Pesquisa Operacional

Notas de aula do curso de Pesquisa Operacional do Dept. de Ciência da Computação da UFMG

Bibliografia

A maior parte do material nestas notas de aula se baseiam em capítulos e passagens das seguintes referências. Alguns exemplos foram copiados *ipsis literis*.

(i) Bertrand Guenin, Jochen Könemann, and Levent Tunçel. *A gentle introduction to optimization.* Cambridge University Press, 2014.

(ii) Marco Cesar Goldbarg, and Henrique Pacca L. Luna. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.* Elsevier, 2005.

(iii) Christos Papadimitriou, and Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity.* Courier Corporation, 1998.

(iv) Vasšek Chvátal. *Linear programming.* W.H. Freeman and Company, 1983.

(v) Michele Conforti, Gérard Cornuéjols, and Giacomo Zambelli. *Integer programming.* Springer, 2014.

Sumário

Capítulo 1

PLs e o Simplex

Aula 1

1.1 Introdução ao curso

Apesar de o nome do curso ser Pesquisa Operacional, talvez seria mais descritivo se fosse chamado "Introdução à otimização". Problemas de otimização são uma (grande) sub-área da Pesquisa Operacional. Matematicamente falando, um problema de otimização é um problema em que se busca achar o máximo ou o mínimo de uma função dentro de um determinado conjunto. Por exemplo:

- Quais são os valores máximo e mínimo da função $f(x) = x^2$ com $x \in \mathbb{R}$?
- E se o intervalo for limitado a $[1, 5]$? Qual seu mínimo e máximo neste intervalo?

Chamamos o primeiro caso de um problema de otimização **irrestrita**, isto é, não há condições restringindo o domínio. O segundo caso é conhecido como um problema de otimização **restrita** uma vez que restrições são impostas no conjunto possível de valores que x pode assumir. Buscamos a **solução ótima**, isto é, o ponto onde a função atinge o valor máximo ou mínimo dentre os valores possíveis do domínio.

A dificuldade de um problema de otimização pode estar na descrição da função, ou na compreensão do conjunto. Ou em ambos. Por exemplo:

- Qual o máximo da função $f(x, y) = x^2/y^y$ se x e y estão entre -1 e 1?
- Qual o máximo da função $f(x) = \sin(x)$ entre os números racionais?

Funções como as que descrevemos acima tipicamente necessitam do uso do cálculo para estudarmos seus pontos de máximo e mínimo. Neste curso, entretanto, nossas funções serão mais simples.

1.1.1 Otimização neste curso

Neste curso, todavia, estamos interessados em duas sub-áreas da Pesquisa Operacional, chamadas **Programação Linear (PL)** e **Programação Inteira (PI)**. Ambas estas técnicas buscam reescrever matematicamente problemas do mundo real através de problemas de otimização restritos. Um termo mais amplo que engloba tanto PL quanto PI é a **Programação Matemática**, definido como a utilização de ferramentas matemáticas para a alocação ótima de recursos limitados quando planejamos (**programamos**) atividades.

Tanto em PL quanto PI, estamos interessados somente em otimizar **funções lineares**. Uma função f é linear se, para vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e um número a,

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \quad \text{e} \quad f(a\cdot\boldsymbol{x}) = a\cdot f(\boldsymbol{x})$$

Por exemplo,

$$f(x) = 2x \quad f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \quad f(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_2 + 5x_3$$

são funções lineares, ao passo que

$$f(x) = x+5 \quad f(x_1,x_2) = x_1x_2 \quad f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_3$$

não são.

Exercício 1. Prove estes fatos.

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x+5 \\ f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ x+y+5 &\neq x+5+y+5 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= x_1x_2 \\ f(x_1+y_1,x_2+y_2) &= (x_1+y_1)\times(x_2+y_2) \\ &= x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 \\ f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2) &= x_1x_2 + y_1y_2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + x_3 \\ f(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3) &= (x_1+y_1)^2 + x_3 + y_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_3 + y_3 \\ f(x_1,x_2,x_3)+f(y_1,y_2,y_3) &= x_1^2 + x_3 + y_1^2 + y_3 \end{aligned}$$

Otimizar uma função linear (ou decidir que não é possível achar o seu ótimo) é a princípio uma tarefa simples. Por exemplo:

- Qual o máximo de $f(x) = 2x$?
- Qual o máximo da mesma função no intervalo $[-4, 10]$?

Problemas de otimização linear se tornam difíceis quando há mais variáveis. Neste caso, a dificuldade estará sempre na compreensão do conjunto onde a função está sendo definida, ou nas restrições que as variáveis da função devem satisfazer. Neste curso, essas restrições serão também sempre lineares, mas ainda assim veremos que os problemas podem ser bem difíceis.

1.2 Introdução à Programação linear

A primeira parte do curso trata apenas de Programação Linear (PL), o mais "simples" dos modelos de programação matemática. Há centenas de aplicações práticas de PL em uma vasta gama de áreas, incluindo problemas de logística na indústria, mercados financeiros, ciências sociais e naturais, e muitas outras. A teoria e suas aplicações começou por volta da Segunda Guerra Mundial, com Leonid Kantorovich utilizando-a para modelar a economia centralizada da União Soviética e George Dantzig utilizando-a para modelar problemas de logística decorrentes da guerra. Dantzig também desenvolveu o primeiro algoritmo efetivo para resolver problemas de PL - o chamado algoritmo **Simplex** - que ainda hoje é largamente utilizado em *solvers* comerciais e *open-source* de problemas de programação matemática. O enorme aumento de poder computacional nas últimas décadas permite hoje resolver eficientemente problemas de PL com centenas de milhares de variáveis.

Um problema de PL é descrito por três componentes importantes:

- **Variáveis de decisão**, que representam efetivamente a decisão que deve ser tomada no problema modelado,
- **Função objetivo**, que representa em um valor numérico o benefício ou custo associado às decisões que devem ser tomadas. É a função que deve ser maximizada ou minimizada.
- **Restrições**, que representam a limitação dos recursos do mundo real. As restrições impõem que a solução deve obedecer certas regras.

Em um problema de PL, a função objetivo e as restrições são sempre lineares e as variáveis de decisão são sempre variáveis reais (possivelmente dentro de um intervalo).

1.2.1 Exemplo

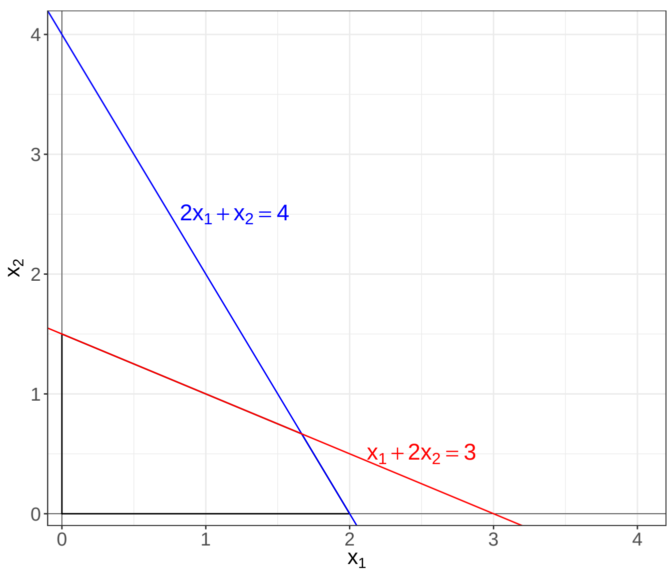
Ache o máximo da função $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ supondo que x_1 e x_2 satisfazem

$$x_1 \geq 0 \quad ; \; x_2 \geq 0 \quad ; \; 2x_1 + x_2 \leq 4 \quad ; \; x_1 + 2x_2 \leq 3.$$

No caso, as variáveis de decisão são dadas por x_1 e x_2 e a função objetivo é maximizar x_1+x_2. Abaixo, reescrevemos este PL utilizando a notação mais comum:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ao desenhar estas desigualdades no gráfico, a região delimitada é dada por:

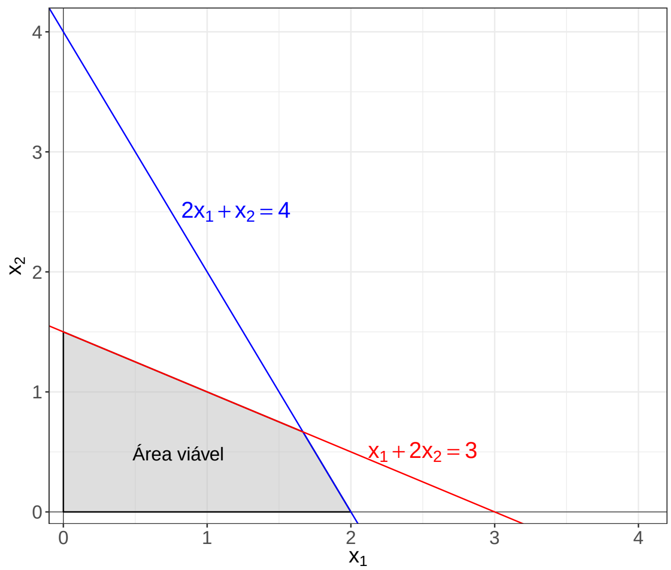


Observe que qualquer ponto à direita da reta azul torna a desigualdade $2x_1+x_2 \leq 4$ inválida. Por exemplo, considere o ponto $(2, 2)$ - neste caso temos que $6 \not\leq 4$ e diz-se que a desigualdade foi **violada**. Já para qualquer ponto a esquerda da reta azul o oposto ocorre. Por exemplo, ao substituirmos o ponto $(1, 1)$ na desigualdade obtemos $3 \leq 4$.

Desta forma, temos que:

- Apenas pontos à esquerda da reta azul respeitam a desigualdade $2x_1 + x_2 \leq 4$,
- Apenas pontos à esquerda da reta vermelha respeitam a desigualdade $x_1 + 2x_2 \leq 3$,
- Apenas pontos à direita do eixo x_2 respeitam a desigualdade $x_1 \geq 0$ e
- Apenas pontos acima do eixo x_1 respeitam a desigualdade $x_2 \geq 0$.

A união destes conjuntos é chamada de **região viável** e pode ser vista no gráfico abaixo:



Todos os pontos da região viável são soluções válidas para o problema. A principal questão de um problema de PL é encontrar, dentre todos os pontos válidos, qual é aquele que maximiza ou minimiza a função objetivo desejada.

Exercício 2. Dentro da área viável acima, qual par de pontos (x_1, x_2) maximiza $x_1 + x_2$? E $3x_1 + x_2$? E $x_1 - x_2$? E minimizar?

Três comentários importantes:

(i) Se você prestou atenção, o máximo ou mínimo sempre acabou sendo um dos vértices. Isto nem sempre é o caso, por exemplo, se quiséssemos o máximo de $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ou o mínimo de $f(x_1, x_2) = x_1$. Mas sempre será o caso de que o máximo ocorrerá num ponto de fronteira entre o conjunto e o seu complemento.

(ii) Nem sempre problemas deste tipo terão solução, mas isto sempre dependerá do conjunto em que estamos otimizando, nunca da função. Por exemplo, qual o máximo de $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ no conjunto

$$x_1 \geq 0 \quad ; \; x_2 \geq 0 \quad ; \; x_1 - x_2 \leq 2 \quad ?$$

E em

$$x_1 \geq 0 \quad ; \; x_2 \geq 0 \quad ; \; x_1 + x_2 \leq -2 \quad ?$$

(iii) Problemas deste tipo possuem grande aplicabilidade prática. Veremos logo mais um exemplo. Infelizmente, a grande parte dos problemas ocorre com muitas variáveis, ou seja, é impossível termos uma visualização gráfica fiel ao problema. Entretanto, procure manter sempre uma intuição geométrica: dentro de um conjunto limitado por retas, ou planos, ou hiperplanos, você estará procurando o canto onde um plano, ou hiperplano, atinge seu máximo ou mínimo.

1.2.2 Exemplo prático

Suponha que uma empresa que produza 4 tipos de produto. A empresa possui duas máquinas diferentes e a produção de cada produto requer horas em ambas as máquinas, além de horas operacionais e horas em um processo de controle de qualidade. A tabela abaixo especifica, para cada produto, quantas horas são necessárias em cada máquina/atividade. A tabela inclui também o preço de venda (assuma demanda infinita):

Produto	Máquina 1	Máquina 2	Operacional	Qualidade	Preço de venda
1	11	4	8	7	300
2	7	6	5	8	260
3	6	5	5	7	220
4	5	4	6	4	180

Por mês, a máquina 1 pode funcionar no máximo 700 horas, e a 2 por no máximo 500 horas. A empresa pode comprar no máximo 600 horas de trabalho operacional ao custo de 8 reais a hora, e 650 horas de controle de qualidade ao custo de 6 reais a hora. Quantos itens de cada produto a empresa deve produzir de forma a maximizar seu lucro?

Vamos formular esse problema como uma PL.

(i) Variáveis de decisão: Temos que decidir quantas unidades de cada produto serão produzidas. Para isso, vamos criar variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 representando estes valores. Ou seja, x_1 é uma variável ainda desconhecida cujo valor é o número de unidades que devem ser produzidas do produto 1. Estas são as únicas incertezas a respeito deste problema, e todos os demais valores associados ao problema (por exemplo: quantas horas usar de uma determinada máquina?) serão determinados por x_1,..,x_4.

Entretanto, muitas vezes o uso de variáveis adicionais facilita a compreensão e expressão do problema. Neste caso, vamos introduzir variáveis y_1 e y_2 que representam as quantidades de horas de trabalho operacional e controle de qualidade utilizadas. Ao final, veremos que também teria sido possível modelar o problema sem usar essas variáveis.

(ii) Função objetivo: A empresa busca maximizar o lucro. A função matemática que representa o lucro é dada por:

$$300x_1 + 260x_2 + 220x_3 + 180x_4 - 8y_1 - 6y_2.$$

(iii) Restrições:

Podemos utilizar no máximo 700 horas da máquina 1:

$$11x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 700.$$

E no máximo 500 horas na máquina 2:

$$4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 500.$$

Trabalho operacional:

$$8x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq y_1$$

Controle de qualidade:

$$7x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq y_2.$$

As limitações na quantidade de horas que podem ser contratadas:

$$y_1 \leq 600 \quad \text{e} \quad y_2 \leq 650.$$

Não faz sentido que as variáveis possam ter valores negativos, logo:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0.$$

Estas últimas restrições são geralmente chamadas de restrições de **não-negatividade**.

Exercício 3. Resolva esta PL?

Aulas 2 e 3

1.3 Programação linear - formalização

Uma programação linear (PL) é definida como um um problema de maximizar ou minimizar uma função linear (ou afim) sujeita a um número finito de restrições lineares. Considerando o exemplo:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

estamos **maximizando** a **função objetivo** $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5$ sujeita às **restrições** $x_1 + x_2 \leq 9,\ x_3 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$

Importante: uma restrição linear é sempre uma inequação da forma

$$f(\mathbf{x}) \leq \beta \ , \quad f(\mathbf{x}) \geq \beta \ , \quad f(\mathbf{x}) = \beta,$$

onde $\mathbf{x}$ é um vetor de variáveis e β é um escalar. Note que

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 < 5$$

não é uma restrição linear, já que a desigualdade é estrita.

Uma **solução** para a formulação (1.1) é uma atribuição de valores às variáveis (x_1, x_2, x_3). Uma solução é **viável** se possui a propriedade de que todas as restrições são satisfeitas. Uma solução é **ótima** se é viável e maximiza (ou minimiza se o problema for de minimização) a função objetivo.

1.4 Modelagem

Como dito anteriormente, a PL modela diversos problemas da vida real. Nesta seção, incluímos alguns exercícios e exemplos de aplicações.

Exemplo 1. Considere o seguinte problema de demanda, armazenamento e distribuição. Uma companhia local, Pompéu Insumos, de revenda de insumos agrícolas prevê que nos próximos meses, a demanda por seu principal insumo seja a seguinte:

mês	1	2	3	4
demanda em litros	5000	8000	9000	6000

No começo de cada mês, esta empresa pode comprar este insumo de um distribuidor regional pelos seguintes valores:

mês	1	2	3	4
custo por litro	0.75	0.72	0.92	0.90

A Pompéu Insumos possui um tanque de armazenamento de 4000 litros, que atualmente já contém 2000 litros. A empresa deseja saber quantos litros de insumo deve comprar no começo de cada mês para suprir a demanda e ao mesmo tempo minimizar seus custos. Note que se o insumo é comprado e revendido imediatamente, não é preciso armazená-lo no tanque. Somente o excedente para o mês seguinte é armazenado. Para simplificar, assumimos que o custo de armazenamento é zero (o que pode não ser verdade na prática).

- Variáveis de decisão: Cada mês, Pompéu Insumos precisa determinar (1) quantos litros comprar e (2) quantos armazenar do insumo. Estes valores são incertos e devem ser decididos pela empresa: são os candidatos ideais para as variáveis de decisão.

  Introduzimos então 8 variáveis: $p_1, ..., p_4$ referentes a quanto comprar, e $t_1, ..., t_4$ referentes à capacidade ocupada do tanque. Note que já fomos informados que $t_1 = 2000$.

- Função objetivo: Como informado, a Pompéu Insumos deseja minimizar o custo de compra dos insumos. Então a função objetivo é

$$\min \; 0.75p_1 + 0.72p_2 + 0.92p_3 + 0.90p_4.$$

- Restrições: No começo do primeiro mês, a quantidade de insumos comprada, acrescida da quantidade que já havia no tanque, deve ser igual ou exceder a demanda do primeiro mês, e este excedente corresponde exatamente ao que é armazenado para o segundo mês. Portanto

$$p_1 + t_1 = 5000 + t_2.$$

  A restrição acima impõe a **consistência** dos valores envolvidos. Igualmente

$$p_2 + t_2 = 8000 + t_3 \;, \quad p_3 + t_3 = 9000 + t_4 \;, \quad p_4 + t_4 \geq 6000.$$

Exercício 4. Termine de formular esta PL, incluindo condições iniciais e demais restrições, e escreva no formato de (1.1). Qual você acredita ser a solução ótima para o problema? Como o problema seria alterado se o custo de armazenamento fosse 0.10 por litro de insumo por mês?

$$\begin{array}{rrcl}
\min & \multicolumn{3}{l}{0.75p_1 + 0.72p_2 + 0.92p_3 + 0.09p_4} \\
\text{sujeito a} & t_1 & = & 2000 \\
& p_1 + t_1 & = & 5000 + t_2 \\
& p_2 + t_2 & = & 8000 + t_3 \\
& p_3 + t_3 & = & 9000 + t_4 \\
& p_4 + t_4 & \geq & 6000 + t_4 \\
& t_1, \ldots, t_4 & \leq & 4000 \\
& p_1, \ldots, p_4 & \geq & 0 \\
& t_1, \ldots, t_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Exercício 5. Considere a seguinte tabela nutricional de alguns tipos de comida:

Comida	preço / porção	calorias / p.	gordura / p.	proteína / p.	carbs / p.
Cenoura	0.14	23	0.1	0.6	6
Batata	0.12	171	0.2	3.7	30
Pão integral	0.20	65	0.0	2.2	13
Queijo	0.75	112	9.3	7.0	0
Amendoim	0.15	188	16.0	7.7	2

Uma nutricionista deseja montar um cardápio que minimize os custos diários, ao mesmo tempo que as seguintes demandas nutricionais são satisfeitas:

- pelo menos 2000 calorias
- pelo menos 50g de gordura
- pelo menos 100g de proteína
- pelo menos 250g de carbohidratos.

Modele este problema com uma PL (é possível fracionar porções).

Variáveis $x_1, \ldots, x_5$ com a quantidade de porções de cenoura, batata, pão integral, queijo e amendoim respectivamente.

$$\begin{array}{rr} \text{min} & 0.14x_1 + 0.12x_2 + 0.20x_3 + 0.75x_4 + 0.15x_5 \\ \text{sujeito a} & 23x_1 + 171x_2 + 65x_3 + 112x_4 + 188x_5 \geq 2000 \\ & 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.0x_3 + 9.3x_4 + 16.0x_5 \geq 50 \\ & 0.6x_1 + 3.7x_2 + 2.2x_3 + 7.0x_4 + 7.7x_5 \geq 100 \\ & 6x_1 + 30x_2 + 13x_3 + 0x_4 + 2x_5 \geq 250 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Exercício 6. Um banco faz quatro tipos de empréstimos para seus clientes pessoais. Cada tipo de empréstimo rende os seguintes jutos anuais para o banco:

- Primeira hipoteca a 14%
- Segunda hipoteca a 20%
- Reforma residencial a 20%
- Empréstimos pessoais a 10%

O banco pode emprestar no máximo 250 milhões, sendo também restrito pelas seguintes políticas:

- A primeira hipoteca deve ser pelo menos 55% de todas as hipotecas e pelo menos 25% de todos os empréstimos.
- A segunda hipoteca não deve exceder 25% de todos os empréstimos.
- Para evitar descontentamento do público, a taxa de juros média não deve exceder 15%.

Formule o problema de empréstimos bancários como uma PL visando maximizar o recebimento de juros e satisfazendo as limitações impostas.

Note que estas condições impostas potencialmente limitam o lucro que o banco pode ter, mas também limitam sua exposição a risco em uma área particular. É um princípio fundamental do gerenciamento de risco que o risco é reduzido ao dividir o dinheiro apropriadamente em diferentes áreas.

Variáveis $x_1, \ldots, x_4$ com a quantidade (em milhões) emprestada em cada área.

$$\begin{array}{rrcl} \max & 0.14x_1 + 0.20x_2 + 0.20x_3 + 0.10x_4 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 250 \\ & x_1 & \geq & 0.55(x_1 + x_2) \\ & x_1 & \geq & 0.25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ & x_2 & \leq & 0.25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ & 0.14x_1 + 0.20x_2 + 0.20x_3 + 0.10x_4 & \leq & 0.15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ & x_1, \ldots, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Exercício 7. Uma refinaria processa três tipos diferentes de petróleo. Cada tipo de petróleo possui uma planilha de custos diferente, expressando condições de transporte e preços na origem. A planilha de custos e a quantidade máxima disponível é dada abaixo:

Tipo de petróleo	Quantidade máxima disponível (barril/dia)	Custo por barril/dia
1	3500	19
2	2200	24
3	4200	20

Por outro lado, cada tipo de petróleo é mais ou menos apropriado para a produção de três tipos de gasolina diferentes: amarela, azul e superazul. As especificações de cada tipo de gasolina são dadas abaixo:

Tipo de gasolina	Especificação	preço de venda R$/barril
Amarela	não mais que 70% de 1	22
Azul	não mais que 30% de 1 não menos que 10% de 2	28
Superazul	não mais que 30% de 1 não menos que 40% de 2 não mais que 50% de 3	35

Formule este problema como uma PL que calcule quanto de cada gasolina a empresa deve produzir, e quais tipos de petróleo deve utilizar em cada de forma a maximizar seus lucros. Suponha que não há perda volumétrica no processo da refinaria.

DICA: use 9 variáveis. Cada variável correspondendo a quanto de cada tipo de petróleo será usado em cada tipo de gasolina.

Gasolina 1 = Amarela, 2 = Azul e 3 = Superazul. Variáveis x_{ij} com a quantidade de petróleo do tipo i utilizado para fazer gasolina do tipo j.

$$
\begin{array}{rrcl}
\max & \multicolumn{3}{l}{22\sum_{i=1}^{3} x_{i1} + 28\sum_{i=1}^{3} x_{i2} + 35\sum_{i=1}^{3} x_{i3} - 19\sum_{j=1}^{3} x_{1j} - 24\sum_{j=1}^{3} x_{2j} - 20\sum_{j=1}^{3} x_{3j}} \\
\text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{3} x_{1j} & \leq & 3500 \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{2j} & \leq & 2200 \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{3j} & \leq & 4200 \\
& x_{11} & \leq & 0.7\sum_{i=1}^{3} x_{i1} \\
& x_{12} & \leq & 0.3\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \\
& x_{22} & \geq & 0.1\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \\
& x_{13} & \leq & 0.3\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \\
& x_{23} & \geq & 0.4\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \\
& x_{33} & \leq & 0.5\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \\
& x_{ij} & \geq & 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots 4, \;\; j = 1, \ldots, 3
\end{array}
$$

Exercício 8. Você administra uma empreiteira, e projeta construir uma casa. As seguintes atividades devem ser feitas

- B - escavar e fazer a fundação.

- F - subir as paredes
- E - parte elétrica
- P - encanamento
- D - acabamento das paredes e pisos
- L - jardim.

Você possui equipes na sua empreiteira que realizam cada uma das atividades. O tempo em dias para concluir tudo é:

tarefa	B	F	E	P	D	L
tempo	3	2	3	4	1	2

Infelizmente as tarefas não podem ser realizadas todas simultaneamente. Se baseie na lista de restrições abaixo e formule o problema de construir a casa no menor tempo possível como uma PL.

- F só pode começar após B.
- L só pode começar após B.
- E só pode começar após F.
- P só pode começar após F.
- D só pode começar após E e P.

Declaramos variáveis x_i com o tempo de início de execução de cada atividade. Queremos terminar a casa o mais rápido possível. Criaremos também uma variável t simbolizando o tempo de término da construção.

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & t \\
\text{sujeito a} \quad & x_F \geq x_B + 3 \\
& x_L \geq x_B + 3 \\
& x_E \geq x_F + 2 \\
& x_P \geq x_F + 2 \\
& x_D \geq x_E + 3 \\
& x_D \geq x_P + 4 \\
& t \geq x_B + 3 \\
& t \geq x_F + 2 \\
& t \geq x_E + 3 \\
& t \geq x_P + 4 \\
& t \geq x_D + 1 \\
& t \geq x_L + 2 \\
& x_i \geq 0 \qquad i = B, F, E, P, D, L
\end{aligned}
$$

Exercício 9. Tente resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ x + y &= 1 \\ x + 3y &= 4 \\ -2x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

Tentou? Vamos então tentar encontrar os valores que mais se aproximam de ser uma solução do sistema. Formule o problema de achar um vetor (x, y) que mais se aproxime de resolver este sistema como uma PL. Ou seja, você deseja achar (x, y) tal que a soma

$$|2x + y + 1| + |x + y - 1| + |x + 3y - 4| + | - 2x + 4y - 3|$$

seja mínima.

E se ao invés de minimizar a soma, você desejasse minimizar o maior dos valores absolutos. Ainda é possível modelar como uma PL?

```
x = 1 - y, substituindo na 1a:
2(1 - y) + y = -1
2 - 2y + y = -1
y = 3
x = -2
x + 3y = 4
-2 + 3*3 = 7 NAO TEM SOLUCAO
```

Além das variáveis x, y, temos que quantificar, para um dado $\bar{x}, \bar{y}$ qualquer, o quanto aqueles valores desviam do lado direito da equação quando substituídos na mesma. Este desvio pode ser negativo ou positivo, por exemplo: o ponto $(0, 0)$ quando substituído na equação $x + y = 1$ nos dá $0 = 1$, uma diferença de -1 (ou 1 no caso do valor absoluto da diferença). Já o ponto $(1, 1)$ nos dá $2 = 1$, uma diferença positiva de 1.

Queremos minimizar a soma dos valores absolutos desta diferença. O jeito mais simples é criando uma variável para cada valor absoluto. Chamaremos de d_i uma variável que representará um valor sempre maior ou igual que o valor absoluto do desvio do ponto (x, y) na equação $i = 1, \ldots, 4$.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{4} d_i \\
\text{sujeito a} \quad & 2x + y + 1 \leq d_1 \\
& -(2x + y + 1) \leq d_1 \\
& x + y - 1 \leq d_2 \\
& -(x + y - 1) \leq d_2 \\
& x + 3y - 4 \leq d_3 \\
& -(x + 3y - 4) \leq d_3 \\
& -2x + 4y - 3 \leq d_4 \\
& -(-2x + 4y - 3) \leq d_4 \\
& d_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4
\end{aligned}$$

Para minimizar a maior diferença entre as 4 equações, queremos que o maior valor d_i seja mínimo. Para fazer isto basta adicionar uma variável D e fazer:

$$\begin{aligned}
\min \quad & D \\
\text{sujeito a} \quad & D \geq d_i \quad i = 1, \ldots, 4
\end{aligned}$$

além das outras equações acima.

Exercício 10. Em um restaurante, os funcionários trabalham 5 dias consecutivos e folgam 2. Como há dias de mais e menos movimento, a tabela abaixo indica quantos funcionários devem trabalhar em cada dia da semana:

Dia	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab	Dom
Demanda	17	13	15	19	14	16	11

Qual o menor número de funcionários que o restaurante deve contratar de forma a suprir a demanda de trabalho? Modele este problema como uma PL (vamos permitir que funcionários sejam “fracionários” por enquanto). E se o pagamento de funcionários que trabalham domingo fosse 1.5 vezes o pagamento nos outros dias, como a empresa poderia minimizar o custo?

Variáveis: $x_1, \ldots, x_7$ indicando quantas pessoas começam a trabalhar na Seg, Ter, ...

$$
\begin{array}{rl}
\min & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \\
& x_1, \ldots, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

Se o pagamento fosse 1.5, a função objetivo seria: $x_1 + x_2 + 1.5(x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$.

1.5 Formas de apresentar uma PL

Dado um vetor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, uma matriz $m \times n$ $\mathbf{A}$ e um vetor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, considere a seguinte PL

$$
\begin{array}{rl}
\max & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

Significa que estamos procurando o vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ que maximiza o produto interno $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ sujeito às desigualdades obtidas a partir de cada linha da matriz $\mathbf{A}$, além de restrições de não-negatividade.

Exemplo 2. Considere a PL

$$
\begin{array}{rl}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Esta PL pode ser expressa na forma matricial descrita acima da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{rl}
\max & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

Também poderíamos ter incorporado as restrições de não-negatividade na matriz, como abaixo, mas esta não será nossa preferência geralmente.

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Neste exemplo:

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Exercício 11. Resolva a PL acima.

Ao desenhar o gráfico, vemos que a função objetivo cruza por último o ponto onde:

$$x_1 + 2x_2 = 2 \quad \text{e} \quad 2x_1 + x_2 = 2$$

O ponto que resolve o sistema linear é $(2/3, 2/3)$.

Exercício 12. Considere o primeiro exemplo de PL, (1.1). Identifique naquele exemplo quais são os vetores $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ e a matriz $\mathbf{A}$.

Devemos completar com zeros e trocar o sinal das restrições de não-negatividade:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Neste exemplo:

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Conforme você notou no exercício, nem sempre o conjunto de desigualdades obtidos da modelagem poderá ser imediatamente agrupado em um formato matricial, e então alguns ajustes podem precisar ser feitos.

Como forma de padronizar a interpretação de PLs definimos a **forma padrão de igualdades** (FPI) a seguir.

Definição 1. Uma PL está na forma padrão de igualdades se existem vetores **c**,**b** e uma matriz A tal que a PL se expressa como

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, uma PL está na FPI se

- é um problema de maximização.
- com exceção das restrições de não-negatividade, todas as outras são igualdades.
- toda variável possui uma restrição de não negatividade.

Qualquer PL pode ser expressa na FPI. Em geral, quando uma inequação é obtida na formulação, ela pode ser substituída por uma igualdade ao adicionarmos uma variável extra.

Exercício 13. Expresse a desigualdade $2x + 3y \leq 5$ utilizando apenas igualdades e/ou restrições de não-negatividade. Dica: adicione uma variável w.
Faça o mesmo para $8x - y + z \geq 10$.

Adicionamos w representando a diferença entre $2x + 3y$ e 5:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + w &= 5 \\ w &\geq 0 \end{aligned}$$

No segundo caso, o sinal da variável na desigualdade tem que ser negativo pois trata-se de uma $\geq$:

$$\begin{aligned} 8x - y + z - w &= 10 \\ w &\geq 0 \end{aligned}$$

Problemas de minimização também podem ser expressos como maximização.

Exercício 14. Expresse

$$\min x + y + z$$

como

$$\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}.$$

Ou seja, diga quais são os vetores $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{x}$.

Temos que $\boldsymbol{c} = (-1 \ \ -1 \ \ -1)$ e $\boldsymbol{x} = (x \ y \ z)$.

Ainda pode haver um fator dificultador de que, ao modelarmos o problema, uma das variáveis não possua uma restrição de não-negatividade. Neste caso, a variável em questão deve ser substituída por duas outras. Note o exemplo abaixo.

Exemplo 3.

$$\begin{array}{rl} \min & x + y \\ \text{sujeito a} & x - y \leq 2 \\ & x + y \geq -1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Note que não podemos simplesmente adicionar $y \geq 0$, porque isto alteraria a solução da PL. No caso, a PL dada possui mínimo igual a -1 referente à solução $(x, y) = (0, -1)$, onde $y < 0$. Para termos restrições de não-negatividade para todas as variáveis, vamos substituir y por duas variáveis:

$$y = y^+ - y^-,$$

e agora exigimos $y^+, y^- \geq 0$. No caso, quando $y = -1$, temos $y^+ = 0$ e $y^- = 1$, ambos não-negativos. A PL se torna então:

$$\begin{array}{rl} \min & x + y^+ - y^- \\ \text{sujeito a} & x - (y^+ - y^-) \leq 2 \\ & x + (y^+ - y^-) \geq -1 \\ & x, y^+, y^- \geq 0 \end{array}$$

Há portanto três passos básicos a serem realizados para transformar uma PL para a FPI.

(i) Trocar min por max, se necessário, adicionando um sinal negativo em $\boldsymbol{c}$(e lembrando de multiplicar o valor objetivo encontrado no final por -1).

(ii) Trocar todas as inequações por igualdades adicionando variáveis extras (sempre não-negativas). Estas serão chamadas de **variáveis de folga**.

(iii) Trocar cada variável livre por duas variáveis não-negativas.

Exemplo 4. A PL do exemplo 3 se torna portanto:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & x, y^+, y^-, z_1, z_2 \geq 0 \end{array}$$

Exercício 15. Expresse as PLs obtidas nos exercícios de modelagem na FPI.

1.6 Toda PL tem solução ótima?

Já discutimos na primeira aula situações em que uma PL possui uma solução ótima, não possui solução viável, ou é ilimitada. De fato, o Teorema Fundamental de Programações Lineares estabelece que essas são as únicas possibilidades. Vamos discutir cada uma delas. Para isto, a notação FPI é bastante útil.

1.6.1 PLs inviáveis

Como vimos, dada uma PL, um vetor $\boldsymbol{x}$ que satisfaça as restrições é chamado de solução viável. Naturalmente, o objetivo de uma PL é encontrar a solução viável que maximiza ou minimiza a função objetivo. Ocorre que nem sempre existem soluções viáveis, caso em que a PL é chamada de **inviável**.

Exemplo 5. Suponha que o sistema abaixo foi retirado de uma PL em FPI e descreve todas as suas restrições

$$\begin{aligned}
4x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= 6\\
-2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 5\\
-7x_1 - 2x_2 \qquad\;\; + 4x_4 &= 3\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Você pode tentar resolver este sistema, mas notará que não é possível. Como entretanto provar isto?

A verificação de que uma PL é inviável não depende da função objetivo, dependendo apenas do conjunto de restrições. Podemos provar que um sistema de equações com restrições de não-negatividade não possui solução ao encontrarmos uma equação tal que

(i) esta equação seja consequência de operações elementares nas equações do sistema e

(ii) todos os coeficientes sejam não-negativos, mas o lado direito seja negativo.

Veja, por exemplo, o que acontece se multiplicarmos a primeira equação por $y_1 = 1$, a segunda por $y_2 = -2$, a terceira por $y_3 = 1$ e somarmos, obteremos

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1.$$

Naturalmente não há quaisquer valores de $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ que satisfaçam isso.

O vetor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ obtido no exemplo acima é chamado de **certificado de inviabilidade**. Em notação matricial, tínhamos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 1 \\ -7 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e concluímos que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ não é possível pois, ao multiplicar por } \boldsymbol{y}, \text{ temos } \boldsymbol{y}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{y}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} < 0.$$

Exercício 16. Ache um certificado de inviabilidade para o sistema determinado por

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

O vetor $(-1, 1)$ é suficiente.

1.6.2 PLs ilimitadas

Exemplo 6. Considere a PL dada por

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

onde

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Esta PL possui solução viável? E solução ótima?

Note que $x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 10$ é uma solução viável. Entretanto, qualquer solução da forma

$$S(t) = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

com $t \geq 0$ também será viável. Note que

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot S(t) = 10 + 3t,$$

portanto se $t \to \infty$, então $\boldsymbol{c}^T \cdot S(t) \to \infty$. Não há portanto um máximo para esta PL, e ela é chamada de ilimitada.

O vetor $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ encontrado acima é um certificado de que a PL é ilimitada. Note que este vetor satisfaz as propriedades de que $\mathbf{A}\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d} > 0$.

Exercício 17. Demonstre que a PL abaixo é viável, porém ilimitada.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Primeiro vamos encontrar uma solução viável. Sabemos que o único valor possível de $x_3 = 1$. Assim temos o sistema de equações:

$$\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 2x_1 - 4x_2 &= -2 \end{aligned}$$

As equações não são linearmente independentes e possuem infinitas soluções. Como exemplo o ponto $(2, 3/2)$ é uma solução desse sistema, assim como o ponto $(1, 1)$. Vamos pegar então o ponto $(1, 1, 1)$ como solução viável. O vetor $\boldsymbol{d} = (2\ 1\ 0)$ (todo maior ou igual a zero) é um certificado de que a PL é ilimitada pois:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

1.6.3 PLs com soluções ótimas

Exemplo 7. Agora considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que alguém lhe informe que $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ é uma solução ótima desta PL. Como provar isto?

Certamente $\boldsymbol{z}$ é solução viável. Mas para mostrar que também é ótima, precisamos mostrar que para qualquer outra solução viável $\boldsymbol{x}$, temos

$$\boldsymbol{c}^T \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^T \cdot \boldsymbol{z} = 6.$$

Isto é verdade?

De fato, se $\boldsymbol{x}$ é viável, então

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 6.$$

Daí note que

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = 6 - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq 0,$$

como queríamos. (explique por quê esta última desigualdade é verdadeira....)

O vetor $\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$ (que apareceu como uma mágica, eu sei) é um certificado de otimalidade da PL. É um vetor que satisfaz as seguintes propriedades: há uma solução viável $\boldsymbol{z}$ (candidata a ótima), um vetor $\boldsymbol{y}$ tais que $\boldsymbol{y}^T A \geq \boldsymbol{c}^T$, e $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{z}$.

Exercício 18. Coloque a PL abaixo em FPI, ache uma candidata a solução ótima, e exiba um certificado de otimalidade.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix}2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

No exercício 9 achamos a solução $(2/3, 2/3)$ pra PL. Vamos reescrever em formato FPI e converter a solução para um problema com 4 variáveis:

$$\max \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix} \geq 0.$$

A solução $\boldsymbol{z} = (2/3, 2/3, 0, 0)$ continua sendo ótima para o problema, e o valor da função objetivo neste ponto é $4/3$.
Temos então que provar que para qualquer solução viável $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{z} = \frac{4}{3}$.
Vamos experimentar o vetor $(1/3, 1/3)$. Se $\boldsymbol{x}$ é viável então:

$$\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix} \boldsymbol{x} = 4/3.$$

Fazemos então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - 4/3 = & \\ & = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \begin{pmatrix}1 & 1 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ & = \Big(\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix} \Big) \boldsymbol{x} \\ & = \begin{pmatrix}0 & 0 & -1/3 & -1/3\end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq 0 \end{aligned}$$

1.6.4 Resumo

Dada uma PL em FPI

$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{array}$$

esta PL é

- inviável se existir um vetor $\boldsymbol{y}$ tal que

$$\boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \geq 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} < 0.$$

- ilimitada se for viável e se existir um vetor $\boldsymbol{d}$ tal que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{d} = 0 \ , \quad \boldsymbol{d} \geq 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d} > 0.$$

- solúvel com solução ótima $\boldsymbol{z}$ se $\boldsymbol{z}$ for viável e existir um vetor $\boldsymbol{y}$ tal que

$$\boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \geq \boldsymbol{c}^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{z}.$$

1.7 Começando a pensar no Simplex

Considere a seguinte PL

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Claramente $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ é uma solução viável. É possível melhorá-la? Qualquer solução que aumente z_1 ou z_2 vai melhorar a solução da PL. Vamos então manter z_2 fixo e aumentar z_1, mas para isso teremos que diminuir z_3, z_4 e z_5. Teremos

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} 1+t & 1 & 5-2t & 5-t & 3-t \end{pmatrix}$$

permanece sendo uma solução viável desde que $5 - 2t \geq 0$, $5 - t \geq 0$ e $3 - t \geq 0$. O maior valor de t possível é, portanto $t = 5/2$. Daí

$$\begin{pmatrix} 7/2 & 1 & 0 & 5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

é uma nova solução que melhora a solução anterior.

Podemos agora repetir este processo para a variável z_2 ? Como proceder?

Aulas 4 e 5

1.8 Uma base de soluções viáveis

Dada uma PL em FPI

$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

podemos sempre assumir que a matriz $\mathbf{A}$ está em um formato especial. O objetivo dos exercícios dirigidos a seguir é descobrirmos que formato é este.

Exercício 19. Considere a PL abaixo

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

É possível escrever uma PL equivalente a esta em que a matriz $\mathbf{A}$ possua menos linhas?

Sim. Note que a primeira linha da matriz é combinação linear das outras três linhas. Desse modo, é uma restrição redundante e pode ser removida:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Observe também que ao eliminar a linha da matriz $\mathbf{A}$, deve-se eliminar o valor correspondente no vetor $\boldsymbol{b}$.

Exercício 20. Considere a PL abaixo

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Qual o posto dessa matriz? Ou seja, quantas colunas linearmente independentes existem? É possível reduzir o número de linhas?

