2}{2m} \right\} = \left\{ q, \frac{p^2}{2m} \right\} - \left\{ \frac{pt}{m}, \frac{p^2}{2m} \right\} \\ &= \frac{1}{2m} \{q, p^2\} - \frac{t}{2m^2} \{p, p^2\} \\ &= \frac{1}{2m} \left(p \underbrace{\{q, p\}}_{=1} + \underbrace{\{q, p\} p}_{=1} \right) - \frac{t}{2m^2} \left(p \underbrace{\{p, p\}}_{=0} + \underbrace{\{p, p\} p}_{=0} \right) \\ &= \frac{p}{m} = -\frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

f ist also Integral der Bewegung (obwohl explizit zeitabhängig). Also sollte auch $\partial f / \partial t$ Integral der Bewegung sein:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, H \right\} = \left\{ -\frac{p}{m}, \frac{p^2}{2m} \right\} = -\frac{1}{2m^2} \underbrace{\{p, p^2\}}_{=0} = 0 = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Damit ist $\partial f / \partial t$ Integral der Bewegung.

Lösung zu Aufgabe 2.4.8

Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 .$$

Unter Ausnutzung der Linearität der Poisson-Klammer berechnet man:

$$\begin{aligned} \{H, f\} &= \left\{ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2, p \sin \omega t - m \omega q \cos \omega t \right\} \\ &= \left\{ \frac{p^2}{2m}, p \sin \omega t \right\} - \left\{ \frac{p^2}{2m}, m \omega q \cos \omega t \right\} + \left\{ \frac{1}{2} m \omega^2 q^2, p \sin \omega t \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2} m \omega^2 q^2, m \omega q \cos \omega t \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2m} \sin \omega t \{p^2, p\} - \frac{1}{2} \omega \cos \omega t \{p^2, q\} + \frac{1}{2} m \omega^2 \sin \omega t \{q^2, p\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} m^2 \omega^3 \cos \omega t \{q^2, q\} .
 \end{aligned}$$

Fundamentalklammern (2.108)–(2.110) und Produktregel (2.118):

$$\begin{aligned}
 \{p^2, p\} &= p \underbrace{\{p, p\}}_0 + \underbrace{\{p, p\} p}_0 = 0 \\
 \{p^2, q\} &= p \underbrace{\{p, q\}}_{-1} + \underbrace{\{p, q\} p}_{-1} = -2p \\
 \{q^2, p\} &= q \underbrace{\{q, p\}}_{+1} + \underbrace{\{q, p\} q}_{+1} = 2q \\
 \{q^2, q\} &= q \underbrace{\{q, q\}}_0 + \underbrace{\{q, q\} q}_0 = 0 .
 \end{aligned}$$

Damit bleibt:

$$\{H, f\} = \omega \cos \omega t \cdot p + m \omega^2 \sin \omega t \cdot q$$

Andererseits gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = p \omega \cos \omega t + m \omega^2 q \sin \omega t \Rightarrow \{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0$$

$f(q, p, t)$ ist also ein *Integral der Bewegung!*

Wir bestätigen diese Aussage durch direkte Berechnung der totalen Zeitableitung von f , wobei wir an passender Stelle die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ausnutzen:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dt} &= \dot{p} \sin \omega t + p \omega \cos \omega t - m \omega \dot{q} \cos \omega t + m \omega^2 q \sin \omega t \\
 &= \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) \sin \omega t + p \omega \cos \omega t - m \omega \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \cos \omega t + m \omega^2 q \sin \omega t \\
 &= -m \omega^2 q \sin \omega t + p \omega \cos \omega t - p \omega \cos \omega t + m \omega^2 q \sin \omega t \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.4.9

Taylor-Entwicklung:

$$A(t) = A(0) + \frac{1}{1!} \dot{A}(0) t + \frac{1}{2!} \ddot{A}(0) t^2 + \dots$$

Wegen

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

gilt:

$$\dot{A}(0) = \{A(0), H\} .$$

Wegen

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

ist zudem

$$\frac{\partial}{\partial t} \{A(0), H\} = 0 .$$

Dies bedeutet

$$\ddot{A}(0) = \{\{A(0), H\}, H\} .$$

Das lässt sich so fortsetzen und führt zu:

$$A(t) = A(0) + \frac{1}{1!} \{A(0), H\} t + \frac{1}{2!} \{\{A(0), H\}, H\} t^2 + \dots$$

Abschnitt 2.5.6

Lösung zu Aufgabe 2.5.1

1.

$$dF_4 = (\bar{H} - H) dt + \sum_{j=1}^S (p_j dq_j - dp_j q_j - p_j dq_j + d\bar{p}_j \bar{q}_j) .$$

Daran liest man ab:

$$\frac{\partial F_4}{\partial t} = \bar{H} - H ; \quad \frac{\partial F_4}{\partial p_j} = -q_j ; \quad \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} = \bar{q}_j .$$

Man löst nun

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} = q_j(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t)$$

nach \bar{p}_j auf und erhält damit den ersten Teil der Transformation:

$$\bar{p}_j = \bar{p}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) .$$

In die zweite Beziehung

$$\bar{q}_j = \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} = \bar{q}_j(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t)$$

setzen wir das so gewonnene $\bar{\mathbf{p}}$ ein:

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) .$$

Für die *neue* Hamilton-Funktion finden wir:

$$\bar{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) = H(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), t) + \frac{\partial}{\partial t} F_4(\mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), \bar{\mathbf{p}}, t) .$$

2. Im modifizierten Hamilton'schen Prinzip

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_j (\dot{p}_j q_j + p_j \dot{q}_j - \dot{p}_j \bar{q}_j) - \bar{H} \right] \\ &\quad + \delta \{ F_4(\bar{\mathbf{p}}(t_2), \mathbf{p}(t_2), t_2) - F_4(\bar{\mathbf{p}}(t_1), \mathbf{p}(t_1), t_1) \} , \end{aligned}$$

ist zu beachten, dass $\bar{p}(t_{1,2})$ und $p(t_{1,2})$ nicht fest sind. Es gilt vielmehr:

$$\delta \{F_4(\bar{p}(t_2), p(t_2), t_2) - F_4(\bar{p}(t_1), p(t_1), t_1)\} = \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} \delta \bar{p}_j \right) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Damit bleibt:

$$0 \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^S \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} \delta \bar{p}_j \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^S \left(\delta \dot{p}_j q_j + \dot{p}_j \delta q_j + \delta p_j \dot{q}_j + p_j \delta \dot{q}_j - \delta \dot{\bar{p}}_j \bar{q}_j - \dot{\bar{p}}_j \delta \bar{q}_j - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_j} \delta \bar{q}_j - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j} \delta \bar{p}_j \right).$$

Wir führen einige partielle Integrationen durch:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt q_j \delta \dot{p}_j = q_j \delta p_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{q}_j \delta p_j, \\ \int_{t_1}^{t_2} dt p_j \delta \dot{q}_j = \underbrace{p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{p}_j \delta q_j, \\ \int_{t_1}^{t_2} dt \bar{q}_j \delta \dot{\bar{p}}_j = \bar{q}_j \delta \bar{p}_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\bar{q}}_j \delta \bar{p}_j.$$

