



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού

Εργασία 5

Robotic Manipulator: Path Planning

Ομάδα 7:

Ευάγγελος Καραβάς - AM:02123209

Χρήστος Τσικαλάκης - AM: 02123204

ΑΘΗΝΑ

2024

Contents

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	3
Περιγραφή στόχου εργασίας	3
Έλεγχος θέσης με τρείς αρθρώσεις	4
Αντίστροφος κινηματικός έλεγχος	8
Ιακωβιανή Μήτρα	9
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ	19
Σχεδιασμός Τροχιάς.....	19
Γραφήματα ελέγχου θέσης με τρεις αρθρώσεις.....	19
Γραφήματα ελέγχου θέσης με επτά αρθρώσεις	22
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	22

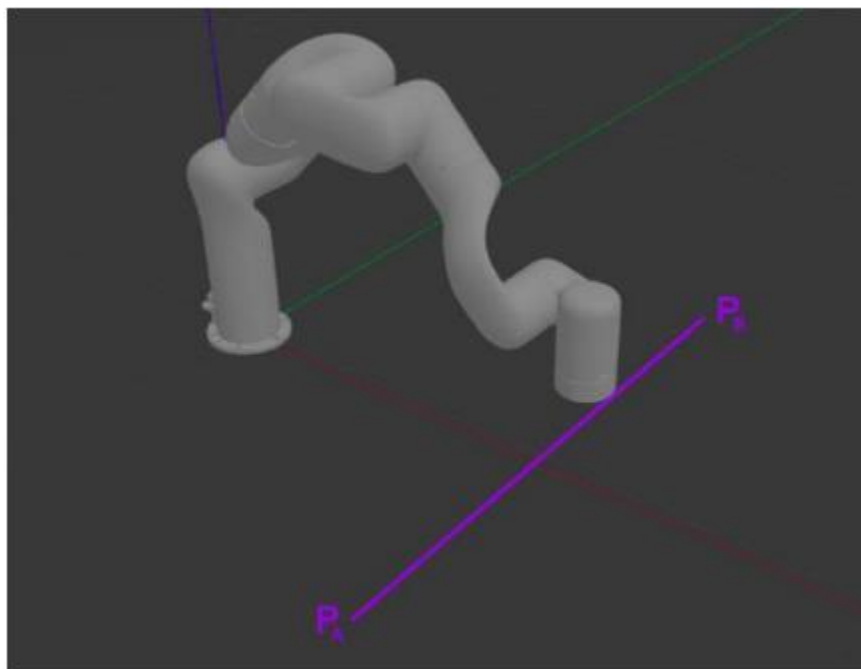
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Περιγραφή στόχου εργασίας

Στόχος αυτής της εργασίας είναι ο κινηματικός έλεγχος του ρομποτικού χειριστή xArm 7 μέσω προσομοίωσης στο gazebo μέσω του ROS. Χρησιμοποιούνται δύο μεθοδολογίες για την παρακολούθηση τροχιάς του βραχίονα.

- Στο πρώτο ερώτημα παρακολουθούμε την τροχιά του τελικού στοιχείου δράσης περιοδικά από το σημείο P_A προς το σημείο P_B χρησιμοποιώντας μόνο τρεις αρθρώσεις (q_1, q_2, q_4) υπολογίζοντας το αντίστροφο κινηματικό μοντέλο.
- Στο δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε πλήρη κινηματικό έλεγχο ($q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7$) με χρήση της Ιακωβιανής μήτρας του ρομποτικού χειριστή.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κίνηση που προσπαθούμε να προσομοιώσουμε και στα δύο ερωτήματα.



Έλεγχος θέσης με τρείς αρθρώσεις

Στο πρώτο μέρος θα κάνουμε κινηματικό έλεγχο για το άκρο του ρομποτικού χειριστή, έχοντας ενεργές μόνο τις αρθρώσεις q_1, q_2, q_4 και τις αρθρώσεις $q_3 = q_5 = q_7 = 0$ και $q_6 = 0.75 \text{ rad}$.

Αρχικά υπολογίζουμε το κινηματικό μοντέλο του βραχίονα μέσω των διαδοχικών μετασχηματισμών που μας δόθηκαν.

$$A_1^0(q_1) = \text{Rot}(z, q_1) \cdot \text{Tra}(z, l_1), \quad l_1 = 26.7 \text{ cm}$$

$$A_2^1(q_2) = \text{Rot}\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{Rot}(z, q_2)$$

$$A_3^2(q_3) = \text{Rot}\left(x, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{Rot}(z, q_3) \cdot \text{Tra}(z, l_2), \quad l_2 = 29.3 \text{ cm}$$

$$A_4^3(q_4) = \text{Rot}\left(x, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{Tra}(x, l_3) \cdot \text{Rot}(z, q_4), \quad l_3 = 5.25 \text{ cm}$$

$$A_5^4(q_5) = \text{Rot}\left(x, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{Tra}(x, l_4 \sin \theta_1) \cdot \text{Rot}(z, q_5) \cdot \text{Tra}(z, l_4 \cos \theta_1), \quad \begin{matrix} l_4 = 35.12 \text{ cm} \\ \theta_1 = 0.2225 \text{ rad} \end{matrix}$$

$$A_6^5(q_5) = \text{Rot}\left(x, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{Rot}(z, q_6)$$

$$A_7^6(q_6) = \text{Rot}\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{Tra}(x, l_5 \sin \theta_2) \cdot \text{Rot}(z, q_7) \cdot \text{Tra}(z, l_5 \cos \theta_2), \quad \begin{matrix} l_5 = 12.32 \text{ cm} \\ \theta_2 = 0.6646 \text{ rad} \end{matrix}$$

Έτσι βρίσκουμε το ευθύ κινηματικό μοντέλο

$$A_{07} = \begin{matrix} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{matrix}$$