Ao realizar eliminação gaussiana da matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -20 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

O posto dessa matriz é o número de linhas não nulas quando a matriz está na forma escalonada reduzida por linhas e, portanto, 2. Note que há 2 colunas linearmente independentes na matriz, pois o número de linhas linearmente independentes é igual ao número de colunas linearmente independentes.

Por fim, como a eliminação mostrou, é possível reduzir o número de linhas: a terceira linha é combinação linear das outras duas.

Exercício 21. Considere a PL abaixo

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Elimine linhas, se for possível, e identifique colunas da matriz que formem uma matriz quadrada não-singular.

Note que a terceira linha é combinação linear das outras duas linhas. Ela pode, portanto, ser removida:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Agora, troque a segunda e terceira colunas (pois a segunda coluna é combinação linear da primeira). As primeiras duas colunas da matriz resultante vão formar uma matriz quadrada não singular:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Note que foi necessário reorganizar a função objetivo, pois a ordem das variáveis em $\boldsymbol{x}$ mudou.

Exercício 22. Considere a seguinte PL em FPI

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Suponha que $\mathbf{A}$ possui m linhas linearmente independentes, e n colunas. Explique por que podemos assumir, sem qualquer prejuízo à solução da PL, que se $n \geq m$, há precisamente m colunas linearmente independentes em $\mathbf{A}$.

O número de colunas linearmente independentes de matriz é igual ao número de linhas linearmente independentes. Portanto, assumindo que há m linhas linearmente independentes em $\mathbf{A}$, mesmo que $n \geq m$, há exatamente m colunas linearmente independentes em $\mathbf{A}$. Podemos assumir também que as m linhas são linearmente independentes pois senão teríamos aplicado eliminação Gaussiana e reduzido o número de linhas.

Ao longo dos exercícios acima, vimos que sempre que uma PL estiver em FPI, podemos assumir que existe uma escolha de colunas para a matriz $\mathbf{A}$ que formam uma base para o espaço, ou seja, m colunas linearmente independentes onde m é o número de linhas da matriz.

Toda vez que isso ocorrer, haverá uma única solução para o sistema de equações em que as variáveis correspondentes às colunas fora da base são todas iguais a 0, e que portanto as variáveis correspondentes às colunas da base serão as únicas possivelmente diferentes de 0. Esta solução será chamada de *solução básica* correspondente à base de colunas escolhida. Abaixo, explicamos este fato formalmente:

- Por exemplo, se essas colunas forem as primeiras n colunas, a matriz $\mathbf{A}$ estará na forma abaixo

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \quad \mathbf{A}_B \quad & \quad \mathbf{A}_N \quad \end{array} \right) \tag{1.2}$$

  onde $\mathbf{A}_B$ é uma matriz quadrada não singular, e $\mathbf{A}_N$ é uma matriz cujas colunas são combinações lineares das colunas de $\mathbf{A}_B$. Note que podem haver diferentes escolhas para as matrizes $\mathbf{A}_B$ e $\mathbf{A}_N$ (elas podem estar intercaladas), sempre dependendo da matriz original $\mathbf{A}$.

Quando temos $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, podemos separar as variáveis que compõem o vetor $\boldsymbol{x}$ entre aquelas indexadas pelas colunas linearmente independentes e as outras. As variáveis de $\boldsymbol{x}$ que correspondem às colunas de $\mathbf{A}_B$ são chamadas de variáveis básicas, ao passo que as demais são as variáveis não-básicas. Sempre podemos dividir o vetor $\boldsymbol{x}$ como

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix},$$

onde o vetor $\boldsymbol{x}_B$ possui as variáveis básicas, e $\boldsymbol{x}_N$ as não-básicas. Note que, mesmo que as matrizes $\mathbf{A}_B$ e $\mathbf{A}_N$ estejam originalmente intercaladas em $\mathbf{A}$, vale a igualdade abaixo:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_B\ \boldsymbol{x}_B + \mathbf{A}_N\ \boldsymbol{x}_N.$$

Exercício 23. No exercício 21, identifique as matrizes $\mathbf{A}_B$ e $\mathbf{A}_N$, e os vetores $\boldsymbol{x}_B$ e $\boldsymbol{x}_N$. Calcule $\mathbf{A}_B\ \boldsymbol{x}_B$ e $\mathbf{A}_N\ \boldsymbol{x}_N$ separadamente, e mostre que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_B\ \boldsymbol{x}_B + \mathbf{A}_N\ \boldsymbol{x}_N$.

Continuando da resolução do exercício 21, temos:

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_B\ \boldsymbol{x}_B &= \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_N\ \boldsymbol{x}_N &= \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_3 + 4x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Com isso, $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_B\ \boldsymbol{x}_B + \mathbf{A}_N\ \boldsymbol{x}_N$ pois:

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + 2x_2 \\ 2x_1 - x_3 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Dada uma matriz $\mathbf{A}$ no formato de (1.2), e vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{b}$ tais que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

observe que $\boldsymbol{b}$ é uma combinação linear das colunas em $\mathbf{A}_B$. No caso, $\boldsymbol{b}$ é tratado como uma coluna extra de $\mathbf{A}$ que pode ser escrita como uma combinação linear das colunas básicas de $\mathbf{A}$. Então, existe um vetor $\boldsymbol{z}$ tal que $\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$, e

$$\mathbf{A}_B\ \boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{b} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{z}_N = \mathbf{0}.$$

Um vetor $\boldsymbol{z}$ como descrito acima é chamado de uma **solução básica da PL.**

Exercício 24. Novamente no exercício 21, ache uma solução básica.

Continuando da resolução do exercício 21:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Fazendo a eliminação Gaussiana para deixar a matriz na forma escalonada reduzida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uma solução básica para a PL é:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1, 1, 0 \end{pmatrix}$$

pois lembre-se que em uma solução básica, a parte correspondente a $\boldsymbol{z}_N = 0$.

Note que uma vez escolhida a matriz $\mathbf{A}_B$, existe uma **única solução básica** associada $\boldsymbol{z}$, e ela é definida por $\boldsymbol{z}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$, e $\boldsymbol{z}_N = \mathbf{0}$, com

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_B \\ \boldsymbol{z}_N \end{pmatrix}.$$

Voltamos agora ao exemplo do fim da aula 3:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Note que as colunas 3, 4 e 5 desta PL formam uma base, e que nesta base, $\mathbf{A}_B = \mathbf{I}$, e as entradas correspondentes de $\boldsymbol{c}$ são 0.

Definição 2. Uma PL em FPI tal que a base canônica do espaço de colunas aparece inteiramente como colunas da matriz A, e tal que as entradas correspondentes a estas colunas no vetor $\boldsymbol{c}$ são todas iguais a 0, é uma PL em *forma canônica*.

Ou seja, será tal que $\mathbf{A}_B = \mathbf{I}$ (a menos de trocar as colunas de lugar), e $\boldsymbol{c}_B = 0$.

Quando uma PL está em forma canônica e há uma solução básica *viável*, sempre é possível (tentar) melhorar a solução da maneira como fizemos no exemplo! Portanto o problema de achar a solução ótima de uma PL se reduz ao problema de colocar uma PL em forma canônica para uma solução básica viável. O exemplo abaixo deverá ser esclarecedor.

Exemplo 8. Começamos com

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Esta PL já está em forma canônica.

(ii) Achamos a solução básica - no caso, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}^T$, cujo valor associado na função objetivo é 0. Ela é viável uma vez que todo o vetor $\boldsymbol{x} \geq 0$, e portanto prosseguimos.

(iii) Identificamos no vetor $\boldsymbol{c}$ uma entrada positiva. Uma entrada positiva i em $\boldsymbol{c}$ em um problema de maximização implica que se x_i correspondente fosse maior, o valor da função objetivo também seria maior. Escolhemos então esta entrada em $\boldsymbol{c}$, que corresponde a uma coluna. No caso, escolhemos arbitrariamente a primeira (poderia ter sido a segunda).

O próximo passo é alterar a solução básica aumentando o valor da variável x_1, deixando x_2 fixo e reduzindo os valores das variáveis básicas x_3, x_4, x_5.

Observe que se $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T$,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{z} = 0.$$

Devemos então achar o maior t tal que $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{z} \geq 0$. Uma forma simples de encontrar o maior t é calcular o mínimo b_i/A_{i1} para toda restrição i:

- Restrição 1: Ignorando os coeficientes das variáveis não básicas fixas, temos que $2x_1 + x_3 = 8$. O maior valor possível de $x_1 = 4$, senão x_3 teria que ser negativo.
- Restrição 2: Temos que $x_1 + x_4 = 8$, o maior valor possível de $x_1 = 8$.
- Restrição 3: Temos que $x_1 + x_5 = 5$, o maior valor possível de $x_1 = 5$.

O máximo que podemos aumentar em x_1 é 4. No caso, $t = 4$ produz a nova solução

$$\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo valor associado na função objetivo é $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = 12$ (maior que a anterior).

(iv) O próxima passo é garantir que esta nova solução se torne uma solução básica viável para uma PL em forma canônica equivalente a original. Logo devemos alterar a PL de modo que

(a) as colunas 1, 4 e 5 correspondam a uma matriz identidade.

(b) a função objetivo seja 0 nas entradas 1, 4 e 5.

Para (a), fazemos eliminação Gaussiana. Teremos

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Para (b), subtraímos a função objetivo por 3 vezes a primeira equação (e compensamos adicionando $3 \times 4 = 12$). Portanto o problema de otimização não se altera, e teremos

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + 12 \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Note que a função objetivo não é mais linear, mas a adição de uma constante não afeta em qualquer maneira o problema de otimização. De fato, a solução básica

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfaz as equações da PL e possui valor objetivo igual a 12.

(v) Repetimos o item (iii). Agora só faz sentido aumentar x_2 pois é a única cujo valor na função objetivo é positivo, ou seja, a única que poderia contribuir para melhorar a solução final.

Se aumentarmos x_2 em 1 unidade, teremos o vetor $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ contendo as reduções necessárias nas outras variáveis de forma que as restrições continuem satisfeitas, ou seja,

$$\mathbf{A}\boldsymbol{z} = 0.$$

Assim $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{z}$ melhorará o valor objetivo para qualquer valor de $t > 0$. A única restrição é que $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{z} \geq 0$. O maior t que torna isto possível é o mínimo entre 8, 8/3, e 2, ou seja, 2, ou seja, $t = 2$. A nova solução será

$$\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo novo valor na função objetivo atualizada é 13.

(vi) Repetimos o item (iv) - faça o passo a passo como exercício!

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + 13 \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Note que a solução básica

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfaz as equações da PL e possui valor objetivo igual a 13.

(vii) Repetimos (ou tentamos repetir) o item (iii). Note entretanto que não existe variável que faça sentido aumentar em $\boldsymbol{x}$ tendo em vista o atual formato do vetor $\boldsymbol{c}$.

(viii) A PL está resolvida. Este foi o método simplex.

Fazendo passo a passo, queremos colocar a matriz identidade nas colunas 1, 2 e 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

trocar última e penúltima linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

multiplicar segunda linha por 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

multiplicar segunda por $-1/2$ e somar na primeira e por $-3/2$ e somar na terceira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Em relação à função objetivo $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + 12$, multiplicamos a segunda linha por -1/2 e somamos nela, adicionando 13 como constante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + 13$$

Exercício 25. Note que o cálculo explícito dos vetores $\boldsymbol{z}$ não é necessário (passo iii). A única coisa que você precisa fazer é, uma vez que a variável a ser aumentada seja decidida, achar a entrada da coluna associada que será transformada em 1, e portanto qual coluna deixa de fazer parte da identidade. Em outras palavras: você só precisa achar a coluna que entra na base, e a coluna que sai. Como fazer essa escolha?

Quando a variável x_i vai entrar na base, escolhemos a restrição j com valor mínimo de b_j/A_{ij}. Ao aumentarmos x_i nesta restrição, a variável básica associada cuja entrada na matriz identidade é 1 passará a ser zero, ou seja, sairá da base.

Exercício 26. Refaça este exemplo, mas na primeira vez que chegar ao passo (iii), comece aumentando x_2, deixando x_1 fixo. Daí pra frente, faça como achar melhor. Note que no final, o valor de ótimo precisa ser o mesmo.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Solução básica: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

- Aumentando x_2 pois $c_2 = 2$ (Fazendo sem calcular z):
  - $b_1/a_{12} = 8$
  - $b_2/a_{22} = 4$ - mínimo
  - $b_3/a_{32} = 5$
- Nova solução: $x_2 = 4$. Nova solução $= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, novas variáveis básicas: x_2, x_3, x_5, valor obj $= 8$.
- Eliminação Gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Obj era $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - multiplica 1a por -2 e soma: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + 8 \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Solução básica: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Aumentando x_1 pois $c_1 = 2$:
  - $b_1/a_{11} = 8$
  - $b_2/a_{21} = 8/3$
  - $b_3/a_{31} = 2$ - mínimo
- Nova solução: $x_1 = 2$. Nova solução $= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, novas variáveis básicas: x_1, x_2, x_3, valor obj $= 4 + 8 = 12$.
- Eliminação Gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Obj era $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ - multiplica 1a por -2 e soma: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + 12 \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Solução básica: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Aumentando x_4 pois $c_4 = 1$:
  - $b_1/a_{14} = -2$
  - $b_2/a_{24} = 3$
  - $b_3/a_{34} = 1$ - mínimo positivo
- Nova solução: $x_4 = 1$. Nova solução $= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, novas variáveis básicas: x_1, x_2, x_4, valor obj $= 12 + 1 = 13$.
- Eliminação Gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Obj era $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$ - multiplica 3a por -1 e soma: $\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Algumas observações:

(i) Este método sempre resolverá uma PL. Nós entretanto não demonstraremos isto formalmente agora.

(ii) Geometricamente, cada iteração dos pontos (ii)-(iv) correspondem a: achar uma solução na região viável, caminhar até uma face aumentando o valor da função objetivo, depois achar o melhor caminho para caminhar pela face até a próxima face.

(iii) Na próxima seção, veremos uma maneira esquemática de repetirmos esses passos.

Exercício 27. Considere o sistema de equações abaixo

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}$$

e os vetores

(a) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Para cada um deles, decida se é uma solução básica ou não, e se for, se é viável ($\geq \mathbf{0}$) ou não.

(a) Não é solução pois sua substituição na matriz resulta em $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\end{pmatrix}$, e não $\begin{pmatrix}2 & 2 & 6\end{pmatrix}$.

(b) É solução e é viável, mas não é básica pois as colunas 1, 2 e 3 não são LI (a coluna 3 é combinação linear das colunas 1 e 2).

(c) A solução é viável, e é básica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{-1*1a na 2a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{2a/2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{-1*2a na 3a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{3a/3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{-1*3a na 1a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) A solução é viável, e é básica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{1a/2 e 2a/2}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{-3*1a na 3a}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{-1*2a na 3a}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ -3/2 & -3/2 & 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Qualquer coluna dentre a 1a, 2a, 5a e 6a pode fazer parte da base. Porém neste caso a base é dita degenerada.

(e) A solução é viável. Fazendo a eliminação Gaussiana:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix} \text{ 2a troca com 3a}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix} \text{ -2*1a na 2a e 3a}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2 & -4 & -2 & -4 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} \text{ 2a por 2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1\\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2\\ -2 & 0 & 2 & -4 & -2 & -4 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \text{ -1*2a na 1a e 2*2a na 3a}$$

$$\begin{pmatrix}3/2 & 1 & -1/2 & 3/2 & 0 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2\\ -3 & 0 & 3 & -3 & 0 & -3 & \boxed{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\\boxed{0}\end{pmatrix}$$

A 7a coluna é combinação linear da 2a e da 5a

Exercício 28. Considere a PL em FPI abaixo.

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

Construa PL equivalente em forma canônica para as bases formadas pelas colunas $\{1, 4\}$ e pelas colunas $\{3, 5\}$. A solução básica correspondente é viável?

Decida se esta PL é viável ou inviável. Se for viável, construa uma PL equivalente em forma canônica cuja solução básica associada seja viável. Se for inviável, apresente um certificado.

PL em forma canônica para a base de colunas $\{1, 4\}$:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

A solução básica correspondente $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$ é inviável (afinal, $\boldsymbol{x} \geq 0$).

PL em forma canônica para a base de colunas $\{3, 5\}$:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

A solução básica correspondente $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$ também não é viável.

A PL é viável (porém ilimitada). Uma PL equivalente em forma canônica, para a base de colunas $\{3, 4\}$:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

A solução básica correspondente é $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Para ver que a PL é ilimitada, observe que há colunas com todos os elementos não positivos na matriz de restrições. Isso significa que é possível aumentar as variáveis correspondentes infinitamente (e, com isso, aumentar o valor objetivo infinitamente) e ainda manter as restrições válidas.

Exercício 29. Considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Esta PL está na forma canônica para as colunas 3 e 4. Aplique o método simplex do Exemplo (8) para resolvê-la. O que aconteceu? Se você concluir algo interessante a respeito desta PL, ache um certificado para tal.

Escolhemos a coluna com c_i mais positivo. No caso, a 1a coluna com $c_1 = 5$. Note porém que os dois coeficientes são negativos. Isso significa que x_1 pode crescer infinitamente, pois para todo valor positivo de x_1 é possível aumentar também os valores de x_3 e x_4 para que a PL continue positiva. Isto implica que sempre que todos os coeficientes da coluna correspondente de uma variável candidata forem negativos, a PL é ilimitada.

Para encontrar o certificado, temos que encontrar $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ tal que:

$$\begin{aligned} -2d_1 + 4d_2 + d_3 + d_5 = 0 \\ -3d_1 + 7d_2 + d_4 + d_5 = 0 \end{aligned}$$

Repare que $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ satisfaz as três condições: $\mathbf{A}\boldsymbol{d} = 0, \boldsymbol{d} \geq 0$ e $\boldsymbol{c}^T d = 5 > 0$, sendo um certificado de unboundedness.

Note também que encontrar o certificado nestas condições é fácil: estando a PL em forma canônica, e encontrando um c_i positivo cuja coluna $\boldsymbol{A}_i$ correspondente é toda negativa, então para encontrar o certificado $\boldsymbol{d}$ basta colocar 1 na coluna encontrada e o valor correspondente nas demais colunas da base de forma due $\mathbf{A}\boldsymbol{d} = 0$.

1.9 O simplex via tableaus

Nesta seção mostraremos como aplicar o simplex de modo mais enxuto.

Considere a PL

$$\begin{array}{rl} \max & w = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + 0 \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

onde a variável w representa o valor objetivo. Note que esta PL já se encontra em forma canônica para a base viável formada pelas colunas 3, 4 e 5. Vamos reescrever as equações e a função objetivo como um sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Note que a primeira linha da matriz corresponde a $w - 2x_1 - 3x_2 = 0$, ou $w = 2x_1 + 3x_2$, que é o valor objetivo. Escrevemos agora a matriz aumentada deste sistema, distinguindo a linha da variável w, que só está nos ajudando a escrever a função objetivo como uma igualdade envolvendo as outras variáveis:

$$\mathbf{T}_1 = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

No simplex, escolhemos uma entrada de $\boldsymbol{c}$ que seja positiva. Como a matriz $\mathbf{T}_1$ possui $-\boldsymbol{c}^T$ na primeira linha, faremos agora:

(1) Escolhemos uma coluna cuja primeira entrada seja negativa. Digamos a 2a coluna.

(2) Escolhemos agora uma linha da 2a à 4a tal que a razão entre os elementos da última coluna e da 2a coluna seja o menor possível. No caso, 3a linha.

(3) Daí transformamos a 2a coluna usando eliminação Gaussiana, de modo que apenas o elemento na 3a linha e 2a coluna seja igual a 1, e o resto seja 0. Isso se chama "pivotear" o elemento (3,2).

$$\mathbf{T}_2 = \left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Repetimos agora na 3a coluna, pivoteando o elemento (2,3).

$$\mathbf{T}_2 = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 14 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Repetimos agora na 5a coluna, pivoteando o elemento (4,5).

$$\mathbf{T}_3 = \left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 0 & 1/2 & 17 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & \boxed{1} & 1/2 & 3 \end{array}\right)$$

Não há mais elementos negativos na 1a linha, e de fato, a função objetivo agora é

$$w = 17 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5,$$

cujo valor máximo, igual a 17, ocorre com $x_3 = x_5 = 0$, e corresponde à solução básica viável

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}^T,$$

que é facilmente observada em $\mathbf{T}_3$ (basta pensar que cada uma dessas variáveis é um peso multiplicando a coluna correspondente.)

Exercício 30. Considere a PL em FPI com

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Aplique o método simplex a esta PL iniciando com a base de colunas 1 e 4.

(b) Ache um certificado de que a PL é ótima ou ilimitada (no olho mesmo, por enquanto).

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \boxed{2} & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{pmatrix}\text{Mínimo}\\ 2/2 = 1\\ 5/1 = 5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 3/2 & 0 & -4 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & \boxed{4} & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \text{Mínimo} \\ < 0 \\ 4/4 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ \hline 0 & 3/8 & 1 & 0 & 1/4 & 2 \\ 0 & -1/8 & 0 & 1 & 1/4 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \text{Optimal} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$$

Solução ótima $= \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Certificado: $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Prova:

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 7 = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{y}^T \mathbf{A} = \boldsymbol{c}^T - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercício 31. Considere a PL em FPI dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolva a PL usando o simplex.

Base 4, 5, 6, entra 1

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \text{Mínimo} \\ < 0 \\ 2/1 = 2 \\ 6/2 = 3 \end{pmatrix}$$

Base 1, 4, 6, entra 2

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \text{Mínimo} \\ < 0 \\ < 0 \\ < 0 \end{pmatrix}$$

Certificado de inviabilidade, resolver

$$\begin{aligned} -2d_1 + d_2 + d_4 &= 0 \\ d_1 - d_2 &= 0 \\ 2d_1 - 3d_2 + d_6 &= 0 \end{aligned}$$

com $\boldsymbol{d} \geq 0$ e $d_3 = d_5 = 0$. Temos $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.10 O problema de achar soluções viáveis

Exemplo 9. Considere a PL

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & 1\\ -2 & -9 & 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}7\\ -13\end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Queremos apenas decidir por ora se esta PL é viável ou inviável. O primeiro passo é tornar $\boldsymbol{b} \geq 0$, já que desejamos eventualmente encontrar uma base de colunas na forma da matriz identidade, e que a solução correspondente a esta base seja viável. Fazemos então

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 9 & 0 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}7\\ 13\end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Agora, poderíamos testar todas as possível $\binom{4}{2}$ escolhas de duas colunas, até acharmos (ou não) uma que corresponda a uma base viável. Mas vamos mostrar abaixo um método mais eficiente! Este método usará uma nova PL para encontrar este par de colunas.

Construímos uma nova PL, chamada de *auxiliar*, em FPI, e que satisfaz a seguintes propriedades:

(a) Possui uma solução viável óbvia.

(b) É limitada, e nenhuma solução ótima pode ter valor objetivo maior que 0.

(c) Uma solução ótima da nova PL de valor objetivo igual a 0 é uma solução viável da PL original, e se o ótimo for menor que 0, a PL original é inviável.

Considere a PL aplicada a vetores $\boldsymbol{x}$ agora com 6 variáveis, ou seja, criamos duas variáveis novas:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \left(\begin{array}{cccc|cc}1 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 9 & 0 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}7\\ 13\end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Pare por um momento para entender como esta PL foi obtida da original. Claramente

(a) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 13\end{pmatrix}$ é solução viável para esta PL (note que aqui foi extremamente importante que $\boldsymbol{b} \geq 0$). Esta solução é básica, mas usa apenas as variáveis novas, e portanto sempre terá valor objetivo negativo (veja como o novo vetor $\boldsymbol{c}$ foi construído).

(b) Esta PL é limitada e nenhuma solução desta PL pode ter valor objetivo maior que 0, já que $\boldsymbol{x} \geq 0$ e o novo $\boldsymbol{c}$ é ≤ 0.

(c) Usando o simplex (faça como exercício), descobriremos que

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma **solução ótima para a PL auxiliar**, e, portanto, como $x_5 = x_6 = 0$, esta solução leva à **solução viável da PL original**.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Exemplo 10. Considere agora a PL

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Novamente, fazemos

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Esta PL é viável e limitada, e seu valor ótimo pode ser no máximo 0. Entretanto, ao resolvermos esta PL, obteremos o ótimo

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T,$$

cujo valor objetivo é -3. Podemos então concluir que a PL original deste exemplo é inviável, uma vez que qualquer solução viável para a PL original corresponderia a uma solução para a PL auxiliar com valor objetivo 0. Como seu ótimo foi -3, esta solução não existe.

Ademais, um certificado de otimalidade desta PL para uma solução ótima $\boldsymbol{x}$ é um vetor $\boldsymbol{y}$ tal que

(a) $\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \leq 0$.

(b) $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = -3$, logo < 0.

Escolhendo $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ teremos um certificado de otimalidade para a PL auxiliar, que é ao mesmo tempo um certificado de inviabilidade para a PL original.

Resumindo: dada uma PL

$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

onde $\mathbf{A}$ é $m \times n$ e $\boldsymbol{b} \geq 0$, então construímos a PL auxiliar

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

onde há precisamente m (-1)s na função objetivo, e a matrix identidade ao lado de $\mathbf{A}$ é de tamanho $m \times m$. Esta PL auxiliar é viável, seu ótimo é no máximo 0. A solução básica inicial usa as variáveis recém criadas. Rodamos então o simplex. Se seu ótimo é menor que 0, a PL original é inviável, e se seu ótimo for igual a 0, então qualquer vetor que atinja esse ótimo corresponde a uma solução básica viável da PL original, e a partir dela, poderemos então iniciar o simplex na PL original para achar seu ótimo.

Exercício 32. A PL abaixo é viável ou inviável?

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Primeiro, multiplicamos a primeira restrição da PL por -1 para termos $\boldsymbol{b} \geq 0$ e podermos aplicar o simplex:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Em seguida, construímos a PL auxiliar para a PL dada:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Para saber se a PL original é viável ou inviável, precisamos otimizar a PL auxiliar. Utilizando o simplex via tableaus, construímos o tableau da PL auxiliar:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Colocando em base canônica:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & \boxed{2} & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

A PL auxiliar tem valor objetivo ótimo igual a 0. Portanto, a PL original é **viável**.

Exercício 33. Suponha que uma dada PL seja inviável. Prove que um certificado de otimalidade para a PL auxiliar é também um certificado de inviabilidade para a PL original.

Aula 6

1.11 Simplex

Apenas para formalizar, segue o SIMPLEX em pseudo-código. Há também, em seguida, alguns comentários sobre sutilezas e nuances do algoritmo.

Método Simplex

Input: Uma PL e uma base viável de colunas B.
Output: Uma solução ótima, ou um certificado de que a PL é ilimitada.

1: Reescreva a PL para a forma canônica com respeito à base B.
Seja $\boldsymbol{x}$ a solução básica viável associada.
2: **Se** $\boldsymbol{c}_N \leq 0$, **então pare.** $\boldsymbol{x}$ é ótima.
3: Escolha um $k \in N$ tal que $\boldsymbol{c}_k > 0$.
4: **Se** $\boldsymbol{A}_k \leq 0$, **então pare.** A PL é ilimitada.
5: Seja r o índice j tal que o mínimo abaixo ocorre:

$$t = \min\left\{\frac{\boldsymbol{b}_j}{A_{jk}} : A_{jk} > 0\right\}.$$

6: Troque a r-ésima (na ordem da matriz identidade) coluna de B pela coluna k.
7: Volte para 1.

Este algoritmo passeia de solução básica em solução básica até encontrar a melhor. Cada solução básica corresponde a precisamente um valor objetivo, e como há um número finito de soluções básicas, se garantirmos que a cada rodada o algoritmo pára ou aumenta o valor objetivo, então teremos que este algoritmo sempre termina.

Exercício 34. Dada a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{aligned}$$

e um vetor $\boldsymbol{y}$ tal que $\boldsymbol{y} \geq 0$ e $\boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \geq \boldsymbol{c}^T$, mostre que nenhuma solução da PL pode ter valor objetivo maior que $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$.

Prova da dualidade fraca. Dado que $\boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \geq \boldsymbol{c}^T$, $\boldsymbol{x} \geq 0$ e sabendo que $\boldsymbol{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{c}^T = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

Agora, sabendo que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{y} \geq 0$:

$$\boldsymbol{y}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{y}$$

Sabemos que $\boldsymbol{x}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{y}$ é uma matriz 1×1, ou um escalar, e então:

$$\boldsymbol{x}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{x}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{y}\right)^T = \boldsymbol{y}^T \left(\mathbf{A}^T\right)^T \left(\boldsymbol{x}\right)^T = \boldsymbol{y}^T \mathbf{A} \boldsymbol{x}$$

Assim:

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^T \mathbf{A} \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\boldsymbol{y}$$

Exercício 35. Escreva um algoritmo baseado no simplex que resolve a PL

$$\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array}$$

sem precisar convertê-la para um problema de maximização.

1.11.1 Múltiplas soluções ótimas

Considere a PL abaixo:

$$\begin{array}{rrl} \max & x_1 + \frac{1}{2}x_2 & \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Primeiro escrevemos esta PL em FPI:

$$\begin{array}{rrl} \max & x_1 + \frac{1}{2}x_2 & \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad & = 4 \\ & x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 & = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Agora, vamos resolve-la via Simplex. Iniciamos com a base $\boldsymbol{x}_B = x_3, x_4$:

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

A solução viável básica no caso é $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ com valor 0 na função objetivo. Escolhemos x_1 para entrar na base, com x_3 saindo. O próximo tableau é dado por:

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A solução ótima é dada por $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Como não há elemento negativo na função objetivo, encontramos a solução ótima. Porém, note que $c_2 = 0$, isto é se aumentarmos o valor de x_2 e reduzirmos apropriadamente os valores de x_1 e x_4, não alteraremos o valor da função objetivo. Como exemplo, vamos entrar com x_2 na base (no caso, x_4 sai):

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

A solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}5/3 & 2/3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ também é ótima. Note que no novo tableau, $c_4 = 0$, o que indica que podemos voltar com x_4 à base no lugar de x_2 e obter a mesma solução anterior.

Em resumo: caso encontremos a solução ótima e no tableau final o coeficiente de uma variável não-básica seja zero, a entrada desta variável na base não pioraria o valor da função objetivo. Porém, pode ser que esta variável não possa entrar na base (não há elemento válido a ser pivoteado). Caso possa, a PL possui múltiplas soluções ótimas: não apenas as duas soluções básicas, mas também todos os pontos no segmento que une estas duas soluções.

Exercício 36. Como o problema acima no formato original possui apenas duas variáveis, verifique graficamente a razão de existirem múltiplas soluções.

1.11.2 Soluções degeneradas

Considere agora a seguinte PL:

$$\begin{array}{rrl} \max & 2x_1 + x_2 & \\ \text{sujeito a} & 3x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & x_1 - x_2 & \leq 2 \\ & x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Vamos novamente resolve-la usando o Simplex. O primeiro tableau com ela já em FPI é dado por:

$$\left(\begin{array}{c|rrrrr|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ll} \text{Base:} & x_3 = 6, x_4 = 2, x_5 = 3 \\ \text{Fora da base:} & x_1 = x_2 = 0 \end{array}$$

Escolhemos x_1 para entrar na base. Há um empate nas variáveis candidatas a sair da base ($x_3 \to 6/3 = 2$ e $x_4 \to 2/1 = 2$). Escolhemos arbitrariamente a segunda restrição (terceira linha do tableau). O segundo tableau é dado por:

$$\left(\begin{array}{c|rrrrr|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ll} \text{Base:} & x_1 = 2, x_3 = 0, x_5 = 3 \\ \text{Fora da base:} & x_2 = x_4 = 0 \end{array}$$

Observe que esta solução básica possui uma variável básica igual a zero (x_3). Quando isto ocorre, dizemos que a solução básica é **degenerada**. Isto deve ser motivo de preocupação? Vamos continuar com o Simplex. A variável x_2 deve entrar na base, e a razão mínima é dada pela primeira restrição (segunda linha da tabela): $0/4 = 0$. Assim x_3 sai da base:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1/4 & -3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ll} \text{Base:} & x_1 = 2, x_2 = 0, x_5 = 3 \\ \text{Fora da base:} & x_3 = x_4 = 0 \end{array}$$

Obtivemos quase que exatamente a mesma solução, com o mesmo valor e com apenas uma troca em uma variável básica. Ainda há elemento negativo na função objetivo, então continuamos o processo. A variável x_4 entra na base, enquanto que a variável x_5 sai:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 4/3 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ll} \text{Base:} & x_1 = 1, x_2 = 3, x_4 = 4 \\ \text{Fora da base:} & x_3 = x_5 = 0 \end{array}$$

A solução acima é ótima. Então, neste caso, a degeneração não impediu que o Simplex encontrasse o ótimo, ela apenas atrasou um pouco até que isto acontecesse. Porém, é possível criar exemplos em que a degeneração leva à **ciclagem**, isto é, uma sequência de pivôs que repete periodicamente os mesmos tableaus e que continua indefinidamente, entrando em *loop infinito*. Esta situação pode ser evitada pela seguinte regra:

Regra de Bland:

- Se para algum $r \in B$, $b_r = 0$, escolha a variável de menor índice dentre aquelas que podem entrar na base (com custo negativo). Na hora de escolher a variável que vai sair da base, em caso de empate escolha também a de menor índice.

Neste link (em inglês), é possível ver um exemplo de uma situação em que a regra de Bland evita a ciclagem.

Esta regra, apesar de garantir a não ocorrência da ciclagem, pode ser por vezes ineficiente. Na prática, por mais que a degeneração seja relativamente comum, em *solvers* comerciais e *open-source* nenhum esforço é dedicado a evitar a ciclagem, pois:

- Apesar da degeneração ser frequente, a ciclagem é extremamente rara.
- A precisão da aritmética computacional acaba cuidando da ciclagem por si só: erros de arredondamento se acumulam e eventualmente o método sai da ciclagem.

Exercício 37. De novo, como o problema acima possui apenas duas variáveis, interprete graficamente a degeneração.

1.12 Como achar certificados de ótimo e inviabilidade?

Considere uma PL em FPI

$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Assuma por enquanto que ela tem ótimo, e que portanto o simplex encontrará este ótimo. Se $\boldsymbol{z}$ é uma solução ótima, então $\boldsymbol{y}$ é certificado se

(a) $\boldsymbol{y}^T A - \boldsymbol{c}^T \geq \mathbf{0}$

(b) $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{z}$.

Ao resolvermos o simplex (usando o tableaux), começamos como na esquerda abaixo, e eventualmente terminamos na direita

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & -\boldsymbol{c}^T & 0 \\ \hline & & \\ & \mathbf{A} & \boldsymbol{b} \\ & & \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{c|c|c} 1 & \overline{\boldsymbol{c}}^T & \text{v.o.} \\ \hline & & \\ & \overline{\mathbf{A}} & \overline{\boldsymbol{b}} \\ & & \end{array}$$

Os vetores $\overline{\boldsymbol{c}}$, $\overline{\boldsymbol{b}}$ e a matriz $\overline{\mathbf{A}}$ foram obtidos após a realização de operações elementares de linhas. Necessariamente $\overline{\boldsymbol{c}}^T \geq \mathbf{0}$.

- Imagine tenha havido apenas uma única rodada no simplex, resultando em solução $\boldsymbol{z}$, e que, por exemplo, o vetor $\overline{\boldsymbol{c}}$ foi simplesmente $-\boldsymbol{c}$ somado à primeira linha da matriz A. A primeira linha da matriz A é simplesmente $\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \cdot A$. Daí teremos

$$\overline{\boldsymbol{c}}^T = -\boldsymbol{c} + \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} A \geq 0$$

- Se este tivesse sido o caso, o valor objetivo teria sido simplesmente $\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{z}$.

- Note então que este vetor $\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$ que registrou apenas o quanto de A foi adicionado a $-\boldsymbol{c}$ teria sido nosso certificado de ótimo (veja que ele satisfaz (a) e (b)).

No geral, todas as operações nas linhas de $\mathbf{A}$ que eventualmente serão somadas ao $-\boldsymbol{c}$ podem ser contempladas em um único vetor. Por exemplo, se $\mathbf{A}$ tivesse 3 linhas, e se tivéssemos somado 2 vezes a 1a na 2a linha de $\mathbf{A}$, e depois disso tivéssemos somado ao $-\boldsymbol{c}$ 2 vezes a 1a, -1 vezes a 2a, e 3 vezes a 3a, teríamos

$$\overline{\boldsymbol{c}}^T = \begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix} \mathbf{A} - \boldsymbol{c}^T,$$

e como $\overline{\boldsymbol{c}}^T \geq \mathbf{0}$ e $\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix} \boldsymbol{b}$ é o valor objetivo, igual a $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{z}$, teríamos que $\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}$ seria o certificado de ótimo. Para resumir, o vetor que registra quais linhas de $\mathbf{A}$ foram somadas a $-\boldsymbol{c}$ para obtermos $\geq \mathbf{0}$ é precisamente o certificado de ótimo. Abaixo, veremos como registrar isso de forma sistemática durante a execução do simplex. Para isso, vamos alugar a parte esquerda da matriz, onde antes havia uma inútil coluna.

Exemplo 11. Vamos resolver a PL:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}-1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2 \\ 5\end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Olhando para a matriz, vemos que já temos uma base viável de colunas, mas a PL não está em forma canônica. Começaremos escrevendo o tableaux em sua nova versão — a versão estendida de registro de operações (VERO$^{\text{TM}}$).

$$\begin{array}{cc|||cccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

Começaremos zerando as entradas do vetor $-\boldsymbol{c}$.

$$\begin{array}{cc|||cccc|c} -1 & 2 & 0 & -3 & 7 & 0 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

Note que $\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$ registra precisamente que somamos ao $-\boldsymbol{c}$ -1 vezes a 1a linha de $\mathbf{A}$, e 2 vezes a 2a. Agora SIMPLEX. Pivotearemos o 2 abaixo do -3.

$$\begin{array}{cc|||cccc|c} -1 & 2 & 0 & -3 & 7 & 0 & 8 \\ \hline 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc|||cccc|c} 1/2 & 2 & 3/2 & 0 & 4 & 0 & 11 \\ \hline 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}$$

Note que ao termos registrado que multiplicamos a 1a linha por $1/2$ quando normalizamos o 2 no primeiro tableaux, automaticamente pudemos saber que adicionamos $3 \cdot (1/2)$ da 1a linha original à linha do $\boldsymbol{c}$. Enfim, chegamos ao ótimo. E agora temos:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}^T \quad \text{v.o.} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{z} = 11$$

e o certificado de ótimo

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}1/2 & 2\end{pmatrix}^T.$$

De fato:

$$\boldsymbol{y}^T\mathbf{A} - \boldsymbol{c}^T = \begin{pmatrix}1/2 & 3 & 5 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/20 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

que é exatamente o que aparece sobre o tableaux, assim como

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1/2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 \\ 5\end{pmatrix} = 11.$$

O exemplo acima deve ter sido esclarecedor. Vamos ver agora o que aconteceria se tivéssemos registrado as operações ao resolvermos uma PL auxiliar.

Exemplo 12. Vamos resolver a PL:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 5 & -10 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Não está claro qual seria uma base viável. Logo, vamos para a PL auxiliar. A primeira coisa que faremos é multiplicar a 1a linha por -1, e portanto já registraremos esta operação. Depois montamos a PL auxiliar.

$$\begin{array}{rr|||rrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -10 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rr|||rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -8 & 17 & 0 & 0 & -2 \\ \hline -1 & 0 & -1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -10 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|||rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -8 & 17 & 0 & 0 & -2 \\ \hline -1 & 0 & -1 & 3 & -7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/5 & -1/5 & 1 & -2 & 0 & 1/5 & 1/5 \end{array} \quad \rightarrow$$

$$\begin{array}{rr|||rrrrr|r} 1 & 3/5 & 2/5 & 0 & 1 & 0 & 8/5 & -2/5 \\ \hline -1 & -3/5 & -2/5 & 0 & -1 & 1 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & -1/5 & 1 & 2 & 0 & 1/5 & 1/5 \end{array}$$

Como o ótimo da PL auxiliar é negativo, a PL original é inviável. Mais importante que isso neste momento, seja $\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 \end{pmatrix}$, ou seja, o certificado de ótimo da PL auxiliar. Note que

$$\boldsymbol{y}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

exatamente o que aparece na linha de cima do tableaux, e que é $\geq \mathbf{0}$ já que o tableaux está em estado de ótimo. Ademais

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2/5 < 0,$$

portanto $\boldsymbol{y}$ é um certificado de inviabilidade.

Ou seja, acabamos de ver na prática que o certificado de ótimo de uma PL auxiliar que resultou num ótimo negativo é precisamente igual a um certificado de inviabilidade da PL original!

A partir de agora, tente resolver todas as suas PLs com a VERO™.

1.13 Um pouco mais de geometria

(este é um material de leitura opcional)

Exercício 38. O objetivo deste exercício é compreender melhor a geometria da região viável de uma PL, assim como a natureza das soluções básicas. Considere uma PL em FPI

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{aligned}$$

que seja viável e limitada. Suponha que $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$, $n \geq m$, e seu posto é igual a m.

(a) Suponha que $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$ são soluções viáveis. Mostre que para qualquer α, $0 \leq \alpha \leq 1$, o vetor

$$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{z}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{z}_2$$

também é uma solução viável. (em particular, você estará mostrando que a região de viabilidade é convexa).

(b) Mostre que o valor objetivo de $\boldsymbol{z}$ não pode ser estritamente maior que ambos os valores objetivos de $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$, e que se $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$ são soluções ótimas, então $\boldsymbol{z}$ também é.

(c) Mostre que se $0 < \alpha < 1$, $\boldsymbol{z}$ não pode ser uma solução básica viável da PL.