Dies ergibt:

$$0 \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^S \left[\underbrace{\left(\frac{\partial F_4}{\partial p_j} + q_j \right) \delta p_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial F_4}{\partial \bar{p}_j} - \bar{q}_j \right) \delta \bar{p}_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} \right] \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^S \left[(-\dot{q}_j + \dot{q}_j) \delta p_j + (\dot{p}_j - \dot{p}_j) \delta q_j + \left(\dot{\bar{q}}_j - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j} \right) \delta \bar{p}_j - \left(\dot{\bar{p}}_j + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_j} \right) \delta \bar{q}_j \right].$$

Da $\delta \bar{p}_j, \delta \bar{q}_j$ unabhängig sind, folgt schließlich:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_j}; \quad \dot{\bar{p}}_j = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_j}.$$

Lösung zu Aufgabe 2.5.2

Nach (2.203) müsste dann

$$\{L_i, L_j\} = 0$$

gelten. In Aufgabe 2.4.1, Teil 2) haben wir aber gezeigt:

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijl} L_l .$$

Dies bedeutet speziell:

$$\{L_x, L_y\} = L_z .$$

L_x und L_y können also nicht gleichzeitig als kanonische Impulse auftreten.

Lösung zu Aufgabe 2.5.3

Trivialeweise sind $\{\bar{q}, \bar{q}\} = \{\bar{p}, \bar{p}\} = 0$. Wir haben also noch

$$\{\bar{q}, \bar{p}\}_{q, p} = 1$$

nachzuweisen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{q}}{\partial q} &= \frac{q}{\sin p} \left(-\frac{\sin p}{q^2} \right) = -\frac{1}{q} , \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} &= \frac{q}{\sin p} \left(\frac{\cos p}{q} \right) = \cot p , \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} &= \cot p , \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} &= -\frac{q}{\sin^2 p} .\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\{\bar{q}, \bar{p}\} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = \frac{1}{\sin^2 p} - \cot^2 p = \frac{1 - \cos^2 p}{\sin^2 p} = 1 .$$

Lösung zu Aufgabe 2.5.4

1. Wir zeigen

$$\{\bar{q}, \bar{p}\} = 1 .$$

Dazu benötigen wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} &= \frac{\frac{1}{2} q^{-1/2} \cos p}{1 + q^{1/2} \cos p} [2(1 + q^{1/2} \cos p) q^{1/2} \cos p - 2q^{1/2} \sin p q^{1/2} \sin p] \\ &= \frac{\frac{1}{2} q^{-1/2} \cos p}{1 + q^{1/2} \cos p} [2q^{1/2} \cos p + 2q(\cos^2 p - \sin^2 p)] \\ &= \cos^2 p - \sin^2 p \frac{q^{1/2} \cos p}{1 + q^{1/2} \cos p}, \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} &= \frac{-q^{1/2} \sin p}{1 + q^{1/2} \cos p} [(1 + q^{1/2} \cos p) q^{-1/2} \sin p + q^{-1/2} \cos p q^{1/2} \sin p] \\ &= -\sin^2 p - \sin^2 p \frac{q^{1/2} \cos p}{1 + q^{1/2} \cos p}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial q} \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} = \cos^2 p + \sin^2 p = 1 .$$

Die Transformation ist also kanonisch!

2. Wenn $F_3(p, \bar{q})$ die Erzeugende ist, dann muss

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}; \quad \bar{p} = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}}$$

gelten. Das überprüfen wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial p} &= -(\mathrm{e}^{\bar{q}} - 1)^2 \frac{1}{\cos^2 p} \stackrel{!}{=} -q \\ \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\bar{q}} &= 1 + q^{1/2} \cos p \Leftrightarrow \bar{q} = \ln(1 + q^{1/2} \cos p) \quad \text{q. e. d.} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \bar{q}} &= -2(\mathrm{e}^{\bar{q}} - 1) \mathrm{e}^{\bar{q}} \tan p = -2(1 + q^{1/2} \cos p - 1)(1 + q^{1/2} \cos p) \tan p \\ &= -2q^{1/2} \sin p (1 + q^{1/2} \cos p) \stackrel{!}{=} -\bar{p} \\ \Leftrightarrow \bar{p} &= 2q^{1/2} \sin p (1 + q^{1/2} \cos p) \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.5.5

1. Wir überprüfen die fundamentalen Poisson-Klammern. Die Klammern

$$\{\hat{q}, \hat{q}\}_{q,p} = \{\hat{p}, \hat{p}\}_{q,p} = 0$$

sind trivial. Mit

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für} \quad |x| < 1$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}}{\partial q} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}}} \left(\frac{1}{\sqrt{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}} - \frac{\frac{1}{2}q \cdot 2q}{\left(q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}\right)^{3/2}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \left(1 - \frac{q^2}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \right) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \frac{\frac{p^2}{\alpha^2}}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{p^2}{\alpha^2}}}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}}{\partial p} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}}} \frac{-\frac{1}{2}q \frac{2p}{\alpha^2}}{\left(q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}\right)^{3/2}} \\ &= -\sqrt{\frac{\alpha^2}{p^2}} \frac{qp}{\alpha^2 q^2 + p^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial q} = \alpha q$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial p} = \frac{p}{\alpha} .$$

Damit ist die Poisson-Klammer:

$$\begin{aligned}\{\hat{q}, \hat{p}\}_{q,p} &= \frac{\partial \hat{q}}{\partial q} \frac{\partial \hat{p}}{\partial p} - \frac{\partial \hat{q}}{\partial p} \frac{\partial \hat{p}}{\partial q} = \frac{\frac{p^2}{\alpha^2}}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} + \frac{\alpha}{p} \frac{pq}{\alpha^2 q^2 + p^2} \alpha q \\ &= \frac{1}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \left(\frac{p^2}{\alpha^2} + q^2 \right) = 1.\end{aligned}$$

2. Es gilt:

$$\begin{aligned}p &= \frac{\partial F}{\partial q} = \alpha q \cot \hat{q} \\ \hat{p} &= -\frac{\partial F}{\partial \hat{q}} = \frac{1}{2} \alpha q^2 \frac{1}{\sin^2 \hat{q}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{1}{2} \alpha q^2 \frac{1}{\sin^2 \hat{q}} = \frac{1}{2} \alpha q^2 \left(1 + \cot^2 \hat{q} \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha q^2 \left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2} \right)\end{aligned}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned}\sin^2 \hat{q} &= \frac{1}{2} \alpha q^2 \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\alpha q^2}{\alpha q^2 + \frac{p^2}{\alpha}} = \frac{q^2}{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}} \\ \Rightarrow \quad \hat{q} &= \hat{q}(p, q) = \arcsin \frac{q}{\sqrt{q^2 + \frac{p^2}{\alpha^2}}}.\end{aligned}$$

Die Transformation ist genau die aus Teil 1.

Lösung zu Aufgabe 2.5.6

1.