Όπου τα στοιχεία του πίνακα είναι:

$$\mathbf{A}_{11} = s7*(s5*(c4*(s1*s3 - c1*c2*c3) - c1*s2*s4) + c5*(c3*s1 + c1*c2*s3)) - c7*(s6*(s4*(s1*s3 - c1*c2*c3) + c1*c4*s2) + c6*(c5*(c4*(s1*s3 - c1*c2*c3) - c1*s2*s4) - s5*(c3*s1 + c1*c2*s3)))$$

$$\mathbf{A}_{12} = s7*(s6*(s4*(s1*s3 - c1*c2*c3) + c1*c4*s2) + c6*(c5*(c4*(s1*s3 - c1*c2*c3) - c1*s2*s4) - s5*(c3*s1 + c1*c2*s3))) + c7*(s5*(c4*(s1*s3 - c1*c2*c3) - c1*s2*s4) + c5*(c3*s1 + c1*c2*s3))$$

$$\mathbf{A}_{13} = s6*(c5*(c4*(s1*s3 - c1*c2*c3) - c1*s2*s4) - s5*(c3*s1 + c1*c2*s3)) - c6*(s4*(s1*s3 - c1*c2*c3) + c1*c4*s2)$$

$$\mathbf{A}_{14} = (293*c1*s2)/10 - (21*s1*s3)/4 - (9697*c6*(s4*(s1*s3 - c1*c2*c3) + c1*c4*s2))/1000 - (75977*s6*(s4*(s1*s3 - c1*c2*c3) + c1*c4*s2))/10000 - (75977*c6*(c5*(c4*(s1*s3 - c1*c2*c3) - c1*s2*s4) - s5*(c3*s1 + c1*c2*s3)))/10000 + (9697*s6*(c5*(c4*(s1*s3 - c1*c2*c3) - c1*s2*s4) - s5*(c3*s1 + c1*c2*s3)))/1000 - (7747*c4*(s1*s3 - c1*c2*c3))/1000 - (13701*s4*(s1*s3 - c1*c2*c3))/400 + (21*c1*c2*c3)/4 - (13701*c1*c4*s2)/400 + (7747*c1*s2*s4)/1000$$

$$\mathbf{A}_{21} = c7*(s6*(s4*(c1*s3 + c2*c3*s1) - c4*s1*s2) + c6*(c5*(c4*(c1*s3 + c2*c3*s1) + s1*s2*s4) - s5*(c1*c3 - c2*s1*s3))) - s7*(s5*(c4*(c1*s3 + c2*c3*s1) + s1*s2*s4) + c5*(c1*c3 - c2*s1*s3))$$

$$\mathbf{A}_{22} = -c7*(s5*(c4*(c1*s3 + c2*c3*s1) + s1*s2*s4) + c5*(c1*c3 - c2*s1*s3)) - s7*(s6*(s4*(c1*s3 + c2*c3*s1) - c4*s1*s2) + c6*(c5*(c4*(c1*s3 + c2*c3*s1) + s1*s2*s4) - s5*(c1*c3 - c2*s1*s3)))$$

$$\mathbf{A}_{23} = c6*(s4*(c1*s3 + c2*c3*s1) - c4*s1*s2) - s6*(c5*(c4*(c1*s3 + c2*c3*s1) + s1*s2*s4) - s5*(c1*c3 - c2*s1*s3))$$

$$\mathbf{A}_{24} = (21*c1*s3)/4 + (293*s1*s2)/10 + (9697*c6*(s4*(c1*s3 + c2*c3*s1) - c4*s1*s2))/1000 + (75977*s6*(s4*(c1*s3 + c2*c3*s1) - c4*s1*s2))/10000 + (75977*c6*(c5*(c4*(c1*s3 + c2*c3*s1) + s1*s2*s4) - s5*(c1*c3 - c2*s1*s3)))/10000 + (7747*c4*(c1*s3 + c2*c3*s1))/1000 - (9697*s6*(c5*(c4*(c1*s3 + c2*c3*s1) + s1*s2*s4) - s5*(c1*c3 - c2*s1*s3)))/1000 + (13701*s4*(c1*s3 + c2*c3*s1))/400 + (21*c2*c3*s1)/4 - (13701*c4*s1*s2)/400 + (7747*s1*s2*s4)/1000$$

$$A_{31} = c7*(c6*(c5*(c2*s4 - c3*c4*s2) - s2*s3*s5) - s6*(c2*c4 + c3*s2*s4)) - s7*(s5*(c2*s4 - c3*c4*s2) + c5*s2*s3)$$

$$A_{32} = -c7*(s5*(c2*s4 - c3*c4*s2) + c5*s2*s3) - s7*(c6*(c5*(c2*s4 - c3*c4*s2) - s2*s3*s5) - s6*(c2*c4 + c3*s2*s4))$$

$$A_{33} = -s6*(c5*(c2*s4 - c3*c4*s2) - s2*s3*s5) - c6*(c2*c4 + c3*s2*s4)$$

$$A_{34} = (293*c2)/10 - (13701*c2*c4)/400 - (21*c3*s2)/4 + (7747*c2*s4)/1000 + (75977*c6*(c5*(c2*s4 - c3*c4*s2) - s2*s3*s5))/10000 - (9697*s6*(c5*(c2*s4 - c3*c4*s2) - s2*s3*s5))/1000 - (9697*c6*(c2*c4 + c3*s2*s4))/1000 - (75977*s6*(c2*c4 + c3*s2*s4))/10000 - (7747*c3*c4*s2)/1000 - (13701*c3*s2*s4)/400 + 267/10$$

$$A_{41} = 0 ,$$

$$A_{42} = 0 ,$$

$$A_{43} = 0 ,$$

$$A_{44} = 1$$

Και τα σύμβολα $s_i = \sin(q_i)$ και $c_i = \cos(q_i)$

Τα στοιχεία του πίνακα που θα χρησιμοποιήσουμε για το πρώτο ερώτημα είναι τα A_{14} , A_{24} , A_{34} δηλαδή τα:

$$\begin{aligned} P_{ex} = & l2*\cos(q1)*\sin(q2) - l3*(\sin(q1)*\sin(q3) - \cos(q1)*\cos(q2)*\cos(q3)) - \\ & l4*\cos(q1)*(\sin(q4)*(\sin(q1)*\sin(q3) - \cos(q1)*\cos(q2)*\cos(q3)) + \cos(q1)*\cos(q4)*\sin(q2)) \\ & - l5*\cos(q5)*(\cos(q6)*(\sin(q4)*(\sin(q1)*\sin(q3) - \cos(q1)*\cos(q2)*\cos(q3)) + \\ & \cos(q1)*\cos(q4)*\sin(q2)) - \sin(q6)*(\cos(q5)*(\cos(q4)*(\sin(q1)*\sin(q3) - \\ & \cos(q1)*\cos(q2)*\cos(q3)) - \cos(q1)*\sin(q2)*\sin(q4)) - \sin(q5)*(\cos(q3)*\sin(q1) + \\ & \cos(q1)*\cos(q2)*\sin(q3)))) - l4*\sin(q1)*(\cos(q4)*(\sin(q1)*\sin(q3) - \cos(q1)*\cos(q2)*\cos(q3)) \\ & - \cos(q1)*\sin(q2)*\sin(q4)) - l5*\sin(q2)*(\sin(q6)*(\sin(q4)*(\sin(q1)*\sin(q3) - \\ & \cos(q1)*\cos(q2)*\cos(q3)) + \cos(q1)*\cos(q4)*\sin(q2)) + \\ & \cos(q6)*(\cos(q5)*(\cos(q4)*(\sin(q1)*\sin(q3) - \cos(q1)*\cos(q2)*\cos(q3)) - \\ & \cos(q1)*\sin(q2)*\sin(q4)) - \sin(q5)*(\cos(q3)*\sin(q1) + \cos(q1)*\cos(q2)*\sin(q3)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ey} = & l_3 * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + l_2 * \sin(q_1) * \sin(q_2) + \\
& l_4 * \cos(q_1) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) + \\
& l_4 * \sin(q_1) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) + \\
& l_5 * \cos(q_5) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \\
& \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) - \sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \\
& \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3)))) + l_5 * \sin(q_2) * (\sin(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) + \\
& \cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \\
& \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3))))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ez} = & l_1 + l_2 * \cos(q_2) - l_4 * \cos(q_1) * (\cos(q_2) * \cos(q_4) + \cos(q_3) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) + \\
& l_4 * \sin(q_1) * (\cos(q_2) * \sin(q_4) - \cos(q_3) * \cos(q_4) * \sin(q_2)) - l_3 * \cos(q_3) * \sin(q_2) - \\
& l_5 * \cos(q_5) * (\sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_2) * \sin(q_4) - \cos(q_3) * \cos(q_4) * \sin(q_2)) - \\
& \sin(q_2) * \sin(q_3) * \sin(q_5)) + \cos(q_6) * (\cos(q_2) * \cos(q_4) + \cos(q_3) * \sin(q_2) * \sin(q_4))) + \\
& l_5 * \sin(q_2) * (\cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_2) * \sin(q_4) - \cos(q_3) * \cos(q_4) * \sin(q_2)) - \\
& \sin(q_2) * \sin(q_3) * \sin(q_5)) - \sin(q_6) * (\cos(q_2) * \cos(q_4) + \cos(q_3) * \sin(q_2) * \sin(q_4)))
\end{aligned}$$

Αντίστροφος κινηματικός έλεγχος

Για την $q1$ γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\bullet \quad q1 = \text{atan2}(P_{ey*}, P_{ex*})$$

Όπου τα P_{ex*} , P_{ey*} και P_{ez*} είναι τα τελικά στοιχεία δράσης του ρομποτικού βραχίονα.

Για το $q2$ έχουμε ορίσει τα:

$$p3 = l2 - (l4\cos(\theta1) + l5\cos(q6 - \theta2))\cos(q4) + (l4\sin(\theta1) - l5\sin(q6 - \theta2))\sin(q4)$$

$$p4 = l3 + (l4\sin(\theta1) - l5\sin(q6 - \theta2))\cos(q4) + (l4\cos(\theta1) + l5\cos(q6 - \theta2))\sin(q4)$$

Ωστε η άρθρωση $q2$ έχει τη λύση:

$$\bullet \quad q2 = \arctan\left(\frac{p3\sqrt{P_{ex}^2 + P_{ey}^2} - p4(P_{ez} - l1)}{p4\sqrt{P_{ex}^2 + P_{ey}^2} - p3(P_{ez} - l1)}\right)$$

Και για την άρθρωση $q4$:

$$p1 = -l2 * l5 * \cos(\theta2 - q6) + l3 * l5\sin(\theta2 - q6) - l2 * l4\cos(\theta1) + l3 * l4\sin(\theta1)$$

$$p2 = l2 * l5\sin(\theta2 - q6) + l3l5\cos(\theta2 - q6) + l2 * l4\sin(\theta1) + l3l4\cos(\theta1)$$

Και τέλος το $M = \frac{1}{2} * ((\sqrt{P_{ex}^2 + P_{ey}^2})^2 + (P_{ez} - l1)^2 - l2^2 - l3^2 - l4^2 - l5^2 - 2l4 * l5\cos(q6 + \theta1 - \theta2))$

$$\bullet \quad q4 = \arctan\left(\frac{M}{\sqrt{p1^2 + p2^2} - M^2}\right) - \arctan\left(\frac{p1}{p2}\right)$$

Πρέπει να αναφερθεί ότι το $q2$ θα υπολογίζεται μετά το $q4$ αφού για τον υπολογισμό του $q2$ χρησιμοποιούμε στο $p3$ και $p4$ το $\cos(q4)$. Επίσης για τον υπολογισμό των αντίστροφων γεωμετρικών σχέσεων προέκυψαν παραπάνω λύσεις που δεν χρησιμοποιήσαμε στα $q2$ και $q4$.

