Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

Ε ρ γ α σ ί α 3

Κατηγορηματική Λογική

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της τυπικής λογικής.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας* study.eap.gr *μέχρι την* **Τετάρτη, 3/2/2021**.

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού υποβάλετε οριστικά την εργασία σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα του* ***συνοδευτικού αρχείου απαντήσεων****. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο* ***συνοδευτικό αρχείο απαντήσεων*** *πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, δεν υπάρχει περιορισμός στον χώρο που θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* **5** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: των τελευταίων ετών (2010-2020).

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ας προηγηθούν στη μελέτη σας οι εξετάσεις των τελευταίων ετών (2010-2020).

   Σημειώσεις και Υπερκείμενα για την Κατηγορηματική Λογική: Στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://study.eap.gr/mod/folder/view.php?id=3501*, στο φάκελο «Σημειώσεις - Ασκήσεις - ΕΔΥ», διατίθεται το υπερκείμενο για τη Λογική της Ε. Φουστούκου.*

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1. Σύνταξη τύπων Κατηγορηματικής Λογικής, Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή (3 x 4 + 8 = 20 μονάδες).

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με βασικά θέματα σύνταξης της Κατηγορηματικής Λογικής, αλλά και με τη μετατροπή τύπων σε ισοδύναμη κανονική ποσοδεικτική μορφή.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1, #5

Δίνονται οι πρωτοβάθμιοι τύποι

1. $\forall y\left(P(x,y) \rightarrow \exists z \exists x\left(P(z,y) \wedge \left(P(y,x) \rightarrow Q(x)\right)\right)\right)$
2. $Q(c) \wedge Q(d) \rightarrow \exists x \forall y\big(Q(x) \wedge P(x,y)\big) \vee \forall z P(z,x)$
3. $\exists x \forall y\big(Q(x) \wedge P(x,y)\big) \rightarrow \exists x \exists y P(y,x)$
4. $\forall y Q(y) \rightarrow \exists z P(y,z) \vee \forall x \forall z\big(Q(x) \rightarrow P(z,z)\big)$
5. $Q(c) \leftrightarrow \exists x P(x,x)$

Α) Να σχεδιάσετε το συντακτικό δενδρόγραμμα για τους τύπους 1 και 2.

Β) Ποιοι από τους τύπους 1 – 5 είναι προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής;

Γ) Ποια/ποιες μεταβλητές έχουν ταυτόχρονα ελεύθερη και δεσμευμένη εμφάνιση σε τουλάχιστον έναν από τους τύπους 1 – 5 (να κατονομάσετε τη μεταβλητή και τους αντίστοιχους τύπους);

Δ) Να μετατρέψετε τον τύπο 4 σε λογικά ισοδύναμο τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή.

Ερώτημα 2. Πρωτοβάθμια και Φυσική Γλώσσα (5 x 5 = 25 μονάδες)

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με τη χρήση της Κατηγορηματικής Λογικής για την περιγραφή προτάσεων της φυσικής γλώσσας, στο πρώτο υποερώτημα, ενώ στο δεύτερο υποερώτημα ζητείται η ακριβώς αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η μετατροπή από την Κατηγορηματική Λογική στη φυσική γλώσσα.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #2, #3, #4

Α) Να μεταφράσετε στη γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής τις εξής προτάσεις, με προσαρμογή της πρωτοβάθμιας γλώσσας που χρησιμοποιείτε στις μεταφραστικές ανάγκες. Να ακολουθήσετε τις οδηγίες που ακολουθούν την προς μετάφραση πρόταση:

Α1) *Ένας καθηγητής είναι είτε καθηγητής πρωτοβάθμιας, είτε δευτεροβάθμιας είτε τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα καθηγητής διαφορετικών βαθμίδων.*

Χρησιμοποιήστε τα κατηγορήματα K (Καθηγητής) και K_1, K_2, K_3 (Καθηγητής 1ης, 2ης και 3ης βαθμίδας, αντίστοιχα). Την έκφραση «*δεν μπορεί να είναι*» χειριστείτε την απλά ως την άρνηση «*δεν είναι*». Σύνδεσμοι όπως «*αλλά*», «*ενώ*» στην Ελληνική γλώσσα δεν είναι παρά φραστικές παραλλαγές της σύζευξης.