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = \sqrt{m k} \frac{\bar{q}}{\bar{q}^2}, \\ \bar{p} &= -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = \frac{\sqrt{m k}}{q} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{m k}}{\bar{p}}, \\ p &= \sqrt{m k} \bar{q} \frac{\bar{p}^2}{m k} = \frac{1}{\sqrt{m k}} \bar{q} \bar{p}^2. \end{aligned}$$

2. Wegen $\partial F_1 / \partial t = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{H}(\bar{q}, \bar{p}) &= H(q(\bar{q}, \bar{p}), p(\bar{q}, \bar{p})) = \frac{1}{2m} \frac{1}{m k} \bar{q}^2 \bar{p}^4 \frac{(m k)^2}{\bar{p}^4} + \frac{1}{2} k \frac{\bar{p}^2}{m k} \\ &\Rightarrow \overline{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \bar{q}^2, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \end{aligned}$$

3. \overline{H} ist nach 2. die Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators. Die Lösung ist deshalb bekannt.

Lösung zu Aufgabe 2.5.7

1. Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial q} = 2\alpha q \hat{p}^3 \\ \hat{q} &= \frac{\partial F_2}{\partial \hat{p}} = 3\alpha q^2 \hat{p}^2 \\ \Rightarrow \hat{p} &= \left(\frac{p}{2\alpha q} \right)^{1/3} \\ \hat{q} &= 3 \left(\frac{1}{4} \alpha q^4 p^2 \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

2. Die fundamentalen Poisson-Klammern sind zu überprüfen. Die Klammern

$$\{\hat{q}, \hat{q}\}_{q,p} = 0, \quad \{\hat{p}, \hat{p}\}_{q,p} = 0$$

sind trivial erfüllt. Es bleibt zu zeigen:

$$\{\hat{q}, \hat{p}\}_{q,p} = 1.$$

Mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{q}}{\partial q} &= 4 \left(\frac{1}{4} \alpha p^2 \right)^{1/3} q^{1/3} & \frac{\partial \hat{q}}{\partial p} &= 2 \left(\frac{1}{4} \alpha q^4 \right)^{1/3} p^{-1/3} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial q} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{p}{2\alpha} \right)^{1/3} q^{-4/3} & \frac{\partial \hat{p}}{\partial p} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\alpha q} \right)^{1/3} p^{-2/3}\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\{\hat{q}, \hat{p}\}_{q,p} &= \frac{\partial \hat{q}}{\partial q} \frac{\partial \hat{p}}{\partial p} - \frac{\partial \hat{q}}{\partial p} \frac{\partial \hat{p}}{\partial q} = 4 \left(\frac{\alpha p^2}{4} \right)^{1/3} q^{1/3} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\alpha q} \right)^{1/3} p^{-2/3} \\ &\quad + 2 \left(\frac{\alpha q^4}{4} \right)^{1/3} p^{-1/3} \frac{1}{3} \left(\frac{p}{2\alpha} \right)^{1/3} q^{-4/3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1\end{aligned}$$

und damit die Kanonizität der Transformation.

3. Die neue Hamiltonfunktion ergibt sich aus der alten durch:

$$\widehat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = H(q(\hat{q}, \hat{p}), p(\hat{q}, \hat{p})) + \frac{\partial F_2(q(\hat{q}, \hat{p}), \hat{p}, t)}{\partial t}.$$

Mit

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

und

$$\hat{q}\hat{p} = 3 \left(\frac{1}{4} \alpha q^4 p^2 \right)^{1/3} \left(\frac{p}{2\alpha q} \right)^{1/3} = \frac{3}{2} qp$$

folgt:

$$\widehat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{3}{2} \beta q(\hat{q}, \hat{p}) p(\hat{q}, \hat{p}) = \beta \hat{q}\hat{p}.$$

4. Damit sind die neuen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\hat{q}} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}} = \beta \hat{q} \quad \dot{\hat{p}} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}} = -\beta \hat{p}.$$

Lösung zu Aufgabe 2.5.8

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{q}}{\partial q} \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} &= \alpha q^{\alpha-1} \cos(\beta p) \beta q^\alpha \cos(\beta p) = \alpha \beta q^{2\alpha-1} \cos^2(\beta p), \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} &= -\beta q^\alpha \sin(\beta p) \alpha q^{\alpha-1} \sin(\beta p) = -\alpha \beta q^{2\alpha-1} \sin^2(\beta p),\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\{\bar{q}, \bar{p}\} = \alpha \beta q^{2\alpha-1} \stackrel{!}{=} 1.$$

Die Transformation ist nur für $\alpha = 1/2$ und $\beta = 2$ kanonisch.

Lösung zu Aufgabe 2.5.9

- Da die fundamentalen Poisson-Klammern $\{\bar{q}, \bar{q}\} = 0$ und $\{\bar{p}, \bar{p}\} = 0$ trivialerweise erfüllt sind, bleibt zu untersuchen:

$$\begin{aligned}\{\bar{q}, \bar{p}\} &= \{q^k p^l, q^m p^n\} = q^k \{p^l, q^m\} p^n + q^m \{q^k, p^n\} p^l \\ &= q^k \left(0 - \frac{\partial p^l}{\partial p} \frac{\partial q^m}{\partial q}\right) p^n + q^m \left(\frac{\partial q^k}{\partial q} \frac{\partial p^n}{\partial p} + 0\right) p^l \\ &= q^k (-lmp^{l-1} q^{m-1}) p^n + q^m (knq^{k-1} p^{n-1}) p^l \\ &= (kn - lm) q^{k+m-1} p^{l+n-1} \\ &\stackrel{!}{=} 1.\end{aligned}$$

Wir müssen also fordern:

$$k + m = 1; \quad l + n = 1; \quad kn - lm = 1.$$

Für jedes beliebige m ist damit die Transformation kanonisch, wenn gilt:

$$\begin{aligned}k &= 1 - m; \quad l = -m; \quad n = 1 + m \\ \bar{q} &= q^{1-m} p^{-m}; \quad \bar{p} = q^m p^{1+m}.\end{aligned}$$

- Für $m = 0$ bleibt $\bar{q} = q$ und $\bar{p} = p$. Es handelt sich dann also um die identische Transformation!
- Für die Erzeugende $F_1 = F_1(q, \bar{q})$ gilt nach (2.151):

$$p = p(q, \bar{q}) = \frac{\partial F_1}{\partial q}; \quad \bar{p} = \bar{p}(q, \bar{q}) = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}}.$$

Aus Teil 1) entnimmt man:

$$p(q, \bar{q}) = \bar{q}^{-\frac{1}{m}} q^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{\bar{q}} \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^{\frac{1}{m}} ; \quad \bar{p}(q, \bar{q}) = q^m \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^{\frac{1+m}{m}} \frac{1}{q^{1+m}} = \frac{1}{\bar{q}} \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^{\frac{1}{m}}$$

Damit ist:

$$F_1(q, \bar{q}) = m \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^{\frac{1}{m}} + f(\bar{q}) \sim \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = -\frac{1}{\bar{q}} \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{df}{d\bar{q}} .$$

Der Vergleich mit \bar{p} zeigt, dass f nur gleich einer unbedeutenden Konstanten sein kann. Die gesuchte Erzeugende ist also:

$$F_1(q, \bar{q}) = m \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^{\frac{1}{m}} .$$

4. Ähnliche Überlegungen wie in Teil 3) nun für eine Erzeugende vom Typ $F_2(q, \bar{p})$ mit (2.161):

$$p = p(q, \bar{p}) = \frac{\partial F_2}{\partial q} ; \quad \bar{q} = \bar{q}(q, \bar{p}) = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}} .$$