Ιακωβιανή Μήτρα

Στη συνέχεια ακολουθεί ο υπολογισμός της Ιακωβιανής μήτρας όπου θα είναι ένας πίνακας 6x7 στοιχείων λόγω των επτά περιστροφικών αρθρώσεων. Η σχέση από την οποία προκύπτουν τα στοιχεία του Ιακωβιανού πίνακα φαίνεται από τη παρακάτω σχέση, με προσέγγιση της κάθε άρθρωσης:

$$\begin{bmatrix} J_{L_i} \\ J_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i-1} \times r_{i-1,E} \\ b_{i-1} \end{bmatrix} : \text{για στροφική άρθρωση}$$

όπου b_{i-1} : ο άξονας της άρθρωσης i
 $r_{i-1,E}$: διάνυσμα $O_{i-1} \rightarrow O_E$

Για κάθε στοιχείο του Ιακωβιανού πίνακα, σε κάθε άρθρωση προκύπτουν τα επιμέρους στοιχεία του πίνακα:

$$\begin{aligned} J_{11} = & -l_3 * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - l_2 * \sin(q_1) * \sin(q_2) - \\ & l_4 * \cos(q_1) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) - \\ & l_4 * \sin(q_1) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \\ & l_5 * \cos(q_5) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \\ & \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) - \sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \\ & \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3)))) - l_5 * \sin(q_2) * (\sin(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) + \\ & \cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \\ & \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{12} = & -l_3 * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - l_2 * \sin(q_1) * \sin(q_2) - \\ & l_4 * \cos(q_1) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) - \\ & l_4 * \sin(q_1) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \\ & l_5 * \cos(q_5) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \\ & \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) - \sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \\ & \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3)))) - l_5 * \sin(q_2) * (\sin(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + \\ & \cos(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \\ & \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{13} = & \cos(q_1) (l_2 \cos(q_2) - l_4 \cos(q_1) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)) + \\ & l_4 \sin(q_1) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - l_3 \cos(q_3) \sin(q_2) - \\ & l_5 \cos(q_5) (\sin(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) + \cos(q_6) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4))) + \\ & l_5 \sin(q_2) (\cos(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) - \sin(q_6) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{14} = & -\cos(q_2) (l_3 (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \\ & l_4 \cos(q_1) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) \\ & + l_4 \sin(q_1) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) \\ & + l_5 \cos(q_5) (\cos(q_6) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \\ & \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) - \sin(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_1) \cos(q_3) - \\ & \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3)))) + l_5 \sin(q_2) (\sin(q_6) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + \\ & \cos(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \\ & \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3)))) - \\ & \sin(q_1) \sin(q_2) (l_4 \cos(q_1) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \\ & l_4 \sin(q_1) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) + l_3 \cos(q_3) \sin(q_2) + \\ & l_5 \cos(q_5) (\sin(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) + \cos(q_6) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4))) - \\ & l_5 \sin(q_2) (\cos(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) - \sin(q_6) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{15} = & (\cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3)) (l_4 \cos(q_1) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \\ & \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)) - l_4 \sin(q_1) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) + \\ & l_5 \cos(q_5) (\sin(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) + \cos(q_6) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4))) - \\ & l_5 \sin(q_2) (\cos(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_2) \sin(q_4) - \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) - \sin(q_6) (\cos(q_2) \cos(q_4) + \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)))) + \\ & \sin(q_2) \sin(q_3) (l_4 \cos(q_1) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \\ & \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + l_4 \sin(q_1) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) \end{aligned}$$

$$J_{16} = (\cos(q_2) \cdot \cos(q_4) +$$

$$J_{17} = -(\sin(q_5) * (\cos(q_2) * \sin(q_4) - \cos(q_3) * \cos(q_4) * \sin(q_2))) +$$

$$\begin{aligned} & \cos(q_5) \sin(q_2) \sin(q_3)) * (l_5 \cos(q_5) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1))) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) - \\ & \sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \\ & \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3)))) + \\ & l_5 \sin(q_2) * (\sin(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \\ & \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + \cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) \cos(q_3) - \\ & \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3)))) - (l_5 \cos(q_5) * (\sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_2) \sin(q_4) - \\ & \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) + \cos(q_6) * (\cos(q_2) \cos(q_4) + \\ & \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4))) - l_5 \sin(q_2) * (\cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_2) \sin(q_4) - \\ & \cos(q_3) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \sin(q_2) \sin(q_3) \sin(q_5)) - \sin(q_6) * (\cos(q_2) \cos(q_4) + \\ & \cos(q_3) \sin(q_2) \sin(q_4)))) * (\sin(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \end{aligned}$$

$$\sin(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) + \cos(q_5)*(\cos(q_1)*\cos(q_3) - \cos(q_2)*\sin(q_1)*\sin(q_3)))$$