(d) Mostre que se $\boldsymbol{w} > 0$ (ou seja, um vetor em que todas as entradas são positivas) e $\boldsymbol{w}$ é viável, então existem $\boldsymbol{w}_1 \neq \boldsymbol{w}_2$ soluções viáveis tais que $\boldsymbol{w} = 1/2(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2)$, a não ser possivelmente no caso em que $n = m$.

(e) Desafio: mostre que os vértices da região viável (ou seja, os pontos que não pertencem a um segmento viável) são exatamente as soluções básicas viáveis.

(a) Temos que $\mathbf{A}\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{b}$ e $\mathbf{A}\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{b}$. Então

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{A}\boldsymbol{z}_1 &= \alpha\boldsymbol{b} \\ (1-\alpha)\mathbf{A}\boldsymbol{z}_2 &= (1-\alpha)\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{A}\boldsymbol{z}_1 + (1-\alpha)\mathbf{A}\boldsymbol{z}_2 &= \alpha\boldsymbol{b} + (1-\alpha)\boldsymbol{b} \\ \mathbf{A}\alpha\boldsymbol{z}_1 + \mathbf{A}(1-\alpha)\boldsymbol{z}_2 &= \boldsymbol{b} \\ \mathbf{A}(\alpha\boldsymbol{z}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{z}_2) &= \boldsymbol{b} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

(b)

(c)

(d)

(e) Suponha que $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ seja uma solução básica viável com n componentes, assumindo sem perda de generalidade que as variáveis básicas estão no início da matriz. Então:

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}$$

onde $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, as primeiras m colunas da matriz $\mathbf{A}$, são linearmente independentes. Suponha que $\boldsymbol{x}$ possa ser expressa como uma combinação convexa de dois outros pontos, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ tal que $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$, então

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{z}, 0 < \alpha < 1$$

Como todos os componentes de $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ são não-negativos, e $0 < \alpha < 1$, então os últimos $n - m$ componentes de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ são zero. Então temos que:

$$y_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + y_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}$$

e

$$z_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + z_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}$$

Porém, uma vez que os vetores coluna $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ são linearmente independentes, o sistema de equações acima possui solução única, e obrigatoriamente $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$. Então $\boldsymbol{x}$ não pode ser escrito como uma combinação convexa de $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ a não ser que sejam iguais, ou seja, que sejam um vértice (ponto extremo).

Dado um vetor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de vetores $\boldsymbol{x}$ que satisfaz

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = 0$$

é um hiperplano, ou seja, um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$. O vetor $\boldsymbol{a}$ é o vetor diretor do hiperplano, ortogonal a todos os vetores que lá se encontram. Ao trocarmos $=$ por $\leq$ ou $\geq$, passamos a considerar a metade do $\mathbb{R}^n$ que se encontra de um lado ou de outro do hiperplano. Por exemplo, o conjunto dos $\boldsymbol{x}$ tais que

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq 0$$

é o conjunto de todos os vetores $\boldsymbol{x}$ tais que o ângulo entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{a}$ está entre 0 e $\pi/2$. Tais conjuntos são chamados de hiperespaços. Ao adicionarmos uma constante, por exemplo

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq \beta,$$

estamos apenas transladando o hiperplano que serve de fronteira entre o hiperespaço e o seu complemento.

As restrições lineares de uma PL sempre são da forma

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \beta \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \beta \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq \beta.$$

Note que $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq \beta$ é equivalente a $(-\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{x} \leq -\beta$, e que $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \beta$ é equivalente a simultaneamente termos $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \beta$ e $(-\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{x} \leq -\beta$. Portanto as restrições de uma PL sempre podem ser expressas usando $\leq$, e ao juntarmos todas elas, teremos

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \tag{$*$}$$

para uma certa matriz $\mathbf{A}$ e um vetor b. Conjuntos de vetores $\boldsymbol{x}$ satisfazendo $(*)$ são chamados de poliedros. Todo poliedro é uma interseção finita de hiperespaços.

Toda PL consiste em otimizar uma função afim (linear adicionada de uma possível constante) em um poliedro.

Dados dois pontos $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, o segmento de reta entre eles pode ser expresso como

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Um conjunto C de pontos é chamado de convexo se para quaisquer dois pontos no conjunto, o segmento de reta entre eles também pertence ao conjunto.

Teorema 1. *Poliedros são convexos.*

Demonstração. Sejam $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ pontos satisfazendo $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$. Daí teremos que, para todo λ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\mathbf{A}(\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \leq \lambda\boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

□

Exercício 39. A reta entre dois pontos $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ é definida como

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por que não podemos usar a demonstração acima para mostrar que a reta entre dois pontos de um poliedro está sempre contida no poliedro?

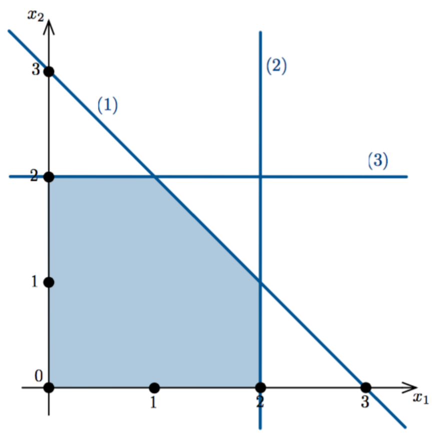
Um ponto $\boldsymbol{x}$ em um poliedro P é chamado de ponto extremo se não há qualquer segmento em P que tenha $\boldsymbol{x}$ como um ponto em seu interior. Nosso objetivo agora é entender como podemos identificar os pontos extremos de um poliedro olhando apenas para o conjunto de desigualdades $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ que o define. Se $\boldsymbol{x}_1$ é um ponto específico que satisfaz essas desigualdades, definimos como $\mathbf{A}^=$ a matriz associada a $\boldsymbol{x}_1$ que contempla todas as linhas em que a inequação é uma igualdade, e analogamente $\boldsymbol{b}^=$. Ou seja, $\mathbf{A}^=\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}^=$.

Teorema 2. *Seja $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ um poliedro, e suponha que $\boldsymbol{x}_1 \in P$. Seja $\mathbf{A}^=\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}^=$ o conjunto de restrições com igualdade para $\boldsymbol{x}_1$. Então $\boldsymbol{x}_1$ é um ponto extremo de P se, e somente se, o posto de $\mathbf{A}^=$ é igual a n.*

Exemplo 13. Considere o poliedro definido por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuja região correspondente no $\mathbb{R}^2$ é dada por



Pegamos por exemplo o ponto $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Segue que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e portanto nenhuma das linhas corresponde a uma restrição com igualdade. Segue que $\mathbf{A}^=$ é a matriz vazia, de posto 0, e $\boldsymbol{x}$ não é ponto extremo.

Considere agora $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Teremos

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto a última linha é uma restrição com igualdade, e $\mathbf{A}^= = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{b}^= = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$. Como o posto de $\mathbf{A}^=$ é igual a 1, e não 2, este ponto $\boldsymbol{x}$ não é um ponto extremo.

Considere agora $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$. Segue que

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto as duas primeiras linhas são restrições com igualdade, e daí teremos

$$\mathbf{A}^{=} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \boldsymbol{b}^{=} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como o posto de $\mathbf{A}^{=}$ é 2, este ponto $\boldsymbol{x}$ é um ponto extremo.

Apresentamos a demonstração do teorema.

Demonstração. Suponha que o posto de $\mathbf{A}^{=}$ é n, e suponha por contradição que $\boldsymbol{x}$ não é ponto extremo, logo existem $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ distintos, e um λ entre 0 e 1, tais que $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$. Segue que

$$\boldsymbol{b}^{=} = \mathbf{A}^{=}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{=}(\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \leq \lambda\boldsymbol{b}^{=} + (1-\lambda)\boldsymbol{b}^{=} = \boldsymbol{b}^{=}.$$

Portanto o sinal de desigualdade é uma igualdade, e daí segue que

$$\mathbf{A}^{=}\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{A}^{=}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}^{=},$$

logo $\mathbf{A}^{=}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = 0$, uma contradição ao fato de que $\mathbf{A}$ tem posto n.

Suponha agora que o posto de $\mathbf{A}^{=}$ seja menor que n, e portanto existe um vetor $\boldsymbol{d} \neq 0$ tal que $\mathbf{A}^{=}\boldsymbol{d} = 0$. Para todo $\epsilon > 0$, segue que $\boldsymbol{x}$ é ponto médio entre $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{d}$. Vamos mostrar agora que tanto $\boldsymbol{x}_1$ como $\boldsymbol{x}_2$ estão em P. Note primeiro que $\mathbf{A}^{=}\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{A}^{=}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}^{=}$, já que $\mathbf{A}^{=}\boldsymbol{d} = 0$, daí as únicas desigualdades em $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_1 \leq \boldsymbol{b}$ e $\mathbf{A}\boldsymbol{x}_2 \leq \boldsymbol{b}$ que faltam ser testadas são aquelas em que $\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ ocorria como desigualdade estrita. Mas aí basta escolhermos ϵ pequeno o suficiente para que a influência de $\mathbf{A}\boldsymbol{d}$ nestas desigualdades não seja relevante. □

Note que usando o teorema acima é possível mostrar com facilidade o desafio proposto na lista passada, ou seja, que os pontos extremos de poliedros correspondem a soluções básicas viáveis. Note o exercício abaixo.

Exercício 40. Considere o poliedro

$$P = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} \geq 0. \right\}.$$

Note que $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$ é uma solução básica viável.

(i) Reescreva as restrições que definem P para que apareçam apenas restrições com $\leq$.

(ii) Use o Teorema (2) para mostrar que $\boldsymbol{z}$ é um ponto extremo do poliedro.

Como vimos no final da lista passada, a solução ótima de uma PL sempre estará em um ponto de extremo, e portanto a estratégia de procurá-la passeando de solução viável para solução viável é uma estratégia eficaz.

Por fim, seja $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_m$ um conjunto de pontos no $\mathbb{R}^n$. Uma combinação convexa desses pontos é um ponto $\boldsymbol{x}$ que satisfaz

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + ... + \lambda_m\boldsymbol{x}_m,$$

onde $0 \leq \lambda_i \leq 1$ para todo i, e $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$.

Exercício 41.

(i) Considere três pontos não-colineares. Geometricamente, o que é o conjunto de todas as combinações convexas desses pontos?

(ii) Mostre que se três pontos pertencem a conjunto convexo, então todas as combinações convexas também pertencem.

(iii) Se convença, mas tente me convencer também, que um poliedro que não contenha uma semi-reta (ou se você preferir, um poliedro limitado) é precisamente o conjunto de combinações convexas dos seus pontos extremos.

Capítulo 2

Dualidade

Aula 7

2.1 Método Simplex Dual

Suponha que você queira resolver a seguinte PL:

$$
\begin{array}{llll}
 & \max & \begin{pmatrix} -4 & -8 & -9 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} & \\
(\mathrm{P}) & \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} & \\
 & & \boldsymbol{x} \geq 0. &
\end{array}
$$

Ao escrever em FPI, notaremos um fato inconveniente. A base de variáveis de folga não será viável, pois a última entrada do vetor $\boldsymbol{b}$ é negativa. Isso significa que primeiro precisaremos escrever a PL auxiliar para decidir se (P) é viável, e então eventualmente achar uma base viável para então colocarmos (P) em forma canônica.

Por outro, olhe como ficaria o tableaux.

$$
\left(\begin{array}{c|rrrrrr|r}
1 & 4 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -8
\end{array}\right)
$$

Vamos agora fazer modificações do tipo pivoteamento, de modo que o $\boldsymbol{c}$ permaneça ≥ 0, mas mudemos o sinal das entradas problemáticas de $\boldsymbol{b}$. Olhamos então a última linha, onde $\boldsymbol{b}$ é negativo, e selecionamos a entrada negativa que minimiza

$$
\frac{c_i}{-A_{3,i}}.
$$

Teremos $i = 1$. Daí fazemos pivoteamento:

$$
\left(\begin{array}{c|rrrrrr|r}
1 & 4 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & -8
\end{array}\right)
\to
\left(\begin{array}{c|rrrrrr|r}
1 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 4 & -32 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -15 \\
0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 & 3 & -21 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8
\end{array}\right)
$$

Agora duas entradas de $\boldsymbol{b}$ são negativas. Escolhemos a primeira, e na sua linha, há uma única entrada negativa, no caso será na coluna $i = 3$. Teremos

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 & 8 & 0 & 20 & -152 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -4 & 1 & -5 & 39 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

Note que $\boldsymbol{c}^T \leq 0$, e a base das colunas 1, 2 e 5 é viável. Portanto achamos uma solução ótima! Em particular

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

é ótimo pra primal, e note que como começamos com a PL em forma canônica pra base das últimas três colunas, as operações realizadas ao vetor $\boldsymbol{c}$ estão registradas nas últimas entradas, ou seja,

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

é o certificado de ótimo.

Resumindo, sabemos que B é uma base viável e ótima para uma PL se

(1) $\boldsymbol{c} \leq 0$ e $\boldsymbol{c}_B = 0$.

(2) $\boldsymbol{b} \geq 0$.

A filosofia do simplex (versão primal) é a seguinte:

(i) Encontra solução viável para a PL primal, ou seja, uma base satisfazendo (2) acima.

(ii) Modifica esta solução em direção a (1), mantendo (2) verdade.

A filosofia do simplex (versão dual) é a seguinte:

(i) Encontra solução satisfazendo (1).

(ii) Modifica esta solução em direção a (2), mantendo (1).

Exercício 42. Resolva a PL

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Note que ao colocá-la em FPI, teremos uma situação perfeita para aplicar o método simplex dual.

Para colocar em FPI, convertemos de minimização para maximização e adicionamos as variáveis de folga:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Multiplicamos as restrições por -1 para termos uma base viável (porém $\boldsymbol{b}$ negativo):

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Estamos na posição perfeita para aplicar o simplex dual. Montando o tableau:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 4 & -5 & 6 & 0 & 0 & 1 & -15 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -20 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Solução ótima $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 15 \end{pmatrix}$ (ou $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para a PL original), com valor objetivo 20.

Exercício 43. Resolva a PL

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{array}$$

usando o método simplex primal.

Uma vez que sua solução esteja pronta, suponha que você receba uma nova restrição adicional:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq 1.$$

Qual a maneira mais eficiente de aproveitar a sua solução antiga para achar uma solução para a nova PL?

Colocando em FPI (adicionando as variáveis de folga) e no tableau ao mesmo tempo, temos:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & 7/2 & -1/2 & 5/2 & 0 & 0 & 25/2 \\ \hline 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & \boxed{1/2} & -3/2 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 13 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Solução ótima $\boldsymbol{x} = \big(2, 0, 1, 0, 1, 0\big)$, com valor objetivo 13.

A maneira mais eficiente de aproveitar a solução antiga é adicionar a nova restrição ao tableau existente que já resolvemos. Para isso, precisamos de uma nova variável de folga que faz essa nova restrição se tornar uma igualdade. Com isso, o tableau fica:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Note que a PL não está mais em forma canônica. É preciso, portanto, restaurar a forma canônica. Fazemos isso mantendo as bases da solução anterior em conjunto com a nova base da variável de folga:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Veja que nossa PL não está mais otimizada. Vamos aplicar o simplex dual novamente. Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

A PL agora possui solução ótima $\boldsymbol{x} = \big(1, 0, 0, 3, 7, 5, 0\big)$, com valor objetivo 5. Note que a adição de restrições reduziu o valor objetivo da PL (o que faz sentido, visto que essa nova restrição diminui o espaço em que a solução ótima pode estar).

Exercício 44. Faça o mesmo no exercício 42. Suponha que após resolver a PL, o cliente chega e lhe diz que esqueceu a restrição mais importante, que é

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \leq 8.$$

Resolva a nova PL.

Relembrando, o tableau da solução do exercício 1 foi:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & -20 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Adicionamos essa nova restrição ao tableau e a variável de folga correspondente para tornar a restrição uma igualdade:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Colocamos a PL para em forma canônica para as mesmas bases da solução anterior, adicionadas da base da nova variável de folga:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & \boxed{-3} & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Resolvemos novamente o simplex dual para a PL. Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 12 & 20/3 & 0 & 13/3 & 0 & 0 & 7/3 & -74/3 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 1/3 & 0 & -4/3 & 0 & 0 & -1/3 & 32/3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -2/3 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

A nova solução ótima é $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 32/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 2 & 13 & 0 \end{pmatrix}$, com valor objetivo 74/3 ($24.\overline{6}$). Note que com a adição de uma nova restrição ou o valor objetivo iria ficar igual ou iria aumentar, pois o problema original é de minimização.

Aula 8 e 9

2.2 Dualidade

Nesta seção, estudaremos um importantíssimo aspecto das programações lineares. Descobriremos que para toda programação linear, poderemos definir uma outra, intimamente relacionada, chamada de programação dual (motivo pelo qual a PL original é costumeiramente chamada de primal).

Considere a PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Note que ao multiplicarmos a primeira inequação por 3 e somarmos à terceira, obtemos

$$7x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 8.$$

Ou seja, a função objetivo não pode ser maior do que 8. Sendo assim, caso o sistema abaixo possua alguma solução:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

encontraremos uma solução ótima. Por exemplo, no caso, $x_1 = x_2 = 2/3$, $x_3 = 0$.

Nem sempre entretanto é possível expressar a função objetivo como combinação das restrições. Por exemplo

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Não podemos expressar a função objetivo como uma combinação das inequações (por que?), mas suponha que existam $y_1, y_2 \geq 0$ que, quando multiplicados às restrições do problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & (2x_1 + x_2 + x_3)y_1 \leq 3y_1 \\ & (x_1 + 2x_2 + 3x_3)y_2 \leq 2y_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

nos garanta que:

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le y_1(2x_1 + x_2 + x_3) + y_2(x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

Então saberemos que $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 3y_1 + 2y_2$.

Por exemplo, para $y_1 = 6$ e $y_2 = 0$, teremos

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 12x_1 + 6x_2 + 6x_3 \le 18,$$

já que $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ e os coeficientes são não-negativos.

Com $y_1 = 0$ e $y_2 = 4$, temos

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 \le 8.$$

Com $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$, temos

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 7.$$

Uma boa escolha de y_1 e y_2 nos fornece um **limite superior** ao valor que a solução ótima do problema pode obter. Naturalmente, gostaríamos de encontrar o menor limite superior possível. É mais valioso dizer que a solução ótima do problema é ≤ 7 que ≤ 18, por exemplo.

Procuramos então y_1 e y_2, não-negativos, tais que $3y_1 + 2y_2$ seja o menor possível, e ainda assim tenhamos $2y_1 + y_2 \ge 4$, $y_1 + 2y_2 \ge 5$, e $y_1 + 3y_3 \ge 6$. Parece familiar?

Exercício 45. Escreva uma programação linear cuja otimização busca limitar os valores objetivos da PL

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \le \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0. \end{array}$$

Otimize ambas.

Para otimizar a PL original utilizando o simplex via tableaus, primeiro colocamos a PL em FPI:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0. \end{array}$$

Montamos o tableau:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1/2} & 3/2 & 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 2 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Valor objetivo ótimo da PL é 4, com solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Em seguida, montamos a PL cuja otimização limita os valores objetivos da PL original:

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

Para resolver, convertemos o problema de minimização para maximização e adicionamos as variáveis de folga. Note que como a restrição de desigualdade é $\geq$, as variáveis de folga são adicionadas do lado direito da inequação e, portanto, ficam negativas quando adicionadas à matriz de restrições.

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

Para encontrar uma base inicial viável para resolver essa PL, vamos precisar de utilizar uma PL auxiliar:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

Montando o tableau:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Colocamos em forma canônica:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & -4 & -4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{3/2} & -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & -1/3 & 4/3 & 0 & 4/3 & -1/3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1/3} & -1 & 1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & -1/3 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

O valor objetivo ótimo da PL auxiliar é 0. Portanto, a PL é válida, e a base viável encontrada foi $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para utilizar essa base, voltamos ao problema original e montamos o tableau com a matriz da PL auxiliar:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Colocamos em forma canônica para a solução viável encontrada:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

A PL já está otimizada, e não precisamos fazer mais nada. A solução deste problema, é, portanto, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, com valor objetivo igual a 4. Note que temos -4 no tableau porque estamos fazendo $\max(-\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{y}$ ao invés de $\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}$. Tudo funciona igual, mas o valor objetivo fica multiplicado por -1.

2.3 A PL dual

Considere uma PL, que chamamos de **primal**, dada por

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}
$$

Como vimos na seção anterior, é possível escrever uma PL, doravante chamada de **dual**, em que

cada restrição da primal corresponde a uma variável da dual.

Será um problema de minimização. O valor objetivo será calculado em termos de $\boldsymbol{b}$. O vetor $\boldsymbol{c}$ é o limite inferior das restrições. E tudo ainda precisa ser não-negativo. Ou seja

$$
(\mathrm{D}) \qquad \begin{array}{rll} \min & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} & \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \geq \boldsymbol{c}^T & (\text{ou equivalentemente } \mathbf{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}) \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. & \end{array}
$$

Note que este formato é específico para uma PL que esteja exatamente no formato de (P) acima. Como fazer por exemplo se a PL (P) estiver em FPI?

Originalmente, no exemplo acima, tínhamos $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$. Ao multiplicarmos ambos os lados por y_1, precisamos que $y_1 \geq 0$ para que o sinal da desigualdade não se invertesse. Se contudo tivéssemos $2x_1 + x_2 + x_3 = 3$, então y_1 poderia ter sido qualquer número e a igualdade não se alteraria. Temos portanto a seguinte formulação de **dualidade para uma PL em FPI:**

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad (\mathrm{D}) \quad \begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \text{ livre.} \end{array}
$$

Mais geralmente, temos a seguinte tabela que nos ensina como construir a dual de uma PL qualquer:

Primal			Dual		
	restrição	$\leq$	variável	≥ 0	
max $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	restrição	$=$	variável	livre	min $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$
sujeita a	restrição	$\geq$	variável	≤ 0	sujeita a
$\mathbf{A}\boldsymbol{x}\ ?\ \boldsymbol{b}$	variável	≥ 0	restrição	$\geq$	$\mathbf{A}^T\boldsymbol{y}\ ?\ \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x}\ ?\ 0$	variável	livre	restrição	$=$	$\boldsymbol{y}\ ?\ 0$
	variável	≤ 0	restrição	$\leq$	

Esta tabela é um bom guia, mas é mais eficiente que você...

(i) entenda a lógica da dualidade,

(ii) converta a primal para a FPI ou para o formato de (P) acima,

(iii) memorize a dual desses formatos.

Exercício 46. Considere a programação linear

$$(P) \qquad \begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

(i) Escreva em FPI.

(ii) Escreva a dual.

(iii) Escreva a dual em FPI.

(iv) Escreva a dual da dual, e a coloque em FPI. O que aconteceu?

(v) Ache soluções viáveis para a primal (P) e a sua dual (D).

(vi) Verifique que o valor objetivo da solução viável da primal é menor ou igual que o valor objetivo da solução viável da dual.

(vii) Calcule o valor ótimo de cada PL.

Faça o mesmo para a PL

$$(P) \qquad \begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Para a primeira PL:

(i) Basta adicionar as variáveis de folga:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

(ii) Dual para a PL original:

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

(iii) Adicione as variáveis de folga (negativas). Após isso, multiplique a equação toda por -1 e converta de minimização para maximização (multiplicando o vetor $\boldsymbol{c}$ por -1) para colocar em FPI:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} -8 & -8 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

(iv) Para escrever a dual da dual original, primeiro convertemos a dual original para um problema de maximização e multiplicamos as restrições por -1 (alterando a desigualdade):

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} -8 & -8 & -5 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Após isso, escrevemos a dual da dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \geq \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{z} \geq 0. \end{aligned}$$

Para colocar em FPI, convertemos de um problema de minimização para um problema de maximização, adicionamos as variáveis de folga (que são negativas pois foram adicionadas ao outro lado da inequação) e multiplicamos as restrições por -1:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{z} \geq 0. \end{aligned}$$

O que aconteceu é que a PL em FPI encontrada é a PL primal em FPI. Ou seja, a dual da dual é a primal.

(v) A solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ é solução viável da primal em FPI, enquanto a solução $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é solução viável da dual em FPI.

(vi) O valor objetivo da primeira é 0, e da segunda 16. O valor da dual é maior que o da primal, como vimos anteriormente a solução da dual é um limite superior à solução da primal.

(vii) Resolvendo usando o simplex via tableaus para a PL primal:

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 12 \\ \hline 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1/2} & -1/2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 13 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

O valor objetivo ótimo da primal é, portanto, 13, com solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ou $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ para a PL original).

Já para a PL dual, vai ser necessário encontrar uma base viável inicial utilizando uma PL auxiliar. Lembrando da PL dual em FPI:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} -8 & -8 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

Em seguida, formulamos a PL auxiliar:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

Resolvemos o simplex via tableaus:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Colocando em forma canônica:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & -3 & -3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & \boxed{3/2} & 1/2 & 1/2 & -1 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Voltando à PL original, com solução básica inicial $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 8 & 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Colocamos em base canônica:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 8/3 & 8/3 & -40/3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1/3} & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -13 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

O valor objetivo ótimo da dual é, portanto, 13, com solução $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ou $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ para a PL original).

Note que o valor objetivo ótimo tanto da PL primal quanto da dual é 13.

Para a segunda PL:

$$(\text{P}) \qquad \begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

(i) Para por em FPI, basta adicionar as variáveis de folga:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

(ii) Dual da PL original:

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

(iii) Para a dual em FPI, convertemos de minimização para maximização e adicionamos as variáveis de folga (negativas):

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} -6 & -10 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

(iv) Para escrever a dual da dual, primeiro convertemos a dual original para um problema de maximização e multiplicamos as restrições por -1 (alterando a desigualdade):

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} -6 & -10 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

Em seguida, escrevemos a dual da dual:

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \geq \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{z} \geq 0. \end{array}$$

Para colocar em FPI, convertemos de minimização para maximização, adicionamos as variáveis de folga (negativas) e multiplicamos as restrições por -1:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{z} \geq 0. \end{array}$$

Note que, novamente, a dual da dual é igual à primal.

ATENCAO: v e vi estao errados abaixo

(v) A solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ é solução viável da primal em FPI, enquanto a solução $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ é solução viável da dual em FPI.

(vi) O valor objetivo de ambas as soluções é 0, e, portanto, a solução viável da primal é menor ou igual à solução viável da dual.

(vii) Vamos utilizar uma estratégia diferente para resolver ambas as PLs e poupar muito tempo no processo. Ao invés de resolver primeiro a PL primal e depois a PL dual, vamos resolver apenas a PL primal e utilizar de propriedades de dualidade para encontrar a solução da dual ao mesmo tempo. Antes de mais nada, vamos relembrar a PL primal em FPI:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Para resolver a PL primal e conseguir a solução da dual ao mesmo tempo, ao resolver a PL primal vamos guardar a matriz de operações realizadas durante a execução do simplex. Ao fim da execução, a solução da PL dual vai estar na primeira linha da matriz de operações.

Para simplificar, vamos colocar a matriz de operações à esquerda do tableau, criando um tableau estendido que possui a matriz de operações incorporada à esquerda. O tableau passa a ser, então:

$$\left(\begin{array}{ccc|||ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Note que a matriz à esquerda guarda todas as operações que foram feitas em cada linha, inclusive à função objetiva. Também note que nesse caso, coincidentemente, as colunas das variáveis de folga formam a mesma matriz da matriz de operações.

Começamos já escolhendo uma coluna para pivotear:

$$\left(\begin{array}{ccc|||ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{ccc|||ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ \hline 1 & -1/2 & 0 & 0 & \boxed{1/2} & 1 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{ccc|||ccccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 14 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \boxed{2} & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Pivoteando:

$$\left(\begin{array}{ccc|||ccccc|c} 5/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 & 0 & 1/2 & 17 \\ \hline 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 5 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 \\ -3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & -3/2 & 1 & 1/2 & 3 \end{array}\right)$$

O valor objetivo ótimo da primal é, portanto, 17, com solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (ou $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ para a PL original). A solução da dual é a primeira linha da matriz de operações. Ou seja, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Se verificarmos a solução, vamos ver que o valor objetivo ótimo da dual também é 17. Note que, novamente, os valores objetivos ótimos da primal e da dual são os mesmos.

Exercício 47. Usando a tabela acima, mostre que a dual da dual é sempre igual a primal.

Aulas 10 e 11

Considere novamente a PL primal:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}
$$

Ao resolva-la com o Simplex a partir da base inicial x_3, x_4 e x_5 e pivoteando inicialmente na primeira coluna, obtemos a seguinte sequência de tableaus:

$$
\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 12 \\ \hline 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1/2} & -1/2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 13 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)
$$

O valor objetivo ótimo da primal é 13 e a solução ótima $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Desta forma, a base viável ótima é formada pelas colunas 1, 4 e 2. A ordem x_1, x_4, x_2 indica quais variáveis são definidas pelas primeira, segunda e terceira restrições respectivamente.

Agora suponha que alguém lhe dissesse de antemão que esta base inicial (x_1, x_4 e x_2) era válida e viável, e que te recomendasse começar o tableau a partir dela. Além de resolver o problema a partir desta base, vamos também adicionar um passo a mais: sabendo que a matriz $\mathbf{A}_B$ desta base é não-singular, vamos também calcular sua inversa em conjunto com o processo de deixar a matriz na forma canônica.

Para tal, substituímos a primeira coluna do tableau (importante conceitualmente, mas de pouco uso prático) por três colunas representando uma matriz identidade inicial que, após as operações elementares para deixar a matriz $\mathbf{A}$ em forma canônica, conterá justamente a inversa $\mathbf{A}_B^{-1}$ (por que?). Partimos do tableau inicial:

$$
\left(\begin{array}{ccc||ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)
$$

A quarta coluna (a segunda da base) já está em forma canônica. Faremos o processo na 1a coluna, pivoteando o elemento relativo à primeira restrição, e na 2a coluna, pivoteando o elemento relativo à 3a restrição:

$$\left(\begin{array}{rrr|||rrrrr|r} 3/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 12 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & 0 & 4 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|||rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 13 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Obtivemos o mesmo tableau final que quando começamos o simplex a partir da base (x_3, x_4, x_5). Isto não é coincidência, pois mesmo que através de cálculos diferentes, há apenas um tableau possível em forma canônica para uma base qualquer. Observe também que a obtenção da matriz identidade na base (x_1, x_4, x_2) é equivalente a multiplicar $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ por $\mathbf{A}_B^{-1}$, ou seja:

$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$$

Considere $\boldsymbol{c}_B^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ como os coeficientes da função objetivo dos elementos da base, na ordem em que aparecem (x_1, x_4, x_2). Para deixar a primeira linha do tableau em forma canônica, fizemos (note o sinal negativo em $\boldsymbol{c}^T$ devido à inversão da função objetivo no tableau):

$$-\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}$$

Exemplificando com os dados acima:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $-\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} \geq 0$ (pois o tableau é invertido), sabemos que a solução é ótima. Assim também obtivemos também o valor ótimo $\boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} = 13$.

Voltando àquela matriz identidade original que adicionamos à esquerda do tableau, note que obtivemos, acima dela, o vetor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Este vetor foi obtido fazendo-se $\boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}$. Como veremos em breve, esta é a solução ótima do problema dual, e também um certificado de otimalidade da PL primal.

2.4 Teorema fraco

Como vimos na aula passada, a dual é construída de modo que seu valor objetivo seja sempre um limitante superior para o valor objetivo da primal. Formalizamos isso no teorema abaixo, onde assumimos que a primal está escrita em FPI.

Teorema 3 (Teorema fraco da dualidade)**.** *Sejam (P) e (D) um par primal-dual de programações lineares, (P) em formato FPI, e seja $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ soluções viáveis para (P) e (D), respectivamente. Então:*

(i) $\mathbf{c}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$.

(ii) Se $\mathbf{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$, *então $\boldsymbol{x}$ é solução ótima para (P), e $\boldsymbol{y}$ é solução ótima para (D).*

Demonstração.

(i) Já que $\boldsymbol{x}$ é viável para (P), segue que

$$\boldsymbol{y}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}.$$

Já que $\boldsymbol{y}$ é viável em (D), ou seja, $\boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \geq \boldsymbol{c}^T$, segue que, para todo $\boldsymbol{x} \geq 0$,

$$\boldsymbol{y}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

Temos portanto

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}.$$

(ii) É uma consequência imediata do item (i).

□

Note que este teorema **ainda não está dizendo que se ambas as PLs tem ótimos, então estes ótimos são iguais.** Isso de fato é verdade, e veremos logo mais, reforçando ainda mais o motivo pelo qual definimos duais como tal. Contudo, por enquanto, a única coisa que sabemos é que se a primal e a dual possuírem soluções viáveis de mesmo valor objetivo, então essas soluções são respectivos ótimos de cada PL. Note aqui que uma solução da dual com mesmo valor objetivo que uma solução da primal é exatamente o que estávamos chamando de certificado de otimalidade.

Corolário 4. *Seja (P) e (D) um par primal-dual de PLs.*

(i) Se (P) é ilimitada, então (D) é inviável.

(ii) Se (D) é ilimitada, então (P) é inviável.

(iii) Se (P) e (D) são viáveis, então ambas são limitadas. □

Exercício 48. Considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Ache o ótimo.

(ii) Ache um certificado de otimalidade (ou seja, um vetor $\boldsymbol{y}$ tal que $\boldsymbol{c}^T \leq \boldsymbol{y}^T \mathbf{A}$ e $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{z}$, onde $\boldsymbol{z}$ é ótimo).

(iii) Escreva a dual.

(iv) Ache o ótimo da dual sem realizar o simplex novamente.

(i) Montando o tableau estendido, em que ao lado esquerdo da barra tripla ficam as operações realizadas:

$$\left(\begin{array}{ccc|||cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{2} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{ccc|||cccccc|c} 0 & 3/2 & 0 & 0 & -2 & 1/2 & 0 & 3/2 & 0 & 6 \\ \hline 1 & -1/2 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{ccc|||cccccc|c} 2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 12 \\ \hline 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ -1 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

O valor objetivo ótimo é 12, com solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) A primeira linha da matriz de operações contém um certificado de otimalidade. Portanto, um certificado de otimalidade é $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Dual:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\
\text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{y} \geq 0.
\end{aligned}
$$

(iv) O ótimo da dual é o mesmo da primal, ou seja, 12.

Exercício 49. Escreva a dual da PL abaixo

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Mostre que a dual é inviável de duas formas diferentes:

(i) Mostrando que a primal é ilimitada.

(ii) Usando uma PL auxiliar.

Dual:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\
\text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{y} \geq 0.
\end{aligned}
$$

(i) Para mostrar que a primal é ilimitada, colocamos ela em FPI:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Agora, somamos a terceira linha à primeira:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Note que a variável $\boldsymbol{x}$ correspondente à segunda coluna torna a PL ilimitada: ela pode ser aumentada infinitamente (aumentando, com isso, o valor objetivo infinitamente) sem desrespeitar as restrições, pois essa variável apenas reduz o valor à esquerda das equações das restrições, o que pode ser equilibrado pelas outras variáveis.

Como a PL primal é ilimitada, a dual é inviável.

(ii) Para utilizar a PL auxiliar para mostrar que a PL dual é inviável, transformamos o problema de minimização em maximização e adicionamos as variáveis de folga (negativas). A terceira restrição também é multiplicada por -1 para ficarmos com vetor $\boldsymbol{b}$ positivo:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} -10 & -10 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, montamos a PL auxiliar:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Montando o tableau para resolver a PL auxiliar usando o simplex via tableaus:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Colocando em forma canônica:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc|c} 1 & -5 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc|c} 1 & 0 & 15/2 & 11/2 & -3/2 & 1 & -1 & 5/2 & 0 & 0 & -5/2 \\ \hline 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5/2 & -3/2 & \boxed{1/2} & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\
\hline
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1
\end{array}\right)$$

A PL auxiliar tem valor objetivo ótimo -1. Portanto, a PL original é inviável.

2.5 Teorema Forte da Dualidade

Como já vimos em exemplos acima, quando as PLs em um par primal-dual são viáveis e limitadas, os valores ótimos podem ser, de fato iguais. Os exemplos não foram uma coincidência. Este fato é particularmente relevante, tanto de um ponto de vista prático como teórico.

Teorema 5. *Sejam (P) e (D) um par primal-dual de PLs, e suponha que (P) está em FPI. Se existe uma solução ótima para (P), então existe uma solução ótima para (D), e, ademais, o valor objetivo ótimo de (P) e (D) é igual.*

Demonstração. Temos

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{array}$$

Sabemos que existe uma solução ótima para (P) que é básica. Seja $\boldsymbol{z}$ uma solução ótima básica de (P) para uma base B. Aplicamos uma rodada do simplex, e obteremos uma PL em forma canônica. Esta PL é obtida multiplicando $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ por $\mathbf{A}_B^{-1}$, e usando os coeficientes de $\boldsymbol{c}_B$ para somar as linhas das novas equações de modo que $\boldsymbol{c}_B$ se torne 0 e $\boldsymbol{c}_N$ se torne não-positivo. Ou seja

$$\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} \leq 0,$$

de modo que

$$(\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A})\boldsymbol{z} = 0.$$

Como $\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$, segue que o valor ótimo é precisamente

$$\boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Considere $\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}$. Vamos mostrar que $\boldsymbol{y}$ é solução viável para (D) com mesmo valor objetivo que $\boldsymbol{z}$ em (P').

(i) Como $\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} \leq 0$, segue que $\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \leq 0$, logo $\mathbf{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$. Logo $\boldsymbol{y}$ é viável.

(ii) Como $\boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$, segue que o valor objetivo de $\boldsymbol{y}$ em (D) é igual ao valor objetivo de $\boldsymbol{z}$ em (P).

Pelo teorema fraco da dualidade, segue que o ótimo de (D) não pode ser menor que o ótimo de (P), e portanto eles tem que ser iguais. □

Exercício 50. Considere o par a seguir de PLs:

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} -3 & \alpha & 13 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{matrix} \leq \\ \leq \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{array}$$

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} \beta & 5 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} -3 \\ \alpha \\ 13 \end{pmatrix} \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Existe α e β tais que $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ são respectivos ótimos? Se sim, ache. Se não, explique.

As duas PLs formam um par primal-dual. Portanto, os ótimos devem ser iguais. Temos, então:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3 & \alpha & 13 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} \beta & 5 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \begin{pmatrix} -3 & \alpha & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ -3 + 2\alpha &= 10 + 25 \\ 2\alpha &= 3 \\ \alpha &= 19 \end{aligned}$$

Além disso, se olharmos para a segunda restrição da PL dual, temos que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} &\geq \alpha \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} &\geq \alpha \\ 4 + 15 &\geq \alpha \\ \alpha &\leq 19 \end{aligned}$$

Portanto, existe $\alpha = 19$ para que os dados vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sejam ótimos. Agora precisamos confirmar β. Observando a primeira restrição da PL primal:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} &\leq \beta \\
\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &\leq \beta \\
4 + 4 &\leq \beta \\
\beta &\geq 8
\end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha = 19$ e $\beta \geq 8$ os dados vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são os respectivos ótimos das duas PLs.

Exercício 51. Considere a PL

$$\begin{array}{rl}
\min & \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 10 & 25/2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
& x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ livre}, x_4 \geq 0.
\end{array}$$

Escreva a dual, e determine para quais valores de α a solução $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é ótima para a PL acima.

Dual (lembre-se que a dual da dual é a primal, então o que estamos realmente fazendo aqui é considerando a PL original como dual e escrevendo a sua primal, pois é mais simples):

$$\begin{array}{rl}
\max & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\
\text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 10 \\ 25/2 \end{pmatrix} \\
& y_1 \geq 0, y_2 \leq 0
\end{array}$$

Note agora que se a solução $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é ótima, então quer dizer que o valor objetivo ótimo da PL é 1. Encontrar uma solução da dual que satisfaz esse mesmo valor objetivo é trivial. Para isso, veja que para terceira restrição da dual ser satisfeita, y_1 deve ser 2. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} &= 1 \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= 1 \\
2 + 2y_2 &= 1 \\
2y_2 &= -1 \\
y_2 &= -1/2
\end{aligned}$$

Se a solução encontrada para $\boldsymbol{y}$ for viável, nós garantimos que a solução da primal é ótima. A solução $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \end{pmatrix}$ será solução ótima se satisfizer todas as restrições. Desse modo, para a segunda restrição, temos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} &\geq \alpha \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} &\geq \alpha \\ -3 &\geq \alpha \\ \alpha &\leq -3 \end{aligned}$$

Portanto, como todas as outras restrições da dual são satisfeitas, para que $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ seja solução ótima da PL original precisamos apenas que $\alpha \leq -3$.

2.6 PLs inviáveis ou ilimitadas

Nós sabemos que toda PL satisfaz uma das três possibilidades abaixo:

(i) É inviável.

(ii) É viável e ilimitada.

(iii) É viável e limitada, e possui uma solução ótima.

Nós agora podemos relacionar essas possibilidades para um par primal-dual de PLs.

Corolário 6. *Sejam (P) e (D) um par primal-dual de PLs. Há precisamente quatro casos:*

(i) Ambas são inviáveis.

(ii) (P) é viável e ilimitada, e então (D) é inviável.

(iii) (D) é viável e ilimitada, e então (P) é inviável.

(iv) Ambas são viáveis, e então ambas possuem soluções ótimas.

Demonstração. Consequência direta do fato que toda solução da primal é um limitante para a dual e vice-versa, e que se uma PL possui ótimo, então sua dual também possui. □

Exercício 52. Considere as quatro PLs primais abaixo, e as quatro PLs duais em seguida. Associe os pares corretamente, e em seguida decida qual caso do corolário acima se aplica a cada par. Apresente certificados.