Mit Teil 1) ergibt sich:

$$p(q, \bar{p}) = \bar{p}^{\frac{1}{1+m}} q^{-\frac{m}{1+m}} ; \quad \bar{q}(q, \bar{p}) = q^{1-m} \bar{p}^{-\frac{m}{1+m}} q^{\frac{m^2}{1+m}} = q^{\frac{1}{1+m}} \bar{p}^{-\frac{m}{1+m}} .$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$F_2(q, \bar{p}) = (1+m) \bar{p}^{\frac{1}{1+m}} q^{\frac{1}{1+m}} + g(\bar{p}) \sim \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}} = q^{\frac{1}{1+m}} \bar{p}^{-\frac{m}{1+m}} + \frac{dg}{d\bar{p}}$$

Der Vergleich mit der zweiten Gleichung besagt dann, dass auch $g(\bar{p})$ nur eine unbedeutende Konstante sein kann. Es bleibt somit:

$$F_2(q, \bar{p}) = (1+m) (\bar{p} q)^{\frac{1}{1+m}}$$

Lösung zu Aufgabe 2.5.10

1. Mit

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

genügt \mathbf{A} der Coulomb-Eichung. Ferner ergibt sich aus \mathbf{A} das korrekte Magnetfeld:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{2} B \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} B (\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z) = (0, 0, B).$$

2. Allgemein lautet die Lagrange-Funktion für ein Teilchen der Ladung \hat{q} im elektromagnetischen Feld mit elektrischem Potential $\varphi(\mathbf{q})$ und Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ (1.78):

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + \hat{q} (\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{q})).$$

Damit unterscheiden sich die generalisierten Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = m \dot{q}_j + \hat{q} A_j(\mathbf{q})$$

von den Komponenten des mechanischen Impulses:

$$\mathbf{p}_{\text{mech}} = m \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} - \hat{q} \mathbf{A}(\mathbf{q}).$$

Mit

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p}_{\text{mech}}}{m} = \frac{1}{m} (\mathbf{p} - \hat{q} \mathbf{A}(\mathbf{q}))$$

ergibt sich für die Hamilton-Funktion im allgemeinen Fall:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \\ &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 - \hat{q} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \hat{q} \varphi \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - \hat{q} \mathbf{A}) - \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \hat{q} \mathbf{A})^2 - \frac{1}{m} \hat{q} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{p} - \hat{q} \mathbf{A}) + \hat{q} \varphi \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - \hat{q} \mathbf{A}(\mathbf{q}))^2 + \hat{q} \varphi(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Hier gilt speziell:

$$\begin{aligned}\hat{q} &= -e \\ \varphi(\mathbf{q}) &\equiv 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{q}) &= (-q_2, q_1, 0)\end{aligned}$$

Damit ist die Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned}H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left(p_1 - \frac{1}{2}eBq_2 \right)^2 + \left(p_2 + \frac{1}{2}eBq_1 \right)^2 + p_3^2 \right] \\ &= \frac{p_3^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left[\left(p_1 - \frac{1}{2}m\omega_c q_2 \right)^2 + \left(p_2 + \frac{1}{2}m\omega_c q_1 \right)^2 \right] \\ &= \frac{p_3^2}{2m} + H_0.\end{aligned}$$

3. Allgemein gilt

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \quad \text{und} \quad \hat{p}_j = -\frac{\partial F_1}{\partial \hat{q}_j}.$$

Hier ergibt sich:

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = m\omega_c \left(\hat{q}_1 - \frac{1}{2}q_2 \right) \\ p_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial q_2} = m\omega_c \left(\hat{q}_2 - \frac{1}{2}q_1 \right) \\ \hat{p}_1 &= -\frac{\partial F_1}{\partial \hat{q}_1} = -m\omega_c (q_1 - \hat{q}_2) \\ \hat{p}_2 &= -\frac{\partial F_1}{\partial \hat{q}_2} = -m\omega_c (q_2 - \hat{q}_1).\end{aligned}$$

Damit erhält man den ersten Satz von Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}\hat{q}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{m\omega_c} p_1 + \frac{1}{2}q_2 \\ \hat{q}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{m\omega_c} p_2 + \frac{1}{2}q_1 \\ \hat{p}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= p_2 - \frac{1}{2}m\omega_c q_1 \\ \hat{p}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= p_1 - \frac{1}{2}m\omega_c q_2.\end{aligned}$$

Durch Umkehrung ergibt sich:

$$\begin{aligned} q_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) &= \hat{q}_2 - \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 \\ q_2(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) &= \hat{q}_1 - \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_2 \\ p_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) &= \frac{1}{2} m\omega_c \hat{q}_1 + \frac{1}{2} \hat{p}_2 \\ p_2(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) &= \frac{1}{2} m\omega_c \hat{q}_2 + \frac{1}{2} \hat{p}_1 . \end{aligned}$$

4. Mit obigen Transformationsformeln ergibt sich:

$$p_1 - \frac{1}{2} m\omega_c q_2 = \hat{p}_2$$

und

$$p_2 + \frac{1}{2} m\omega_c q_1 = m\omega_c \hat{q}_2 .$$

Damit ist die transformierte Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) &= H_0(\mathbf{q}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}), \mathbf{p}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})) \\ &= \frac{1}{2m} (\hat{p}_2^2 + m^2 \omega_c^2 \hat{q}_2^2) \\ &= \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_c^2 \hat{q}_2^2 \end{aligned}$$

formal identisch mit der des harmonischen Oszillators, dessen Bewegungsgleichungen bekannt sind:

$$\hat{q}_2(t), \quad \hat{p}_2(t) .$$

Ferner sind \hat{q}_1 und \hat{p}_1 zyklisch und damit beide Konstanten der Bewegung:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial \hat{p}_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{q}_1 = \text{const} \\ \dot{\hat{p}}_1 &= -\frac{\partial H_0}{\partial \hat{q}_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \text{const} . \end{aligned}$$

Mittels der Transformationsformeln aus 3. folgen dann mit den entsprechenden Anfangsbedingungen die Bewegungsgleichungen für die „alten“ Variablen.

5. Es gilt:

$$p_j = \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{p}})}{\partial q_j} \quad \hat{q}_j = \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{p}})}{\partial \hat{p}_j} .$$

Mittels der Transformationsformeln aus 3. können die p_j und \hat{q}_j als Funktionen der q_j und \hat{p}_j ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}m\omega_c q_2 + \hat{p}_2 \\ p_2 &= \frac{1}{2}m\omega_c q_1 + \hat{p}_1 \\ \hat{q}_1 &= \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_2 + q_2 \\ \hat{q}_2 &= \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 + q_1 . \end{aligned}$$

Durch Integration und Differentiation erhält man:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{1}{2}m\omega_c q_2 + \hat{p}_2 \\ \Rightarrow \quad F_2 &= \frac{1}{2}m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + f(q_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2) \\ p_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{1}{2}m\omega_c q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} = \frac{1}{2}m\omega_c q_1 + \hat{p}_1 \\ \Rightarrow \quad F_2 &= \frac{1}{2}m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + \hat{p}_1 q_2 + g(\hat{p}_1, \hat{p}_2) \\ \hat{q}_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial \hat{p}_1} = q_2 + \frac{\partial g}{\partial \hat{p}_1} = \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_2 + q_2 \\ \Rightarrow \quad F_2 &= \frac{1}{2}m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + \hat{p}_1 q_2 + \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 \hat{p}_2 + h(\hat{p}_2) \\ \hat{q}_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial \hat{p}_2} = q_1 + \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 + \frac{dh}{d\hat{p}_2} = \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 + q_1 \\ \Rightarrow \quad F_2 &= \frac{1}{2}m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + \hat{p}_1 q_2 + \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 \hat{p}_2 + \text{const} . \end{aligned}$$