$$\begin{aligned} J_{21} = & l_2*\cos(q_1)*\sin(q_2) - l_3*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \\ & l_4*\cos(q_1)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) \\ & - l_5*\cos(q_5)*(\cos(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) - l_4*\sin(q_1)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) \\ & - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - l_5*\sin(q_2)*(\sin(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \\ & \cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \\ & \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{22} = & l_2*\cos(q_1)*\sin(q_2) - l_3*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \\ & l_4*\cos(q_1)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) \\ & - l_5*\cos(q_5)*(\cos(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) - l_4*\sin(q_1)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) \\ & - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - l_5*\sin(q_2)*(\sin(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \\ & \cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \\ & \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{23} = & \sin(q_1)*(l_2*\cos(q_2) - l_4*\cos(q_1)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) + \\ & l_4*\sin(q_1)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - l_3*\cos(q_3)*\sin(q_2) - \\ & l_5*\cos(q_5)*(\sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) + \cos(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4))) + \\ & l_5*\sin(q_2)*(\cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) - \sin(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{24} = & \cos(q_1)*\sin(q_2)*(l_4*\cos(q_1)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \\ & l_4*\sin(q_1)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + l_3*\cos(q_3)*\sin(q_2) + \\ & l_5*\cos(q_5)*(\sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \\ & \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) + \cos(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4))) - \\ & l_5*\sin(q_2)*(\cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) - \sin(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4)))) - \\
& \cos(q_2)*(l_3*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\
& l_4*\cos(q_1)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) \\
& + l_5*\cos(q_5)*(\cos(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\
& \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) + l_4*\sin(q_1)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) + \\
& l_5*\sin(q_2)*(\sin(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\
& \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3))))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{25} = & (\cos(q_3)*\sin(q_1) + \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3))*(l_4*\cos(q_1)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \\
& \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - l_4*\sin(q_1)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \\
& l_5*\cos(q_5)*(\sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \\
& \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) + \cos(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4)))) - \\
& l_5*\sin(q_2)*(\cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \\
& \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) - \sin(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4)))) + \\
& \sin(q_2)*\sin(q_3)*(l_4*\cos(q_1)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\
& \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + l_5*\cos(q_5)*(\cos(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \\
& \sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \\
& \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) + \\
& l_4*\sin(q_1)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) + \\
& l_5*\sin(q_2)*(\sin(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\
& \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3))))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{26} = & (\cos(q_2)*\cos(q_4) + \\
& \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4))*(l_5*\cos(q_5)*(\cos(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\
& \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \\
& \sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \\
& \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) + \\
& l_5*\sin(q_2)*(\sin(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\
& \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) - (l_5*\cos(q_5)*(\sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \\ & \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) + \cos(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \\ & \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4))) - l_5*\sin(q_2)*(\cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \\ & \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) - \sin(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \\ & \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4))))*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{27} = & -(\sin(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \\ & \cos(q_5)*\sin(q_2)*\sin(q_3))*(l_5*\cos(q_5)*(\cos(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \\ & \sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \\ & \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) + \\ & l_5*\sin(q_2)*(\sin(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) - (l_5*\cos(q_5)*(\sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \\ & \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) + \cos(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \\ & \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4))) - l_5*\sin(q_2)*(\cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_2)*\sin(q_4) - \\ & \cos(q_3)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \sin(q_2)*\sin(q_3)*\sin(q_5)) - \sin(q_6)*(\cos(q_2)*\cos(q_4) + \\ & \cos(q_3)*\sin(q_2)*\sin(q_4))))*(\sin(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \\ & \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) + \cos(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3))) \end{aligned}$$

$$J_{31} = 0$$

$$J_{32} = 0$$

$$\begin{aligned} J_{33} = & \cos(q_1)*(l_3*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - l_2*\cos(q_1)*\sin(q_2) + \\ & l_4*\cos(q_1)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) \\ & + l_5*\cos(q_5)*(\cos(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) - \sin(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\sin(q_3)))) + l_4*\sin(q_1)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) + \\ & l_5*\sin(q_2)*(\sin(q_6)*(\sin(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) + \\ & \cos(q_1)*\cos(q_4)*\sin(q_2)) + \cos(q_6)*(\cos(q_5)*(\cos(q_4)*(\sin(q_1)*\sin(q_3) - \\ & \cos(q_1)*\cos(q_2)*\cos(q_3)) - \cos(q_1)*\sin(q_2)*\sin(q_4)) - \sin(q_5)*(\cos(q_3)*\sin(q_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \dots) - \sin(q_1) (l_3 (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \\
& l_2 \sin(q_1) \sin(q_2) + l_4 \cos(q_1) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \\
& \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + l_4 \sin(q_1) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) \\
& + \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) + l_5 \cos(q_5) (\cos(q_6) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) - \\
& \sin(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \\
& \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \dots) + \\
& l_5 \sin(q_2) (\sin(q_6) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \\
& \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + \cos(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_1) \cos(q_3) - \\
& \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{34} = & \sin(q_1) \sin(q_2) (l_3 (\sin(q_1) \sin(q_3) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3)) + \\
& l_4 \cos(q_1) (\sin(q_4) (\sin(q_1) \sin(q_3) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3)) + \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2)) \\
& + l_5 \cos(q_5) (\cos(q_6) (\sin(q_4) (\sin(q_1) \sin(q_3) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3)) + \\
& \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2)) - \sin(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\sin(q_1) \sin(q_3) - \\
& \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3)) - \cos(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_3) \sin(q_1) + \\
& \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \dots) + l_4 \sin(q_1) (\cos(q_4) (\sin(q_1) \sin(q_3) - \\
& \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3)) - \cos(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) + \\
& l_5 \sin(q_2) (\sin(q_6) (\sin(q_4) (\sin(q_1) \sin(q_3) - \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3)) + \\
& \cos(q_1) \cos(q_4) \sin(q_2)) + \cos(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\sin(q_1) \sin(q_3) - \\
& \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3)) - \cos(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_3) \sin(q_1) + \\
& \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3) \dots) + \cos(q_1) \sin(q_2) (l_3 (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + l_4 \cos(q_1) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) \\
& - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + l_4 \sin(q_1) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) + \\
& l_5 \cos(q_5) (\cos(q_6) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \\
& \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) - \sin(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_1) \cos(q_3) - \\
& \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \dots) + l_5 \sin(q_2) (\sin(q_6) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + \\
& \cos(q_6) (\cos(q_5) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \\
& \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) - \sin(q_5) (\cos(q_1) \cos(q_3) - \cos(q_2) \sin(q_1) \sin(q_3) \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{35} = & (\cos(q_3) \sin(q_1) + \cos(q_1) \cos(q_2) \sin(q_3)) (l_4 \cos(q_1) (\sin(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) - \cos(q_4) \sin(q_1) \sin(q_2)) + l_4 \sin(q_1) (\cos(q_4) (\cos(q_1) \sin(q_3) \\
& + \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) + \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_4)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{36} = & (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1))) - \\ & \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) * (l_5 * \cos(q_5) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \\ & \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3))) + \cos(q_1) * \cos(q_4) * \sin(q_2))) - \\ & \sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) - \\ & \cos(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4))) - \sin(q_5) * (\cos(q_3) * \sin(q_1) + \cos(q_1) * \cos(q_2) * \sin(q_3)))) + \\ & l_5 * \sin(q_2) * (\sin(q_6) * (\sin(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) + \\ & \cos(q_1) * \cos(q_4) * \sin(q_2)) + \cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \\ & \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) - \cos(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_3) * \sin(q_1) + \\ & \cos(q_1) * \cos(q_2) * \sin(q_3)))))) - (l_5 * \cos(q_5) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) - \\ & \sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \\ & \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3)))) + \\ & l_5 * \sin(q_2) * (\sin(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \\ & \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) + \cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\ & \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \\ & \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3)))))) * (\sin(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) + \\ & \cos(q_1) * \cos(q_4) * \sin(q_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{37} = & (\sin(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) \\
& + \cos(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \\
& \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3))) * (l_5 * \cos(q_5) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \\
& \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) + \cos(q_1) * \cos(q_4) * \sin(q_2)) - \\
& \sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) - \\
& \cos(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_3) * \sin(q_1) + \cos(q_1) * \cos(q_2) * \sin(q_3)))) + \\
& l_5 * \sin(q_2) * (\sin(q_6) * (\sin(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) + \\
& \cos(q_1) * \cos(q_4) * \sin(q_2)) + \cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \\
& \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) - \cos(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_3) * \sin(q_1) + \\
& \cos(q_1) * \cos(q_2) * \sin(q_3)))) - (\sin(q_5) * (\cos(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) - \\
& \cos(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) + \cos(q_5) * (\cos(q_3) * \sin(q_1) + \\
& \cos(q_1) * \cos(q_2) * \sin(q_3))) * (l_5 * \cos(q_5) * (\cos(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) - \\
& \sin(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \\
& \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3)))) + \\
& l_5 * \sin(q_2) * (\sin(q_6) * (\sin(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) - \\
& \cos(q_4) * \sin(q_1) * \sin(q_2)) + \cos(q_6) * (\cos(q_5) * (\cos(q_4) * (\cos(q_1) * \sin(q_3) + \\
& \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_1)) + \sin(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) - \sin(q_5) * (\cos(q_1) * \cos(q_3) - \\
& \cos(q_2) * \sin(q_1) * \sin(q_3))))))
\end{aligned}$$