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

max $2x_1 + x_2$	max $2x_1 + x_2$
sujeito a $x_1 + x_2 \geq 4$	sujeito a $x_1 - x_2 \geq 4$
$x_1 + x_2 \leq 2$	$x_1 - x_2 \leq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2 \geq 0$

min $-4y_1 + 2y_2$	min $4y_1 + 2y_2$
sujeito a $y_1 - y_2 \leq -2$	sujeito a $y_1 + y_2 \geq 2$
$y_1 - y_2 \leq -1$	$y_1 - y_2 \geq 1$
$y_1, y_2 \geq 0$	$y_1, y_2 \geq 0$

min $-4y_1 + 2y_2$	min $4y_1 + 2y_2$
sujeito a $-y_1 + y_2 \geq 2$	sujeito a $y_1 + y_2 \geq 2$
$y_1 - y_2 \geq 1$	$-y_1 - y_2 \geq -1$
$y_1, y_2 \geq 0$	$y_1, y_2 \geq 0$

PLs reordenadas como pares primal-dual:

$$
(P)\quad \begin{aligned} \max\quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a}\quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
(D)\quad \begin{aligned} \min\quad & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeito a}\quad & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}
$$

Após observar as PLs, nota-se que se $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos o valor objetivo de ambas as PLs iguais a 4. Portanto, ambas as PLs são viáveis e limitadas. O caso aplicado aqui é o *(iv)*.

$$
(P)\quad \begin{aligned} \max\quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a}\quad & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
(D)\quad \begin{aligned} \min\quad & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeito a}\quad & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}
$$

PL primal é ilimitada (segunda variável pode ser aumentada infinitamente e ambas restrições podem ser mantidas). PL dual é inviável (devido à segunda restrição). O caso que se aplica aqui é o *(ii)*.

$$(P)\quad \begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad (D)\quad \begin{array}{rl} \min & -4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeito a} & y_1 - y_2 \leq -2 \\ & y_1 - y_2 \leq -1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Note que a primal é inviável: se multiplicarmos a primeira restrição por -1 e somarmos à segunda, encontramos $0 \leq -2$, o que é obviamente falso. Já a dual é ilimitada: note que podemos aumentar o valor da variável y_1 infinitamente, diminuindo, com isso, o valor objetivo infinitamente, e ainda será possível equilibrar as restrições com a variável y_2. O caso que se aplica aqui e, portanto, o *(iii)*.

$$(P)\quad \begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 \geq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad (D)\quad \begin{array}{rl} \min & -4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeito a} & -y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Primal e dual são inviáveis. Para a primeira, basta multiplicar a primeira restrição por -1 e somar à segunda. O resultado encontrado é $0 \leq -2$, o que é obviamente falso. Para a dual, basta somar a primeira restrição à segunda. O resultado encontrado é $0 \geq 3$, o que também é obviamente falso. O caso que se aplica aqui é, portanto, o *(i)*.

Certificados que provam que a primal e a dual são inviáveis são a solução ótima das respectivas PLs auxiliares, que têm valor objetivo menor que 0.

Exercício 53. Considere a PL

$$\begin{array}{rl} \max & a_1x_1 + a_2x_2 \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \text{ livre.} \end{array}$$

(i) Mostre que é inviável.

(ii) Escreva sua dual.

(iii) Ache todos os valores de a_1 e a_2 tais que a dual seja (1) viável (2) inviável (3) viável e ilimitada.

(iv) A dual pode ser viável e limitada?

(i) Se adicionarmos a primeira inequação à segunda, temos:

$$\begin{array}{rl} \max & a_1x_1 + a_2x_2 \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \text{ livre.} \end{array}$$

Note que a segunda restrição nunca vai ser verdade. Portanto, a PL é inviável.

(ii) Dual:

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \leq 0 \end{array}$$

(iii) Primeiro, vamos adicionar três vezes a primeira equação à segunda:

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 3a_1 + a_2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \leq 0 \end{array}$$

Concluímos daí que para essa PL ser inviável, basta que $3a_1 + a_2 \neq 0$. Já nos casos em que a PL é viável, sempre teremos $a_2 = -3a_1$. Vamos então reescrever a PL com nossas descobertas sobre a_1 e a_2 como uma restrição separada:

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = a_1 \\ & \boldsymbol{y} \leq 0,\ a_2 = 3a_1 \end{array}$$

Note que, como $\boldsymbol{y} \leq 0$, não importa o valor de a_1, sempre podemos diminuir $\boldsymbol{y}$ infinitamente de maneira a manter a equação de restrição válida e ainda diminuir o valor objetivo (estamos minimizando). A PL é, portanto, sempre ilimitada quando é viável.

Com isso, concluímos que a PL é viável e ilimitada se $a_2 = -3a_1$ e inviável caso contrário.

(iv) Nesse caso, a dual nunca pode ser viável e limitada. Citando o teorema forte da dualidade, uma PL de um par primal-dual só pode ser viável e limitada se a outra também for.

2.7 Folgas complementares

Considere a programação linear

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0. \end{array}
$$

cuja dual é

$$
(\mathrm{D}) \qquad \begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge 0. \end{array}
$$

Suponha que adicionemos a (P) variáveis que representem as diferenças de $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{b}$. Ou seja, as **folgas**. Seja $\boldsymbol{u}$ o vetor que contém tais variáveis. Teremos então

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \ge 0. \end{array}
$$

Sejam agora $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ soluções viáveis para o par primal-dual, e $\boldsymbol{u}$ as variáveis de folga correspondentes a $\boldsymbol{x}$. Segue que

$$
\begin{aligned} \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{y}^T(\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) \\ &= (\boldsymbol{y}^T\mathbf{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{u} \\ &\ge \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{u}. \end{aligned}
$$

Esta última desigualdade segue do fato que $\boldsymbol{x} \ge 0$ e $\boldsymbol{y}^T\mathbf{A} \ge \boldsymbol{c}^T$.

Suponha agora que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ fossem soluções ótimas. Então pelo Teorema Forte da Dualidade, temos $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$. Logo

$$
\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{u} \le 0.
$$

Como ambos os vetores são não-negativos, isso só é possível se, para cada índice i, ou $\boldsymbol{y}_i = 0$ ou $\boldsymbol{u}_i = 0$. Toda essa análise serve também para o dual, e independe da forma em que a PL é apresentada.

Soluções viáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ para um par primal-dual de PLs (P) e (D) satisfazem as **condições das folgas complementares** se

- Ou $\boldsymbol{x}_j = 0$, ou a j-ésima restrição de (D) é satisfeita com igualdade.
- Ou $\boldsymbol{y}_i = 0$, ou a i-ésima restrição de (P) é satisfeita com igualdade.

Vimos que se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são ótimas, essas condições são satisfeitas. O converso também é verdadeiro, ou seja...

Teorema 7 (Teorema das Folgas Complementares)**.** *Dado um par primal-dual (P) e (D) de PLs, e soluções viáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, então $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são ótimas se, e somente se, as condições de folgas complementares são satisfeitas.*

Exercício 54. Considere o seguinte par primal-dual

$$
(P)\quad \begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}5 & 3 & 5\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} \end{array}
\qquad \Bigg| \qquad
(D)\quad \begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix}2 & 4 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \end{array}
$$

Prove que $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ são soluções ótimas de duas maneiras diferentes. Uma usando o Teorema Fraco da Dualidade, e a outra usando o Teorema das Folgas Complementares.

Faça o mesmo para o par

$$
(P)\quad \begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}12 & 26 & 20\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 6 & 5\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \begin{matrix}\leq\\ \leq\\ =\end{matrix} \begin{pmatrix}-1\\2\\13\end{pmatrix} \\ & x_1, x_3 \geq 0 \end{array}
\qquad \Bigg| \qquad
(D)\quad \begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix}-1 & 2 & 13\end{pmatrix}\boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 6 & -1\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}\boldsymbol{y} \begin{matrix}\geq\\ =\\ \geq\end{matrix} \begin{pmatrix}12\\36\\20\end{pmatrix} \\ & y_1, y_2 \geq 0, \end{array}
$$

com as soluções $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}5 & -3 & 0\end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}0 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

Para o primeiro par de PLs:

- Usando o Teorema Fraco da Dualidade, note que os valores objetivos das duas PLs para as soluções dadas são iguais a 7. Portanto, ambas as soluções são ótimas.
- Usando o Teorema das Folgas Complementares, note que se resolvermos as restrições de ambas as PLs para as soluções dadas, teremos:

$$
(P)\quad \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix} \quad (D)
$$

  Para a primal, note que primeira restrição não é satisfeita com igualdade, mas a primeira variável de $\boldsymbol{y}$ é 0. Para a dual, note que as três restrições são satisfeitas com igualdade. O Teorema de Folgas Complementares é satisfeito, e, portanto, as soluções são ótimas.

Para o segundo par de PLs:

- Usando o Teorema Fraco da Dualidade, note que os valores objetivos das duas PLs para a soluções dadas são iguais a -18. Ambas as soluções são, portanto, ótimas.

- Usando o Teorema das Folgas Complementares, note que se resolvermos as restrições de ambas as PLs para as soluções dadas, teremos:

$$(P) \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \leq \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \\ 26 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \\ 20 \end{pmatrix} \quad (D)$$

  Para a primal, as três restrições são satisfeitas com igualdade. Já para a dual, a terceira restrição não é satisfeita com igualdade, mas a terceira variável de $\boldsymbol{x}$ é 0. O Teorema de Folgas Complementares é satisfeito, e, portanto, as soluções são ótimas.

Exercício 55. Prove que a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

possui solução ótima se, e somente se, existem uma combinação linear das linhas de $\mathbf{A}$ que é igual a $\boldsymbol{c}$.

Capítulo 3

Aplicações de PLs e nuances do simplex

Aula 12

3.1 Teoria de jogos

Nesta aula vamos dar um gostinho de teoria de jogos, e mostrar uma aplicação clássica do Teorema Forte da Dualidade.

Aqui vamos tentar formalizar a definição de um jogo. Vamos começar com pedra-papel-tesoura. Em cada rodada, dois jogadores fazem escolhas independentes, e a comparação das estratégias escolhidas define o resultado. Pedra-papel-tesoura é um jogo de soma zero: se jogador A ganha, jogador B perde, ou vice-versa. Não há como ambos ganharem ou ambos perderem. Um jogo como este pode ser formalizado como uma matriz:

	Pedra	Papel	Tesoura
Pedra	0	-1	1
Papel	1	0	-1
Tesoura	-1	1	0

.

Esta matriz $\mathbf{M}$ representa a pontuação recebida pelo jogador A, onde sua escolha é a linha, e a escolha de B é a coluna. Como este é um jogo de soma 0, a matriz que indica a pontuação de B é exatamente -1 vezes a transposta da matriz acima: se A ganha -1 em a_{12}, então B ganha 1 em a_{12}, etc.

Suponha que A e B fazem suas escolhas seguindo uma certa probabilidade. Por exemplo, A pode escolher $\boldsymbol{x} = (1/2, 1/4, 1/4)$, indicando que em 50% dos casos ele escolhe pedra, e os outros 50% ele divide igualmente entre papel e tesoura. Já B pode fazer $\boldsymbol{y} = (1/3, 1/3, 1/3)$, ou seja, mesma chance pra todos. Com essas escolhas feitas, podemos calcular o valor esperado do jogo para A:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_j m_{ij} \quad \text{, que é igual a} \quad \boldsymbol{x}^T \mathbf{M} \boldsymbol{y}.$$

O negativo deste valor é o valor esperado para B. Ou seja, A ganha

$$\boldsymbol{x}^T \mathbf{M} \boldsymbol{y} = 0.$$

E portanto B também ganharia 0. Por outro lado, se as escolhas tivessem sido $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0)$ e $\boldsymbol{y} = (0, 0, 1)$, então

$$\boldsymbol{x}^T \mathbf{M} \boldsymbol{y} = 1,$$

indicando que A ganharia sempre $+1$, e B ganharia sempre -1 (o que é de se esperar, já que A estaria garantindo que escolheria sempre pedra, e B escolheria sempre tesoura).

3.2 Estratégias

Imagine agora a situação em que A e B jogam, mas A anuncia sua estratégia probabilística antes do jogo para B. Será que isso dá alguma vantagem a B?

- A resposta é que depende da estratégia. Por exemplo, se A anuncia $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0)$, então B sabiamente escolheria $\boldsymbol{y} = (0, 1, 0)$ para ganhar. Mas note que se A escolher $\boldsymbol{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$, então não importa o que B faça, A vai acabar sorteando independentemente a sua escolha. Ou seja, há uma escolha de probabilidades para A que, mesmo que B tenha acesso a ela de antemão, ele não ganha qualquer vantagem.

Imagine agora outro jogo, chamado "Exemplo da Wikipedia". Neste jogo, A tem duas escolhas, e B tem três. A matriz que quantifica o pagamento para A a partir das combinações é a seguinte:

	1	2	3
1	30	−10	20
2	−10	20	−20

Aí A pensa assim: "se eu escolher 2, eu posso até ganhar 20, mas aí eu perco 10 ou 20, nas outras possibilidades. Por outro lado, escolher 1 me dá chance de ganhar 30 ou 20, e eu só perderia 10. Então vou escolher 1."Mas aí B se liga nisso e escolheria 2. Então A se toca que B pensaria assim, e na verdade escolhe 2 pra surpreender B. B que não é besta imagina que A pensaria nisso, e aí pega 3 pra ganhar 20 de A. E assim sucessivamente.... Qual a melhor estratégia?

- B decide então tomar uma atitude drástica: ele vai deixar que a sorte escolha. Mas não totalmente. Ele escolhe as probabilidades. Após muito refletir, B decide que $\boldsymbol{y} = (0, 1/2, 1/2)$ parece razoável. E se sentindo confiante, decide avisar a A de antemão que é assim que ele vai agir. O que A deveria fazer? Ora, A agora vai escolher sua probabilidade, ou seja, A escolhe $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, com $x_1 + x_2 = 1$, e o ganho final do jogo para A será

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & -10 & 20 \\ -10 & 20 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5x_1.$$

Ou seja, sabendo das probabilidades de B, A vai sempre escolher 1, e maximizará assim sua esperança de ganho. B, se sentindo injustiçado, decide jogar de novo. Mas dessa vez, ele quer forçar A a escolher suas probabilidades antes e anunciá-las. O que acontece?

- A, que não é besta e aprendeu das coisas comigo, manda pra B a seguinte escolha de probabilidades: $\boldsymbol{x} = (4/7, 3/7)$. B vai lá fazer suas continhas, pra achar $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$, com $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Daí temos

$$\begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & -10 & 20 \\ -10 & 20 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90/7 & 20/7 & 20/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{90}{7} y_1 + \frac{20}{7} y_2 + \frac{20}{7} y_3.$$

Ou seja, não importa o que B fizer, a esperança de ganho para A será pelo menos $20/7$!

Exercício 56. Suponha que em um dado jogo, a melhor estratégia probabilística para Alice é o vetor $\boldsymbol{x}$, e que

$$\boldsymbol{x}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qual a estratégia ótima para Bob?

3.3 Teorema Minimax

Não foi surpresa alguma que no jogo anterior A foi capaz de ganhar *mesmo* tendo que anunciar sua estratégia probabilística de antemão. A verdade é que: *não importa!!!*

Seja $\mathbf{M}$ a matriz do problema que dá os ganhos de A.

Vamos formular o problema supondo que A vai mandar sua distribuição para B. O jogador A sabe que B calculará $\boldsymbol{x}^T \mathbf{M}$ e escolherá a menor entrada deste vetor para concentrar suas probabilidades. No exemplo acima, A ganhou porque a menor entrada deste vetor era positiva, igual a $20/7$. Portanto A deseja maximizar a menor entrada de $\boldsymbol{x}^T \mathbf{M}$. Formulamos este problema como uma PL usando uma variável extra $\ell \in \mathbb{R}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & \ell \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{M}^T \boldsymbol{x} - \ell \mathbb{1} \geq 0 \\ & \mathbb{1}^T \boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente, se for B o primeiro a mandar, B estará resolvendo a PL

$$\begin{aligned} \min \quad & \omega \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{M} \boldsymbol{y} - \omega \mathbb{1} \leq 0 \\ & \mathbb{1}^T \boldsymbol{y} = 1 \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Agora que vem a graça da coisa toda: as duas PLs acima são duais uma da outra!!

De fato, seja $\boldsymbol{x}'^T = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^T & \ell\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}'^T = \begin{pmatrix}\boldsymbol{y}^T & \omega\end{pmatrix}$, e seja

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix}\mathbf{M}^T & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1}^T & 0\end{pmatrix}.$$

Então a primeira PL é

$$\begin{array}{rl}
\max & \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \ell\end{pmatrix} \\
\text{sujeito a} & \\
& \begin{pmatrix}\mathbf{M}^T & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1}^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \ell\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\geq \\ \geq \\ \vdots \\ \geq \\ =\end{matrix} \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0.
\end{array}$$

Sua dual será

$$\begin{array}{rl}
\min & \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y} \\ k\end{pmatrix} \\
\text{sujeito a} & \\
& \begin{pmatrix}\mathbf{M} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1}^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y} \\ k\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\geq \\ \geq \\ \vdots \\ \geq \\ =\end{matrix} \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{y} \leq 0.
\end{array}$$

Trocando $\boldsymbol{y}$ por $-\boldsymbol{z}$, teremos exatamente a formulação

$$\begin{array}{rl}
\min & \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{z} \\ k\end{pmatrix} \\
\text{sujeito a} & \\
& \begin{pmatrix}\mathbf{M} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1}^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{z} \\ k\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\leq \\ \leq \\ \vdots \\ \leq \\ =\end{matrix} \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{z} \geq 0.
\end{array}$$

Conclusão?

Teorema 8 (von Neumann)**.** *Em um jogo de soma zero entre duas pessoas, o valor máximo do ganho esperado mínimo de um jogador é IGUAL ao valor mínimo da perda esperada máxima do outro jogador. Ademais, cada jogador possui uma estratégia probabilística que satisfaz esta igualdade. Ou seja*

$$\max_{\boldsymbol{x}} \left(\min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y} \right) = \min_{\boldsymbol{y}} \left(\max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y} \right).$$

O valor descrito no teorema acima é o famoso equilíbrio de Nash do jogo.

Exercício 57. Considere o seguinte jogo. Alice e Bob decidem que a cor azul vale 10 reais, e que a cor verde vale 6 reais. Cada um deles escolhe uma cor. Se derem iguais, Bob paga a Alice o valor somado das duas cores (16). Se der diferente, Alice paga a Bob duas vezes o valor da cor que ela escolheu (20 ou 12).

(i) Este jogo é melhor pra quem? Calcule o equilíbrio de Nash.

(ii) Há alguma escolha de valores para as cores em que este jogo se torna justo?

Tabela do jogo:

Alice	Verde	Azul
Verde	16	20
Azul	6	16

Problema do Bob:

$$\begin{array}{rl}
\min & (\omega) \\
\text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 16y_1 & 20y_2 & -\omega \\ 6y_1 & 16y_2 & -\omega \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{y}, \omega \geq 0.
\end{array}$$

Resposta a ser terminada.

Aula 13

3.4 Análise de sensibilidade

Com tudo o que já vimos até agora, podemos compreender como alterações realizadas *a posteriori* na formulação da PL afetam a solução ótima encontrada para o problema original. Para isso, será sempre útil ter a matriz que codifica as operações realizadas pelo simplex para achar a base viável ótima. Antes, vamos apenas formalizar algo já visto anteriormente. Dada uma base, o tableau final obtido para aquela base (incluindo o tableau estendido à esquerda descrito anteriormente) é dado por:

$$\begin{array}{c|||c|c} \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1} & \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} - \boldsymbol{c}^T & \boldsymbol{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline \mathbf{A}_B^{-1} & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}$$

Vamos agora estudar como alterações *a posteriori* alteram a solução ótima de uma PL. Observe o seguinte exemplo.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

No *tableau estendido*, ao lado esquerdo da barra tripla, estamos simplesmente registrando as operações realizadas:

$$\left(\begin{array}{cc|||cccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 24 \end{array}\right)$$

Este caso está apropriado para o método simplex primal. Procedemos:

$$\left(\begin{array}{cc|||cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|||cccc|c} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & \boxed{1} & -2/3 & 1/3 & 6 \end{array}\right)$$

O que aprendemos com isso? Várias coisas:

(i) A base viável ótima é formada por colunas 1 e 2 (ao lado direito da barra tripla). Isolando essas colunas, podemos calcular....

(ii) ... a solução ótima, que é tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

ou seja, $\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$.

(iii) O valor objetivo é 9.

(iv) Também calculamos a solução ótima da dual, que está em cima, ao lado esquerdo da barra tripla. De fato, note que $\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ é uma solução viável para a PL dual

$$\text{(D)} \qquad \begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix} 3 & 24 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0, \end{array}$$

com valor objetivo igual a 9.

(v) Note que as condições de folga complementares são satisfeitas (e não poderia ser diferente). Ambas as soluções não possuem entradas iguais a 0, mas ambas satisfazem suas restrições com igualdade.

(vi) A matriz 2×2 ao lado esquerdo da barra tripla codifica as operações realizadas na PL. Ela nada mais é do que a inversa da matriz formada pelas colunas 1 e 2 originais. De fato, note que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

e que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Este último ponto é extremamente relevante. Suponha que ao término desta resolução, seu cliente lhe informe que na verdade houve um erro, e que as restrições deveriam ter sido

$$x_1 \leq 3 \quad \text{e} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 18.$$

Você então pensa da seguinte forma. "Se eu tivesse realizado as mesmas operações com este vetor, eu teria obtido"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o tableau final seria

$$\left(\begin{array}{rr|||rrrr|r} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & ? \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 4 \end{array}\right).$$

Este tableau corresponde a uma solução básica e viável, já que $\boldsymbol{b} \geq 0$, e ótima, já que está na forma canônica com $\boldsymbol{c} \leq 0$. Ou seja, $\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ é ótima, com valor objetivo $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = 7$.

Note que o ótimo do dual não se alterou.

Exercício 58. Determine o menor valor w para que, se $\boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 3 & w \end{pmatrix}$, a base de colunas 1 e 2 permaneça viável e ótima.

Se voltarmos ao tableau resolvido, temos:

$$\left(\begin{array}{cc||cccc|c} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 6 \end{array}\right)$$

Se substituirmos o valor original de b_2, que era 24, por w, e aplicarmos a matriz de operações nesse elemento e em $\boldsymbol{c}$, teremos:

$$\begin{aligned} b_2' &= -2/3 \times b_1 + 1/3 \times b_2 \\ b_2' &= -2/3 \times 3 + 1/3 \times w \\ b_2' &= w/3 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z' &= 1/3 \times b_1 + 1/3 \times b_2 \\ z' &= 1/3 \times 3 + 1/3 \times w \\ z' &= w/3 + 1 \end{aligned}$$

Lembrando que o valor ótimo z é cálculado como $c_B^T A_B^{-1} b$.
Substituindo no tableau:

$$\left(\begin{array}{cc||cccc|c} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & w/3+1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & w/3-2 \end{array}\right)$$

Note que a solução continuará ótima enquanto $b_2 \geq 0$. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} w/3 - 2 &\geq 0 \\ w &\geq 6 \end{aligned}$$

Com isso, o menor valor de w para a solução com a base de colunas 1 e 2 continuar viável é 6. A solução, nesse caso, será $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$, com valor objetivo 3.

Exercício 59. Como resolver agora se $\boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$? Dica: use o simplex dual.

Se começarmos do tableau resolvido:

$$\left(\begin{array}{cc||cccc|c} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 6 \end{array}\right)$$

Nós vamos mudar o vetor $\boldsymbol{b}$ para $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$. Porém, já realizamos operações no tableau. Precisamos, portanto, aplicar a matriz de operações ao novo vetor $\boldsymbol{b}$ para encontrarmos o valor que ele possui no tableau acima. Fazemos, portanto:

$$
\begin{aligned}
b_1' &= 1 \times b_1 + 0 \times b_2 \\
b_1' &= 2 \\
\\
b_2' &= -2/3 \times b_1 + 1/3 \times b_2 \\
b_2' &= -2/3 \times 2 + 1/3 \times 3 \\
b_2' &= -1/3 \\
\\
z' &= 1/3 \times b_1 + 1/3 \times b_2 \\
z' &= 1/3 \times 2 + 1/3 \times 3 \\
z' &= 5/3
\end{aligned}
$$

Atualizando o tableau e executando o simplex dual:

$$
\left(\begin{array}{cc|||cccc|c}
1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 5/3 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-2/3 & 1/3 & 0 & 1 & \boxed{\text{-2/3}} & 1/3 & -1/3
\end{array}\right)
$$

Pivoteando:

$$
\left(\begin{array}{cc|||cccc|c}
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 \\
\hline
0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 3/2 \\
1 & -1/2 & 0 & -3/2 & 1 & -1/2 & 1/2
\end{array}\right)
$$

Nova solução: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \end{pmatrix}$, com valor objetivo $3/2$.

Exercício 60. Resolva a PL

$$
\begin{array}{ll}
\max & \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Após sua resolução, encontre 2 restrições que podem ser eliminadas sem alterar a solução ótima.

Dica: use a dual.

Montando o tableau estendido:

$$
\left(\begin{array}{cccc|||cccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17
\end{array}\right)
$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{cccc||cccccc|c} 3&0&0&0&0&-2&3&0&0&0&12\\ \hline 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&4\\ -2&1&0&0&0&1&-2&1&0&0&3\\ -1&0&1&0&0&1&-1&0&1&0&5\\ -4&0&0&1&0&\boxed{1}&-4&0&0&1&1 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{cccc||cccccc|c} -5&0&0&2&0&0&-5&0&0&2&14\\ \hline 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&4\\ 2&1&0&-1&0&0&\boxed{2}&1&0&-1&2\\ 3&0&1&-1&0&0&3&0&1&-1&4\\ -4&0&0&1&0&1&-4&0&0&1&1 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{cccc||cccccc|c} 0&5/2&0&-1/2&0&0&0&5/2&0&-1/2&19\\ \hline 0&-1/2&0&1/2&1&0&0&-1/2&0&1/2&3\\ 1&1/2&0&-1/2&0&0&1&1/2&0&-1/2&1\\ 0&-3/2&1&1/2&0&0&0&-3/2&1&\boxed{1/2}&1\\ 0&2&0&-1&0&1&0&2&0&-1&5 \end{array}\right)$$

Pivoteia:

$$\left(\begin{array}{cccc||cccccc|c} 0&1&1&0&0&0&0&1&1&0&20\\ \hline 0&1&-1&0&1&0&0&1&-1&0&2\\ 1&-1&1&0&0&0&1&-1&1&0&2\\ 0&-3&2&1&0&0&0&-3&2&1&2\\ 0&-1&2&0&0&1&0&-1&2&0&7 \end{array}\right)$$

Solução ótima para a PL original $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}2 & 7\end{pmatrix}$, com valor objetivo 20, e solução para a dual $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Agora, se montarmos a PL dual, teremos:

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix}4 & 11 & 9 & 17\end{pmatrix}\boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

Note que, embora o valor objetivo ótimo da PL dual também seja 20 com a solução $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, a primeira e a quarta variáveis não contribuem em nada à solução. Essas variáveis podem, portanto, ser removidas sem mudar a solução. Ao fazer isso, estaremos removendo a primeira e quarta restrições da primal, que continuará ótima e com a mesma solução e valor objetivo.

Lembre-se que também podemos olhar isso ao notar quais restrições estão folgadas no problema primal.

Este último exercício nos mostra que restrições cuja variável dual correspondente na solução ótima é igual a zero podem ser eliminadas sem alteração na solução ótima de PL primal.

Dualmente, variáveis que são iguais a zero na solução ótima da PL primal podem ser eliminadas da sua programação sem alteração no valor ótimo.

Por fim, incluímos mais dois exemplos.

Exemplo 14. Considere a PL dual do exercício anterior (mas agora não pense nela como dual, e sim como uma PL primal):

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{pmatrix} 4 & 11 & 9 & 17 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Você aplica o simplex nesta PL (de fato: aplique, pratique!), e após sua solução você encontra o tableau

$$\left(\begin{array}{c|rrrrrr|r} & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 7 & -20 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Note que temos -20 porque estávamos fazendo $\max(-\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{y}$ ao invés de $\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}$. Tudo funciona igual, mas o valor objetivo fica multiplicado por -1.

Continuando.... Suponha agora que seu cliente lhe diz: "esqueça a variável y_2". Você fica chateado porque a variável y_2 era básica, mas mesmo assim você a apaga do seu tableau, obtendo:

$$\left(\begin{array}{c|rrrrr|r} & 2 & 0 & 2 & 2 & 7 & -20 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Como ajustar agora para acharmos o ótimo?

O problema perdeu uma variável básica. Isto indica também que o dual deste problema (que seria o primal do exemplo anterior!) perdeu uma restrição apertada. Ou seja, o problema dual continua viável, mas não é mais necessariamente ótimo. Vamos então reotimizar o problema através do simplex dual. Para facilitar, vamos começar multiplicando a primeira linha, que perdeu sua variável básica, por -1:

$$\left(\begin{array}{c|rrrrr|r} & 2 & 0 & 2 & 2 & 7 & -20 \\ \hline & -1 & 0 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Podemos aplicar (como visto anteriormente) o simplex dual escolhendo o mínimo:

$$\frac{\boldsymbol{c}_i}{-A_{1,i}}.$$

A idéia é sempre fazer a operação de pivoteamento correta que (1) não torna a solução inviável (2) não leva $\boldsymbol{c}$ a ficar ≤ 0. No caso, $i = 3$. Teremos então

$$\left(\begin{array}{c|rrrrr|r} & 4/3 & 0 & 0 & 8/3 & 19/3 & -62/3 \\ \hline & 1/3 & 0 & \boxed{1} & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ & -1/3 & 1 & 0 & 1/3 & -8/3 & 5/3 \end{array}\right)$$

Note que este novo tableau é ótimo para a base viável de colunas 2 e 3!

Poderíamos também ter evitado a multiplicação da primeira linha por -1 e escolhido, neste caso, o mínimo

$$\frac{\boldsymbol{c}_i}{A_{1,i}}.$$

Isto apenas nos pouparia um pouco de trabalho.

Por último, estudamos o que fazer quando uma variável é adicionada:

Exemplo 15.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Seu tableau estendido, que registra as operações realizadas, é:

$$\left(\begin{array}{ccc||cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Que, apos sua solução, leva a

$$\left(\begin{array}{rrr||rrrrrr|r} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ \hline 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Suponha agora que somos informados que uma variável foi omitida da formulação incorretamente. Na verdade, o problema original deveria ter sido:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Como proceder?

Ora, sabemos que após as mesmas operações realizadas originalmente, a coluna correspondente à nova variável será

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

e que seu valor no vetor $\boldsymbol{c}$, dado por $\boldsymbol{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \boldsymbol{A}_4 - \boldsymbol{c}^T$ (onde $\boldsymbol{A}_4$ é a coluna da nova variável x_4), será

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-4) = -1.$$

Note o -4 devido ao tableau inverter o valor do c_4 original. O tableau então será

$$\left(\begin{array}{rrr||rrrrrrr|r} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ \hline 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Então neste caso, basta aplicarmos o pivoteamento do simplex primal:

$$\left(\begin{array}{rrr||rrrrrrr|r} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 13 \\ \hline 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & \boxed{4} & 3 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

levando a

$$\left(\begin{array}{rrr||rrrrrrr|r} 11/4 & 1/2 & 7/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 11/4 & 1/2 & 7/4 & 27/2 \\ \hline 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 & 3/2 \\ 3/4 & -1/2 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 3/4 & -1/2 & 3/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

Resumindo: esteja confortável com o método simplex primal e dual. E então....

(i) Ao adicionarmos uma restrição após a solução: (1) eliminação Gaussiana para que a nova PL permaneça na base antiga (2) aplicar o simplex dual para achar uma nova base viável.

(ii) Variação no vetor $\boldsymbol{b}$: aplica a matriz de operações ao novo vetor $\boldsymbol{b}$. Se viável, maravilha. Se não, simplex dual.

(iii) Para remover restrições, cheque as entradas iguais a 0 na solução dual ótima.

(iv) Para remover variáveis: se for não-básica, nada muda, apenas remove. Se for básica, remove, e aplica uma espécie de simplex dual na linha correspondente com o sinal invertido.

(v) Para adicionar variáveis: aplica no vetor correspondente a matriz de operações da solução, incluindo as mudanças na entrada de $\boldsymbol{c}$. Se não estiver ótima, aplica-se o simplex primal.

Exercício 61. Explique como adaptar a solução de uma PL se houver uma mudança na função objetivo.

3.5 Interpretação econômica

Considere a seguinte situação. Uma indústria X produz n produtos, e cada produto i dá um lucro de $\boldsymbol{c}_i$. Para produzir estes produtos, a empresa usa m recursos, e há um máximo de $\boldsymbol{b}_j$ para cada recurso j. Finalmente, se usa A_{ji} quantidades do recurso j para produzir o produto i.

A pergunta, naturalmente, é quanto produzir de cada produto para maximizar o lucro total? Agrupando esses dados em vetores e matrizes, temos naturalmente a programação linear:

$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Vamos agora ver um exemplo do significado do dual. Suponha que até então esta empresa era um monopólio, e adquiria os recursos a um preço muito baixo do único produtor Z.

Uma segunda indústria Y, mais poderosa talvez, deseja entrar no mercado. Após sucessivas tentativas frustradas de comprar a indústria X, ela decide eliminá-la secando a fonte dela, ou seja, comprando todos os recursos disponíveis de Z. Como estabelecer uma proposta de preços para cada recurso de modo a minimizar o custo total, porém de modo que a oferta a Z seja irrecusável?

A empresa Y pensa assim. Para cada recurso j, com j de 1 a m, vamos propor o preço de $\boldsymbol{y}_m$. Queremos minimizar o custo da compra de todos os recursos, ou seja

$$\min \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}.$$

Para que nossa oferta a Z seja irrecusável, vamos oferecer um preço que cubra o que o X jamais conseguiria ganhar com a venda de seus produtos. Dessa forma, Z pensará que mesmo que X reformule sua produção, nossa oferta ainda será superior. Note que, com a produção de uma unidade do produto i, X gasta

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ji}$$

recursos. Cada uma dessas unidades rende a X um lucro de $\boldsymbol{c}_i$. Então vamos colocar preços de modo que ao comprar a mesma quantidade de recursos, Z receba pelo menos o que X receberia na venda do produto, ou seja

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ji}\boldsymbol{y}_j \geq \boldsymbol{c}_i.$$

Juntando todas elas para cada produto, temos exatamente

$$\mathbf{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}.$$

Obviamente, os preços, devem ser não-negativos, e então aparece a formulação:

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Esta é precisamente a PL dual. O mais impressionante, talvez, é que por conta do Teorema da Dualidade, a solução ótima para Y é exatamente o máximo que X conseguiria vender. Nem mais, nem menos.

A idéia aqui, obviamente, é limitada no sentido em que preços no mundo real não são determinados de modo tão simples. Este modelo ignora a existência de outros fatores, como demais concorrentes ou outros fornecedores de recursos. Mas ele estabelece uma idéia importante: a de que dado um certo processo de produção, os recursos usados possuem um preço inerente somente ao processo, também chamado de preço interno ou "shadow price".

E as condições de folga complementares, o que diriam? Nesta lógica, se um determinado recurso não é completamente usado por X, então Y pode oferecer qualquer valor a Z pelo excedente. Em certo sentido, Z estaria disposta a até mesmo dar de graça para poder fechar o negócio. Nessa lógica, a variável correspondente em $\boldsymbol{y}$ é 0.

Note também que uma pequena variação na quantidade disponível de cada recurso provavelmente não alterará o preço deste recurso. De fato, como vimos, alterações no vetor $\boldsymbol{b}$ podem, muitas vezes, não alterar o processo de solução no simplex. Ou seja, a solução dual permanece a mesma!

Considere agora o seguinte problema.

Exercício 62. Um estudante está decidindo o que comprar de uma padaria para um lanche. Há duas opções: brownies e cheesecakes, ao preço de 5 ou 8 reais, respectivamente (é possível comprar frações do lanche). A padaria usa 100 gramas de chocolate no cheesecake, 60g de açúcar no brownie e 120g no cheesecake, e 60g de creme no brownie e 150g no cheesecake. O estudante, seguindo a dieta do nutricionista, quer no mínimo 180g de chocolate, 300g de açúcar e 240g de creme. O objetivo, naturalmente, é gastar o mínimo possível.

(a) Formule a PL correspondente.

(b) Imagine agora que você é o distribuidor que vende à padaria chocolate, açúcar e creme. A padaria te informa precisamente o mínimo de cada ingrediente que ela precisa comprar para satisfazer o estudante, assim como quanto é gasto em cada lanche. Explique a interpretação econômica de dualidade, ou seja, qual a lógica do distribuidor para realizar essa venda, e como a PL dual captura isso?

(c) Usando as condições de folga complementares, explique qual seria a lógica se uma das variáveis na solução ótima da dual for zero, ou seja, o que explicaria o distribuidor vender algo de graça a padaria?

Capítulo 4

Programações inteiras

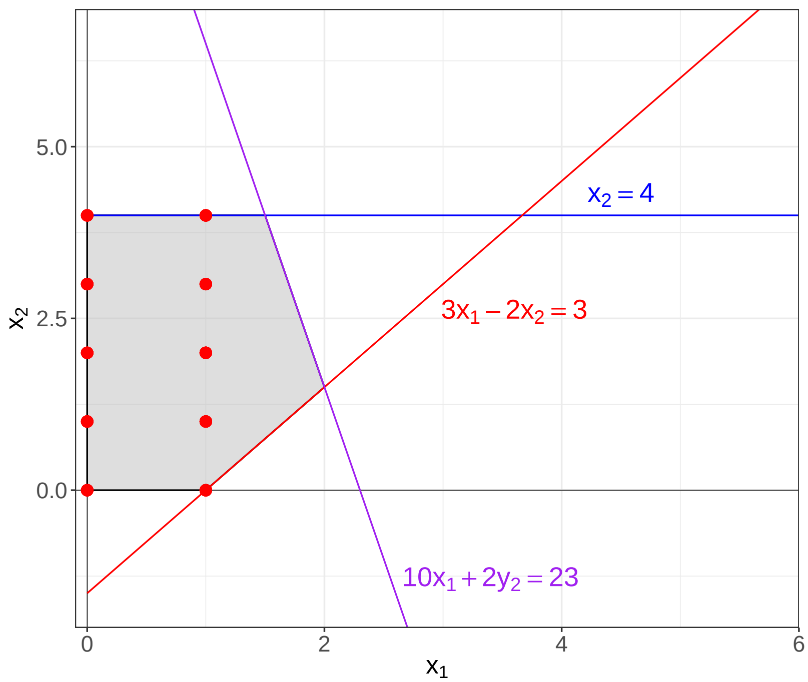
Aulas 14 e 15

4.1 Programações inteiras

Considere o problema de otimização abaixo:

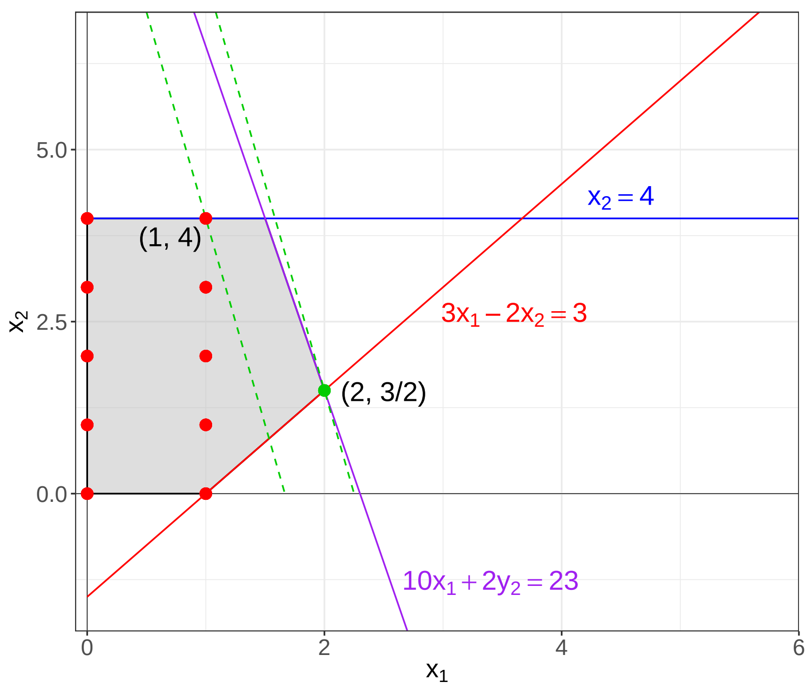
$$\begin{aligned} \max \quad & 12x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_2 \le 4 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ & 10x_1 + 2x_2 \le 23 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Se ignorarmos a última restrição (que diz que as variáveis devem ser inteiras), a PL correspondente pode ser representada graficamente pela figura abaixo:



Os vértices do poliedro que define a área viável são $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, 4)$, $(0, 4)$. A figura também inclui, em vermelho, os pontos dentro da área viável que são inteiros.

O ótimo (da PL) está no ponto $(2, \frac{3}{2})$. O problema é que ele é fracionário, isto é, a solução não satisfaz a condição de integralidade imposta. Observe a figura abaixo:



Os pontos inteiros viáveis mais próximos da solução ótima da PL são $(1, 1)$ e $(1, 2)$. Porém, como podemos ver na figura, o ótimo inteiro é o ponto $(1, 4)$. As linhas verdes pontilhadas representam a função objetivo passando pelo ponto ótimo da PL (com valor 27) e pelo ponto ótimo do problema inteiro (com valor 20).