Damit ist F_2 bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt:

$$F_2 = \frac{1}{2}m\omega_c q_2 q_1 + \hat{p}_2 q_1 + \hat{p}_1 q_2 + \frac{1}{m\omega_c} \hat{p}_1 \hat{p}_2 .$$

Abschnitt 3.7

Lösung zu Aufgabe 3.7.1

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0 ; \quad H = E .$$

Damit lautet die HJD:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] = E .$$

Da x, y, z zyklisch sind, ist die HJD trivial separierbar:

$$W = \alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z ; \quad (\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{p} = \dot{\boldsymbol{p}}) .$$

Bei W handelt es sich also um die identische Transformation.

Lösung zu Aufgabe 3.7.2

$$H = \frac{p^2}{2m} - bx \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0 ; \quad H = E .$$

Damit ergibt sich die HJD:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - bx = E \Rightarrow \frac{dW}{dx} = \pm \sqrt{2m(E + bx)} .$$

Bis auf die triviale additive Konstante folgt somit:

$$W(x) = \pm \frac{1}{3mb} [2m(E + bx)]^{3/2} .$$

Wir setzen $E = \alpha$ und erhalten dann aus (3.67):

$$\begin{aligned} t + \beta &= \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \pm \frac{1}{b} [2m(\alpha + bx)]^{1/2} \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{b}{2m} (t + \beta)^2 - \frac{\alpha}{b} . \end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen lautet die Lösung:

$$x(t) = \frac{b}{2m} \left(t + \frac{m v_0}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{m}{b} v_0^2 + x_0 .$$

Lösung zu Aufgabe 3.7.3

Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + c e^{\gamma q}.$$

Wegen

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

ist

$$H = E = \text{const.}$$

Die Transformation

$$(q, p) \Rightarrow (\hat{q}, \hat{p}) \quad H \Rightarrow \hat{H}$$

sei so, dass \hat{q} zyklisch ist. Erzeugende:

$$W = F_2(q, \hat{p}) = W(q, \hat{p}).$$

Wegen

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad \text{folgt} \quad \hat{H} = H = \hat{H}(\hat{p}).$$

Da \hat{q} zyklisch ist, ist der neue Impuls $\hat{p} = \alpha = \text{const.}$

Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + c e^{\gamma q} = E = E(\alpha).$$

Auflösen nach W führt zu:

$$W(q, \hat{p}) = \sqrt{2m} \int dq \sqrt{E - c e^{\gamma q}}.$$

Wähle

$$E = E(\alpha) = \alpha \rightsquigarrow \frac{\partial E}{\partial \alpha} = 1.$$

Das ergibt für die *neue* Koordinate das triviale Resultat:

$$\hat{q}(t) = t + \beta \quad \beta = \text{const.}$$

Andererseits muss auch gelten:

$$\hat{q} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{2m} \int dq \frac{1}{\sqrt{\alpha - c e^{\gamma q}}}.$$

Substitution:

$$x = \sqrt{c} e^{\frac{1}{2}\gamma q} \rightsquigarrow \frac{dx}{dq} = \frac{1}{2}\gamma x \rightsquigarrow dq = \frac{2}{\gamma} \frac{dx}{x}.$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{\sqrt{2m}}{\gamma} \int \frac{1}{\sqrt{\alpha - x^2}} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\sqrt{2m}}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha - x^2}} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2m}}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left(\sqrt{\frac{\alpha}{x^2}} + \sqrt{\frac{\alpha}{x^2} - 1} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2m}}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{x} \right). \end{aligned}$$

Dass lässt sich nach x auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\alpha}}{x} &= \cosh \left(-\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{2m}} (t + \beta) \right) = \sqrt{\frac{\alpha}{c}} e^{-\frac{1}{2}\gamma q} \\ &\rightsquigarrow e^{\frac{1}{2}\gamma q} = \sqrt{\frac{\alpha}{c}} \frac{1}{\cosh \left(\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{2m}} (t + \beta) \right)} \end{aligned}$$

($\cosh x = \cosh(-x)$). Damit ist die generalisierte Koordinate bereits bestimmt:

$$q(t) = \frac{2}{\gamma} \ln \left\{ \sqrt{\frac{\alpha}{c}} \frac{1}{\cosh \left(\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{2m}} (t + \beta) \right)} \right\}.$$

Der generalisierte Impuls bestimmt sich aus (s. o.):

$$\begin{aligned} p^2 &= 2m(\alpha - c e^{\gamma q}) = 2m\alpha - 2mc \frac{\alpha}{c} \frac{1}{\cosh^2(\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{2m}}(t + \beta))} \\ &= 2m\alpha \left(1 - \frac{1}{\cosh^2(\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{2m}}(t + \beta))}\right) \\ &= 2m\alpha \tanh^2\left(\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{2m}}(t + \beta)\right). \end{aligned}$$

Damit haben wir das Ergebnis:

$$p(t) = \sqrt{2m\alpha} \tanh\left(\gamma \sqrt{\frac{\alpha}{2m}}(t + \beta)\right).$$

Die Lösung ist nun vollständig. α und β folgen aus Anfangsbedingungen.

Lösung zu Aufgabe 3.7.4

Die Hamilton-Funktion ist:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + c(x - y), \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Die Erzeugende $W(x, y, \hat{p}_x, \hat{p}_y)$ für die Transformation

$$(x, y, p_x, p_y) \xrightarrow{W} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x, \hat{p}_y)$$

soll so beschaffen sein, dass die neuen Koordinaten sämtlich zyklisch sind. Die Erzeugende W ist vom Typ F_2 :

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \hat{x} = \frac{\partial W}{\partial \hat{p}_x}, \quad \hat{y} = \frac{\partial W}{\partial \hat{p}_y}.$$

Damit ist die HJD:

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right) + c(x - y) = E.$$

Zur Lösung empfiehlt sich ein Separationsansatz:

$$W(x, y, \hat{p}_x, \hat{p}_y) = W_x(x, \hat{p}_x, \hat{p}_y) + W_y(y, \hat{p}_x, \hat{p}_y) .$$

Damit folgt aus der HJD:

$$\underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x}{dx} \right)^2 + cx}_{\text{nur von } x \text{ abhängig}} = E - \underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 + cy}_{\text{nur von } y \text{ abhängig}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x}{dx} \right)^2 + cx = \alpha_1$$

$$E - \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 + cy = \alpha_1$$

$$\Rightarrow \frac{dW_x}{dx} = \pm \sqrt{2m(\alpha_1 - cx)}$$

$$\frac{dW_y}{dy} = \pm \sqrt{2m(E - \alpha_1 + cy)}$$

$$\Rightarrow W_x = \mp \frac{1}{3mc} (2m(\alpha_1 - cx))^{3/2}$$

$$W_y = \pm \frac{1}{3mc} (2m(E - \alpha_1 + cy))^{3/2} .$$

Somit ist die gesamte charakteristische Funktion:

$$W = \mp \frac{1}{3mc} (2m)^{3/2} \{ (\alpha_1 - cx)^{3/2} - (E - \alpha_1 + cy)^{3/2} \} .$$