$$J_{41} = 0$$

$$J_{42} = 0$$

$$J_{43} = -\sin(q_1)$$

$$J_{44} = \cos(q_1) * \sin(q_2)$$

$$J_{45} = \cos(q_3) * \sin(q_1) + \cos(q_1) * \cos(q_2) * \sin(q_3)$$

$$J_{46} = -\sin(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) - \cos(q_1) * \cos(q_4) * \sin(q_2)$$

$$\begin{aligned}
J_{47} = & -\sin(q_5) * (\cos(q_4) * (\sin(q_1) * \sin(q_3) - \cos(q_1) * \cos(q_2) * \cos(q_3)) - \cos(q_1) * \sin(q_2) * \sin(q_4)) \\
& - \cos(q_5) * (\cos(q_3) * \sin(q_1) + \cos(q_1) * \cos(q_2) * \sin(q_3))
\end{aligned}$$

$$J_{51} = 0$$

$$J_{52} = 0$$

$$J_{53} = \cos(q_1)$$

$$J_{54} = \sin(q_1) * \sin(q_2)$$

$$J_{55} = \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_3) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_3)$$

$$J_{56} = \sin(q_4) \cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_3) + \cos(q_2) \cdot \cos(q_3) \cdot \sin(q_1)) - \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)$$

$$J_{57} = \sin(q_5) \cdot (\cos(q_4) \cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_3) + \cos(q_2) \cdot \cos(q_3) \cdot \sin(q_1)) + \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\ + \cos(q_5) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_3) - \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_3))$$

$$J_{61} = 1$$

$$J_{62} = 1$$

$$J_{63} = 0$$

$$J_{64} = \cos(q_2)$$

$$J_{65} = -\sin(q_2) \cdot \sin(q_3)$$

$$J_{66} = -\cos(q_2) \cdot \cos(q_4) - \cos(q_3) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)$$

$$J_{67} = \sin(q_5) \cdot (\cos(q_2) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_3) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2)) + \cos(q_5) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_3)$$

Όπου ισχύει ότι:

$$J(q) = \begin{matrix} & \dot{J}_{11} & \dot{J}_{12} & \dot{J}_{13} & \dot{J}_{14} & \dot{J}_{15} & \dot{J}_{16} & \dot{J}_{17} \\ & \dot{J}_{21} & \dot{J}_{22} & \dot{J}_{23} & \dot{J}_{24} & \dot{J}_{25} & \dot{J}_{26} & \dot{J}_{27} \\ \dot{J}(q) = & \dot{J}_{31} & \dot{J}_{32} & \dot{J}_{33} & \dot{J}_{34} & \dot{J}_{35} & \dot{J}_{36} & \dot{J}_{37} \\ & \dot{J}_{41} & \dot{J}_{42} & \dot{J}_{43} & \dot{J}_{44} & \dot{J}_{45} & \dot{J}_{46} & \dot{J}_{47} \\ & \dot{J}_{51} & \dot{J}_{52} & \dot{J}_{53} & \dot{J}_{54} & \dot{J}_{55} & \dot{J}_{56} & \dot{J}_{57} \\ & \dot{J}_{61} & \dot{J}_{62} & \dot{J}_{63} & \dot{J}_{64} & \dot{J}_{65} & \dot{J}_{66} & \dot{J}_{67} \end{matrix}$$