Este exemplo dá uma ideia da dificuldade que é lidar com problemas de programação inteira: a solução ótima não é necessariamente próxima da solução ótima da PL obtida quando ignoramos a restrição de integralidade. Quando consideramos mais variáveis (mais dimensões), o problema se torna ainda mais crítico. Apontamos alguns fatos relevantes:

(i) O ótimo de uma programação inteira não está necessariamente na fronteira do poliedro.

(ii) Se a programação é um problema de maximização, o ótimo da PL é sempre maior ou igual que o ótimo da PI. No exemplo acima, o ótimo da PL era 27, e da PI 20.

(iii) O que acontece com dualidade?

(iv) Se todos os vértices do poliedro são pontos de coordenadas inteiras, então esses ótimos irão coincidir.

Em relação ao ponto (iv) acima, veremos mais pra frente que algumas PIs com um tipo de estrutura específica podem ser resolvidas facilmente. Porém, a grande maioria das PIs não possui tal estrutura, e é um problema em aberto se é possível resolve-las com algoritmos polinomiais ou não.

Veremos em breve dois algoritmos que resolvem PIs. Ambos os algoritmos possuem complexidade exponencial, porém funcionam rapidamente na prática em diversos casos (mas não todos!). Porém, inicialmente, vamos apresentar alguns exemplos de problemas que podem ser modelados como PIs.

4.2 Modelagem

Vimos nas aulas anteriores várias PLs onde faria sentido se, na verdade, tivessem sido modeladas como PIs. Por exemplo, ao planejar a produção de uma empresa, permitimos que a solução final sugerisse produzir uma quantidade fracionária de um certo produto ao invés de unidades inteiras. Outro exemplo é o problema da dieta, onde a solução pode indicar a compra de “5.3 ovos” ou “10.2 porções de carne”. Na prática, faria sentido impor que as porções devem ser inteiras para diversos alimentos (com exceção daqueles que compramos a granel, por exemplo).

Nesta seção, veremos exemplos de problemas onde somente faz sentido utilizar programação inteira.

Exemplo 16. Uma empresa possui N projetos nos quais pode investir. Cada projeto $i \in N$ possui retorno esperado positivo c_i (em reais). Porém, devido a restrições orçamentárias, não é possível investir em todos. No caso, cada projeto i requer que a empresa faça aportes financeiros a_{it} nos tempos $t = 1, \ldots, T$. O orçamento disponível para estes aportes no tempo t é b_t (previamente conhecido ou estimado). Formule este problema como um problema de programação inteira.

Variáveis de decisão: Devemos decidir em quais projetos a empresa irá investir. Não faz sentido "investir em meio projeto", ou "investir duas vezes no mesmo projeto". Ou seja, a decisão é binária: para cada projeto i, ou investe, ou não investe. Assim, vamos propor variáveis x_i que terão o valor 1 se optarmos por investir no projeto i, ou o valor 0, caso contrário.

Este tipo de variável é geralmente chamado de variável binária. É uma variável inteira limitada pelos valores $0 \leq x_i \leq 1$. É bastante utilizada em situações onde devemos tomar decisões binárias, sim ou não. A grande maioria dos problemas mais interessantes de PI requer variáveis binárias.

Função objetivo: Tendo decidido as variáveis, a empresa busca maximizar o retorno esperado dos investimentos:

$$\max \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$$

Note que o retorno esperado do projeto i, c_i, será positivo na função objetivo apenas caso x_i seja 1.

Restrições: Para cada período de tempo $t = 1, \ldots, T$ possuímos um orçamento limitado que não pode ser ultrapassado:

$$\sum_{i=1}^{N} a_{it} x_i \leq b_t \qquad\qquad t = 1, \ldots, T$$

Observe que a formulação possui T restrições, uma para cada período de tempo. O modelo completo é dado abaixo:

$$\begin{array}{lll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} c_i x_i & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_{it} x_i \leq b_t & t = 1, \ldots, T \\ & 0 \leq x_i \leq 1, x_i \text{ inteiro}, & i = 1, \ldots, N \end{array}$$

É comum também utilizarmos a notação $x_i \in \mathbb{B}$ para dizer que uma variável pode ter apenas os valores 0 ou 1.

No problema acima, assumimos que c_i é conhecido. Na prática, o retorno esperado é uma estimativa cuja incerteza pode ser alta (alto risco). Existem diversos modelos de otimização que buscam gerenciar o risco ao controlar a incerteza enquanto busca-se maximizar o retorno esperado.

Exercício 63. Suponha que a empresa possua três condições adicionais:

(a) Os projetos 3 e 4 são concorrentes, não é possível investir em ambos ao mesmo tempo.

(b) Se a empresa investir no projeto 2, então deve obrigatoriamente investir no projeto 5.

(c) Se a empresa investir nos projeto 1 e 4, então deve obrigatoriamente investir no projeto 6.

Acrescente restrições à formulação acima de forma a garantir que estas condições sejam respeitadas.

(a) $x_3 + x_4 \leq 1$

(b) $x_5 \geq x_2 \implies x_2 - x_5 \leq 0$

(c) $x_6 \geq x_1 + x_4 - 1 \implies x_1 + x_4 - x_6 \leq -1$

Exemplo 17. Uma empresa possui N tarefas urgentes que devem ser cumpridas. Cada tarefa exige um funcionário (há também N funcionários disponíveis). Todo funcionário pode fazer toda tarefa, mas como cada funcionário tem um nível de capacitação diferente, o tempo gasto varia. Já sabemos de antemão que o funcionário i precisa de c_{ij} horas para executar a tarefa j. A empresa busca minimizar o tempo total gasto nas tarefas. Formule este problema como uma PI.

Variáveis de decisão: Temos $x_{ij} = 1$ se o funcionário i executa a tarefa j, $x_{ij} = 0$ caso contrário.

Formulação: O problema é formulado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}x_{ij} \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, N \\
& x_{ij} \in \mathbb{B} \quad i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, N
\end{aligned}
$$

O primeiro conjunto de restrições garante que todo funcionário será alocado a uma tarefa, e o segundo conjunto garante que toda tarefa será executada por um funcionário.

Este problema é conhecido como o **problema da atribuição** (*assignment*). Veremos mais pra frente que esta é uma PI "fácil" de ser resolvida.

Exercício 64. Altere a formulação acima de acordo com os detalhes abaixo:

(a) As tarefas 3, 4, e 5 serão executados na mesma sala. O funcionário 3 recentemente descobriu que o funcionário 2 é amante de sua esposa, o que fez com que chegassem às vias de fato em pleno ambiente de trabalho. A empresa obviamente não quer que os dois fiquem na mesma sala. Adicione esta restrição à formulação acima.

(b) Os funcionários 4 e 5 trabalham bem em conjunto, e seria interessante que ou eles fizessem as tarefas 1 e 2 (pois são relacionadas), ou fizessem as tarefas 6 e 7 (que também são relacionadas). Altere a formulação para garantir que um dos casos acima será verdadeiro. Dica: utilize uma variável binária extra.

(c) Ao invés de minimizar o tempo total das tarefas, a empresa quer finalizar os trabalhos o mais cedo possível, ou seja, ela quer que a última tarefa a ser finalizada termine o quanto antes. Altere a formulação acima para atender este caso.

(a) $x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 1$

(b) Seja y uma variável binária adicional que é 1 se o primeiro caso é verdadeiro, 0 caso contrário. Adicionamos:

$$\begin{aligned} x_{41} + x_{42} + x_{51} + x_{52} &\geq 2 - 2(1 - y) \\ x_{46} + x_{47} + x_{56} + x_{57} &\geq 2 - 2y \end{aligned}$$

(c) Acrescente d não inteira e faça:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & d \\ \text{sujeito a} \quad & d \geq c_{ij}x_{ij} \quad i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

... e demais restrições

Exercício 65. O governo de Minas deve decidir onde construir novos quartéis do corpo de bombeiros. Há uma região com 6 cidades no norte do Estado que atualmente que não é atendida por nenhum quartel em menos de 45 minutos. O governo gostaria de garantir que há um corpo de bombeiros a no máximo 15 minutos de distância de cada uma destas 6 cidades. Abaixo, uma tabela com o tempo necessário para dirigir da cidade i até a cidade j (a tabela não é necessariamente simétrica):

De/para	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	30	20
2	10	0	25	35	20	10
3	20	25	0	15	30	20
4	30	35	15	0	15	25
5	20	20	30	15	0	14
6	20	10	20	25	14	0

Devido ao orçamento apertado, o governo gostaria de construir o menor número possível de quartéis. Formule este problema como uma PI.

Temos as variáveis $x_i = 1$ se um quartel do corpo de bombeiros será construído na cidade i, $x_i = 0$ caso contrário. Formulação:

$$
\begin{array}{rllllllll}
\max & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\text{sujeito a} & x_1 + x_2 & & & & & & \geq 1 \\
& x_1 + x_2 & & & & & + x_6 & \geq 1 \\
& & & x_3 + x_4 & & & & \geq 1 \\
& & & x_3 + x_4 & + x_5 & & & \geq 1 \\
& & & & x_4 + x_5 & & + x_6 & \geq 1 \\
& & x_2 & & & + x_5 & + x_6 & \geq 1 \\
& x_i \in \mathbb{B}
\end{array}
$$

Exercício 66. Uma empresa produz mapas do mundo que são vendidos em bancas de jornal. Cada um dos N países do mapa deve ser colorido com uma cor, porém países vizinhos não podem ter cores iguais. Devido aos altos custos dos cartuchos de tinta, a empresa gostaria de utilizar o menor número possível de cores no mapa. Considere que há C cores disponíveis e que já sabemos de antemão quais países são vizinhos, isto é, temos uma matriz $B_{ij} = 1$ se os países i e j são vizinhos, 0 caso contrário.

Formule o problema de encontrar o menor número possível de cores a serem utilizadas em um mapa como um problema de programação inteira.

Variáveis binárias $w_c = 1$ se a cor c é utilizada, 0 caso contrário. Temos também variáveis binárias $x_{ci} = 1$ se a cor c colore o país i, 0 caso contrário.

$$
\begin{array}{rlcll}
\min & \sum_{c \in C} w_c \\
\text{sujeito a} & \sum_{c \in C} x_{ic} & = & 1 & i = 1, \ldots, N \\
& x_{ic} + \sum_{j \in N : B_{ij} = 1} x_{jc} & \leq & 1 & i = 1, \ldots, N, c = 1, \ldots C \\
& w_c & \geq & x_{ic} & \forall i = 1, \ldots, N, c = 1, \ldots C \\
& \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} & \in & \mathbb{B}
\end{array}
$$

Exercício 67. Desafio O Brasileirão possui 20 equipes e é disputado utilizando-se uma fórmula de pontos corridos, onde todas as equipes se enfrentam duas vezes (uma em casa, uma fora), totalizando 38 jogos por equipe. Idealmente, as equipes devem alternar entre jogar uma partida em casa, uma fora de casa, e assim vai. Não é interessante para o torcedor que uma equipe jogue 3 partidas seguidas em casa, por exemplo, ou que jogue 5 partidas seguidas fora de casa. Por isto, estas situações nunca devem ocorrer. Matematicamente, porém, não sabemos se existe uma solução onde nenhuma equipe jogue duas partidas seguidas em casa ou duas seguidas fora (quando isto ocorre, temos uma **quebra**).

(a) Considere inicialmente que cada equipe jogará apenas uma vez contra as demais (19 jogos cada). Formule este problema como uma PI que minimiza o número de quebras.

(b) Adicione uma restrição que impõe que se na primeira rodada uma equipe jogou em casa, então deve jogar fora de casa na última rodada.

(c) O que você deve fazer para resolver agora o problema com 38 rodadas, onde se a equipe i enfrentou j em casa na rodada t, deve então enfrenta-la fora de casa na rodada $t+19$ (tabela com dois turnos simétricos)?

Variáveis binárias $x_{ijt} = 1$ se a equipe $i \in N$ joga em casa contra j na rodada t. Também teremos variáveis binárias q_{it} se a equipe i possui uma quebra na rodada $t = 2, \ldots, 19$.

$$
\begin{array}{rrcll}
\min & \sum_{i \in N} \sum_{t=2}^{19} q_{it} & & & \\
\text{sujeito a} & \sum_{j \in N, j \neq i} (x_{ijt} + x_{jit}) & = & 1 & i \in N, t = 1, ..., 19 \\
& \sum_{t=1}^{19} (x_{ijt} + x_{jit}) & = & 1 & i \in N, j \in N, i \neq j \\
& \sum_{j \in N, i \neq j} (x_{ijt} + x_{ijt-1}) & \leq & q_{it} + 1 & i \in N, t = 2, \ldots, 19 \\
& \sum_{j \in N, i \neq j} (x_{jit} + x_{jit-1}) & \leq & q_{it} + 1 & i \in N, t = 2, \ldots, 19 \\
& q_{it} + q_{it-1} & \leq & 1 & i \in N, t = 2, \ldots, 19 \\
& \sum_{j \in N, i \neq j} x_{ij,1} & = & \sum_{j \in N, i \neq j} x_{ji,19} & i \in N \\
& \boldsymbol{x}, \boldsymbol{q} & \in & \mathbb{B} &
\end{array}
$$

A primeira restrição garante que todo time vai jogar toda rodada, seja em casa ou fora. A segunda garante que os times i e j vão se enfrentar uma vez, seja em casa ou fora. As 3a e 4a restrições calculam se uma quebra ocorreu ou não, teremos uma igualdade com o maior valor pois q_{it} está sendo minimizado. A 5a restrição garante que não vão haver 2 quebras seguidas, ou seja, nenhuma equipe jogará três seguidas em casa ou três seguidas fora. A 6a restrição garante que se um time jogou a primeira em casa, jogará a última fora. Ela em conjunto com a 1a e 2a restrições garante também para o caso simétrico (se começou fora, termina em casa).

Sobre a letra (c), pode-se espelhar a solução obtida na formulação acima, mas com um detalhe: como na rodada 19 a equipe joga fora se jogou em casa na 1a, então na 20a ela também jogará fora, ocorrendo uma quebra. Assim, poderia teoricamente haver quebras triplas ou até quádruplas nas rodadas 18, 19, 20, 21. Para resolver, basta trocar a 6a restrição, agora forçando que se uma equipe jogou em casa na 1a, deve jogar em casa na 19. Assim, na 20a (espelho da primeira), a equipe jogará fora, não havendo quebra, e na 38a também, garantindo que se uma equipe começou em casa (na 1) termina fora (na 38a).

Trocamos então a 6a por:

$$\sum_{j \in N, i \neq j} x_{ij,1} = \sum_{j \in N, i \neq j} x_{ij,19} \qquad i \in N$$

4.3 Escrevendo uma PI como uma PL

Até agora tratamos PIs da seguinte forma. Apresentamos uma PL do tipo

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{aligned}$$

e adicionamos uma restrição

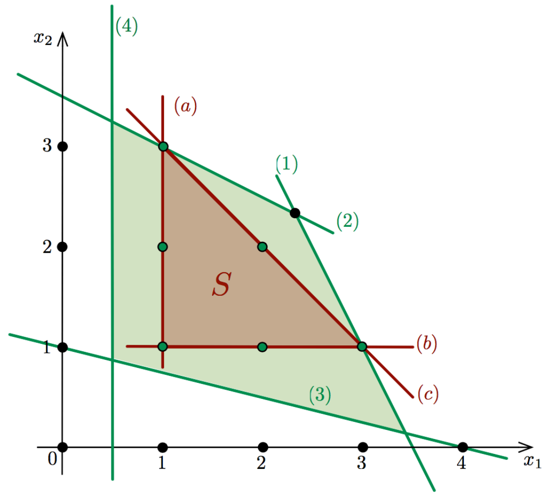
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n.$$

Nosso objetivo nesta semana é ser capaz de formular uma PI sem precisar codificar a restrição de integralidade da maneira acima. Nesta semana, aprenderemos como, ao sermos apresentados a uma matriz $\mathbf{A}$ qualquer, fazer pequenas modificações de modo que o ótimo da PL seja um ótimo da PI correspondente.

Exemplo 18. Considere

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -4 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

Cada uma das restrições corresponde às retas (1), (2), (3) e (4) abaixo, e a região verde é portanto a região de viabilidade da relaxação linear.



O ótimo da PL é o ponto $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7/3 & 7/3 \end{pmatrix}$. Suponha que agora foi adicionada a restrição abaixo, que corresponde à reta (c) da figura.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq 4.$$

Originalmente, havia 6 pontos inteiros que eram viáveis. Eram eles

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que todos eles permanecem satisfazendo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq 4$, mas que o ponto $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ não satisfaz. Daí consideramos a PI que adiciona esta restrição:

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -4 \\ -1/2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

O ótimo desta PI ainda será o mesmo que o da PI original, já que não retiramos qualquer ponto inteiro da região de viabilidade. Porém ao olharmos para a relaxação linear, saberemos que o seu ótimo será diferente. Basicamente: cortamos $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ fora, sem mudar os pontos inteiros.

- De fato, a relaxação linear da nova PI tem 3 soluções ótimas inteiras.

Esta será nossa estratégia. Acrescentar desigualdades à formulação, chamadas de *planos de corte*, de modo que eventualmente a o ótimo da relaxação linear se torne inteiro. Corte, no caso, costuma ser utilizado como sinônimo de restrição.

Observe na figura anterior os cortes (a), (b) e (c). Eles foram adicionados de forma que todos os pontos extremos do poliedro sejam inteiros. Ao resolver a PL correspondente (cuja área viável é a área vermelha na figura), obteremos a solução ótima da PI original. A PL que não corta nenhuma solução inteira da PI original e cujos pontos extremos são todos inteiros é chamada de **envoltória convexa** (*convex hull*) da PI. No caso geral, um número exponencial (em relação ao número de variáveis do problema) de cortes é necessário para representar totalmente a envoltória convexa de uma PI.

4.4 Planos de corte

Considere o seguinte exemplo.

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \ \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{array}$$

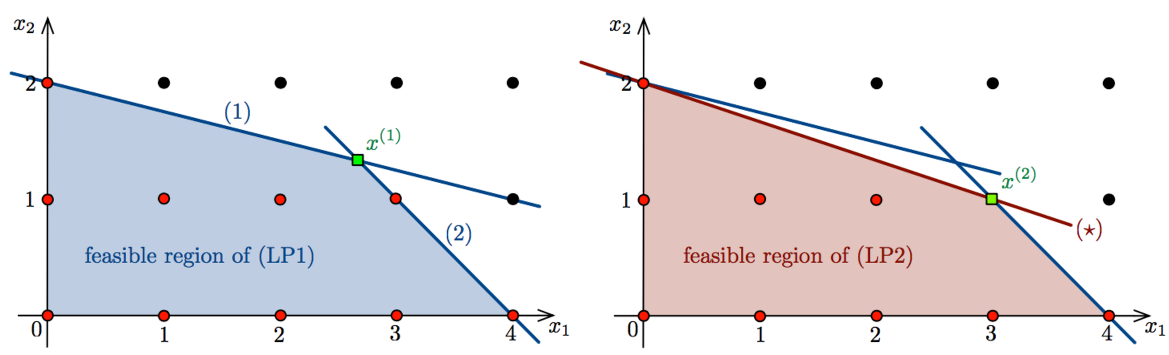
A relaxação linear da PI a cima pode ser resolvida normalmente, e encontramos a solução ótima

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Claramente esta solução não é uma solução da PI. Portanto nosso objetivo agora é encontrar uma desigualdade do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

que seja satisfeita por qualquer solução inteira do problema, mas que não seja satisfeita por $x_1 = 8/3$ e $x_2 = 4/3$. Uma desigualdade deste tipo será chamada de *plano de corte*.



(*i*) (*ii*)

No caso, a desigualdade aqui será $x_1 + 3x_2 \leq 6$, correspondente à reta $(\star)$ acima. Como achá-la em geral? Ao resolvermos o simplex na relaxação linear do problema original, teremos

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 12 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/3 & 4/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 4/3 \end{array}\right]$$

A segunda linha do tableau significa que

$$x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 = \frac{8}{3}.$$

Qualquer solução satisfaz essa igualdade! Como as variáveis são não-negativas, reduzir os coeficientes significa reduzir o valor da soma. Daí

$$x_1 + \left\lfloor \frac{-1}{3} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor x_4 \leq \frac{8}{3}.$$

Ou seja

$$x_1 - x_3 + x_4 \leq \frac{8}{3}.$$

Contudo, estamos preocupado apenas com soluções inteiras. Uma soma de número inteiros menor ou igual que 8/3 será também menor ou igual a 2. Teremos finalmente a inequação abaixo, que necessariamente será satisfeita por qualquer solução viável inteira do problema original:

$$x_1 - x_3 + x_4 \leq 2.$$

Observe que esta desigualdade é violada pela solução ótima da PL, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 8/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. De fato, um corte obtido desta forma sempre será violado pela solução atual da PL (por que?).

Acrescentamos esta inequação e resolvemos de novo. Ou seja, o novo tableau será:

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/3 & 4/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/3 & 4/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 & -1/3 & 1 & -2/3 \end{array}\right],$$

que resolveremos usando o método dual do simplex!!!

Resumindo...

(i) Resolvemos a relaxação linear original.

(ii) Escolhemos uma das equações que indique uma solução fracionária para uma das variáveis do problema - necessariamente será uma linha onde o $\boldsymbol{b}$ foi uma fração.

(iii) Trocamos todos os coeficientes desta inequação por $\lfloor\ \rfloor$ (cuidado com os negativos!!).

(iv) Acrescentamos a nova equação, e resolvemos o simplex novamente (método dual será sempre a melhor estratégia).

(v) Se a solução for inteira, acaba. Se não for, repete o passo (ii).

Este algoritmo foi proposto por Ralph Gomory nos anos 50 e estes cortes possuem hoje o nome de cortes de Gomory. De início, porém, não era considerado muito prático (até pelo próprio Gomory) devido a instabilidades numéricas e devido ao enorme número de cortes que eram necessários no geral para resolver uma PI. A partir dos anos 90, o método foi revisitado e combinado com o próximo algoritmo que veremos, chamado **Branch-and-bound**, para formar o que chamamos de algoritmos **Branch-and-cut**, bastante efetivos para diversos problemas. Hoje em dia, todos os *solvers* implementam cortes de Gomory de uma forma ou outra.

Exercício 68. Suponha que ao resolver a relaxação linear de uma PI, chegamos no seguinte tableau:

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 17/12 & 1/12 & 5/12 & 140 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 111/60 & -13/12 & -1/60 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/10 & 1/2 & -1/10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 11/2 & -1/12 & 11/10 \end{array}\right]$$

Quais inequações podem ser usadas para acharmos planos de corte? Para cada uma delas, qual o plano de corte correspondente?

Exercício 69. Resolva a PI abaixo pelo método dos planos de corte.

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \ \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{array}$$

Aula 16

4.5 Branch and bound

Nesta seção, vamos ver outra estratégia para resolver PIs. Suponha que tenhamos o problema abaixo, a qual nos referiremos como **Problema 1**.

$$\begin{aligned} \max \quad & 60x_1 + 50x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 45 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \ \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

O ótimo da relaxação linear deste problema é

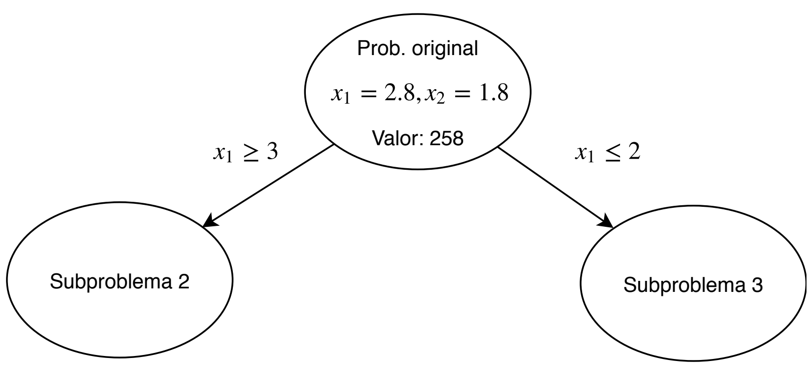
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 14/5 & 9/5 \end{pmatrix}, \quad \text{valor objetivo 258.}$$

Imaginamos então que o ótimo inteiro tenha valores próximos desses. Vimos que isso nem sempre é verdade, mas pode ser verdade em alguns casos. Pegamos então uma variável cujo resultado tenha sido fracionário, e dividimos em dois casos. Por exemplo, a variável x_1. Claramente $x_1 \leq 2$ ou $x_1 \geq 3$. Desta forma, criamos dois subproblemas:

Subproblema 2: Problema 1 + restrição $x_1 \geq 3$.

Subproblema 3: Problema 1 + restrição $x_1 \leq 2$.

Temos agora mais duas PLs para resolver, os subproblemas 2 e 3. Sabemos que a solução inteira ótima é parte de algum destes dois problemas. Podemos visualizar os problemas como uma árvore, de acordo com a figura abaixo:

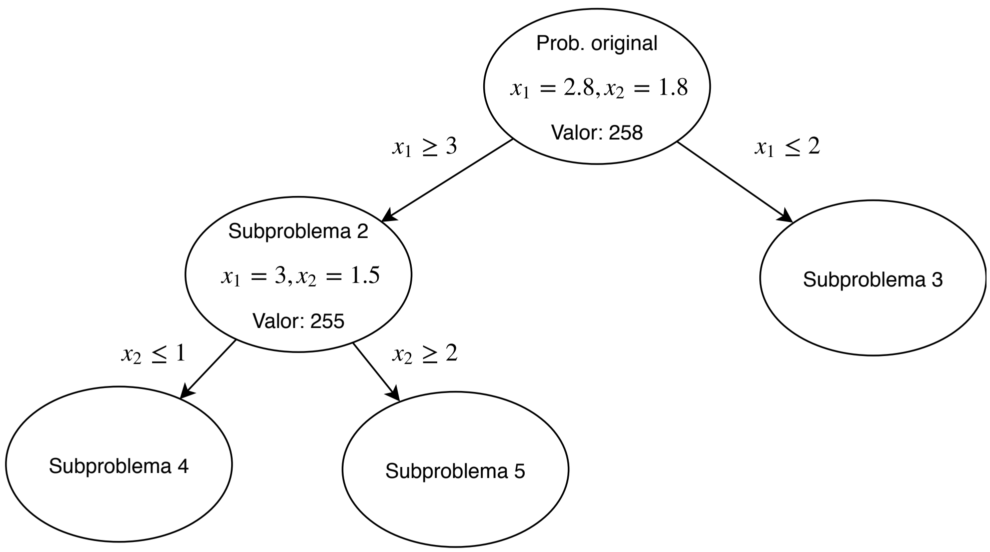


Devemos então escolher um dos dois para começar. Vamos escolher o Subproblema 2. Como já relembramos nesta semana, resolver uma PL após adicionar uma única restrição não é muito custoso, podemos continuar a partir do tableau do problema original. Ao resolver, descobrimos que o ótimo do Subproblema 2 é $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 \end{pmatrix}$ com valor objetivo 255. A variável x_1 agora é inteira, mas a variável x_2 continua fracionária. Podemos então criar mais dois problemas:

Subproblema 4: Subproblema 2 + restrição $x_2 \leq 1$.

Subproblema 5: Subproblema 2 + restrição $x_2 \geq 2$.

A árvore abaixo indica o estágio atual:

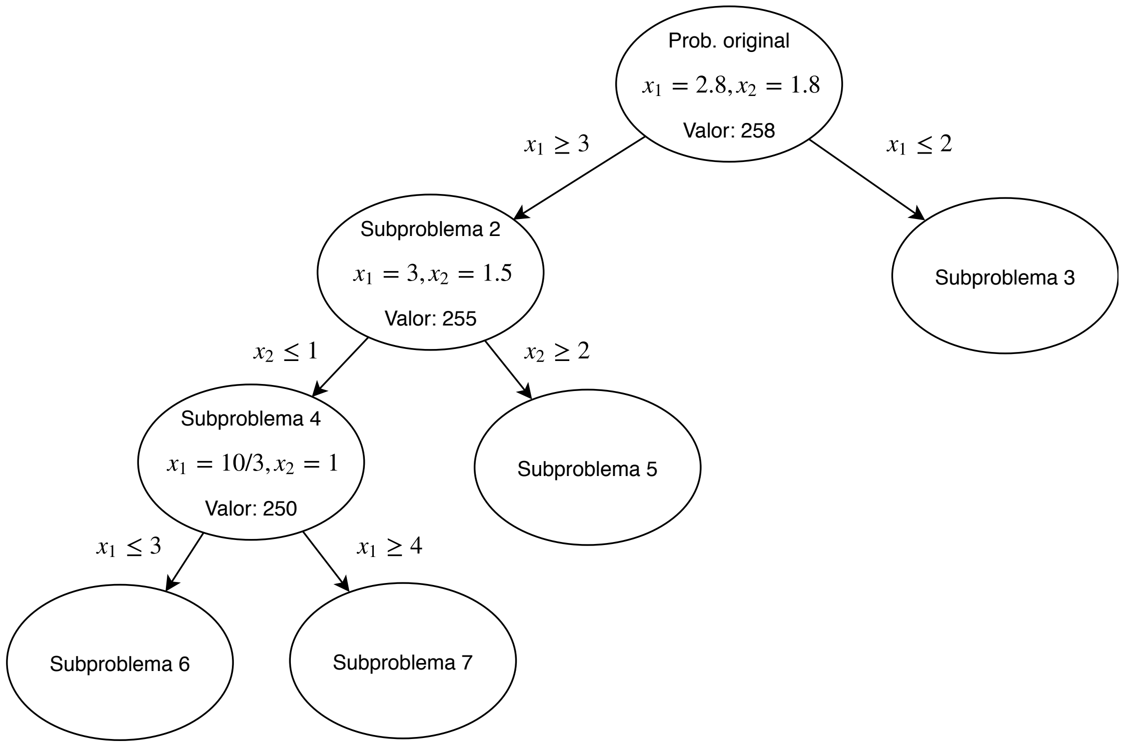


Agora possuimos três subproblemas na fila para serem resolvidos, 3, 4 e 5. Vamos seguir onde estávamos e resolver agora o Subproblema 4. Obtemos como solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10/3 & 1 \end{pmatrix}$ com valor objetivo 250. A variável x_2 passou a ser inteira, mas x_1 voltou a ser fracionária. Podemos criar então mais dois subproblemas ao ramificar a árvore em x_1:

Subproblema 6: Problema 4 + restrição $x_1 \leq 3$.

Subproblema 7: Problema 4 + restrição $x_1 \geq 4$.

Novamente, a árvore abaixo mostra a situação atual:



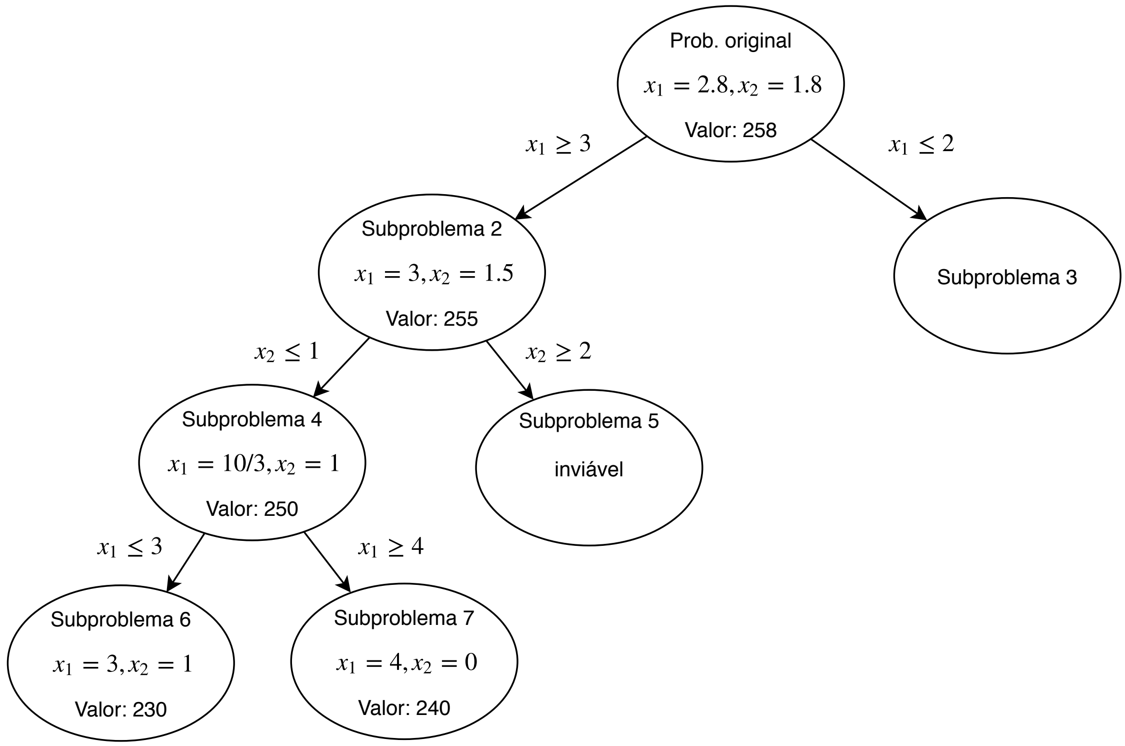
Note que o Subproblema 6 é formado pelo problema original mais as restrições $x_1 \geq 3, x_2 \leq 1$ e $x_1 \leq 3$ (ou seja, $x_1 = 3$). Vamos resolver este subproblema.

Ao resolve-lo, encontramos a solução ótima $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ com valor objetivo 230. Esta solução é inteira e torna-se nossa primeira candidata a solução inteira ótima. Neste momento, sabemos que a solução ótima não é menor que 230, mas também sabemos que ela não é maior que 258. Para tal, verificamos todos os nós da árvore cujos filhos ainda não foram totalmente resolvidos. O máximo dentre estes valores é o melhor limite superior que possuímos no momento em relação à solução ótima. Neste momento, sabemos que o **gap de otimalidade** é $\frac{258-230}{258} = 10.85\%$.

Não é mais necessário ramificar a árvore abaixo do Subproblema 6 pois a solução da relaxação linear já é inteira. Qualquer restrição adicional no caso só poderia piorar a solução da relaxação ou, na melhor das hipóteses, mante-la no mesmo valor.

Passamos então ao Subproblema 7. Ao resolve-lo, obtemos a solução ótima $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$ com valor 240. Ela também é inteira e melhor que a solução anterior. Por isso, atualizamos nossa melhor solução e sabemos agora que o novo gap de otimalidade é $\frac{258-240}{258} = 7.5\%$.

Neste lado da árvore, não é necessário descer mais. Voltamos ao problema 5 e, ao resolve-lo, notamos que ele é inviável (não há solução onde $x_1 \geq 3$ e $x_2 \geq 2$. Não precisamos mais ramificar a árvore neste nó. No momento, a árvore está da seguinte forma:



Só nos resta agora expandir a árvore no Subproblema 3. O ótimo deste subproblema é $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2.45 \end{pmatrix}$ com valor objetivo 242.73. Observe que devemos ramificar a árvore neste nó, porém note que estamos mais perto da solução ótima: sabemos que o valor ótimo não pode ser maior que 242.73, o que nos dá um gap de otimalidade de 1.1% apenas. Ramificando no nó, criamos mais dois problemas:

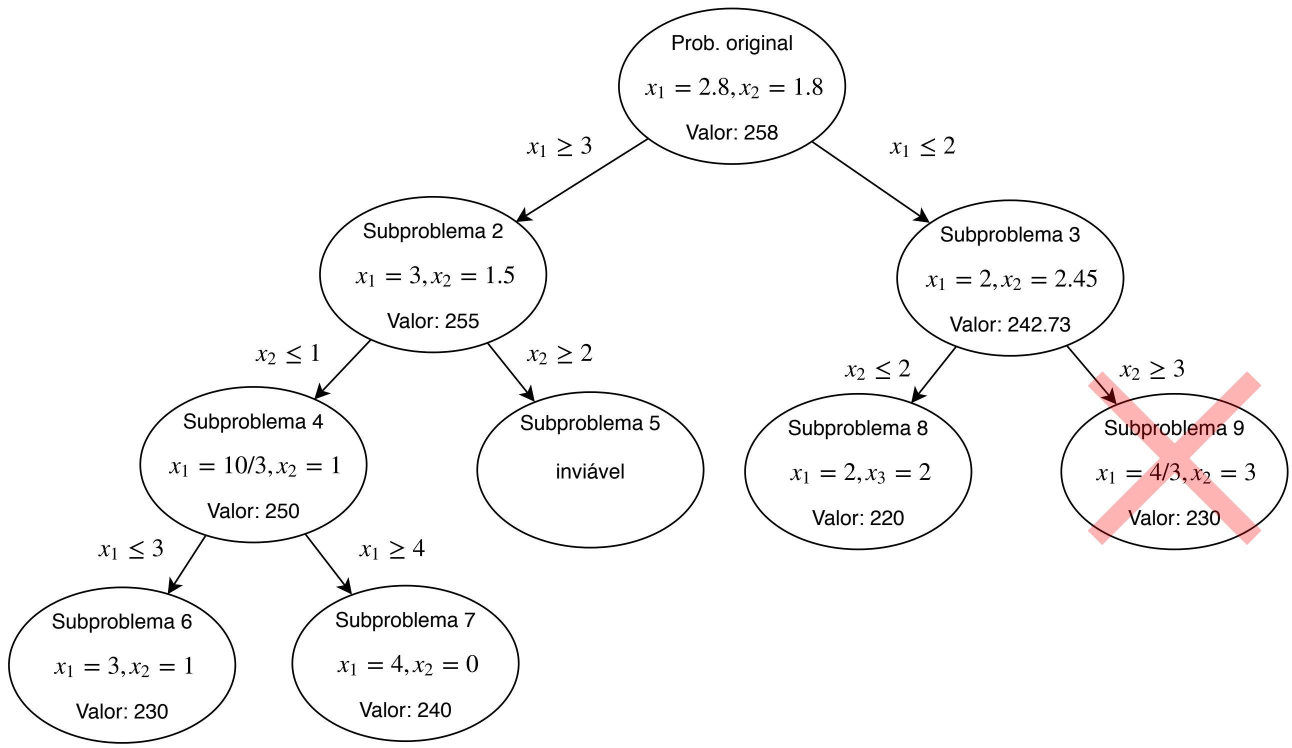
Subproblema 8: Problema 3 + restrição $x_2 \leq 2$.

Subproblema 9: Problema 3 + restrição $x_2 \geq 3$.

Ao resolver o Subproblema 8 obtemos a solução ótima $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$ com valor objetivo 220. A solução é inteira, não precisa ser ramificada e é pior que a melhor que temos (cujo valor é 240). Podemos descarta-lo e passar para o próximo nó.

Resolvemos o Subproblema 9 e obtemos a solução $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4/3 & 3 \end{pmatrix}$ com valor objetivo 230. Esta solução é fracionária e em teoria deveríamos ramificar a árvore aqui. Porém, será mesmo necessário? Se já possuímos uma solução inteira com valor 240 e sabemos que a inclusão de novas restrições no Subproblema 9 não melhora a solução, então podemos descartar este nó pois dali nunca virá uma solução inteira com valor > 240. Este processo é conhecido em Inglês como **pruning the tree**, em Português um termo apropriado talvez seja "podar a árvore".

Assim, encontramos a solução ótima para o problema. A árvore final pode ser vista abaixo:



Alguns comentários:

(i) Várias escolhas no processo acima foram arbitrárias. Preferimos fazer uma busca em profundidade antes, sempre descendo na árvore quando possível. Também escolhemos começar ramificando em x_1 ao invés de x_2. Podemos implementar a mesma idéia com variações, e estas decisões podem influenciar fortemente na performance do algoritmo. A busca em profundidade costuma encontrar soluções inteiras mais rapidamente, mas demora mais para reduzir limite superior e, consequentemente, o gap de otimalidade. A busca em largura é o oposto.

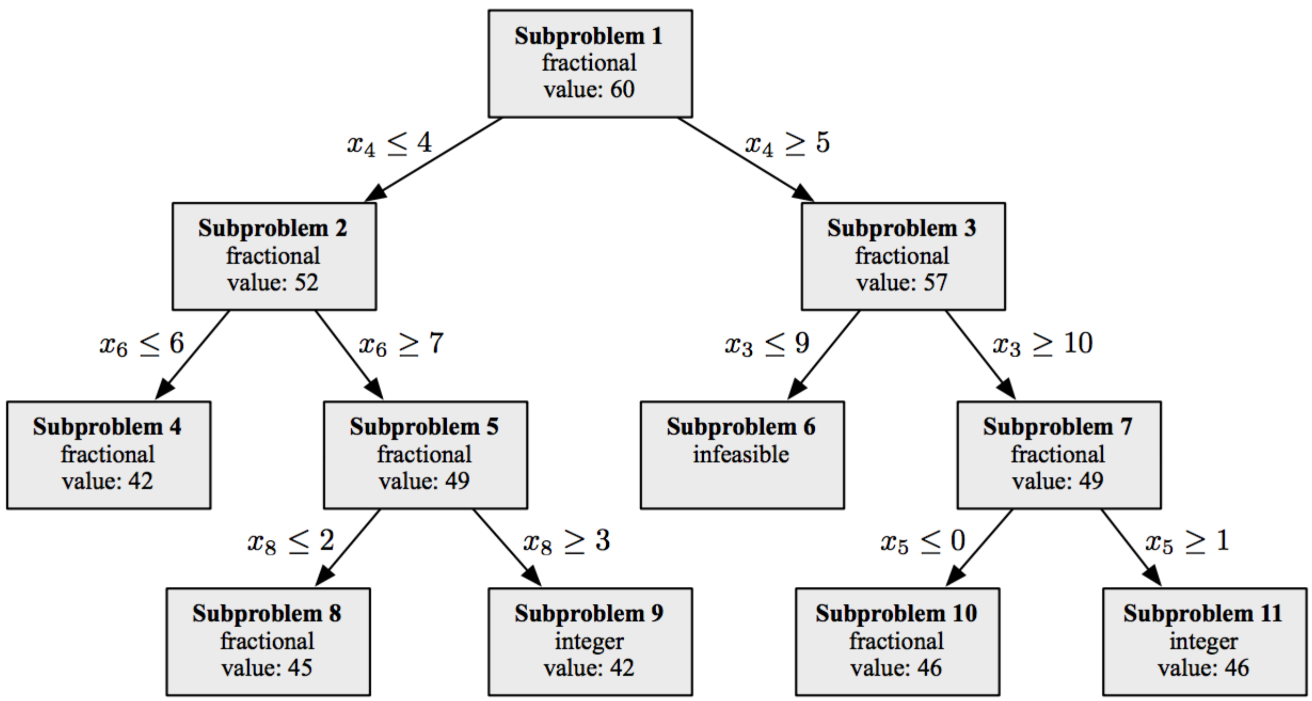
(ii) O passo em que decidimos não seguir no subproblema 9 é o grande diferencial desde algoritmo, em comparação a uma simples busca em todos os pontos inteiros. Ele usa o fato que o ótimo da PI nunca é melhor que o da sua relaxação linear para eliminar a necessidade de testar vários casos. Pode fazer uma diferença enorme na prática.