Identifizierte die neuen Impulse mit den Konstanten:

$$\hat{p}_j = \alpha_j = \text{const}$$

wobei α_2 noch unbestimmt bleibt. Damit ist:

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \pm \sqrt{2m(\alpha_1 - cx)}$$

$$p_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \mp \sqrt{2m(E - \alpha_1 + cy)} .$$

Wähle weiterhin (aus Zweckmäßigkeit):

$$E = E(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 .$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \beta_1 \\ \dot{y} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = t + \beta_2 .\end{aligned}$$

Auflösen von

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \mp \frac{1}{c} \left(\sqrt{2m(\alpha_1 - cx)} + \sqrt{2m(\alpha_2 - \alpha_1 + cy)} \right) \\ t + \beta_2 &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{2m(\alpha_2 - \alpha_1 + cy)}\end{aligned}$$

ergibt:

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{c}{2m} (t + \beta_2)^2 - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{c} \\ x(t) &= -\frac{c}{2m} (t + \beta_1 + \beta_2)^2 + \frac{\alpha_1}{c} \\ p_x &= \pm \sqrt{c^2 (t + \beta_1 + \beta_2)^2} = \pm c(t + \beta_1 + \beta_2) \\ p_y &= \mp \sqrt{c^2 (t + \beta_2)^2} = \mp c(t + \beta_2) .\end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -c \quad \Rightarrow \quad p_x(t) = -c(t + \beta_1 + \beta_2) \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = c \quad \Rightarrow \quad p_y(t) = c(t + \beta_2) .\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen ergeben:

$$\begin{aligned} p_y(0) = 0 &\Rightarrow \beta_2 = 0 \\ p_x(0) = mv_{0x} &\Rightarrow \beta_1 = -\frac{mv_{0x}}{c} \\ y(0) = 0 &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \\ x(0) = 0 &\Rightarrow \alpha_1 = \frac{c^2}{2m} \left(-\frac{mv_{0x}}{c} \right)^2 = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = E. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{c}{2m} \left(t - \frac{mv_{0x}}{c} \right)^2 + \frac{m}{2c} v_{0x}^2 \\ y(t) &= \frac{c}{2m} t^2. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3.7.5

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0; \quad H = E.$$

Die HJD lautet:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) = E.$$

Separationsansatz:

$$W = W(x, y; \alpha) = W_x(x; \alpha) + W_y(y; \alpha).$$

Dies wird in die HJD eingesetzt:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 = E - \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 - \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2.$$

Beide Seiten müssen für sich genommen bereits konstant sein. Wir setzen $E = \alpha_1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 &= \alpha_2 = \text{const} \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 &= \alpha_1 - \alpha_2 = \text{const} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_x}{dx} = m\omega_x \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m\omega_x^2} - x^2},$$

$$\frac{dW_y}{dy} = m\omega_y \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{m\omega_y^2} - y^2}.$$

Für die charakteristische Funktion erhalten wir schließlich:

$$W(x, y, \alpha) = \int \frac{dW_x}{dx} dx + \int \frac{dW_y}{dy} dy$$

$$= m\omega_x \left[\frac{x}{2} \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m\omega_x^2} - x^2} + \frac{\alpha_2}{m\omega_x^2} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{m\omega_x^2}{2\alpha_2}} \right) \right]$$

$$+ m\omega_y \left[\frac{y}{2} \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{m\omega_y^2} - y^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{m\omega_y^2} \arcsin \left(y \sqrt{\frac{m\omega_y^2}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right) \right].$$

Es gilt weiter:

$$\beta_1 + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int \frac{dW_y}{dy} dy$$

$$= \frac{1}{\omega_y} \int dy \left[\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{m\omega_y^2} - y^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{\omega_y} \arcsin \left[y \sqrt{\frac{m\omega_y^2}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}} \right]$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{m\omega_y^2}} \sin [\omega_y(\beta_1 + t)],$$

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int \frac{dW_x}{dx} dx + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int \frac{dW_y}{dy} dy$$

$$= \frac{1}{\omega_x} \int dx \left(\frac{2\alpha_2}{m\omega_x^2} - x^2 \right)^{-1/2} - \frac{1}{\omega_y} \int dy \left[\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{m\omega_y^2} - y^2 \right]^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\omega_x} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{m\omega_x^2}{2\alpha_2}} \right) - \beta_1 - t$$

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m\omega_x^2}} \sin [\omega_x(\beta_1 + \beta_2 + t)].$$

$\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ sind durch Anfangsbedingungen festzulegen!

Lösung zu Aufgabe 3.7.6

Mit der Erzeugenden $F_3 = F_3(p, \dot{q}, t)$,

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} , \quad \hat{p} = -\frac{\partial F_3}{\partial \dot{q}}$$

soll die Transformation so erfolgen, dass die „neue“ Koordinate und der „neue“ Impuls konstant sind:

$$(q, p) \xrightarrow{F_3} (\hat{q} = \alpha = \text{const}, \hat{p} = \beta = \text{const}) .$$

Dies gelingt mit einer Erzeugenden $S(p, \dot{q}, t) = F_3(p, \dot{q}, t)$, durch die $\hat{H} \equiv 0$ wird:

$$0 \stackrel{!}{=} \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = H\left(p, -\frac{\partial S}{\partial p}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{HJD}) .$$

Diese Differentialgleichung für S ist hier explizit:

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 .$$

Zur Lösung wird ein Separationsansatz gewählt:

$$S(p, \dot{q}, t) = W(p, \dot{q}) + V(t, \dot{q}) .$$

Die HJD macht keine Aussage über die \dot{q} -Abhängigkeit von S . Allerdings muss $\dot{q} = \beta = \text{const}$ gelten, was z. B. durch Gleichsetzen mit einer Integrationskonstanten erreicht wird. Damit wird die HJD:

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\frac{dW}{dp}\right)^2 = -\frac{dV}{dt}$$

Die linke Seite hängt nur von p , die rechte nur von t ab. Damit muss bereits jede Seite für sich konstant sein. Setze deshalb:

$$\beta = -\frac{dV}{dt} \Rightarrow V(t) = -\beta t$$

bis auf eine unbedeutende additive Konstante. Somit folgt aus der linken Seite für W :

$$\left(\frac{dW}{dp}\right)^2 = \frac{2}{m\omega_0^2} \left(\beta - \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{1}{m^2\omega_0^2} (2m\beta - p^2) .$$

Damit ist die Lösung der HJD:

$$S(\beta, p, t) = \pm \frac{1}{m\omega_0} \int dp \sqrt{2m\beta - p^2} - \beta t .$$

Setze nun:

$$\alpha = \hat{p} = -\frac{\partial S}{\partial \beta} = t \mp \frac{1}{m\omega_0} \int dp \frac{m}{\sqrt{2m\beta - p^2}} = t \mp \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{p}{\sqrt{2m\beta}}$$

Damit ist der „alte“ Impuls:

$$p = \pm \sqrt{2m\beta} \sin(\omega_0(t - \alpha))$$

Und für die „alte“ Koordinate erhält man:

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\partial S}{\partial p} = -\frac{\partial W}{\partial p} = \mp \frac{1}{m\omega_0} \sqrt{2m\beta - p^2} = \\ &= \mp \frac{\sqrt{2m\beta}}{m\omega_0} \cos(\omega_0(t - \alpha)) . \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} p_0 &= p(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \\ q_0 &= q(t=0) > 0 \end{aligned}$$

folgt dann:

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2\beta}{m\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t) \\ p(t) &= -\sqrt{2m\beta} \sin(\omega_0 t) . \end{aligned}$$

In den vorangegangenen Gleichungen gilt wegen $q(t=0) > 0$ jeweils das untere Vorzeichen.