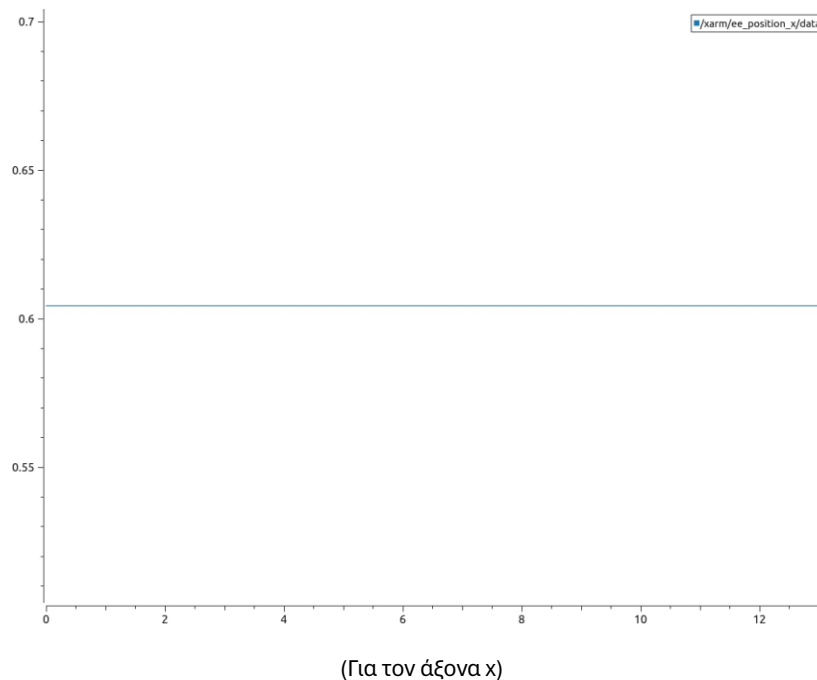
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

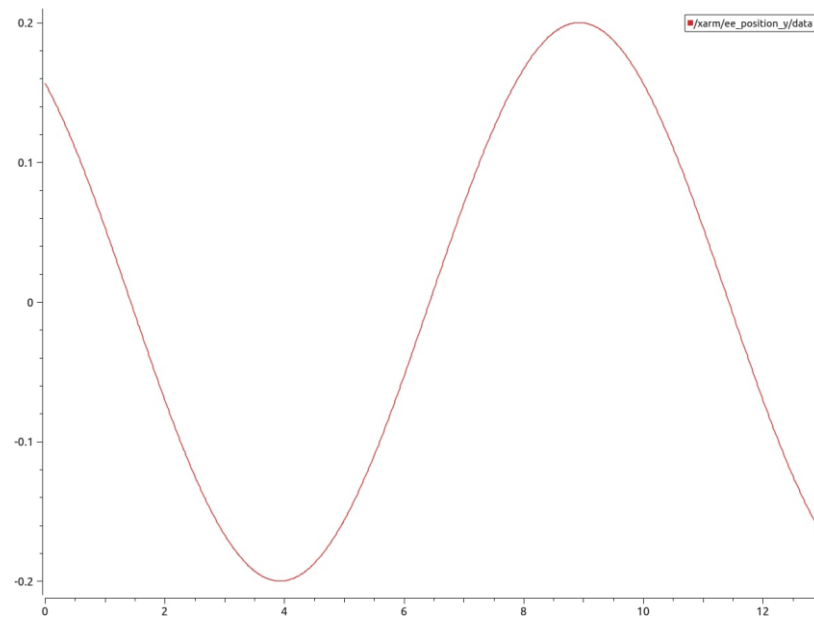
Σχεδιασμός Τροχιάς

Για την υλοποίηση των παραπάνω αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε το ROS και το γραφικό περιβάλλον Gazebo. Επίσης, για το πρώτο ερώτημα πέρα από την αντίστροφη κινηματική ανάλυση υλοποιήθηκε και σχεδιασμός τροχιάς, ώστε το άκρο του βραχίονα να επιταχύνει και επιβραδύνει κατάλληλα αναλόγως τη τοποθεσία του. Γι' αυτό χρησιμοποιήσαμε μια ημιτονοειδές συνάρτηση η οποία δέχεται σαν όρισμα το P_{ey} και δημιουργεί μια ομαλή κίνηση από το σημείο A στο σημείο B και αντίστροφα.

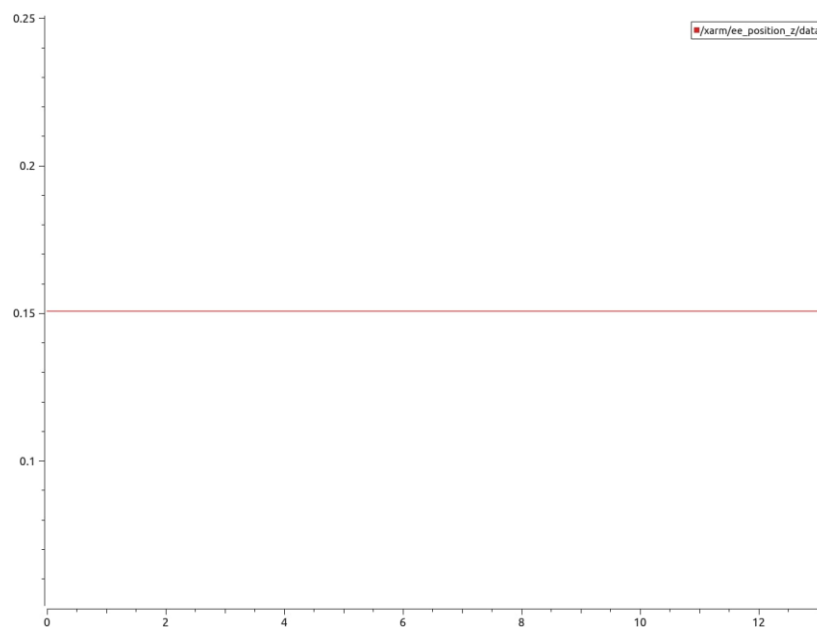
Γραφήματα ελέγχου θέσης με τρεις αρθρώσεις

Παρακάτω φαίνονται τα γραφήματα από τις μετατοπίσεις θέσεως του βραχίονα σε x,y,z άξονες.