(iii) Muitos dos melhores algoritmos comerciais para resolver PIs usam métodos mistos que combinam branch-and-bound e planos de corte. São os chamados branch-and-cut, cutting-and-branch, etc. Para grande parte dos problemas inteiros, esta combinação é hoje a técnica de maior sucesso na resolução destes problemas. A maior instância já resolvida para o caixeiro viajante possui 85900 cidades e a solução ótima foi obtida com um branch-and-cut.

(iv) Ainda assim, muitos problemas são desafiadores do ponto de vista computacional. O branch-and-bound é um algoritmo de enumeração com complexidade exponencial no prior caso. Uma grande área de pesquisa é o desenvolvimento de algoritmos especializados para resolver PIs específicas. Estes algoritmos podem explorar novas formulações, novos tipos de cortes, novas regras de ramificação, etc. Podem também utilizar informação do dual da relaxação linear, decompor o problema em problemas menores. Podem também explorar heurísticas para prover uma solução inicial ao branch-and-bound, o que pode facilitar as podas da árvore.

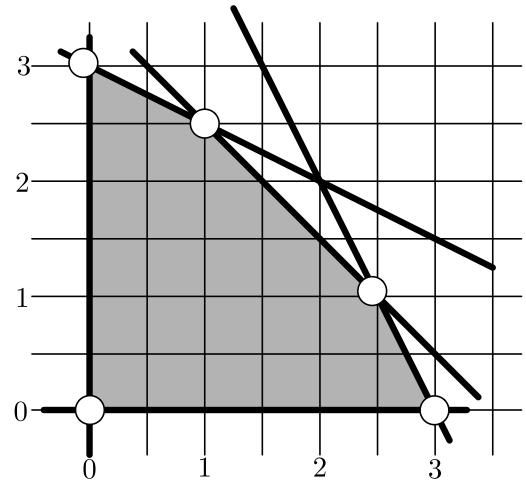
(v) Em todas as aplicações nesta semana, corremos o risco de precisar resolver um grande número de PLs. Em todos os casos, usar o método simplex dual é mais eficiente que o primal - portanto o ganho final de usar este método é enorme.

Exercício 70. Suponha que árvore abaixo mostra o atual estado na solução de uma PI via branch and bound. Já é possível determinar a solução final do problema?



Exercício 71. Suponha que se deseja resolver a PI abaixo, cuja região de viabilidade está desenhada ao lado, em um quadriculado onde cada quadrado tem lado 1/2. Lembre-se que o ótimo de uma PL sempre se encontra em um vértice da região de viabilidade.

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{sujeita a} & 2y + x \leq 6 \\ & 2x + 2y \leq 7 \\ & y + 2x \leq 6 \\ & x, y \geq 0, \ \ x, y \in \mathbb{Z}. \end{array}$$



Resolva a PI efetuando "branch and bound".

Exercício 72. Usando branch and bound, resolva a PI abaixo:

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 18 & 10 & 6 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq 18 \\ & 0 \leq \boldsymbol{x} \leq 1, \quad \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{array}$$

Use o fato que

$$18/12 > 10/10 > 6/8 > 4/6.$$

Exercício 73 (Desafio)**.** Considere a PI abaixo, onde n é um inteiro positivo e ímpar.

$$\begin{array}{rl} \min & x_{n+1} \\ \text{sujeito a} & 2(x_1 + x_2 + ... + x_n) + x_{n+1} = n \\ & 0 \leq \boldsymbol{x} \leq 1, \quad \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{array}$$

Mostre que o método de branch and bound precisa examinar, no caso de piores escolhas possíveis, pelo menos $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ subproblemas antes de resolver o problema.

Capítulo 5

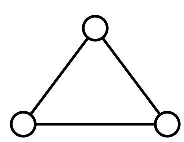
Aplicações de programações inteiras

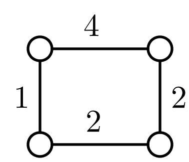
Aulas 17, 18 e 19

5.1 Grafos

Esta seção está aqui apenas para estabelecer uma notação geral sobre grafos, reutilizando também a notação introduzida na última seção. Estes conceitos serão utilizados nas próximas aulas.

Um grafo $G(V, E)$ é um conjunto V de vértices e um conjunto E de arestas entre pares de vértices. Essas arestas podem ou não ter pesos associados. Se há uma aresta (de peso diferente de 0) entre dois vértices, eles são chamados de vizinhos. A soma dos pesos das arestas incidentes a um vértice é o seu grau. Se as arestas tem peso unitário, o grau corresponde ao número de vizinhos do vértice.





Caminhos

Dados dois vértices a e b, um caminho entre a e b é uma sequência de vértices

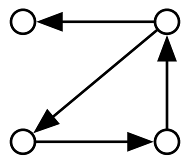
$$v_0 v_1 v_2 ... v_n$$

tais que $v_0 = a$, v_i é vizinho de v_{i+1} e $v_n = b$. Um ciclo é um caminho entre a e a tal que o único vértice que aparece duas vezes é a. O comprimento de um caminho (ou ciclo) é o número de arestas contido na sua extensão.

Um grafo conexo é um grafo tal que entre quaisquer dois vértices há pelo menos um caminho. Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos.

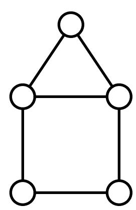
Direcionado

Um grafo é *direcionado* se cada aresta possui uma direção. Uma aresta com direção é chamada de arco. Para cada par de vértices definindo um arco, um deles é chamado de cauda e o outro de cabeça. Neste caso, utilizamos a notação $G(V, A)$ para representar um grafo com conjunto de vértices V e arcos A.



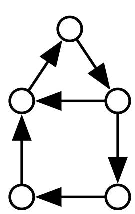
Matrizes

Nossa maneira favorita de representar grafos será usando matrizes. Há essencialmente dois tipos de matrizes que representam grafos. Numa matriz de adjacência, linhas e colunas são indexadas por vértices, e as entradas são 0 se eles não são vizinhos, ou 1 se eles são. No caso de grafos com peso, trocamos 1 pelo peso da aresta correspondente.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alternativamente, podemos representar um grafo com uma matriz de *incidência*. Neste caso, linhas são indexadas por vértices, colunas por arestas, e entradas são diferentes de 0 se o vértice incide à aresta. A vantagem desta maneira é que ela permite codificar grafos dirigidos mais naturalmente. Neste caso, colocamos -1 se o vértice é a cauda do arco, e $+1$ se é a cabeça.

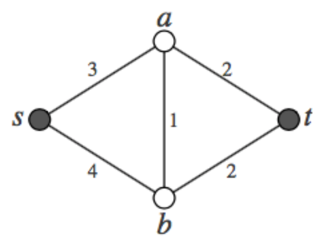


$$N = \begin{pmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Cortes

Vamos considerar a seguinte notação. Se $S \subset V$, então $\delta(S)$ é o conjunto de arestas que são incidentes a exatamente um vértice de S (e portanto a um vértice fora de S). Se $v \in V$, então $\delta(v)$ será simplesmente o conjunto de arestas incidente a v.

Considere o grafo abaixo:



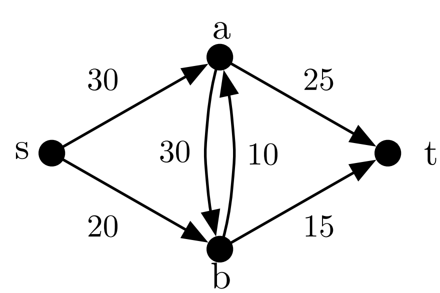
Exercício 74. Descreva o conjunto $\delta(\{s, a\})$.

Um st-corte é um conjunto de arestas da forma $\delta(U)$, onde $s \in U$ mas $t \notin U$. Note que, necessariamente, a remoção de um st-corte desconectará s de t no grafo.

Exercício 75. Expresse todos os st-cortes do grafo acima.

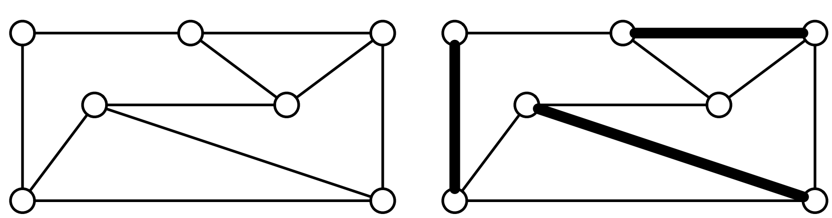
Fluxos

Um fluxo em um grafo $G(V, A)$ é uma atribuição de valores para os arcos de um grafo dirigido tal que, com exceção de uma fonte e um sorvedouro, a entrada é igual à saída em todos os vértices. Ou seja, um vértice, tipicamente chamado s, envia um fluxo através de cada arco em direção a um vértice t. Todos os vértices do grafo recebem e repassam este fluxo, sem adicionar ou remover qualquer parte dele. Cada arco, a princípio, só transmite o fluxo em uma determinada direção - portanto o problema é geralmente modelado em um grafo direcionado, onde os pesos dos arcos representam a capacidade máxima de transmissão. Considere a figura abaixo:



Emparelhamentos

Dado um grafo $G = (V, E)$, um subconjunto M de arestas satisfazendo a propriedade que nenhum par de arestas de M é incidente a um mesmo vértice é chamado de um emparelhamento. Ou seja, M define uma coleção de pares disjuntos de vértices do grafo. Um emparelhamento é chamado perfeito se todo vértice é incidente a uma aresta de M.



Vários problemas podem ser modelados como o problema de achar emparelhamentos em grafos. Por exemplo, imagine um grafo bipartido onde uma parte são cursos que devem ser ministrados num determinado horário, e a outra parte são as salas de aula disponíveis. Uma aresta existe se a sala tem tamanho suficiente para o curso correspondente. O problema de alocar cada curso em uma sala é o problema de encontrar um emparelhamento neste grafo.

Coberturas

Uma cobertura por vértices das arestas é uma escolha de alguns vértices tais que todas as arestas do grafo sejam incidentes a pelo menos um vértice da escolha.

Como exemplo de aplicação, considere as arestas como ruas e os vértices como esquinas. Queremos colocar câmeras nas esquinas de forma a cobrir o máximo número de ruas. Ao encontrar a cobertura por vértices mínima, escolhemos onde instalar as câmeras com menor custo.

Exercício 76. Argumente que um tamanho máximo de um emparelhamento é sempre menor ou igual ao tamanho mínimo de uma cobertura por vértices.

Um grafo é chamado de regular se todos os vértices tem o mesmo grau. Um grafo é bipartido se o conjunto de seus vértices pode ser particionado em dois conjuntos, e dentro de cada conjunto não há qualquer aresta.

Exercício 77. Prove que um grafo é bipartido se, e somente se, não há qualquer ciclo com um número ímpar de vértices.

Considere nos exercícios abaixo a matriz de incidência N como acima. Porém, no caso de um grafo não direcionado, substituímos os componentes -1 por 1.

Exercício 78. Dado um grafo $G = (V, E)$ com pesos $c_e > 0$ para cada aresta, formule como uma PI o problema de achar um emparelhamento que tenha peso máximo (o emparelhamento não precisa ser perfeito).

$$\begin{array}{rl} \text{max} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & N\boldsymbol{x} \leq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Exercício 79. Dado um grafo $G = (V, E)$ e pesos $c_e > 0$, uma cobertura por arestas é um conjunto de arestas tal que cada vértice do grafo é incidente a pelo menos uma aresta do conjunto. Formule como uma PI o problema de achar uma cobertura por arestas de peso mínimo.

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & N\boldsymbol{x} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercício 80. Dado um grafo $G = (V, E)$ (sem peso algum), uma cobertura por vértices é um conjunto de vértices tal que cada aresta do grafo é incidente a pelo menos um vértice do conjunto. Formule o problema de encontrar uma cobertura por vértices de menor tamanho possível como uma PI.

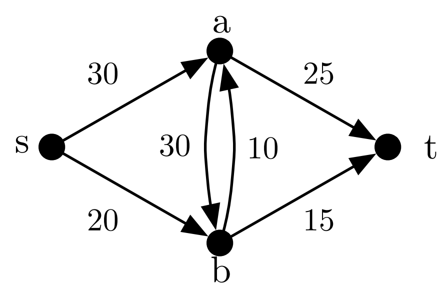
$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{1}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & N^T\boldsymbol{x} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercício 81. Use dualidade para mostrar que o tamanho máximo de um emparelhamento é menor ou igual à quantidade mínima de vértices necessária para formar uma cobertura por vértices.

5.2 Fluxos

Considere a seguinte situação: você deseja ter uma video-conferência com sua colega que se encontra no Japão. Supondo que vocês não tenham acesso direto a um dos cabos submarinos que atravessam o Pacífico, os dados dessa vídeo conferência deverão percorrer uma rede de servidores através do planeta. A questão é: qual a maior quantidade de dados que podem atravessar a rede?

Naturalmente, modelamos este problema como um problema em grafos. Um vértice, tipicamente chamado s, envia um fluxo através de cada arco em direção a um vértice t. Todos os vértices do grafo recebem e repassam este fluxo, sem adicionar ou remover qualquer parte dele. Cada arco, a princípio, só transmite o fluxo em uma determinada direção - portanto o problema será modelado em um grafo direcionado, e possui uma capacidade máxima de transmissão. Considere a figura abaixo:



Em termos da matriz de incidência, codificamos da seguinte forma. Se um arco "chega" em um vértice, ela incide como $+1$. Se ela "sai"de um vértice, ela incide como -1. Dessa forma, ao olharmos para a matriz, sabemos exatamente a direção de cada arco (e esses sinais também serão convenientes da modelagem do problema como uma PL):

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{pmatrix}.$$

As linhas representam na ordem os vértices s, a, b, t.

Um fluxo é uma atribuição de valores para cada arco, digamos dada por um vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^{|A|}$, e deve satisfazer duas propriedades: deve ser menor que a capacidade da arco, e com exceção dos vértices s e t, o fluxo que entra deve ser igual ao que sai. Seja $\mathbf{N}'$ a matriz de incidência do grafo que tem as linhas correspondentes a s e t removidas. Quando dizemos que para todos os outros vértices o fluxo que entra é igual ao que sai, estamos dizendo que

$$\mathbf{N}'\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

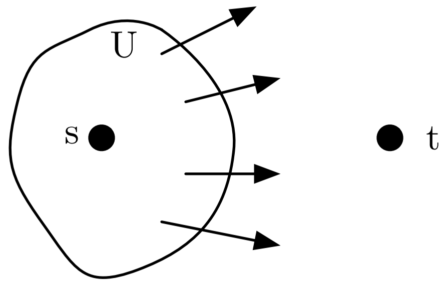
Dizer que o fluxo é menor do que a capacidade é equivalente a

$$\boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 30 & 20 & 30 & 10 & 25 & 15 \end{pmatrix}^T.$$

A função objetivo é o fluxo que sai de s (e que será igual ao que chega em t). Ou seja, o problema se torna

$$\begin{aligned} \max \quad & x_{sa} + x_{sb} \\ \text{sujeito a} \quad & x_{sa} - x_{ab} + x_{ba} - x_{at} = 0 \\ & x_{sb} + x_{ab} - x_{ba} - x_{bt} = 0 \\ & 0 \leq \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 30 & 20 & 30 & 10 & 25 & 15 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

Note agora que para cada conjunto de vértices U contendo s e não contendo t, o fluxo máximo de s para t não pode ser maior que a capacidade das arestas indo de dentro para fora de U.

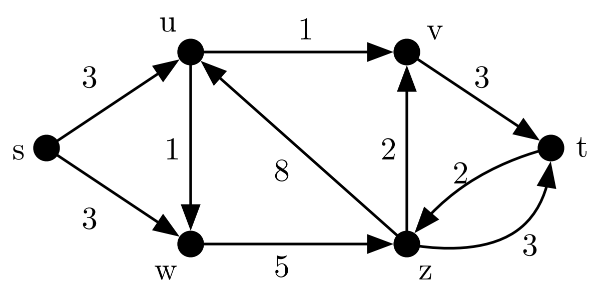


Em outras palavras: o menor valor possível de todos os st-cortes é um limitante superior para o valor máximo de um st-fluxo. Veremos a seguir dois fatos extremamente importantes:

(i) Se as capacidades de cada arco são números inteiros, então sempre existe um st-fluxo de valor máximo em que todo fluxo é inteiro!

(ii) O valor máximo de um st-fluxo é igual ao valor mínimo de um st-corte.

Exercício 82. Ache o maior st-fluxo que você consiga no grafo abaixo.



Ache o menor st-corte. Deu o mesmo valor? Se sim, é possível melhorar algum deles?

5.3 Matrizes totalmente unimodulares

Dada uma matriz qualquer $\mathbf{A}$, dizemos que $\mathbf{B}$ é uma submatriz de $\mathbf{A}$ se $\mathbf{B}$ for obtida após algumas linhas e/ou colunas de $\mathbf{A}$ serem deletadas.

Exercício 83. Escreva todas as submatrizes de tamanho 2×2 da matriz abaixo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercício 84. Quantas submatrizes 2×2 uma matriz $n \times m$ possui?

$$\binom{n}{2}\binom{m}{2}$$

- Dizemos que $\mathbf{A}$ é uma matriz *totalmente unimodular* (TU) se o determinante de qualquer submatriz quadrada de $\mathbf{A}$ não-singular for igual a $+1$ ou -1. Uma matriz TU pode ter também submatrizes singulares com determinante igual a zero.

Exercício 85. Quais são os possíveis números que podem ser entradas de uma matriz totalmente unimodular?

1, 0 e -1, pois o determinante de uma submatriz quadrada 1×1 é igual ao valor dela.

Exercício 86. Quais são as possíveis submatrizes 2×2 que podem aparecer em uma matriz totalmente unimodular?

Se uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é composta por -1, 0 e 1, a única forma de ter determinante diferente de -1, 0 ou 1 é se a subtração $ad - bc = 2$ ou -2. Se houver algum 0 na matriz, isso já é impossível de acontecer. Se a matriz tiver todos os elementos 1 ou -1, o determinante é zero. Se houver dois 1s e dois -1s, o determinante também será zero.

Só sobrou o caso quando há três 1s e um -1 ou o contrário, três -1s e um 1. Note que é necessário que o sinal de ab seja diferente do sinal de bc.

Exercício 87. A matriz abaixo é totalmente unimodular?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Não pois apesar de que não é possível formar matrizes 2×2 com determinante igual 2 ou -2, o determinante da matriz $3 \times 3 = 2$.

Por que se importar com matrizes totalmente unimodulares? Por conta da Regra de Gabriel[1]. A regra diz que:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b} \iff \forall i : x_i = \frac{\det(\mathbf{A}^i)}{\det(\mathbf{A})}$$

onde $\mathbf{A}^i$ representa a matriz original $\mathbf{A}$ mas com a i-ésima coluna trocada por $\boldsymbol{b}$.

Note que se a matriz $\mathbf{A}$ for totalmente unimodular e o vetor $\boldsymbol{b}$ for inteiro, então toda solução básica do sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ será inteira. Isto ocorre pois para qualquer submatriz quadrada formando uma base $\mathbf{A}_B$, o determinante será -1 ou 1 (considerando o posto completo da base) e o determinante de $\mathbf{A}_B^i$ será também inteiro.

Desta forma, se possuímos uma PI com matriz de restrições $\mathbf{A}$ totalmente unimodular e vetor $\boldsymbol{b}$ inteiro, então ao resolver sua relaxação linear obteremos uma solução básica ótima que será inteira e resolverá a PL original.

Exercício 88. Encontre todas as soluções do sistema abaixo em que no máximo duas variáveis sejam diferentes de 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

[1] Gabriel... Cramer

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \implies \text{linhas não são LI}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Teorema 9. *A matriz de incidência de um grafo dirigido é totalmente unimodular.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução. No caso base, note que todas as matrizes 1×1 tem determinante igual a 0, $+1$ ou -1. Agora suponha que todas as submatrizes de tamanho $r \times r$ tem determinante 0, $+1$ ou -1. Considere $\mathbf{B}$ uma matriz $(r+1) \times (r+1)$. Três casos:

- Alguma coluna de $\mathbf{B}$ é nula. Então $\mathbf{B}$ tem determinante zero.
- Alguma coluna de $\mathbf{B}$ tem uma única entrada não-nula. Então fazendo a expansão de Laplace por coluna, o determinante de $\mathbf{B}$ será $\pm$ o determinante de uma matriz $r \times r$, e portanto o de $\mathbf{B}$ será 0, $+1$ ou -1.
- Todas as colunas de $\mathbf{B}$ possuem duas entradas não nulas. Neste caso a soma de todas as linhas de $\mathbf{B}$ é 0, e portanto o determinante de $\mathbf{B}$ é 0.

$\square$

Exemplo 19. Considere a matriz do exemplo anterior:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 10. *Seja* $\mathbf{M}$ *uma matriz totalmente unimodular. Então*

(i) $\mathbf{M}^T$ *é totalmente unimodular.*

(ii) $(\mathbf{M}|\mathbf{I})$ *é totalmente unimodular.*

(iii) $(\mathbf{M}|\mathbf{0})$ *é totalmente unimodular.*

(iv) *Qualquer submatriz de* $\mathbf{M}$ *é totalmente unimodular.*

Agora vamos formalizar o resultado discutido anteriormente para alguns tipos de PLs:

Teorema 11. *Seja* $<\mathbf{M}$ *uma matriz totalmente unimodular. Se cada uma das PLs abaixo for limitada e viável, então existem soluções ótimas que são inteiras.*

(i) $\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ *com* $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *e* $\boldsymbol{x} \geq 0$*, desde que* $\boldsymbol{b}$ *seja inteiro.*

(ii) $\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ *com* $\mathbf{M}\boldsymbol{x} = 0$ *e* $\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{x} \geq 0$*, desde que* $\boldsymbol{d}$ *seja inteiro.*

(iii) $\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}$ *com* $(\mathbf{M}|\mathbf{I})\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{d}$*, desde que* $\boldsymbol{d}$ *seja inteiro.*

A idéia do teorema acima é que as soluções ótimas básicas das PLs são obtidas resolvendo um sistema de equações com o mesmo número de variáveis e equações, cuja matriz de coeficientes é uma submatriz de $\mathbf{M}$, e portanto unimodular. Soluções de sistemas cuja matriz de coeficientes é unimodular só podem ser inteiras, por conta da Regra de Cramer.

Teorema 12. *Em um problema de achar o fluxo máximo com capacidades inteiras nos arcos, qualquer solução básica ótima será um fluxo inteiro.*

Demonstração. Segue basicamente do fato que o problema é modelado com uma PL do tipo

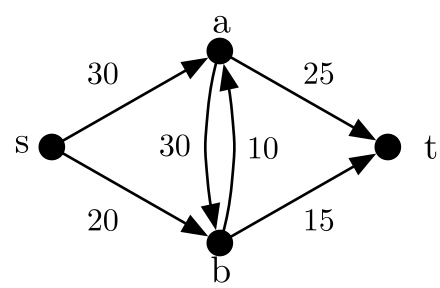
$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{M}\boldsymbol{x} = 0 \\ & 0 \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}, \end{array}$$

onde $\mathbf{M}$ é uma matriz totalmente unimodular. □

5.4 Exemplo

Exercício 89. Escreva a PL seguinte, correspondente à figura abaixo, no formato matricial. Em seguida escreva a sua dual.

$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_5 = 0 \\ & \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_6 = 0 \\ & 0 \leq \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 30 & 20 & 30 & 10 & 25 & 15 \end{pmatrix}^T \end{array}$$



Teremos

$$
\begin{array}{rl}
\max & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \begin{array}{c} = \\ = \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0.
\end{array}
$$

Cuja formulação dual é:

$$
\begin{array}{rl}
\min & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 20 & 30 & 10 & 25 & 15 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{y} \\
\text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \text{ livres, e } \boldsymbol{y}_3, ..., \boldsymbol{y}_8 \geq 0
\end{array}
$$

Note os fatos a seguir a respeito do dual:

(i) Está no formato do item (iii) do Teorema 11, logo qualquer solução básica ótima será inteira.

(ii) Os valores da solução serão +1 ou 0, uma vez que o vetor de restrições só tem entradas iguais a +1 ou 0 (justifique...).

(iii) As colunas da matriz correspondem aos dois vértices diferentes de s e t (no caso, a e b) e as demais à cada arco do grafo. Seja U o conjunto de vértices cujo valor foi igual a +1, adicionado de s.

(iv) As linhas da matriz correspondem aos arcos. Se $u \in U$ (ou seja, $\boldsymbol{y}_u = 1$) então a linha correspondente a qualquer arco saindo de u terá um -1. Se o vértice de chegada também está em U, então fica $-1+1=0$, ok. Se o vértice de chegada não está em U, teremos que adicionar a variável correspondente a este arco.

(v) Ou seja: as entradas iguais a $+1$ na solução identificarão um conjunto de vértices U e um conjunto de arcos que vão de dentro pra fora deste conjunto, ou seja, $\delta^-(U)$[2], que é exatamente um st-corte. O valor objetivo da solução será precisamente a soma das capacidades deste conjunto.

(vi) Se as capacidades não fossem necessariamente inteiras, toda a análise das regiões viáveis acima valeria - a única diferença é que o valor objetivo do corte seria possivelmente não-inteiro.

Através do exemplo acima, o teorema a seguir fica claro:

Teorema 13. *O valor máximo de um st-fluxo é igual ao valor mínimo de um st-corte.*

Exercício 90. Volte ao exercício 82. Escreva as PI's correspondentes aos problemas de achar um st-fluxo máximo e um st-corte mínimo, em formatos correspondentes ao Teorema 11. Exiba as soluções $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, e verifique que (1) $\boldsymbol{x}$ é inteira; (2) $\boldsymbol{y}$ identifica um corte, como feito acima; (3) ambos os ótimos das PLs são iguais.

Ver com o Gabriel qual era o exemplo de verdade aqui.

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & x_{su} + x_{sw} \\
\text{sujeito a} & x_{su} + x_{zu} - x_{uw} - x_{uv} = 0 \\
& x_{sw} + x_{uw} - x_{wz} = 0 \\
& x_{uv} + x_{zv} - x_{vt} = 0 \\
& x_{wz} + x_{tz} - x_{zu} - x_{zv} - x_{zt} = 0 \\
& 0 \leq \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 5 & 8 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T,
\end{array}
$$

Exercício 91. Se um arco pertence a um st-corte de capacidade mínima, o que podemos dizer a respeito do fluxo através deste arco em um st-fluxo de valor máximo?

Por conta das condições de folga complementares, uma variável diferente de zero na dual (indicando que o arco pertence ao st-corte) implica que a restrição correspondente na primal é satisfeita com igualdade. Logo fluxo naquela aresta será igual à capacidade.

[2] Se em um grafo não direcionado $\delta(U)$ é o conjunto de arestas entre U e o complemento de U, em um grafo direcionado podemos extrapolar a notação e definir $\delta^-(U)$ como os arcos que saem de U para seu complemento e $\delta^+(U)$ como os arcos que chegam em U vindos do complemento.

Exercício 92. É verdade que os arcos cujo fluxo é igual à sua capacidade são os que pertencem a um corte mínimo?

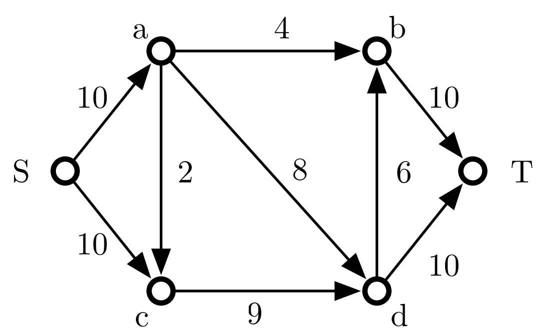
Não necessariamente. Podem haver arcos com fluxo igual à capacidade e que não estejam em um corte mínimo. Por exemplo, se o grafo for um caminho direcionado com mais que uma aresta e todos os arcos do grafo tiverem capacidades iguais.

5.5 O método de Ford e Fulkerson — um algoritmo primal-dual

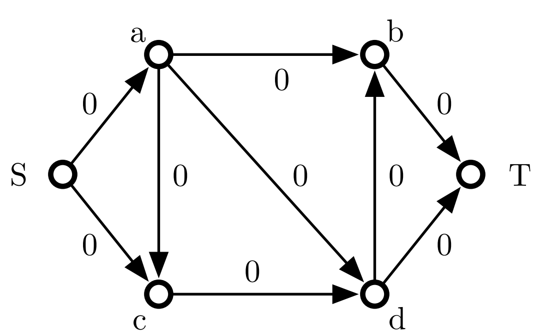
Como vimos, para resolver um problema de fluxo-máximo em uma rede direcionada, é suficiente resolver a programação linear. Isso pode ser feito de forma satisfatoriamente eficiente, através do simplex, por exemplo. Entretanto, por ser um problema tão relevante e ubíquo, métodos específicos para o problema de fluxo máximo existem. O mais antigo e famoso deles é o método de Ford e Fulkerson.

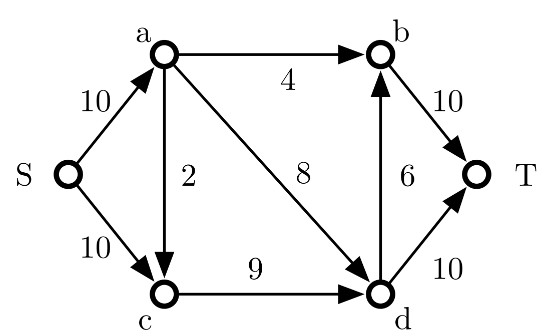
Explicaremos a seguir como funciona. Primeiro, faremos a descrição combinatória. Depois entenderemos como este método na verdade pode ser visto como uma maneira de resolver as programações primais e duais baseados nas condições de folga complementares.

(a) Como entrada do problema, temos um grafo dirigido G, com uma fonte s e sorvedouro t. Todos os arcos possuem uma capacidade.

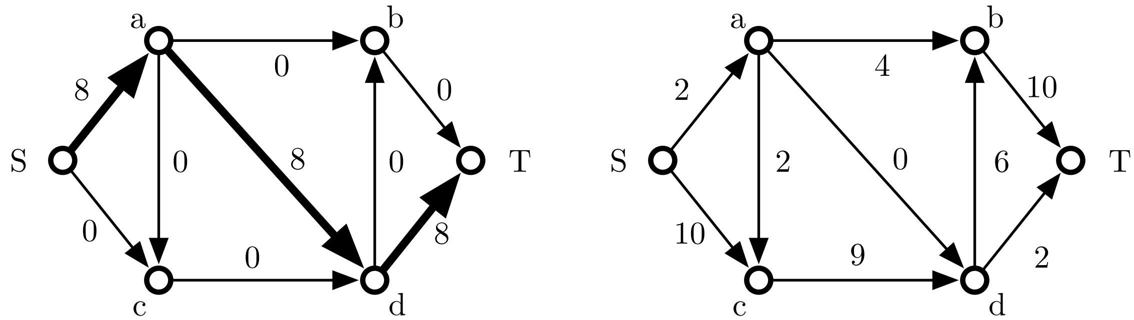


(b) Começamos com um fluxo viável. No caso, o óbvio: o fluxo em todos os arcos igual a 0. Para auxílio na visualização, colocarei ao lado direito o grafo com a capacidade disponível.

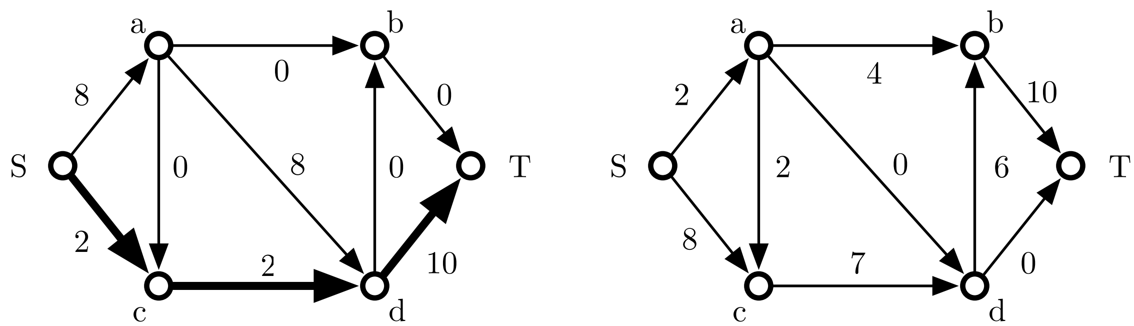




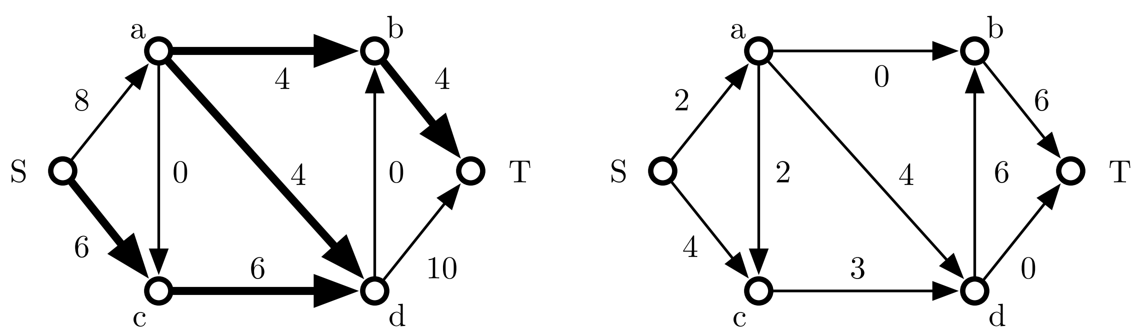
(c) Encontramos então um caminho de s para t cuja capacidade disponível seja positiva em todos os arcos. Aumentamos o fluxo o máximo possível, e diminuímos a capacidade disponível de acordo.



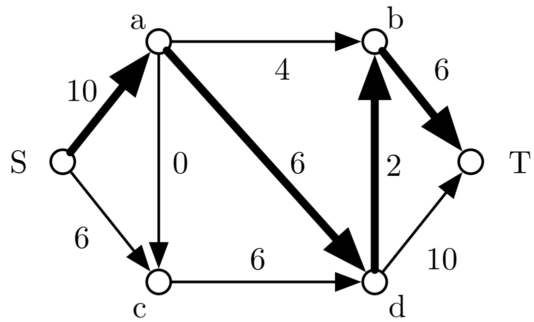
(d) Repetimos.

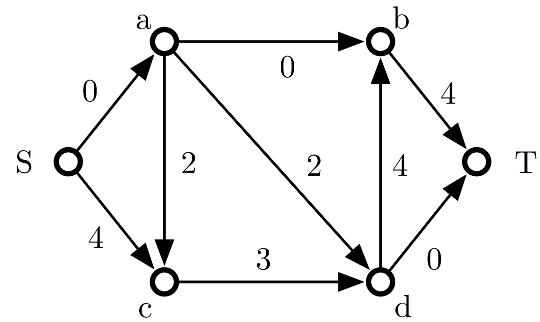


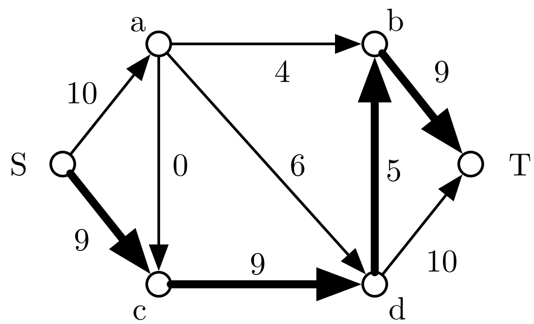
(e) O ponto crucial do algoritmo de Ford e Fulkerson é que estes caminhos não precisam ter a mesma direção dos arcos. De fato, podemos achar um arco no sentido oposto ao caminho, e ao invés de aumentarmos o fluxo neste arco, iremos diminuir. Portanto: nos arcos na mesma direção do caminho, precisamos ter capacidade disponível (logo algo > 0 no grafo da direita). Nos arcos no sentido oposto, precisamos ter fluxo disponível para retirar (logo algo > 0 no grafo original, na esquerda).

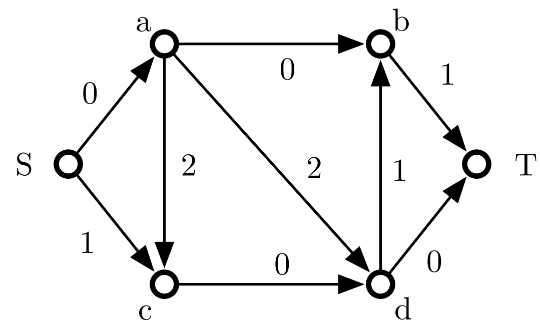


(f) Concluímos então repetindo os passos acima, sempre que possível. No caso abaixo, acabamos escolhendo mais dois caminhos onde somente fizemos aumentar o fluxo em qualquer arco.









Observação: Os passos de "encontrar o caminho"foram descritos de modo abstrato, motivo pelo qual nos referimos ao Método de Ford e Fulkerson, e não Algoritmo. Ao fazer estas escolhas, determinamos qual foi a prioridade para escolher os caminhos. Por exemplo, se usarmos BFS, o algortimo é então conhecido como Edmonds-Karp, e tem complexidade $O(|E|^2|V|)$.

Note que em cada passo, o algoritmo sempre aumenta o valor do fluxo em pelo menos uma unidade. Portanto não é possível que ele não termine.

5.6 Emparelhamentos e coberturas

Relembrando:

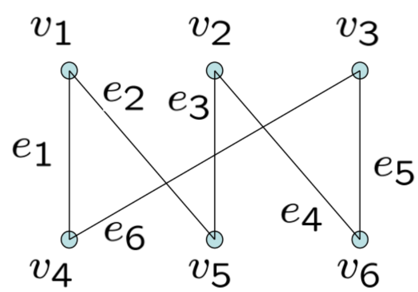
- Dado um grafo $G = (V, E)$, não direcionado, um emparelhamento M é um subconjunto de E tal que nenhum vértice do grafo é incidente a duas arestas de M.

Um emparelhamento é chamado de perfeito se todo vértice do grafo é incidente a exatamente uma aresta do emparelhamento. Em geral, estaremos interessado em dois tipos de questões acerca de emparelhamentos

(i) Qual o emparelhamento máximo? Aqui, "máximo"pode significar "de maior tamanho"ou "de maior custo".

(ii) Qual o emparelhamento perfeito de custo mínimo? Aqui, assumimos que existe um emparelhamento perfeito, e dentre todos eles procuramos o de custo mínimo.

Seja $\mathbf{N}$ a matriz de incidência do grafo não direcionado. Por exemplo, para o grafo:



a matriz correspondente é:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz de incidências em um grafo não direcionado não é necessariamente totalmente unimodular.

Para responder a primeira pergunta, formulamos a PI

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

No caso, $\boldsymbol{x}$ é vetor de variáveis de decisão indicando se a aresta $e \in E$ faz parte do emparelhamento ou não.

Quando $\boldsymbol{c} = \mathbb{1}$, estamos basicamente buscando o emparelhamento de maior cardinalidade. As desigualdades $\mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbb{1}$ dizem precisamente que para cada vértice, a soma das variáveis em $\boldsymbol{x}$ correspondentes às arestas incidentes àquele vértice é menor ou igual a 1. Se essas variáveis forem 0 ou 1, então necessariamente apenas uma delas poderá ser positiva, e esta será a aresta escolhida para o emparelhamento.

No caso da segunda pergunta, a formulação será

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{N}\boldsymbol{x} = \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

Aqui codificamos o fato de que o emparelhamento procurado é perfeito, uma vez que $\mathbf{N}\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$ diz que para cada vértice, exatamente uma aresta a ele incidente será escolhida. Note que se tivéssemos escrito simplesmente $\mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbb{1}$, a solução da PL seria trivialmente $\boldsymbol{x} = 0$.

Dual - cobertura por vértices

No problema da cobertura por vértices de arestas, estamos interessados em escolher vértices de modo que todas as arestas do grafo sejam incidentes a pelo menos um vértice da escolha. Ou seja, vamos atribuir valores de 0 ou 1 para os vértices, e para cada aresta, vamos somar os dois valores dos vértices que ela incide. Essa soma precisa ser pelo menos 1. Neste problema de otimização, a pergunta natural é: qual a cobertura por vértices de menor tamanho?