Mit

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\beta}{m\omega_0^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_0^2 = E$$

folgt nach Einsetzen von q_0 :

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos \omega_0 t \\ p(t) &= -m\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t . \end{aligned}$$

Zur physikalischen Bedeutung:

$$S(\beta, p, t) = -\frac{\sqrt{2m\beta}}{m\omega_0} \int \sqrt{1 - \sin^2 \omega_0 t} \, dp - \beta t .$$

Mit

$$dp = -m\omega_0^2 q_0 \cos(\omega_0 t) \, dt$$

folgt dann:

$$\begin{aligned} S(\beta, p, t) &= \frac{\sqrt{2m\beta}}{m\omega_0} m\omega_0^2 \sqrt{\frac{2\beta}{m\omega_0^2}} \int \cos^2 \omega_0 t \, dt - \beta t \\ &= 2\beta \int \cos^2(\omega_0 t) \, dt - \beta t . \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2m} m^2 \omega_0^2 q_0^2 \sin^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_0^2 \cos^2 \omega_0 t \\ &= \beta (\sin^2 \omega_0 t - \cos^2 \omega_0 t) \\ &= -2\beta \cos^2(\omega_0 t) + \beta \end{aligned}$$

Also ist die Erzeugende das negative unbestimmte Wirkungsfunktional:

$$S(\beta, p, t) = - \int L \, dt$$

Lösung zu Aufgabe 3.7.7

Aus

$$\overline{H} = H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) = \alpha_1$$

folgt durch Umsortieren:

$$\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) = \alpha_1 - \frac{1}{2m} p_z^2 - \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 .$$

Separationsansatz:

$$\begin{aligned} W &= W_x(x, \alpha) + W_y(y, \alpha) + W_z(z, \alpha) \\ \Rightarrow p_x &= \frac{dW_x}{dx}; \quad p_y = \frac{dW_y}{dy}; \quad p_z = \frac{dW_z}{dz}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die obige Gleichung bedeutet, dass die rechte Seite nur von z abhängt, die linke nur von x und y . Also muss gelten:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 &= \text{const} = \alpha_z \\ \Rightarrow p_z &= \frac{dW_z}{dz} = m \omega_z \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m \omega_z^2} - z^2}. \end{aligned}$$

Umkehrpunkte:

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m \omega_z^2}}.$$

$$\begin{aligned} J_z &= \oint p_z dz = 2m \omega_z \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m \omega_z^2} - z^2} dz \\ &= 2m \omega_z \left[\frac{1}{2} z \sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m \omega_z^2} - z^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_z}{m \omega_z^2} \arcsin \frac{z}{\sqrt{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_z)}{m \omega_z^2}}} \right]_{z_-}^{z_+} \\ &= 2m \omega_z \frac{\alpha_1 - \alpha_z}{m \omega_z^2} \pi \\ \Rightarrow J_z &= \frac{2\pi}{\omega_z} (\alpha_1 - \alpha_z). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 &= \alpha_z - \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 - \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 \stackrel{!}{=} \alpha_x \\ \Rightarrow p_x &= \frac{dW_x}{dx} = m \omega_x \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2} - x^2}. \end{aligned}$$

Umkehrpunkte:

$$x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2}}.$$

Dies bedeutet:

$$J_x = 2m\omega_x \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2} - x^2} dx.$$

Dieselbe Rechnung wie oben ergibt:

$$J_x = \frac{2\pi}{\omega_x} \alpha_x.$$

Schließlich bleibt noch:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 = \alpha_z - \alpha_x.$$

Dieselben Überlegungen wie oben ergeben jetzt:

$$J_y = \frac{2\pi}{\omega_y} (\alpha_z - \alpha_x).$$

Schließlich folgt:

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \alpha_1 = \frac{\omega_z}{2\pi} J_z + \alpha_z = \frac{\omega_z}{2\pi} J_z + \frac{\omega_y}{2\pi} J_y + \alpha_x \\ \Rightarrow \overline{H}(J) &= \frac{1}{2\pi} (\omega_x J_x + \omega_y J_y + \omega_z J_z). \end{aligned}$$

Frequenzen:

$$\nu_{\alpha} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J_{\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \omega_{\alpha}; \quad \alpha = x, y, z.$$

Lösung zu Aufgabe 3.7.8

Entartungsbedingungen:

$$\nu_x - \nu_y = 0 ; \quad \nu_y - \nu_z = 0 .$$

Dies ergibt gemäß (3.159) die Erzeugende:

$$\begin{aligned} F_2 &= (\omega_x - \omega_y) \bar{J}_1 + (\omega_y - \omega_z) \bar{J}_2 + \omega_z \bar{J}_3 \\ \Rightarrow \tilde{\omega}_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial \bar{J}_1} = \omega_x - \omega_y ; \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{J}_2} = \omega_y - \omega_z ; \quad \tilde{\omega}_3 = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{J}_3} = \omega_z . \end{aligned}$$

Dies bedeutet:

$$\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = 0 ; \quad \bar{\nu}_3 = \nu_z .$$

Aus F_2 folgt auch:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial F_2}{\partial \omega_x} = \bar{J}_1 ; \quad J_y = \frac{\partial F_2}{\partial \omega_y} = -\bar{J}_1 + \bar{J}_2 ; \quad J_z = \frac{\partial F_2}{\partial \omega_z} = -\bar{J}_2 + \bar{J}_3 \\ \Rightarrow J_x + J_y + J_z &= \bar{J}_3 = \bar{J} . \end{aligned}$$

Dies bedeutet:

$$\overline{H} = \frac{\omega}{2\pi} \bar{J} .$$

Sachverzeichnis

A

d'Alembert'sches Prinzip, 13, 17, 19
Arbeit, virtuelle, 14
Atwood'sche Fallmaschine, 16, 22, 44

B

Bahn, stationäre, 72
Bahndrehimpuls, 197
Bindung, geometrische, 3
Bohr-Sommerfeld'sche Atomtheorie, 216
Brachystochronenproblem, 75
Brechungsgesetz, elektronenoptisches, 135

D

δ -Variation, 127
 Δ -Variation, 127
Darstellungsräume, 136
Differentialprinzip, 66
Doppelpendel, 9
Drehimpulserhaltungssatz, 96

E

Eichtransformation, 35, 168
mechanische, 35, 154
Eigenwirkungsvariable, 217
Eikonal, 224
Eikonalgleichung, 224
Energiedissipation, 37
Energiesatz, 90
Energiespektrum der Teilchenwelle, 226
entartet
 m -fach, 215
 vollständig, 214, 215