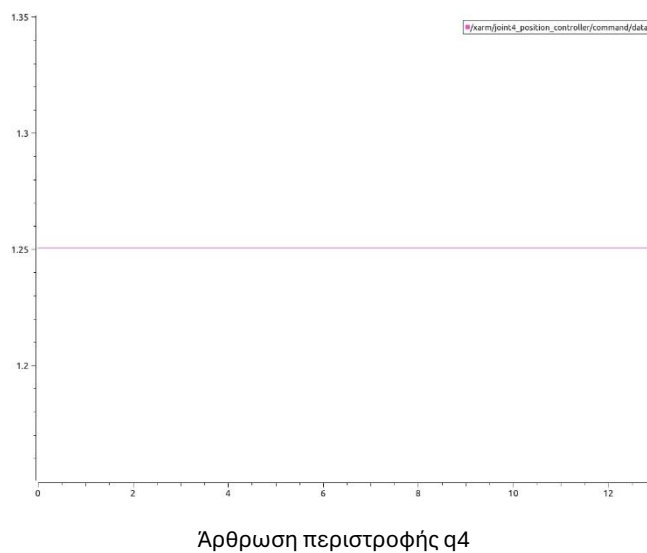
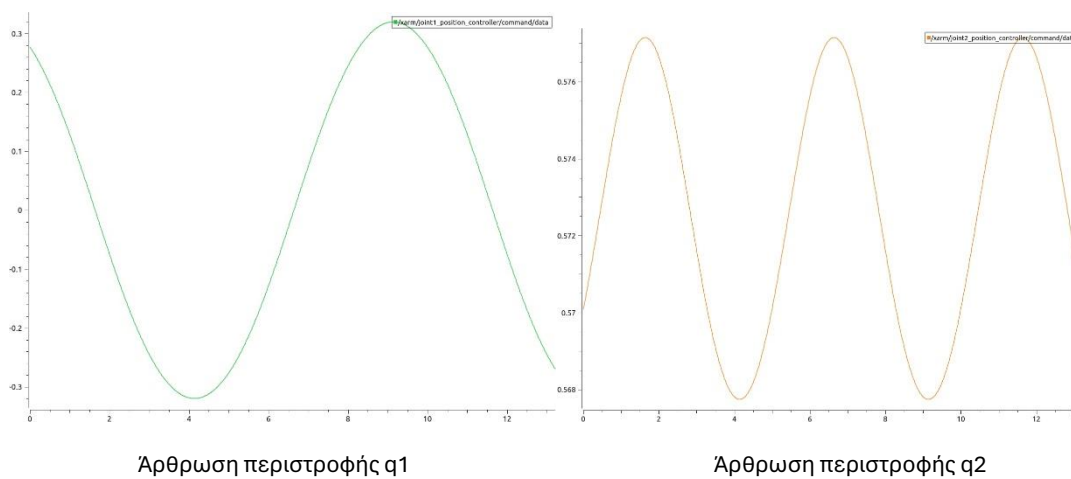
(Για τον άξονα y)



(Για τον άξονα z)

Στα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται ότι μόνο ο άξονας y έχει μετατόπιση, αφού έτσι είχε τεθεί από την εργασία. Το X παραμένει σταθερό 0.643 και το Z στο 0.1508. Στον άξονα Y έχουμε περιοδική μετατόπιση απ'το σημείο A στο σημείο B που απέχουν 40 εκατοστά.

Στη συνέχεια φαίνονται τα γραφήματα με τις τροχιές των q_1 , q_2 , q_4 .



Με την κατάλληλη κίνηση των αρθρώσεων q_1 , q_2 , q_4 επιτεύχθηκε η επιθυμητή πορεία στον χώρο εργασίας, προέκυψαν τα επιθυμητά αποτελέσματα που είχαν τεθεί εξαρχής δηλαδή το τελικό στοιχείο δράσης να εκτελεί την περιοδική κίνηση παράλληλη στον x άξονα.

Γραφήματα ελέγχου θέσης με επτά αρθρώσεις

Για την ολοκλήρωση του δεύτερου μέρους της εργασίας χρειάστηκε να υπολογίσουμε την αντίστροφη Ιακωβιανή Μήτρα. Ο παρών βραχίονας αποτελείτε από 7 βαθμούς ελευθερίας οπότε δεν μπορεί να βρεθεί η αντίστροφη, αλλά η ψευδοαντίστροφη του Ιακωβιανού πίνακα. Γενικότερα ο υπολογισμός γίνεται από τον τύπο:

$$J^+(q) = (J^T(q)J(q))^{-1}J^T(q)$$

Για το δεύτερο ερώτημα υλοποιήθηκε η ψευδοαντίστροφη Ιακωβιανή Μήτρα παρόλα αυτά ο κώδικας δεν είναι λειτουργικός.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συμπερασματικά από την δημιουργία ενός αντίστροφου κινηματικού μοντέλου, και την δημιουργία σχεδιασμού τροχιάς ο ρομποτικός βραχίονας xArm 7 κατάφερε και έκανε την πορεία που του δόθηκε και το τελικό στοιχείο δράσης έκανε το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο είχε ανατεθεί. Ο δεύτερος τρόπος παρόλο που δεν υλοποιήθηκε πλήρως, αναμέναμε τα ίδια αποτελέσματα, με παραπάνω ελευθερία καθώς είχαμε διαθέσιμα όλα τα joints.