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{1}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{N}^T \boldsymbol{y} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Note que a formulação acima é precisamente a dual da relaxação linear do problema de emparelhamento de cardinalidade máxima, adicionada de restrições de integralidade. Segue portanto que:

`cardinalidade de emparelhamento máximo` $\leq$ `cardinalidade de cobertura mínima.`

Vamos ver abaixo uma classe abrangente de grafos onde a relação acima é, na verdade, uma igualdade. O motivo será, novamente, a total unimodularidade.

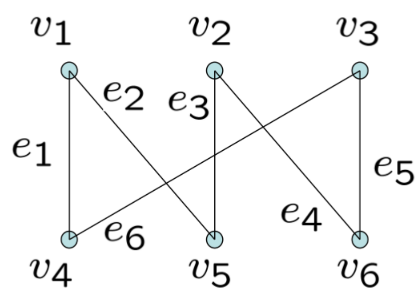
Grafos bipartidos

Vamos relembrar o problema de atribuição. Considere F funcionários para os quais T tarefas são atribuídas ($|F| = |T|$). Cada funcionário i gasta c_{ij} horas para executar cada tarefa j. Relembrando a formulação, temos variáveis $x_{ij} = 1$ caso o funcionário i seja atribuído à tarefa j, 0 caso contrário. A formulação é dada por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in F} \sum_{j \in T} c_{ij} x_{ij} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j \in T} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in F \\ & \sum_{i \in F} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in T \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

Observe que podemos modelar este problema como um problema em grafos ao definirmos um grafo $G = (V, E)$ onde $V = F \cup T$ e para cada possível atribuição de funcionário à tarefa criamos uma aresta $e \in E$ conectando um vértice em F a um vértice em T. O problema de atribuição se resume a encontrar um emparelhamento perfeito de custo mínimo neste grafo (confira que a formulação acima é equivalente à formulação discutida anteriormente).

Observe que em G não há arestas conectando vértices em F e nem arestas conectando vértices em T. Diz-se que o grafo correspondente é portanto bipartido. O grafo mostrado na figura acima é um exemplo de grafo bipartido (repetido aqui por conveniência):



Estes grafos são importantes pois sua matriz de incidência possui a propriedade de total unimodularidade.

Teorema 14. *Se G é um grafo bipartido e $\mathbf{N}$ é a sua matriz de incidência vértice $\times$ aresta, então $\mathbf{N}$ é totalmente unimodular.*

Demonstração. Vamos mais uma vez provar por indução. Novamente suponha que todas as submatrizes de tamanho $r \times r$ possuem determinante 0, $+1$ ou -1 e considere $\mathbf{B}$ uma matriz $(r+1) \times (r+1)$ No caso base, toda matriz 1×1 possui determinante 1 ou 0. De novo, temos três possibilidades para $\mathbf{B}$:

- $\mathbf{B}$ possui uma coluna com apenas zeros: Então o determinante é zero.
- $\mathbf{B}$ possui alguma coluna com exatamente um 1: Então pela expansão de Laplace por colunas, o determinante de $\mathbf{B}$ será $\pm$ o determinante de uma matriz $r \times r$, e portanto o de $\mathbf{B}$ será 0, $+1$ ou -1
- $\mathbf{B}$ possui todas as colunas com dois 1's e os demais elementos iguais a zero. Como o grafo é bipartido, podemos particionar a matriz B em duas onde todos os elementos de um lado do grafo estão numa partição e todos do outro estão em outra partição, de forma que cada partição contenha apenas um valor 1 por coluna. Multiplicamos uma das partições por -1 e somamos todas as linhas de ambas as partições. O resultado é zero e com isso mostramos que as linhas são linearmente dependentes e o determinante é zero.

Por conta do teorema acima, sabemos que sempre será possível encontrar soluções ótimas para problemas de otimização de emparelhamentos em grafos bipartidos resolvendo as relaxações lineares das PIs correspondentes. Temos então o Teorema de Konig:

Teorema 15. *Em um grafo bipartido, o tamanho de um emparelhamento máximo é igual ao tamanho de uma cobertura por vértice mínima.*

Demonstração. Considere as programações lineares abaixo:

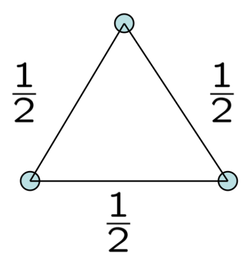
$$
\begin{array}{rrl|rrl}
 & \max & \mathbb{1}^T \boldsymbol{x} & & \min & \mathbb{1}^T \boldsymbol{y} \\
(P) & \text{sujeito a} & \mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbb{1} & (D) & \text{sujeito a} & \mathbf{N}^T \boldsymbol{y} \geq \mathbb{1} \\
 & & \boldsymbol{x} \geq 0 & & & \boldsymbol{y} \geq 0.
\end{array}
$$

A matriz N é totalmente unimodular, assim como N^T. Logo há soluções ótimas que são inteiras para ambas as programações, portanto o valor objetivo ótimo de (P) é o tamanho de um emparelhamento máximo, ao passo que o valor objetivo ótimo de (D) é o tamanho de uma cobertura por vértices mínima. Como este é um par primal-dual, estes valores são iguais. □

Apesar do fato que resolver PLs é suficiente para resolver problemas de emparelhamento em grafos bipartidos, há algoritmos famosos. O mais tradicional é o método Húngaro (década de 50), que usa uma estratégia primal-dual para encontrar um emparelhamento perfeito de custo mínimo.

Grafos gerais (não necessariamente bipartidos)

Para grafos gerais, a relaxação linear da PI possui vértices que não são inteiros. Por exemplo, considere um grafo completo com 3 vértices (um triângulo). A solução da relaxação linear da formulação que busca o emparelhamento de cardinalidade máxima e e matriz de incidência $\mathbf{N}$ do grafo são dadas por:



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A solução inteira é 1, mas a solução da relaxação é $\frac{3}{2}$.

É possível provar, porém, que existe uma solução ótima para a relaxação onde todas as variáveis possuem valores 0, 1 ou $\frac{1}{2}$. A partir disto é possível descrever todas as desigualdades que delimitam os pontos inteiros, mas se fizermos isto obteremos um número exponencial de desigualdades. Entretanto, há um famoso algoritmo (Algoritmo Blossom de Edmonds de 1961) que resolve o problema de achar emparelhamentos máximos em grafos quaisquer em $O(|V|^2|E|)$.

5.6.1 Cobertura por vértices em grafos quaisquer*

(este é um material de leitura opcional)

Considere a relaxação linear da PI que procura a cobertura mínima por vértices

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbb{1}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{N}^T \boldsymbol{y} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

Assuma que $\boldsymbol{y}$ seja uma solução viável, e assuma que existe uma entrada de $\boldsymbol{y}$ que é diferente de 0, 1/2 ou 1. Ou seja, existe $v \in V(G)$ tal que

$$\boldsymbol{y}_v \notin \{0,\ 1/2,\ 1\}.$$

Seja $V^+ = \{v \in V(G) : 1/2 < \boldsymbol{y}_v < 1\}$, e $V^- = \{v \in V(G) : 0 < \boldsymbol{y}_v < 1/2\}$. Seja ϵ pequeno o suficiente, e defina dois vetores $\boldsymbol{z}^+$ e $\boldsymbol{z}^-$ tais que

$$\boldsymbol{z}^+_v = \begin{cases} \boldsymbol{y}_v + \epsilon & \text{se } v \in V^+, \\ \boldsymbol{y}_v - \epsilon & \text{se } v \in V^-, \\ \boldsymbol{y}_v & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{z}^-_v = \begin{cases} \boldsymbol{y}_v - \epsilon & \text{se } v \in V^+, \\ \boldsymbol{y}_v + \epsilon & \text{se } v \in V^-, \\ \boldsymbol{y}_v & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que

(i) $\boldsymbol{z}^+$ é viável. De fato, se ϵ for pequeno o suficiente, então $\boldsymbol{z}^+ \geq 0$. Ademais, seja uv uma aresta. Se originalmente $\boldsymbol{y}_u + \boldsymbol{y}_v > 1$, então com ϵ pequeno o suficiente, ainda teremos $\boldsymbol{z}^+_u + \boldsymbol{z}^+_v > 1$. Se $\boldsymbol{y}_u + \boldsymbol{y}_v = 1$, então ou ambos eram iguais a $1/2$, e neste caso nada mudou em $\boldsymbol{z}^+$, ou um deles era maior $1/2$ e o outro menor. Mas então $\boldsymbol{z}^+$ somou e subtraiu ϵ, e nada mudou.

(ii) O mesmo vale para $\boldsymbol{z}^-$.

(iii) $\boldsymbol{y}$ é combinação convexa de $\boldsymbol{z}^+$ e $\boldsymbol{z}^-$. Portanto $\boldsymbol{y}$ não pode ser vértice do poliedro.

Exercício 93. Como exatamente você escreve $\boldsymbol{y}$ como combinação convexa de $\boldsymbol{z}^+$ e $\boldsymbol{z}^-$?

Como consequência da discussão acima, temos que as soluções ótimas de

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbb{1}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{N}^T \boldsymbol{y} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0. \end{array}$$

tem entradas iguais a 0, 1/2 ou 1.

Exercício 94. Mostre como é possível usar a informação acima para achar uma cobertura por vértices das arestas de tamanho no máximo duas vezes a ótima, resolvendo apenas uma programação linear.

5.6.2 Problema do transporte

Suponha que uma companhia possua m centros de distribuição e n pontos de varejo, e deseje transportar produtos dos centros de distribuição para os pontos de varejo. Cada um dos centros de distribuição possui um estoque, cada um dos pontos de varejo possui uma demanda, e o custo de transportar produtos entre cada centro de distribuição para cada ponto de varejo são conhecidos. Como, portanto, modelar o problema de realizar essa distribuição com custo mínimo?

- Suponha que o estoque de cada centro seja dado por S_i, com $i = 1, ..., m$.
- Suponha que a demanda de cada ponto seja dada por D_j, com $j = 1, ..., n$.

- Suponha que o custo de transportar um produto do centro i para o ponto j seja dado por c_{ij}.
- Defina variáveis x_{ij} que determinarão quanto será transportado de i para j, onde $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Com as definições acima, fica fácil modelar o problema:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij} \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq D_j \quad \text{para todo } j = 1, .., n, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq S_i \quad \text{para todo } i = 1, ..., n, \\
& x_{ij} \geq 0, \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Exercício 95. Seja D a demanda total, ou seja, $D = D_1 + ... + D_n$, e seja S o estoque total, ou seja, $S = S_1 + ... + S_m$. Naturalmente, se a empresa consegue suprir a demanda em cada ponto, então $S \geq D$. Assuma que a empresa pode descartar o excesso de estoque, ou seja, assuma que $S = D$. Mostre que, neste caso, podemos reescrever a formulação acima trocando todas as desigualdades por igualdades sem qualquer prejuízo na modelagem do problema.

Pelo exercício acima, a formulação do problema de transporte pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij} \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j \quad \text{para todo } j = 1, .., n, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \quad \text{para todo } i = 1, ..., n, \\
& x_{ij} \geq 0, \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Exercício 96. Considere um grafo dirigido com dois tipos de vértices: um representa os centros, e o outro representa os pontos de venda. Conecte com arcos dirigidos todos os centros aos pontos de venda. Seja N a matriz de incidência deste grafo dirigido.

(i) Modele a PI acima no formato:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} \quad & \mathbf{N}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0 \\
& \boldsymbol{x} \text{ inteiro.}
\end{aligned}$$

Ou seja, explicite o que significam $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{b}$.

(ii) Mostre que as soluções da relaxação linear são inteiras se os estoques e demandas forem inteiros.

Exercício 97. Reduza o problema de transporte a um problema de fluxo entre dois vértices s e t.

Aulas 20 e 21

5.7 Cobertura por conjuntos

Imagine agora que o problema seja o seguinte. Dada uma coleção de n elementos, e m subconjuntos $S_1, ..., S_m$, como achar a menor quantidade possível de subconjuntos tais que cada elemento pertença a pelo menos 1? Ou seja, como achar a menor cobertura por conjuntos possível? Definimos os vetores característicos de cada conjunto - $\boldsymbol{a}_1$,...,$\boldsymbol{a}_m$. Cada vetor possui dimensão n e é formado por 0s (caso o elemento não pertença ao conjunto) e 1s (caso pertença). Agrupamos estes vetores como colunas de uma matriz $\mathbf{A}$.

A formulação do problema de minimizar o número de conjuntos suficientes para cobrir todos os elementos é dada por:

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbb{1}^T\boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{y} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{y} \in \mathbb{B}^m. \end{array}$$

Exemplo 20. Além dos médicos de plantão no pronto socorro, um hospital precisa manter outros médicos em *stand-by*. Isto é necessário pois o hospital precisa garantir que haverá um indivíduo qualificado para executar qualquer procedimento cirúrgico que possa ser necessário. Para cada um dos diversos médicos disponíveis para *stand-by*, o salário adicional e os procedimentos que é capaz de executar são conhecidos. O objetivo é escolher médicos tais que todos os procedimentos são cobertos ao custo mínimo.

Considere a tabela abaixo:

	Med. 1	Med. 2	Med. 3	Med. 4	Med. 5	Med. 6
Proc. 1	✓			✓		
Proc. 2	✓				✓	
Proc. 3		✓	✓			
Proc. 4	✓					✓
Proc. 5		✓	✓			✓
Proc. 6		✓		✓		

Cada médico $j = 1, \ldots, m$ representa um subconjunto cujos elementos são os procedimentos $i = 1, \ldots, n$ que pode executar. A tabela representa a matrix $\mathbf{A}$ e, por exemplo, o vetor $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. Considere c_j o salário adicional do médico j caso fique em *stand-by*.

Escolhemos variáveis de decisão y_j se o médico ficará de *stand-by* ou não. Temos a seguinte formulação:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{m} c_j y_j \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
& \boldsymbol{y} \in \mathbb{B}^m.
\end{aligned}
$$

Observe como, se tivermos mesmo salário c_j para todos, temos exatamente a formulação vista acima: o cálculo do menor número de médicos de forma que todo procedimento seja coberto.

Este é o problema da cobertura por conjuntos, ou *set covering problem* em inglês.

Exercício 98. Formule o problema de cobertura por conjuntos como um problema de achar uma certa cobertura por vértices em um grafo bipartido. A matriz de incidência de um grafo bipartido é totalmente unimodular. Sendo assim, o problema de cobertura de conjuntos pode ser resolvido eficientemente?

Considere os conjuntos como vértices de um grafo na partição da esquerda e os elementos como vértices na partição da direita, com arestas conectando um elemento a um conjunto caso o primeiro faça parte do segundo. Basta encontrar vértices do lado esquerdo de forma que todo vértice do lado direito esteja conectado a pelo menos um vértice escolhido.

E o problema não pode ser resolvido eficientemente. Porém, a formulação do problema não é necessariamente semelhante ao problema de cobertura por vértices, que é baseada apenas na matriz de incidência. Você tem variáveis $x_v, v \in V$ ao invés de variáveis $x_e, e \in E, G(V, E)$.

O problema de cobertura por conjuntos possui uma infinidade de aplicações práticas (além da vista acima).

1. Imagine que um programador da área de segurança está escrevendo um anti-vírus. Após estudar um conjunto de 15000 vírus conhecidos, ele deseja encontrar substrings de no máximo 20 bytes consecutivos que estejam presentes nestes vírus. Ele então seleciona 5000 strings de 20 bytes. Ao tentar achar o menor número de strings tal que para cada vírus, ao menos uma delas pertença ao vírus, este programador estará precisamente resolvendo um problema de cobertura por conjuntos.

2. Posicionamento de prestadores de serviço para cobrir regiões de um mapa: delegacias ou hospitais em uma cidade, armazéns de uma companhia distribuidora, etc.

O problema de cobertura por conjunto é NP-difícil. De fato, ele é um dos problemas originais apresentados por Karp na década de 70. Abaixo veremos um algoritmo para lidar com ele. Vamos antes, porém, apresentar alguns problemas relacionados.

Exercício 99. Escreva a dual da relaxação da formulação do problema de cobertura de conjuntos. Tente achar uma interpretação combinatória quando adiciona-se restrições de integralidade.

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbb{1}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & A^T \boldsymbol{x} \leq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A idéia aqui é selecionar um número máximo de elementos tais que não haja quaisquer dois elementos em um mesmo subconjunto.

O problema do exercício é o chamado problema de empacotamento de conjuntos (*set packing*). O que estamos observando nesses exemplos é a clássica dualidade entre empacotamento e cobertura. A palavra "empacotar" - no caso - se refere ao fato de que ao adicionarmos um ponto, o espaço disponível para adicionarmos mais pontos se reduz. E cobertura porque queremos que os subconjuntos unidos contenham todos os pontos.

Aplicações do problema de empacotamento não são tão óbvias, mas diversos problemas possuem características de empacotamento de conjuntos como parte de um modelo mais completo.

Se as restrições de cobertura são igualdades, temos o problema de partição de conjuntos - *set partitioning*. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{y} = \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{y} \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

No problema de partição de conjuntos, cada elemento deve estar presente em exatamente um conjunto (nem mais, nem menos). Assumimos um custo associado a um conjunto. Uma de suas aplicações mais conhecidas é no problema de alocação de tripulação a voos.

Exemplo 21. O custo com pessoal é o segundo maior de uma companhia aérea, perdendo apenas para custos com combustível. O uso efetivo de tripulações pode resultar em economias enormes de custos. Há, porém, diversas regulações impostas por sindicatos e órgãos de controle (tipo a ANAC no Brasil ou FAA nos EUA). Por exemplo, há horas de descanso mínimas, ou tripulações maiores para ciclos de voos mais longos, etc.

No final dos anos 80, a American Airlines desenvolveu para este problema um sistema de otimização que veio a se tornar extremamente lucrativo para a empresa. Na formulação que desenvolveram, uma variável binária x_i é atribuída para cada possível trajeto que uma tripulação pode legalmente voar. Por exemplo, podemos ter um trajeto onde a tripulação sai de São Paulo 7:00 e chega ao Rio de Janeiro às 8:00. Saem do Rio às 9:00 em direção a Belo Horizonte, chegando às 10:00. Saindo às 11:00, chega em São Paulo 12:00, terminando o percurso. Outro trajeto é sair de São Paulo à Londres, esperar 36 horas (obrigatórias pela legislação) e voltar a São Paulo.

Assim, cada trajeto representa um conjunto, e cada voo individual um elemento. Cada voo deve ser parte de exatamente um conjunto na solução final. Suponha que um determinado voo esteja nos possíveis trajetos i, j, k e l. Então teremos que:

$$x_i + x_j + x_k + x_l = 1$$

Teremos uma restrição deste tipo para cada voo. O problema de particionamento de conjuntos é então minimizar os custos dos trajetos de forma que todo voo seja coberto por exatamente um trajeto. As regulamentações às quais as tripulações estão sujeitas são implícitas pois apenas trajetos válidos são considerados.

Naturalmente, no exemplo acima podem haver um número enorme de trajetos - combinações de voos que "fazem sentido". Isto leva a um número enorme de variáveis de forma que talvez nem seja possível expressar todas na memória disponível. Como então resolver este problema?

Através de um algoritmo chamado **geração de colunas**. Lembra-se que no branch-and-cut relaxamos o modelo para conter menos restrições e vamos adicionando as restrições aos poucos, na medida em que são violadas? A geração de colunas é semelhante: iniciamos a resolução do branch-and-bound com um modelo relaxado, com menos variáveis. Na medida em que vamos resolvendo o problema, devemos verificar se há variáveis que deveriam entrar no modelo. A esperança é que conseguiremos provar a otimalidade da solução acrescentando apenas uma fração das muitas variáveis deixadas de fora.

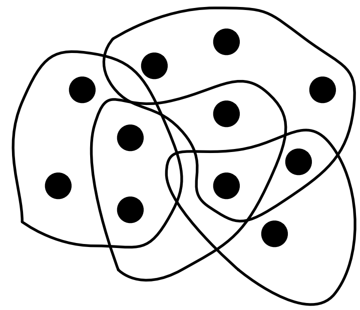
E como verificar se uma variável deve entrar no modelo? Lembre-se que para cada variável (coluna) no primal, temos uma restrição (linha) no dual. Uma variável deve entrar no problema caso sua restrição correspondente seja violada no dual. Assim resolvemos um problema de separação no dual, encontramos uma restrição violada e acrescentamos a variável correspondente àquela restrição no primal.

Na verdade, o problema de separação no dual recebe o nome de problema de **precificação**, pois busca encontrar os custos reduzidos das variáveis que não estão no modelo para ver se alguma entraria na base ótima da relaxação linear. Em caso de uma PI, resolvemos a precificação em cada nó da árvore do branch-and-bound. O algoritmo correspondente é chamado de **branch-and-price**. É possível ir além e misturar planos de corte, branch-and-bound e geração de colunas, formando algoritmos **branch-and-cut-and-price**.

Diversas PIs podem ser resolvidas com algoritmos de geração de colunas, e em certos casos estes algoritmos são os melhores conhecidos para tais problemas.

5.8 Um algoritmo primal dual

Voltamos agora ao problema de cobertura de conjuntos. Suponha que em um dado conjunto de pontos e subconjuntos, o maior número de vezes que qualquer um dos pontos pertence a diferentes subconjuntos é f. Por exemplo, no sistema abaixo, $f = 3$.



O algoritmo que vamos apresentar agora é um algoritmo de aproximação. Significa que ele não necessariamente achará o ótimo, mas sim uma solução que está garantidamente próxima do ótimo. O fator de aproximação mede o quão bom o algoritmo é. Neste caso, o algoritmo achará uma solução que é no máximo f vezes maior que a melhor possível.

É uma estratégia simples e gulosa. Dado um conjunto de n pontos U e subconjuntos $S_1, ..., S_m$ desses pontos:

(i) Comece considerando uma coleção vazia destes subconjuntos.

(ii) Ache um elemento $a \in U$ que não esteja coberto por qualquer subconjunto da coleção. Dentre os subconjuntos que contêm a, adicione aquele de menor custo, ou que contenha mais elementos não cobertos, à coleção.

(iii) Repita o passo (ii) até não haverem mais elementos não cobertos.

Esta estratégia provavelmente adicionará mais conjuntos do que o necessário, mas quão mais? Mostraremos agora duas coisas simultaneamente: como realizar uma análise cautelosa do desempenho deste algoritmo, e como adaptá-lo para resolver a versão com pesos do problema da cobertura por conjuntos. Ambas as coisas serão feitas utilizando dualidade e folgas complementares.

Considere a formulação de programação inteira do problema com pesos

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{y} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \\ & \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^m. \end{aligned}$$

Considere a relaxação linear da PI acima e a sua dual:

$$\text{(P)} \quad \begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{y} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \text{(D)} \quad \begin{aligned} \max \quad & \mathbb{1}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Dada qualquer coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos, seja $\boldsymbol{y}_\mathcal{C}$ o vetor 0-1 de dimensão m correspondente, ou seja, 1 se o subconjunto pertence a $\mathcal{C}$, e 0 caso contrário.

Entrada: elementos de um conjunto U e subconjuntos $S_1, ..., S_m$ destes elementos.

Saída: uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos que cobrem os elementos, e uma solução viável $\boldsymbol{x}$ para (D).

(i) **Faça** $\boldsymbol{x} = 0$ e $\mathcal{C} = \emptyset$. Note que $\boldsymbol{x}$ é viável para (D), mas $\boldsymbol{y}_{\mathcal{C}}$ é inviável para (P).

(ii) **Enquanto** existir $a \in U$ que não esteja coberto por qualquer subconjunto de $\mathcal{C}$, **faça**:

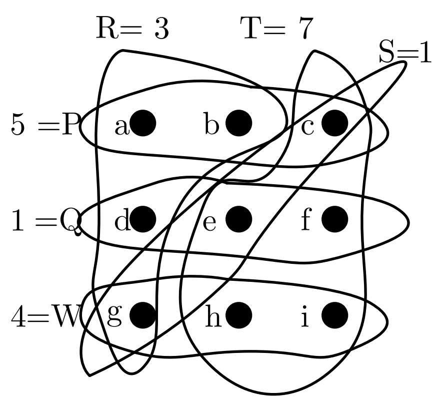
(a) **Aumente** $\boldsymbol{x}_a$ ao máximo de modo que $\boldsymbol{x}$ permaneça viável, ou seja, $\mathbf{A}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}$.

(b) **Identifique** alguma linha de $\mathbf{A}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}$ onde ocorreu a igualdade. Esta linha corresponde a um conjunto S.

(c) **Adicione** S a $\mathcal{C}$.

(iii) **Retorne** $\mathcal{C}$ e $\boldsymbol{x}$.

Exercício 100. Aplique no problema abaixo:



Começamos com $\mathcal{C} = \emptyset$ e $\boldsymbol{x} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0)$. Começamos com... g, claro. Dos três conjuntos que contém g, S é o limite mais apertado. Ou seja, $\boldsymbol{x}_g = 1$, já que por conta de S:

$$\boldsymbol{x}_g + \boldsymbol{x}_e + \boldsymbol{x}_c \leq 1.$$

Adicionamos S a $\mathcal{C}$. Agora vamos ao... a, claro. Ele está contido em três conjuntos, e o máximo que podemos acrescer é $\boldsymbol{x}_a = 2$, já que por conta de R

$$\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b + \boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{x}_g \leq 3.$$

Adicionamos R. Escolhemos f. Só podemos fazer $\boldsymbol{x}_f = 1$, e daí adicionamos Q. Vamos pra h. No máximo $\boldsymbol{x}_h = 3$ e adicionamos o W. Não há mais elementos descobertos. O algoritmo retorna

$$\mathcal{C} = \{S, R, Q, W\} \text{ e } \boldsymbol{x} = (2,0,0,0,0,1,1,3).$$

Note que o ótimo foi $1 + 3 + 1 + 4 = 10$. É precisamente igual a

$$(\boldsymbol{x}_g + \boldsymbol{x}_e + \boldsymbol{x}_c) + (\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b + \boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{x}_g) + (\boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{x}_e + \boldsymbol{x}_f) + (\boldsymbol{x}_g + \boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}_i),$$

cada parêntese correspondendo a cada um dos conjuntos. Por que?

Solução igual mas de forma diferente. Cada conjunto:

$$
\begin{aligned}
R(c_R = 3) &: a, b, d, g \\
T(c_T = 7) &: c, e, f, h, i \\
S(c_S = 1) &: c, e, g \\
P(c_P = 5) &: a, b, c \\
Q(c_Q = 1) &: d, e, f \\
W(c_W = 4) &: g, h, i
\end{aligned}
$$

- Escolhe g, está em R, S, W. Mínimo $C_S = 1$.
$$x_c + x_e + x_g \leq 1 \implies x_g = 1$$
$$\mathcal{C} : \{S\}, \text{ cobertos: } c, e, g$$
- Escolhe a, está em R, P. Mínimo $C_R = 3$.
$$x_a + x_b + x_d + x_g \leq 3 \implies x_g = 1, x_a = 2$$
$$\mathcal{C} : \{R, S\}, \text{ cobertos: } a, b, c, d, e, g$$
- Escolhe f, está em T, Q. Mínimo $C_Q = 1$.
$$x_d + x_e + x_f \leq 1 \implies x_f = 1, x_g = 1, x_a = 2$$
$$\mathcal{C} : \{Q, R, S\}, \text{ cobertos: } a, b, c, d, e, f, g$$
- Escolhe h, está em T, W. Mínimo $C_W = 4$.
$$x_g + x_h + x_i \leq 4 \implies x_h = 3, x_f = 1, x_g = 1, x_a = 2$$
$$\mathcal{C} : \{Q, R, S, W\}, \text{ cobertos: } a, b, c, d, e, f, g, h, i$$

Modelo expandido e variáveis de decisão:

$$
\text{(P)} \quad
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \ (1 + 3 + 1 + 4 = 9) \\
\text{sujeito a} \quad & a : y_R + y_P \geq 1 \\
& b : y_R + y_P \geq 1 \\
& c : y_T + y_P + y_S \geq 1 \\
& d : y_R + y_Q \geq 1 \\
& e : y_T + y_S + y_Q \geq 1 \\
& f : y_T + y_Q \geq 1 \\
& g : y_R + y_S + y_W \geq 1 \\
& h : y_T + y_W \geq 1 \\
& i : y_T + y_W \geq 1 \\
& \boldsymbol{y} \geq 0 \\
& \\
& y_Q = y_R = y_S = y_W = 1
\end{aligned}
$$

$$
\text{(D)} \quad
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbb{1}^T \boldsymbol{x} \\
\text{sujeito a} \quad & R : x_a + x_b + x_d + x_g \leq 3 \\
& T : x_c + x_e + x_f + x_h + x_i \leq 7 \\
& S : x_c + x_e + x_g \leq 1 \\
& P : x_a + x_b + x_c \leq 5 \\
& Q : x_d + x_e + x_f \leq 1 \\
& W : x_g + x_h + x_i \leq 4 \\
& \boldsymbol{x} \geq 0. \\
& \\
& x_a = 2, x_g = 1 \\
& x_f = 1, x_h = 3
\end{aligned}
$$

Note que as restrições apertadas do dual são Q, R, S, W. A soma dos lados direito é 9, mesmo valor da solução primal. Mas a soma do objetivo do problema dual é 7.

Note também que nem todas as complementaridas de folga do dual são satisfeitas. $x_a = 2, x_f = 1$ e $x_h = 3$ e no caso as restrições correspondentes são apertadas. Porém $x_g = 1$ mas a restrição correspondente no primal é $y_R + y_S + y_W = 3 > 1$.

O algoritmo acima é do tipo primal-dual. Ele começa com uma solução inviável da primal e uma solução viável da dual. A cada rodada ele implementa mudanças em ambas as soluções. Essas mudanças satisfazem algumas propriedades

(i) A solução da dual permanece viável.

(ii) A solução da primal vai se aproximando cada vez mais de ser viável, inclusive se mantendo sempre inteira.

(iii) Condições de folgas complementares vão sendo satisfeitas. Em particular, temos dois tipos de condição:

   (a) Se $\boldsymbol{y}_i > 0$, então a $\sum_{a \in S_i} \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{c}_i$.

   (b) Se $\boldsymbol{x}_a > 0$, então $\sum_{S_i \ni a} \boldsymbol{y}_i = 1$.

   Obviamente se todas as condições de ambos os tipos fossem satisfeitas, as soluções seriam ótimas para as PLs. Então nos contentamos ao longo da solução do algoritmo em forçar que todas as condições do primeiro tipo sejam satisfeitas, ignorando as do segundo tipo.

O teorema a seguir estabelece um limite para quão distante do ótimo o algoritmo nos leva.

Teorema 16. *Se f é a maior quantidade de subconjuntos que contém um mesmo elemento de U, então o algoritmo acima possui fator de aproximação no máximo igual a f.*

Demonstração. Seja $\boldsymbol{y}^Z$ o vetor característico dos conjuntos escolhidos no algoritmo (a solução primal final no algoritmo), ou seja, $\boldsymbol{y}^Z$ tem dimensão m, e $y_i^Z = 1$ se S_i foi escolhido, e $y_i^Z = 0$ caso contrário.

Sejam $\boldsymbol{y}^I$ o ótimo da PI da cobertura por conjuntos, $\boldsymbol{y}^L$ um ótimo da PL (P), e $\boldsymbol{x}$ o vetor obtido do algoritmo viável para a dual. Segue que

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}^Z \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}^I \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}^L \geq \mathbb{1}^T\boldsymbol{x}. \tag{$*$}$$

Note agora que, por conta do ponto (a) acima (complementaridade de folga), cada conjunto S_i que foi adicionado a $\mathcal{C}$ satisfaz

$$\sum_{a \in S_i} \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{c}_i.$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y}^Z = \sum_{S \in \mathcal{C}} \sum_{a \in S} \boldsymbol{x}_a.$$

Para cada $a \in U$, a variável $\boldsymbol{x}_a$ aparece no máximo f vezes na soma acima - uma para cada conjunto S que a contém. Logo

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y}^Z \leq f \cdot \mathbb{1}^T \boldsymbol{x}.$$

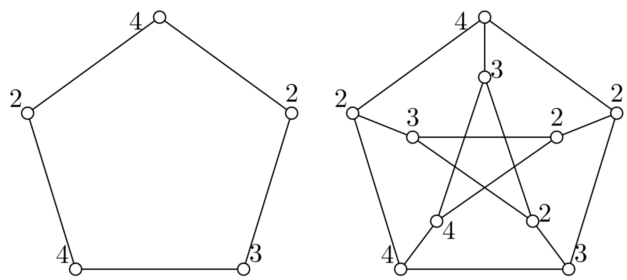
Por outro lado, por conta de $(*)$, temos $f \cdot \mathbb{1}^T \boldsymbol{x} \leq f \cdot \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y}^I$. Segue portanto que

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y}^Z \leq f \cdot \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y}^I,$$

ou seja, a solução encontrada é no máximo f vezes o ótimo da PI. □

Exercício 101. O problema de cobertura por vértices é um sub-caso do problema de cobertura por conjuntos: cada vértice determina um subconjunto de arestas do grafo - aquelas que são a ele incidentes. Usando o algoritmo acima, qual o fator de aproximação que conseguiremos ao resolver o problema de cobertura por vértices em um grafo arbitrário?

Exercício 102. Use o algoritmo acima para encontrar uma cobertura por vértices nos grafos abaixo:



5.9 Um algoritmo guloso para o problema de cobertura de conjuntos sem pesos

Vamos agora apresentar um algoritmo guloso para resolver a versão sem pesos do cobertura por conjuntos. Ou seja, queremos resolver

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{1}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} \quad & A\boldsymbol{y} \geq \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \\ & \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^m. \end{aligned}$$

Procedemos com um algoritmo guloso bem simples:

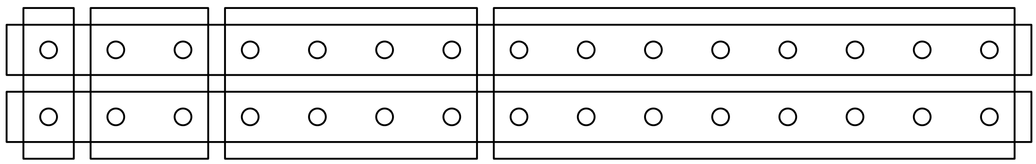
(i) Enquanto há elementos descobertos, escolha o subconjunto que contém mais elementos descobertos.

Para cada inteiro m, seja

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Teorema 17. *O algoritmo guloso é no máximo $H(n)$ vezes o ótimo.*

Exercício 103. Qual o ótimo do problema abaixo?



E o que o algoritmo guloso encontra?

Algumas observações:

(i) Para problemas em que cada elemento aparece em no máximo poucos conjuntos, o algoritmo primal-dual acima é muito bom.

(ii) Em particular, é provado que uma aproximação melhor do que $\approx 1,36$ para o problema da cobertura por vértices implicaria que P = NP.

(iii) Algumas pessoas acreditam haver motivos razoavelmente fortes para acreditar que 2 é o melhor possível, a não ser, novamente, que P = NP.

(iv) Em termos de n, é provado que a aproximação em $O(\log(n))$ do algoritmo guloso é essencialmente a melhor possível, a não ser que P = NP.

Aulas 22 e 23

5.10 Um algoritmo primal dual para emparelhamento perfeito de menor custo

Um dos exercícios da lista 8 era o conhecido Teorema de Hall, que caracteriza grafos bipartidos que possuem emparelhamentos perfeitos:

Teorema 18 (Hall)**.** *Em um grafo bipartido, seja A e B os conjuntos de vértices de cada lado. Suponha que $|A| = |B|$.*

Então existe um emparelhamento perfeito se, e somente se, para todo subconjunto S de vértices em A, o número total de vizinhos desses vértices em B é maior ou igual que $|S|$.

Vamos agora usar este resultado e uma estratégia primal-dual para resolvermos (exatamente) o problema de encontrar um emparelhamento perfeito de grau mínimo em um grafo bipartido. Relembre a formulação como PI deste problema (suponha que $\boldsymbol{c} \geq 0$).

$$\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{N}\boldsymbol{x} = \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \\ & \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{array}$$

A dual da relaxação linear:

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbb{1}^T \boldsymbol{y} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{N}^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \text{ livre.} \end{array}$$

Exercício 104. Explique com palavras o que a dual está encontrando no grafo.

Lembre-se agora que a matriz $\mathbf{N}$ é totalmente unimodular. Logo, se a PI for viável, há soluções ótimas para a sua relaxação linear que são inteiras, e portanto satisfarão as condições de folga complementares com um ótimo da dual.

Exercício 105. O que dizem as condições de folga complementares?

Exercício 106. Encontre uma solução viável para a dual que não seja muito besta.

Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido, e sejam A e B os subconjuntos de vértices que forma a bipartição. Assuma que $|A| = |B|$. Para um subconjunto $S \subset A$, seja $N_G(S)$ os vizinhos de S em B.

Algoritmo:

(1) Seja α o menor valor dentre os custos $\boldsymbol{c}$. Faça $\boldsymbol{y}_v = \alpha/2$ para todo $v \in V$. Note que é viável para a dual do problema de emparelhamento.

(2) Seja H um grafo com os mesmos vértices de G, e cujas arestas são aquelas $uv \in E(G)$ tais que $\boldsymbol{y}_u + \boldsymbol{y}_v = \boldsymbol{c}_{uv}$.

(3) Se H possui um emparelhamento perfeito, PARE. Neste caso, este emparelhamento é um emparelhamento perfeito de custo mínimo no grafo G (por que?!).

(4) Caso contrário, existe um conjunto $S \subset A$ tal que $|N_H(S)| < |S|$ (por que?!)

(5) Se $|N_G(S)| < |S|$, PARE. Neste caso, não existe qualquer emparelhamento perfeito em G (por que?!)

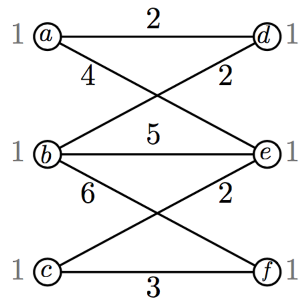
(6) Escolha ϵ maior possível que permita aumentar a variável $\boldsymbol{y}$ de cada vértice de S por ϵ, diminuir a variável $\boldsymbol{y}$ de cada vértice de $N_H(S)$ por ϵ, e deixar as demais constantes; mas garantindo que $\boldsymbol{y}$ permaneça viável em G. Note que $\epsilon > 0$ (por que?!).

(7) Volte para (2).

Exercício 107. Responda os "por que"s.

Exercício 108. Qual ponto do algoritmo acima é o mais delicado (do ponto de vista de complexidade).

Exercício 109. Aplique o algoritmo ao grafo abaixo.



Exercício 110. Considere um grafo bipartido completo cujos pesos são dados na tabela abaixo. Ache um emparelhamento perfeito de custo máximo usando o algoritmo visto.

	g	h	i	j
a	2	7	1	2
b	3	4	3	2
c	6	5	5	5
d	2	6	2	3

Exercício 111. Mostre que se os pesos são positivos, então um algoritmo que encontre um emparelhamento perfeito de custo máximo pode ser usado para encontrar um emparelhamento máximo de custo máximo.

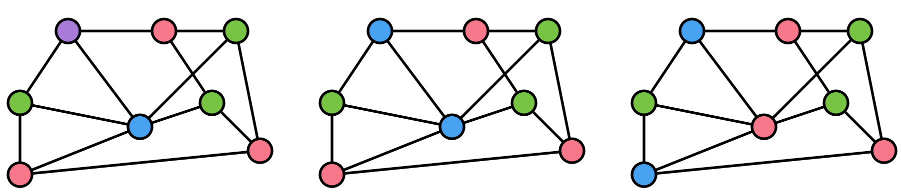
Exercício 112. Considere a PL

$$\begin{aligned} \max \quad & 0 \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{N}\boldsymbol{x} = \mathbb{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

. Seja G um grafo bipartido, e S subconjunto de uma das partições. Mostre que se $|S| > |N(S)|$, então a dual da PL acima é ilimitada (e portanto a PL é inviável). Dica: olhe para o algoritmo visto.

5.11 Colorações

Vamos agora olhar para mais um problema em grafos. Suponha que desejamos colorir os vértices de um grafo de modo que vértices vizinhos recebam cores diferentes.



O primeiro é uma boa coloração com 4 cores, o segundo é uma má coloração, e o terceiro é uma boa coloração com 3 cores. Parece fácil, até que tornamos isso em um problema de otimização:

- Qual o mínimo número de cores necessário para colorir os vértices de um grafo de modo que vizinhos não recebam a mesma cor?

Exercício 113. Quais são os grafos que podem ser coloridos com duas cores?

Exercício 114. Dê exemplo de um grafo com 6 vértices que precise exatamente de 6 cores para ser colorido.

Por exemplo, imagine que os vértices representem eventos. Cada aresta representa eventos que não podem ocorrer simultaneamente, por exemplo, porque dependem dos mesmos participantes. O problema da coloração portanto é a modelagem combinatória do problema de encontrar o menor número possível de horários para sediar todos os eventos!

Note que o problema de coloração é, em certo sentido, um problema de cobertura. Especificamente: desejamos cobrir os vértices do grafo com escolhas de conjuntos de vértices que sejam independentes! Se $\mathcal{I}$ é o conjunto de todos os conjuntos independentes do grafo, então rapidamente chegamos à clássica formulação do problema de cobertura:

$$\begin{array}{rll} \min & \displaystyle\sum_{I \in \mathcal{I}} x_I & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{v \in I} x_I \geq 1 & \text{para todo } v \in V(G) \\ & x_I \geq 0 & \\ & x_I \in \mathbb{Z}. & \end{array}$$

Exercício 115. Fora ser uma formulação com restrições de integralidade, qual um grave problema da restrição acima?

De fato, achar o ótimo da relaxação linear da PI acima é um problema NP-difícil!!

Exercício 116. Como formular o problema de achar uma coloração de um grafo com um número mínimo de cores como uma PI com um número "pequeno" de restrições?