Entartung

Entartungsbedingungen, 215
Ereignisbahn, 137
Ereignisraum, 137
Euler-Lagrange-Differentialgleichungen, 78
Euler'sche Gleichung, 73

F

Fadenspannung, 16, 24, 44
Fall, „verzögter“ freier, 23
Fass, rollendes, 45
Federkonstante, 116
Fermat'sches Prinzip, 131
Forminviananz, 22
Freiheitsgrad, 7
Fundamentalklammer, 149
Funktion
 erzeugende, 158, 162
 Hamilton'sche charakteristische, 191
 homogene, 21
Funktional, 67

G

Geschwindigkeit, generalisierte, 7
Gleichungen, kanonische, 111
Gravitation, 207

H

Hamilton-Funktion, 89, 110
Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung, 183, 221
Hamilton-Jacobi-Theorie, 182
Hamilton-Mechanik, 105

- Hamilton-Operator, 149
 Hamilton'sche Bewegungsgleichungen, 111, 126
 Hamilton'sche charakteristische Funktion, 191
 Hamilton'sche Wirkungsfunktion, 183
 Hamilton'sches Prinzip, 65, 68
 erweitertes, 81
 modifiziertes, 123, 125, 158
 Hantel, 15
 schwingende, 26
 Hauptquantenzahl, 217
 Hilbert-Raum, 149
 Homogenität
 der Zeit, 88
 des Raumes, 92
 zeitliche, 89
 Hooke'sches Gesetz, 116
- I**
 Impuls, verallgemeinerter, 27
 Impulserhaltung für Symmetrierichtungen, 94
 Impulssatz, 93
 Integral der Bewegung, 112, 147, 191
 Integralprinzip, 66
 Integration
 komplexe, 212
 Isotropie des Raumes, 96
- J**
 Jacobi-Identität, 145
 Jacobi-Prinzip, 132, 134
- K**
 Kanonizität im engeren Sinne, 157, 171
 Kepler-Bewegung, 216
 Kepler-Problem, 31, 207, 217
 Kepler'sches Gesetz, 214
 Klammer
 abstrakte, 148
 Kommutator, 148
 Konfigurationsbahn, 66, 137
 Konfigurationsraum, 7, 66, 136, 137
 Konfigurationsvektor, 7
 Konkurrenzschar, 67, 70
 Koordinate
 generalisierte, 7
 kartesische, 119
 zyklische, 27, 86, 112, 157
 Korrespondenzprinzip, 148
 Kräfte
 generalisierte, 33
 verlorene, 17
 Kraftkomponente, generalisierte, 17
 Kriterien für Kanonizität, 169
 krummlinig-orthogonal, 133
 Kugelkoordinaten, 120
- L**
 Lagrange-Funktion, 19, 22
 verallgemeinerte, 33
 Lagrange-Gleichungen, 13, 77
 2. Art, 20
 modifizierte, 37
 Lagrange-Mechanik, 3
 Lagrange'sche Bewegungsgleichungen
 1. Art, 41, 80
 2. Art, 79
 Lagrange'sche Multiplikatoren, 40
 Methode der, 39
 Legendre-Transformation, 106
 Legendre-Transformierte, 106, 108
 Libration, 201, 214
 Lichtstrahlen, 222, 225
 Lichtweg, 224
 Lichtwellen, 222
 Linie, geodätische, 132
 Lorentz-Kraft, 33, 118
- M**
 Masse, verallgemeinerte, 20, 132
 Matrizenmechanik, 218
 Maxwell-Gleichungen, 33
 Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren, 39
 Minimalinformation, 140
- N**
 Noether'sches Theorem, 88
- O**
 Observable, 149
 Optik, geometrische, 224

- Oszillator
 harmonischer, 116, 149, 167, 201
 linearer, harmonischer, 137
- P**
 Parameterdarstellung, 71, 77
 Pendelschwingung, 115
 periodisch
 bedingt, 203, 214
 einfach, 214
 Perle, gleitende, 24
 Phase, 138
 Phasenbahn, 138
 Phasenraum, 111, 125, 138
 Phasentrajektorie, 138
 Phasentransformation, 156
 Phasenvektor, 138
 Planck'sches Wirkungsquantum, 149, 217, 226
 Poisson-Klammer, 136, 141
 fundamentale, 141, 142
 Poisson'scher Satz, 147
 Potential
 der Lorentz-Kraft, verallgemeinertes, 34
 elektromagnetisches, 33
 skalares, 33
 verallgemeinertes, 32, 118
 Prinzip
 der kleinsten Wirkung, 127, 194
 der kürzesten Ankunft, 131
 der virtuellen Arbeit, 14
 des kürzesten Weges, 132
 Punkttransformation, 10, 167
- Q**
 Quantenhypothese, 217
 Quantenmechanik, 218
- R**
 Rayleigh'sche Dissipationsfunktion, 36
 Reibungskraft, 36
 Residuensatz, 212
 Residuum, 212
 Rollen eines Rades, 12, 47
 Rotation, 201, 214
 Routh-Formalismus, 113
 Routh-Funktion, 113
- räumlich isotrop, 95
 Rydberg-Energie, 217
- S**
 Scharparameter, 71
 Schrödinger-Gleichung, 227
 Schwerefeld, 198
 Schwerpunktsatz, 88
 Schwingungsgleichung, 118
 separabel, 196
 Separation der Variablen, 194
 Separationsansatz, 187
 Stokes'sche Reibung, 38
 System
 konservativer, 18
 nicht-holonomes, 39
 periodisches, 200
- T**
 Teilchen ohne Zwang, 119
 Teilchenwelle, 226
 Energiespektrum, 226
 Teilchen-Welle-Dualismus, 221
 Tensor, metrischer, 133
 Transformation
 identische, 166, 196, 208
 kanonische, 153, 156
 kanonische im engeren Sinne, 157
- V**
 Variation
 der Bahn, 71
 des Funktionals, 72
 Variationsprinzipien, 65
 Variationsproblem, 70
 Vektorpotential, 33
 Verrückung, virtuelle, 13, 67
- W**
 Wasserstoff-Atom, 217
 Wellenfunktion, 226
 Wellengeschwindigkeit, 219
 Wellengleichung
 der Klassischen Mechanik, 218, 221
 der Optik, skalare, 222

- zeitunabhängige, 226
Wellenlänge eines Teilchens, 226
Wellenmechanik, 218
Wellenvektor, 223
Winkelvariable, 205
Wirkung, 67, 127, 194
Wirkungsfunktion, 186, 218
Wirkungsfunktional, 68, 81, 124
Wirkungsprinzipien, 123
Wirkungsvariable, 204, 209
Wirkungswellen, 219
- Z**
- Zentralfeld, 197
Zustand, 140, 226
- Zustandsraum, 139
Zwangsbedingung, 3
als Ungleichung, 10
holonome, 4
holonom-rheonome, 6
holonom-skleronome, 4
in differentieller Form, 11
nicht-holonome, 10
„Rollen“, 12
Zwangskraft, 3
generalisierte, 41
Zweikörperproblem, 86
Zykloide, 29, 77
Zykloidenpendel, 29
Zylinderkoordinaten, 119