- Dica: suponha que você tem n vértices. Claramente n cores seriam suficientes. Podemos fazer com menos? Bem, use dois tipos de variáveis: variáveis y_k, com $k = 1, ..., n$, que indicariam se a cor k seria utilizada. E use variáveis x_{ik} que indicariam se a cor k será ou não aplicada no vértice i.

- Escreva a função objetiva, as restrições específicas (são 3 tipos), as restrições de não negatividade e as de integralidade.

Exercício 117. Qual o ótimo da relaxação linear da PI acima?

Exercício 118. Se um grafo G tem grau máximo Δ, ache um algoritmo guloso que colore G com no máximo $\Delta + 1$ cores.

Exercício 119. Ache um grafo de grau máximo 6 mas que só precisa de duas cores para ser colorido.

Aula 24

5.12 Problema do caixeiro viajante

Considere o seguinte problema:

- Um caixeiro viajante precisa visitar as cidades 1, 2, ..., n em alguma ordem, e voltar para a cidade de início. O custo para ir da cidade i para a cidade j é dada por c_{ij}. Qual volta pelas n cidades possui custo mínimo?

Este é o problema do caixeiro viajante, ou TSP (*travelling salesman problem*). É um dos problemas mais estudados da Ciência da Computação e foi formulado pela primeira vez pelo matemático irlandês W. R. Hamilton nos anos 1800s. Em homenagem a ele, uma solução para o problema que parte da cidade de origem, visita cada uma das $n-1$ cidades restantes uma vez e que volta à cidade de origem é chamada de **ciclo Hamiltoniano**.

O problema foi formalizado nos anos 1930 (recebendo o nome que tem hoje) e em 1954 Dantzig (o mesmo do Simplex), Fulkerson (do algoritmo de Ford-Fulkerson) e Johnson (deve ter feito outras coisas boas) publicaram um artigo resolvendo "na mão" uma instância com 49 cidades. Eles formularam o problema como uma PI com diversas restrições específicas para esta instância em particular e provaram a otimalidade da solução encontrada. Basicamente, eles adicionaram alguns cortes e fizeram um processo de fixação de valor de algumas variáveis inteiras em 0 ou 1. Este artigo não descreveu um algoritmo genérico para o TSP, apenas resolveu esta instância em particular, mas foi um embrião para algoritmos de planos de corte e provavelmente a primeira vez que um algoritmo semelhante ao branch-and-bound foi executado. Foi um enorme feito para a época, visto que o número de possíveis soluções para o TSP com 49 cidades é $48! \approx 1.24 \times 10^{61}$.

5.12.1 Formulação matemática

Considere que o mapa das cidades que devem ser visitadas pelo caixeiro viajante é modelado como um grafo direcionado $G(V, A)$ onde V é o conjunto de cidades e A o conjunto de arcos. Assuma um grafo completo onde para todo par de cidades i, j existam arcos (i, j) e (j, i) conectando as cidades nas duas direções. A cada arco é associada um custo c_{ij} e não há necessariamente simetria nos custos - isto é, pode ser que $c_{ij} \neq c_{ji}$.

Caso o grafo real do problema não seja completo (por exemplo, não existe rota direta entre Rio e Brasília sem passar por BH), podemos criar um arco artificial nas duas direções onde o custo entre Rio e Brasília é dada pelo menor custo de um caminho entre as duas cidades. Seja $|V|$ o número de vértices do grafo (esta notação é geralmente utilizada para representar a cardinalidade de um conjunto).

Esta versão do problema é chamada de TSP assimétrico. Vamos agora formula-lo como uma PI:

Variáveis de decisão: Uma possível escolha para as variáveis é a seguinte. Poderíamos pensar em variáveis inteiras u_i, com $i = 1, \ldots, |V|$, onde u_1 indica em qual momento a primeira cidade foi visitada, u_2 a segunda, etc. Esta parece uma boa decisão para as variáveis?

O problema aqui é a dificuldade de expressar a função objetivo (minimizar o custo total) em função de u_i e u_j tal que $u_j - u_i = 1$ (cidades na sequência). Por isso, vamos então utilizar outro conjunto de variáveis.

Definimos as variáveis $x_{ij}, i, j \in V, i \neq j$ onde $x_{ij} = 1$ se o caixeiro segue de i direto para j, e $x_{ij} = 0$ caso contrário.

Formulação: Gostaríamos de minimizar o custo total.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1, & \forall i \in V \\
& \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1, & \forall j \in V \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}. &
\end{aligned}$$

As restrições do problema indicam que a partir de toda cidade i o caixeiro viajante deve seguir viagem para alguma cidade j. Igualmente, se o caixeiro chegou em j, ele tem que ter vindo de alguma cidade i. Ou seja, em toda cidade, o caixeiro vem de algum lugar e vai para algum lugar. A formulação está completa?

Infelizmente ainda não! Por exemplo, considere $|V| = 6$ e assuma a solução $x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1$, $x_{45} = x_{56} = x_{64} = 1$ e todos os demais $x_{ij} = 0$. Esta representa uma solução viável de acordo com o modelo acima, porém não representa um ciclo Hamiltoniano. Diz-se que a solução acima possui **subciclos**.

Como podemos garantir que o caso acima não aconteça? Uma possível ideia é adicionar a seguinte restrição ao problema:

$$x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \geq 1$$

A restrição acima diz que o caixeiro deve ir de alguma cidade do lado 1, 2, 3 para outra cidade do lado 4, 5, 6. Assim, evitaríamos o subciclo mostrado no exemplo. Claro, precisamos também garantir que o caixeiro volte de 4, 5, 6 para 1, 2, 3. Porém, ao adicionar apenas a restrição acima ao modelo, garantimos também que a volta irá acontecer (por que?).

De forma geral, podem haver subciclos envolvendo qualquer subconjunto de V. O subciclo poderia ocorrer entre $1, 2$ e $3, 4, 5, 6$, ou poderia ocorrer entre $1, 3, 5$ e $2, 4, 6$. Temos então que garantir que para todo subcojunto de vértices, pelo menos um arco saia dele em direção ao complemento desse subconjunto. O modelo completo fica assim:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij} = 1, & \forall i \in V \\
& \sum_{i \in V, i \neq j} x_{ij} = 1, & \forall j \in V \\
& \sum_{i \in W,\ j \notin W} x_{ij} \geq 1, & \forall W \subseteq V, 1 < |W| < |V| - 1 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}. &
\end{aligned}
$$

Para todo subconjunto W de tamanho entre 2 e $|V| - 1$, garantimos que pelo menos um arco sairá dele e consequentemente nenhum subciclo ocorrerá.

Uma forma alternativa de representar as mesmas desigualdades de eliminação de subciclos é através das inequações:

$$\sum_{(i,j) \in W} x_{ij} \leq |W| - 1, \quad \forall W \subset V, 1 < |W| < |V| - 1$$

Nesta versão, dizemos que o número de arcos entre vértices de W que fazem parte da solução ($x_{ij} = 1$) deve ser no máximo $|W| - 1$. Se houvesse $|W|$ ou mais arcos entre vértices do mesmo subconjunto, obrigatoriamente teríamos um subciclo.

Exercício 120. Teremos algum problema para obter a relaxação linear da formulação acima?

É possível resolver a formulação acima para um número razoável de cidades? De fato é, mas voltaremos neste tema mais tarde.

5.12.2 Formulação alternativa: MTZ

Ao se deparar com o número exponencial de restrições, naturalmente a comunidade acadêmica passou a buscar formulações alternativas para o TSP que pelo menos possuíssem um número de restrições polinomial em relação a V.

Em 1960, Miller, Tucker e Zimler propuseram uma dessas que viria a ser conhecida como formulação MTZ para o TSP. Eles utilizaram variáveis inteiras adicionais que permitiram reformular o problema com menos restrições. Em conjunto com as variáveis x_{ij}, incluíram variáveis u iguais aquelas que não deram certo ali em cima.

A ideia é a seguinte. Suponha sem perda de generalidade que o caixeiro sempre comece da cidade 1. Então, $u_1 = 1$. A segunda cidade visitada i deve ter $u_i = 2$. A terceira visitada deve ter $u_i = 3$ e assim sucessivamente. A última cidade visitada antes de voltar à origem deve ter $u_i = |V|$. O seguinte conjunto de restrições, que substitui as desigualdades de eliminação de subciclos acima, garante que isso aconteça:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 1 \\
2 \leq u_i &\leq |V| && \forall i \in V, i \neq 1 \\
u_i - u_j + 1 &\leq (|V| - 1)(1 - x_{ij}) && \forall (i,j) \in A, i \neq 1, j \neq 1
\end{aligned}
$$

As primeiras restrições garantem que os u_i's devem ter valores entre 1 e $|V|$, com $u_1 = 1$. O último conjunto de restrições é menos intuitivo, mas verifique você mesmo que ela garante a sequência de números correta:

- Se $x_{ij} = 1$, isto é, atravessamos o arco (i, j), então o lado direito é zero e temos que $u_i + 1 \leq u_j$. Ou seja, u_j deve ser pelo menos uma unidade maior que u_i. O conjuto completo destas restrições em conjunto com as restrições de limite garantem que se $x_{ij} = 1$, a diferença $u_j - u_i$ será efetivamente 1. A sequência será preservada pois nunca ocorrerão u_i's repetidos.

- Se $x_{ij} = 0$, então temos que a diferença entre u_i e u_j é pelo menos $|V| - 2$. Todo par u_i, u_j entre 2 e $|V|$ respeita este caso.

Exercício 121. Mostre que o número máximo de restrições que garantem a não ocorrência de subciclos na formulação MTZ é $|V|^2 - 2|V| + 1$.

O número de arcos em um grafo direcionado completo é $2 \times \frac{|V|(|V|-1)}{2} = |V|(|V| - 1) = |V|^2 - |V|$.

Há $2|V| - 2 + 1 = 2|V| - 1$ restrições de limites nas variáveis u_i. Há uma restrição que garante a sequência para cada arco de A, menos os arcos que saem ou chegam no vértice 1, que são $2(|V| - 1)$ arcos no total. Somando tudo:

$$|V|^2 - 2|V| - (2|V| - 2) + (2|V| - 1) = |V|^2 - 2|V| + 1$$

5.12.3 Comparação entre formulações

Qual formulação é melhor? Se você tivesse que resolver o TSP, qual escolheria?

Nem sempre é fácil responder a esta pergunta, mas no caso dessas duas formulações para o TSP possuímos uma resposta. Contra-intuitivamente, sabemos que a primeira formulação é objetivamente melhor que a MTZ.

Uma forma objetiva de comparar duas formulações é medir o quão próximo do ótimo está o valor da relaxação linear de cada uma delas. Vamos fazer isso indiretamente. Ignore no momento a questão do número exponencial de restrições de eliminação de subciclos na primeira formulação.

Vamos começar, na MTZ, reordenando os termos das restrições que garantem a sequência correta dos u_i. Considere um arco (i, j) qualquer:

$$\begin{aligned}
u_i - u_j + 1 &\leq (|V| - 1)(1 - x_{ij}) \\
\frac{u_i - u_j + 1}{|V| - 1} &\leq 1 - x_{ij} \\
x_{ij} &\leq 1 - \left(\frac{u_i - u_j + 1}{|V| - 1}\right) \\
x_{ij} &\leq \left(\frac{u_j - u_i}{|V| - 1}\right) + \left(1 - \frac{1}{|V| - 1}\right)
\end{aligned}$$

Agora imagine um ciclo formado por vértices em um subconjunto W. Este ciclo possui $|W|$ arcos. Ao somar a restrição acima para todos os arcos do ciclo, temos que:

$$\sum_{(i,j) \text{ no ciclo}} x_{ij} \leq \left(1 - \frac{1}{|V| - 1}\right)|W| \tag{5.1}$$

Observe que os termos $\left(\frac{u_j - u_i}{|V|-1}\right)$ se cancelam. Para verificar, considere $W = (i, j, k)$ com um ciclo formado pelos arcos $(i, j), (j, k), (k, i)$. Ao somar os termos:

$$\left(\frac{u_j - u_i}{|V| - 1}\right) + \left(\frac{u_k - u_j}{|V| - 1}\right) + \left(\frac{u_i - u_k}{|V| - 1}\right) = 0$$

Agora vamos lembrar a segunda versão da restrição de eliminação de subciclos da primeira formulação, para o mesmo subconjunto W:

$$\sum_{(i,j) \in W} x_{ij} \leq |W| - 1 \tag{5.2}$$

Observe como o lado direito da desigualdade (5.2) é mais apertado que o da desigualdade (5.1). Em especial, $1 > \frac{|W|}{|V|-1}$ pois $|W| < |V| - 1$. Restrições mais apertadas podem ser vistas como uma aproximação melhor da envoltória convexa do problema, e consequentemente proveem valores de relaxação linear mais próximos do ótimo inteiro.

Outra forma de enxergar que a formulação MTZ é mais fraca é a seguinte. Ao adicionarmos as variáveis u_i, estamos aumentando a dimensão do problema, o que por outro lado nos permite reduzir o número de restrições. Se para todo subconjunto $W \subset V$ fizermos a mesma soma acima, estamos eliminando totalmente as variáveis u_i da formulação e reescrevendo a mesma como uma formulação com um número exponencial de desigualdades, mas com dimensão menor. Diz-se que estamos **projetando** uma formulação com dimensão maior em uma outra com dimensão menor e a projeção é equivalente à formulação MTZ original. Como as desigualdades de eliminação de subciclos são mais apertadas na primeira que na projeção da segunda, podemos inferir que a primeira formulação é mais forte.

5.12.4 Como então resolver a primeira formulação?

A MTZ não é a única formulação do TSP com um número polinomial de restrições. Há também, por exemplo, formulações baseadas em fluxo de uma ou múltiplas commodities. Porém, nenhuma delas é mais forte que a formulação original vista acima.

Nesse momento vem a questão, como resolve-la se mesmo para V relativamente baixo, o número de restrições é tão alto que nem conseguimos escreve-las na memória do computador mais poderoso que se conhece?

Pela mesma lógica do algoritmo de planos de corte! Geralmente um número exponencial de planos de corte são necessários para descrever completamente a envoltória convexa de um problema inteiro. Mas na prática conseguimos em muitos casos encontrar a solução ótima inteira ao adicionar apenas uma fração dos planos de corte. No caso do TSP, vale a mesma lógica. Assim temos o seguinte algoritmo Branch-and-cut:

1. Inicie o branch-and-bound para a formulação do TSP sem incluir as desigualdades de eliminação de subciclo.

2. Resolva o subproblema atual do Branch-and-bound.

3. Verifique se pelo menos uma restrição de eliminação de subciclos é violada pela solução da relaxação linear do subproblema resolvido.

   (a) Caso sim, adicione ao modelo uma ou mais dentre as restrições violadas identificadas e volte ao passo 2, resolvendo novamente o subproblema.

   (b) Senão, continue com o branching normalmente.

O que vemos na prática é que é possível terminar o branch-and-bound e provar a otimalidade de instâncias de tamanho considerável ao adicionar apenas uma fração pequena do conjunto completo de desigualdades de eliminação de subciclos. Algoritmos branch-and-cut baseados nesta formulação são os melhores algoritmos exatos conhecidos para o TSP. Para mais detalhes, dê uma olhada em:

`http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/`

Ficou apenas uma dúvida: como descobrir se alguma restrição de eliminação de subciclos é violada pela solução da relaxação linear do subproblema atual? Este problema é chamado de **problema de separação** e necessitamos de um algoritmo capaz de resolve-lo. No caso do TSP, sabemos que o algoritmo que resolve o problema de fluxo máximo pode ser utilizado para encontrar estas desigualdades, ou seja, o problema de separação é polinomial. Veja abaixo:

3. Verificação se restrição de eliminação de subciclos é violada:

(i) Começamos com uma solução viável $\boldsymbol{x}$ para a relaxação da (PI) atual do branch.

(ii) Criamos um grafo dirigido, cada vértice é uma cidade.

(iii) Para cada $x_{ij} > 0$, adicionamos um arco de i para j com capacidade x_{ij}.

(iv) Para cada par de vértices do grafo u e v, calculamos o fluxo-máximo de u para v.

(a) Se o fluxo é menor que 1, significa que o corte mínimo entre esses vértices é menor que 1, e portanto existe um subconjunto U contendo u e não contendo v tal que

$$\sum_{i \in U,\ j \notin U} x_{ij} < 1.$$

Neste caso, adicionamos apenas esta restrição à relaxação da (PI) e repetimos.

(b) Se o fluxo é maior que 1, significa que o corte mínimo entre esses vértices é maior que 1, e portanto para todos os subconjuntos U contendo u e não contendo v, temos

$$\sum_{i \in U,\ j \notin U} x_{ij} \geq 1.$$

(v) Ao final, a depender do que ocorreu, retornaremos ao passo 2. descrito acima, ou continuaremos com o branch normalmente.

Exercício 122. Considere agora um grafo não direcionado $G = (V, A)$ onde há apenas uma aresta entre i e j com distância d_{ij}. Este exemplo implica a simetria nas distâncias entre i, j e j, i. Reescreva a formulação do TSP baseada em um número exponencial de restrições de eliminação de subciclos para este caso. Utilize uma notação matemática apropriada.

Exercício 123. Desafio Imagine o mapa de uma cidade onde as esquinas são vértices e as ruas conectando as esquinas são arcos. Pense em algo parecido com um *grid*. Este grafo claramente não é completo. Também pode ter ruas que são mão mas não são contra-mão, etc. Considere um grafo $G(V, A)$ não completo que modele este mapa. Considere também um caminhão que deve partir de um ponto de origem, entregar encomendas em um subconjunto K de vértices na cidade ($K < V$) e voltar ao ponto de origem.

Escreva uma formulação inteira que não assuma um grafo completo e que encontre a rota mínima para o caminhão. Considere que pode não haver ligação direta entre dois pontos quaisquer de K.

Aulas 25 e 26

5.13 Problema da mochila

Suponha que uma mochila pode carregar o peso máximo b. Existem n tipos de itens, e cada item tem peso $a_i > 0$, e valor c_i. Queremos escolher itens para carregar na mochila que maximizem o seu valor. Ou seja,

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \quad \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

Exercício 124. Prove que é impossível carregar a mochila com um valor maior do que $(c_i/a_i)b$ para todo i. Ache o ótimo da relaxação linear.

Considere o dual do problema da mochila. Temos uma variável y e as restrições:

$$\begin{aligned} \min \quad & by \\ \text{sujeito a} \quad & a_i y \geq c_i \quad \forall i \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

A variável única y tem que ser maior ou igual a $\frac{c_i}{a_i}$ para todo i. Assim a solução do dual é maior ou igual a $b\frac{c_i}{a_i}$ para qualquer i, e pelo teorema fraco a solução do primal não pode ser maior que a do dual.

A solução da relaxação linear é colocar tudo no x_i com maior razão $\frac{c_i}{a_i}$. Neste caso, podemos colocar até $\frac{b}{a_i}$ unidades de x_i na mochila, e o valor da função objetivo será $\frac{c_i b}{a_i}$. Ou, formalmente:

$$b \max_{i=1,\dots,n} \frac{c_i}{a_i}$$

Se apenas um item de cada tipo pode ser selecionado, então precisamos forçar $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}$. Este é o problema da mochila 0-1. Definimos

$$K = \left\{ \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i \leq b \right\}.$$

Exercício 125.

(a) No problema 0-1, imagine que o item j só tem valor se o item i for levado também. Como representar este fato na formulação?

(b) Imagine que é necessário levar ao menos i ou j. Como representar isso?

(c) Agora, não podemos levar i e j juntos. Como formular?

Vamos agora apresentar uma formulação alternativa. Um subconjunto $C \subset \{1, ..., n\}$ é uma cobertura para a mochila se

$$\sum_{i \in C} a_i > b,$$

e é uma cobertura minimal se, para todo $j \in C$, vale que

$$\sum_{i \in C \setminus \{j\}} a_i \leq b.$$

Considere agora

$$R = \left\{ \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n : \text{ Para todo } C \text{ cobertura minimal de } K, \sum_{i \in C} (1 - x_i) \geq 1. \right\}$$

As restrições $\sum_{i \in C}(1 - x_i) \geq 1$ podem ser equivalentemente reescritas como $\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$.

Exercício 126. Seja $K = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^3 : 3(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) \leq 5\}$.

(i) Calcule todos os pontos de K.

(ii) Quais são todas as coberturas minimais?

(iii) Expresse as desigualdades que definem todas as coberturas minimais.

(iv) Expresse todos os pontos de R.

(v) Conclua que otimizar em K é a mesma coisa que otimizar em R.

(vi) Mostre entretanto que as relaxações lineares de K e R são diferentes. Se você fosse resolver a PI da mochila usando os algoritmos vistos, qual formulação teria sido melhor?

(i) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$

(ii) $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3)$

(iii) São:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 + x_3 \leq 1$$
$$x_2 + x_3 \leq 1$$

(iv) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$

(v) Os pontos inteiros válidos são os mesmos.

(vi) Somando as três equações de R, temos:

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \leq 3$$

Em K, se os pesos c forem idênticos, a soma das variáveis seria $\frac{5}{3}$, com objetivo $\frac{5}{3}c$. em R, seria $\frac{3}{2}c$.

Exercício 127. Mostre que, independente do exemplo, sempre teremos que $K = R$.

5.14 Problema das várias mochilas

Considere o seguinte problema. Um chapa de metal de largura W é cortada em tiras mais finas. A indústria pode cortar tiras de m larguras diferentes. Ela recebe uma encomenda de b_i chapas de largura w_i. Qual o número mínimo de chapas ela precisará para cumprir a demanda?

Vamos supor que p é um número muito grande, maior do que a quantidade de chapas que será necessária.

Exercício 128. Dê um exemplo de um valor razoável para p.

Defina variáveis $\boldsymbol{z}_{ij}$ que indicam quantas chapas de largura w_i serão cortadas na chapa j, onde i vai de 1 a m e j de 1 a p. Defina variáveis $\boldsymbol{y}_j$ que indicam se a chapa j será usada.

Exemplo 22. Imagine que $W = 10$, $m = 3$, $w_1 = 3$, $w_2 = 4$, e $w_3 = 5$. Digamos $b_1 = 4$, $b_2 = 3$ e $b_3 = 3$. Certamente usaremos no máximo 10 chapas. Então teremos variáveis $\boldsymbol{z}_{ij}$ indicando quantas tiras do tipo i ficarão na chapa j, e variáveis $\boldsymbol{y}_j$ indicando quais das 10 chapas serão usadas. Daí teremos:

$$\begin{array}{rl} \min & \boldsymbol{y}_1 + ... + \boldsymbol{y}_{10} \\ \text{sujeito a} & 3\boldsymbol{z}_{1j} + 4\boldsymbol{z}_{2j} + 5\boldsymbol{z}_{3j} \leq 10\boldsymbol{y}_j \text{ para todo } j = 1, ..., 10 \\ & \boldsymbol{z}_{i1} + ...\boldsymbol{z}_{i10} \geq b_i, \text{ para } i = 1, 2, 3 \\ & \boldsymbol{y} \in \{0, 1\} \quad \boldsymbol{z} \geq 0 \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Ou seja, minimizamos as chapas usadas, garantimos que cada chapa usada seja cortada de acordo com seu limite, cortamos o mínimo de cada tira que precisamos, e garantimos que as variáveis são inteiros que fazem sentido.

Exercício 129. Escreva a formulação em geral para este problema.

Infelizmente a formulação que você inventou acima não é muito boa na prática. O ótimo da PI costuma ficar muito longe do ótimo da relaxação linear.

Exercício 130. Por sinal, qual o ótimo da relaxação linear?

Vamos inventar uma nova formulação. Seja

$$S = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^m : \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w}^T \mathbf{s} \leq W, \quad \mathbf{s} \geq 0. \right\}$$

Ou seja, S denota o conjunto de todas as possíveis maneiras que podemos cortar a chapa de metal nas larguras limitadas.

Exercício 131. No exemplo acima, liste todos os vetores em S.

Sejam agora $\boldsymbol{x}_{\mathbf{s}}$ uma variável que indica se a maneira $\mathbf{s}$ será ou não utilizada. Então temos a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{\mathbf{s} \in S} \boldsymbol{x}_{\mathbf{s}} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{\mathbf{s} \in S} \mathbf{s}_i \boldsymbol{x}_{\mathbf{s}} \geq b_i \quad \text{para todo } i = 1, ...m \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \quad \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

Exercício 132. Pare para ler e entender a formulação acima. Qual o problema desta formulação?

A parte boa é que, na prática, o ótimo da relaxação linear costuma estar muito perto do ótimo inteiro. As vezes basta apenas arrendondar o ótimo da relaxação linear. Vamos entender uma estratégia para resolver este problema.

Exercício 133. Escreva a relaxação linear da formulação acima e a sua dual (use variáveis duais $\boldsymbol{u}_i$ para $i = 1, ..., m$). Note que teremos uma restrição para cada $\mathbf{s} \in S$.

$$(\text{P}) \quad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{\mathbf{s} \in S} \boldsymbol{x}_{\mathbf{s}} \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{\mathbf{s} \in S} \mathbf{s}_i \boldsymbol{x}_{\mathbf{s}} \geq b_i \quad \forall\ i = 1, ...m \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

$$(\text{D}) \quad \begin{aligned} \max \quad & \sum b_i \boldsymbol{u}_i \\ \text{sujeito a} \quad & \sum \mathbf{s}_i \boldsymbol{u}_i \leq 1, \ \forall\ \mathbf{s} \in S, \\ & \boldsymbol{u} \geq 0. \end{aligned}$$

Imagine que no problema original usamos apenas um subconjunto de S, digamos S', para definir variáveis. Então na dual teremos apenas as restrições indexadas por S'. Sejam $\overline{\boldsymbol{x}}$ e $\overline{\boldsymbol{u}}$ um par primal-dual de soluções ótimas para os problemas indexados por S'. Estendemos $\overline{\boldsymbol{x}}$ para uma solução viável da relaxação linear fazendo $\overline{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{s}} = 0$ para todo $\mathbf{s} \in S \backslash S'$.

Exercício 134. Por que esta solução ainda é viável? Por que ela não é necessariamente ótima?

Exercício 135. Argumente que se $\overline{\boldsymbol{u}}$ ainda é viável para a dual original, então a nova $\overline{\boldsymbol{x}}$ estendida é ótima para a relaxação original (teorema forte? folgas complementares?).

Note que $\overline{\boldsymbol{u}}$ será ótima para a relaxação original se e somente se o valor abaixo é no máximo 1.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum \overline{\boldsymbol{u}}_i \mathbf{s}_i \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{s} \in S \end{aligned}$$

Em outras palavras, se os $\mathbf{s}$ são variáveis, estamos calculando o ótimo do problema da mochila com valores iguais $\overline{\boldsymbol{u}}$, pesos iguais a $\boldsymbol{w}$ e capacidade igual a W:

$$\begin{array}{rl} \max & \sum \overline{\boldsymbol{u}}_i \mathbf{s}_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w}_i \mathbf{s}_i \leq W \\ & \mathbf{s} \geq 0 \quad \mathbf{s} \text{ inteiro.} \end{array}$$

Se esse ótimo for superior a 1, digamos que $\mathbf{s}^*$ seja a solução ótima. Ou seja, $\mathbf{s}*$ representa a restrição de (D) que é mais violada pela candidata a ótimo $\overline{\boldsymbol{u}}$. Então adicionamos à variável $\boldsymbol{x}_{\mathbf{s}^*}$ à formulação restrita de (P), ou seja, $\mathbf{s}^*$ a S', e repetimos.

Exemplo 23. Volte ao exemplo corrente desta seção. Comece com um conjunto $S' = \{(0,0,2),(2,1,0)\}$.

(i) Resolva o programa (P) e (D) de acordo com S', ou seja, resolva o par

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{rl} \min & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \\ \text{sujeito a} & 0\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \geq 4 \\ & 0\boldsymbol{x}_1 + 1\boldsymbol{x}_2 \geq 3 \\ & 2\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 \geq 3 \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array} \qquad \Bigg| \qquad (\mathrm{D}) \quad \begin{array}{rl} \max & 4\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 \\ \text{sujeito a} & 2\boldsymbol{u}_3 \leq 1 \\ & 2\boldsymbol{u}_1 + 1\boldsymbol{u}_2 \leq 1 \\ & \boldsymbol{u} \geq 0. \end{array}$$

(ii) Note que o ótimo é $\overline{\boldsymbol{x}} = (3/2, 3)$ e $\overline{\boldsymbol{u}} = (0, 1, 1/2)$

(iii) Resolva agora a PI

$$\begin{array}{rl} \max & 0\mathbf{s}_1 + 1\mathbf{s}_2 + (1/2)\mathbf{s}_3 \\ \text{sujeito a} & 3\mathbf{s}_1 + 4\mathbf{s}_2 + 5\mathbf{s}_3 \leq 10 \\ & \mathbf{s} \geq 0 \quad \mathbf{s} \text{ inteiro.} \end{array}$$

(iv) Note que o ótimo é $\mathbf{s}^* = (0, 2, 0)$, de valor objetivo 2. Maior do que 1. Portanto precisamos adicionar este elemento no conjunto S' e recomeçar.

(v) Exercício: faça mais uma iteração.

5.15 Localização de instalações (facility location)

Lembre-se do exercício na parte de modelagem sobre a decisão de onde abrir quartéis do corpo de bombeiros para atender cidades. Alternativamente, pense por exemplo em uma empresa de logística deseja abrir alguns armazéns para atender a alguns pontos de venda no varejo. Ambos os problemas podem ser modelados formalmente da seguinte forma:

(i) Um grafo G, com vértices V e arestas E.

(ii) Um subconjunto dos vértices chamados de instalações, digamos, $F \subseteq V$.

(iii) Um subconjunto dos vértices chamados de clientes, digamos, $C \subseteq V$. Podemos assumir que $V = F \cup C$.

(iv) Uma função custo em cada uma das arestas (por exemplo, o custo de transporte ou a distância), ou seja, $c \in \mathbb{R}^E$. No caso especial que discutimos aqui, esta função será uma métrica, ou seja, o custo de conectar i a j não é maior do que o de conectar i a j_1, j_1 a i_2 e i_2 a j.

(v) Um custo para abrir cada uma das instalações, ou seja, $f \in \mathbb{R}^F$.

Após a escolha de um subconjunto possível das instalações, cada cliente será pareado com uma instalação aberta, e o custo do pareamento será o custo do caminho mínimo no grafo entre eles. O objetivo é minimizar o custo total de abertura das instalações, e o custo total dos pareamentos. Ou seja, temos variáveis y_i para cada $i \in F$ que indicarão a abertura ou não da instalação, e variáveis x_{ij} que indicarão se o cliente j é pareado com a instalação i. Daí

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in F} f_i y_i + \sum_{i \in F,\ j \in C} c_{ij} x_{ij} \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i \in F} x_{ij} \geq 1, \quad \forall\, j \in C, \\
& x_{ij} \leq y_i, \quad \forall\, i \in F,\ j \in C, \\
& \boldsymbol{x} \text{ e } \boldsymbol{y} \geq 0, \text{ e inteiros.}
\end{aligned}
$$

Começamos escrevendo a programação dual da relaxação linear. Teremos variáveis para cada restrição do tipo $\sum x_{ij} \geq 1$, digamos u_j, e outras para cada $x_{ij} \leq y_i$, digamos v_{ij}. Daí

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j \in C} u_j \\
\text{sujeito a} \quad & u_j - v_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall\, i \in F,\ j \in C, \\
& \sum_{j \in C} v_{ij} \leq f_i, \quad \forall\, i \in F, \\
& \boldsymbol{u} \text{ e } \boldsymbol{v} \geq 0.
\end{aligned}
$$

É possível interpretar a dual como um problema em que cada cliente está pagando para a abertura das instalações. Assim, uma possível interpretação para as variáveis duais é a seguinte:

(i) Cada u_j é quanto cada cliente está disposto a pagar no total.

(ii) Cada v_{ij} é quanto está disposto a pagar para abrir a instalação i.

De fato, se $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ e $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ formam um par primal-dual viável e ótimo, as condições de folga complementar implicam que

(i) Se $y_i > 0$, então $\sum v_{ij} = f_i$, ou seja, instalações abertas foram pagadas inteiramente pelos clientes.

(ii) Se $v_{ij} > 0$, então $y_i = x_{ij}$, ou seja, se o cliente j para por i, então ele a utiliza.

(iii) Se $x_{ij} > 0$, então $u_j = c_{ij} + v_{ij}$, ou seja, se o cliente j usa i, então o total que ele gasta é exatamente o custo do pareamento mais a sua fração na abertura de i.

5.15.1 Algoritmo primal-dual

Descrevemos agora um método primal-dual para o problema de localização de instalações.

(1) Começamos com $\boldsymbol{y} = 0$, e $\boldsymbol{u} = 0$.

(2) Aumentamos os valores de u_j para cada cliente que não esteja ainda conectado, de modo constante e uniforme.

(3) Inicialmente, todas as instalações ainda estão fechadas.

(4) Quando u_j ultrapassa c_{ij} para algum i, começamos a aumentar os valores de v_{ij}, de modo constante e uniforme. Lembre-se que precisamos de $u_j \leq c_{ij} + v_{ij}$.

(5) Quando $\sum_j v_{ij} = f_i$, abrimos a instalação i, e conectamos todos os clientes j desconectados e com $u_j \geq c_{ij}$ para a instalação i. Seja $i(j)$ a instalação que o cliente j conectou.

(6) Voltamos a aumentar cada u_j. Dessa vez, assim que u_j atingir algum c_{ij} de um i já aberto, conectamos j a i, e paramos de aumentar u_j, e definimos esta i como $i(j)$. Caso contrário, voltamos para (4).

Ao término, cada cliente estará "conectado"a uma única instalação. Entretanto, mais instalações do que o necessário foram abertas, e clientes estão contribuindo para instalações as quais não conectaram. Vamos descrever agora um esquema que fechará algumas delas.

(a) Crie um grafo cujos vértices são as instalações abertas, e duas delas vizinhas se e somente se há um cliente que contribui para abrir ambas.

(b) Ache um conjunto independente maximal neste grafo, digamos, T, começando na ordem em que as instalações foram temporariamente abertas. Este será o conjunto de instalações oficialmente abertas.

(c) Para cada cliente j, se $i(j)$ está em T, declare então j oficialmente pareado com $i(j)$. Se $i(j) \notin T$, seja i' a instalação de T que conflita com $i(j)$ (e que, portanto, foi aberta antes que $i(j)$). Declare j oficialmente pareado a i'.

Temos alguns fatos:

(i) Nenhum cliente j contribui para duas instalações oficialmente abertas.

(ii) Se $i \in T$, e $S \subseteq C$ são os clientes j tais que $i(j) = i$, então

$$f_i + \sum_{j \in S} c_{ij} = \sum_{j \in S} u_j.$$

De fato, temos, por construção da primeira parte do algoritmo, que

$$f_i = \sum_{j \in S} v_{ij}.$$

Como $v_{ij} = u_j - c_{ij}$, a equação é verdadeira.

(iii) Se j está oficialmente conectado a $i \in T$, mas $i(j) \neq i$, então

$$c_{ij} \leq 3u_j.$$

Para ver este, note que precisa haver j' que contribui originalmente para i e para $i(j)$, logo $u_{j'} \geq c_{ij'}$ e $\geq c_{i(j)j'}$. Também sabemos que $u_j \geq c_{i(j)j}$. Como i abriu antes que $i(j)$ (e portanto ficou em T...), e como os us aumentam juntos e de modo uniforme, teremos que $u_{j'} \leq u_j$. Logo

$$c_{ij} \leq c_{i(j)j} + c_{i(j)j'} + c_{ij'} \leq u_j + u_{j'} + u_{j'} \leq 3u_j.$$

Segue portanto que o custo total da solução inteira é no, máximo, $3 \sum_{j \in C} u_j$, que é no máximo 3 vezes o ótimo da dual da relaxação linear. Portanto a solução inteira encontrada é, no pior caso possível, 3 vezes o ótimo inteiro do problema!

5.16 Empacotamento, partição e coberturas — uma revisão

Dados um conjunto $P = \{1, ..., n\}$ de pontos e uma família $F = \{F_1, ..., F_m\}$ de subconjuntos de P, um subconjunto S de P é chamado de...

(i) *empacotador* se S intersecta cada F_i no máximo uma vez;

(ii) *particionador* se S intersecta cada F_i exatamente uma vez;

(iii) *cobertor* se S intersecta cada F_i pelo menos uma vez.

Se N é a matriz de incidência do sistema, ou seja, uma matriz 01 em que cada linha é indexada por P e cada coluna por F, e uma entrada é 1 se e somente se o ponto da linha pertence ao subconjunto da coluna, então as coleções de todos os conjuntos...

(i) *empacotadores* é determinada por $S^E = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n : \mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}\}$;

(ii) *particionadores* é determinada por $S^P = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n : \mathbf{N}\boldsymbol{x} = \mathbf{1}\}$;

(iii) *cobertores* é determinada por $S^C = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n : \mathbf{N}\boldsymbol{x} \geq \mathbf{1}\}$.

Em geral, a não ser que $\mathbf{N}$ possua uma estrutura especial, otimizar em conjuntos das formas acima são problemas difíceis.

Exemplo 24. Atenção! Note que originalmente quando falamos de coberturas, estávamos cobrindo pontos escolhendo subconjuntos. Aqui é ao contrário, ou ao menos assim parece à primeira vista: estamos cobrindo os subconjuntos escolhendo pontos (ou fazendo hitting). Os dois problemas são contudo equivalentes: basta inverter os nomes do que é ponto e o que é subconjunto, mantendo a mesma regra de incidência...

5.16.1 Grafos

Considere um grafo G, vértices V e arestas E.

Exercício 136.

(a) Um emparelhamento em um grafo é uma estrutura de qual tipo acima? Quem são os pontos e os subconjuntos?

(b) Uma cobertura por vértices de arestas em um grafo é uma estrutura de qual tipo acima? Quem são os pontos e os subconjuntos?

(c) Uma coloração em um grafo é uma estrutura de qual tipo acima? Quem são os pontos e os subconjuntos?

(d) Um conjunto independente em um grafo é um problema de qual tipo acima? Quem são os pontos e os subconjuntos?

(e) Um clique em um grafo é um problema de qual tipo acima? Quem são os pontos e os subconjuntos?

Como visto acima, um conjunto S de vértices é chamado de *independente* se nenhum par dentro do conjunto são vizinhos. Ou seja, se N é a matriz de incidência vértice $\times$ aresta do grafo, então o coleção de todos os conjuntos independentes é determinado por

$$\texttt{stab}(G) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n : \mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}.\}$$

O problema de achar um conjunto independente de tamanho máximo é geral formulado como $\max\{\mathbf{1}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \texttt{stab}(G)\}$, ou seja

$$\begin{array}{rl} \max & \mathbf{1}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \quad \boldsymbol{x} \text{ inteiro.} \end{array}$$

Vamos discutir abaixo como trocar as desigualdades $\mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$ por outras mais restritas, que tornem a relaxação linear mais próxima da programação inteira.

Seja K um clique (conjunto de vértices em que todos se ligam a todos), e seja $\boldsymbol{v}_K$ seu vetor de incidência (vetor de n entradas 01 que indica quais vértices pertencem a K). Note que se $\boldsymbol{x}$ é um conjunto independente, então necessariamente teremos

$$\boldsymbol{v}_K^T\ \boldsymbol{x} \leq 1.$$

Ou seja, todo conjunto independente possui no máximo um vértice de cada clique.

Exercício 137. Considere o grafo que possui três vértices a, b e c, e todos são conectados. Mostre que há soluções $0 \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$ fracionárias que satisfazem $\mathbf{N}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$ mas que não satisfazem $\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b + \boldsymbol{x}_c \leq 1$. Conclua que a formulação das desigualdades lineares para o problema de achar conjuntos independentes em um grafo é mais restrita se usarmos uma desigualdade para cada clique, ao invés de uma desigualdade para cada aresta.

Exercício 138.

(a) Demonstre que o número cromático de um grafo é sempre maior ou igual do que o tamanho do maior clique do grafo.

(b) Mostre que mesmo o ótimo da relaxação linear da formulação do problema de coloração como no Exercício 136 ainda é maior ou igual que o tamanho do maior clique de um grafo.

5.17 Alguns truques de formulação

Nesta breve seção, iremos fazer uma revisão de como formular como programação linear ou inteira algumas funções objetivas.

Valor absoluto

Considere:

$$\begin{array}{rl} \max & \sum c_j |x_j| \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x} \text{ livre.} \end{array}$$

Como reescrever a PL acima para que seja linear? Dica: transforme cada x_j em duas variáveis.

Máximos ou mínimos dentro da função objetiva

Imagine que temos várias funções objetivas $\boldsymbol{c}_1, ..., \boldsymbol{c}_m$, e calculamos, para todo $k = 1, ..., m$,

$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Dentre todos eles, queremos o mínimo. Ou seja, estamos procurando

$$\begin{array}{rl} \min & \max\limits_{k=1}^{m} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Como modelar o problema acima como uma única programação linear? Dica: crie uma única nova variável que limite todas as programações de máximo originais.

Exercício 139. No problema abaixo, estamos procurando o vetor $\boldsymbol{x}$ que satisfaz as restrições e possui a maior entrada possível.

$$\begin{array}{rl} \max & \max_{k=1}^{n} \boldsymbol{x}_n \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Como adaptar o que vimos acima para este problema? Ou seja, quem são os $\boldsymbol{c}_k$?

Função objetiva fracionária

$$\begin{array}{rl} \min & \left(\dfrac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \alpha}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} + \beta}\right) \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

E agora? Dica, defina uma nova variável

$$t = \frac{1}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} + \beta}.$$

Qual cuidado você tem que ter? Como fica a formulação agora? Apareceram termos não lineares? Como corrigir?

Por fim, defina novas variáveis $\boldsymbol{y} = t \cdot \boldsymbol{x}$.