Α2) *Υπάρχει φυσικός αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος κάθε φυσικού αριθμού αλλά δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που να είναι μεγαλύτερος ή ίσος κάθε φυσικού αριθμού.*

Χρησιμοποιήστε το μονομελές κατηγόρημα $N(x)$ που δηλώνει ότι «*ο x είναι φυσικός*» και τα διμελή κατηγορήματα $\leq, \geq$ για σύγκριση αριθμών.

Α3) *Οποιοσδήποτε φοιτητής πάρει βαθμό τουλάχιστον 4.5 στις εξετάσεις μαθήματος του καθηγητή Α περνάει το μάθημα, υπό την προϋπόθεση ότι η γραπτή εργασία του βαθμολογήθηκε με τουλάχιστον 6.*

Χρησιμοποιήστε μια σταθερά $\boldsymbol{a}$, που δηλώνει τον καθηγητή Α, τα μονομελή κατηγορήματα $S(x)$, που δηλώνει ότι «*ο x είναι φοιτητής*», και $C(x)$, που δηλώνει ότι «*το x είναι μάθημα*», τα διμελή κατηγορήματα $T(x,y)$, που δηλώνει ότι «*ο καθηγητής x διδάσκει το μάθημα y*», $P(x,y)$, που δηλώνει ότι «*ο φοιτητής x επιτυγχάνει στο μάθημα y*», και $\geq$, για σύγκριση βαθμών, και τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών $exam(x,y)$, που επιστρέφει «*τον βαθμό του φοιτητή x στις εξετάσεις του μαθήματος y*», και $hw(x,y)$, που επιστρέφει «*τον βαθμό του φοιτητή x στην εργασία του μαθήματος y*».

Β) Να μεταφράσετε σε φυσική (Ελληνική) γλώσσα τους παρακάτω τύπους της πρωτοβάθμιας λογικής:

Β1) $\exists x\left(P(x) \wedge \forall y\big(Q(y) \rightarrow R(y,x)\big)\right) \wedge \exists x\left(P(x) \wedge \exists y\big(Q(y) \wedge R(y,x)\big) \wedge \exists z\big(Q(z) \wedge \neg R(z,x)\big)\right)$

Να θεωρήσετε ως σύμπαν το σύνολο των ανθρώπων και των αγαθών, και να ερμηνεύσετε τα μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα $P(x)$ ως «*το x είναι αγαθό*» και $Q(x)$ ως «*ο x είναι άνθρωπος*» και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $R(x,y)$ ως «*ο x απολαμβάνει το y*».

Β2) $\exists x\left[E(x,x) \wedge \left(\forall y\big(E(x,y) \leftrightarrow \forall z(E(y,z) \leftrightarrow z \approx y)\big) \rightarrow \forall z\big(E(x,z) \leftrightarrow z \approx x\big)\right)\right]$

Να θεωρήσετε ως σύμπαν το σύνολο των ανθρώπων και να ερμηνεύσετε το διμελές κατηγόρημα $E(x,y)$ ως «*ο x εμπιστεύεται τον y*».

Ερώτημα 3. Ερμηνεία Πρωτοβάθμιας Γλώσσας (3 x 4 + 5 + 8 = 25 μονάδες)

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι η εξοικείωση με τις έννοιες της «ερμηνείας» όρων και τύπων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, του «σύμπαντος μιας ερμηνείας» και της «αλήθειας ενός τύπου σε σχέση με μια δεδομένη ερμηνεία».

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #6, #7, #8, #11

Α) Θεωρήστε τη γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ της θεωρίας αριθμών, όπως ορίζεται στο Παράδειγμα 3.1, τόμος Γ.

Έστω E το σύνολο των άρτιων αριθμών, $+, \times$ οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού περιορισμένες στους άρτιους αριθμούς, και $s: E \longrightarrow E$ η συνάρτηση $s(n) = n + 2$ του επόμενου άρτιου αριθμού. Θεωρούμε την προφανή ερμηνεία ${}'^{\mathcal{E}}, \oplus^{\mathcal{E}}, \odot^{\mathcal{E}}, 0^{\mathcal{E}}$ των συμβόλων $', \oplus, \odot, 0$ της γλώσσας $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ στη δομή των άρτιων φυσικών αριθμών $\mathcal{E} = (E, 0, s, +, \times)$. Θεωρούμε ακόμη την συνήθη ερμηνεία ${}'^{\mathcal{N}}, \oplus^{\mathcal{N}}, \odot^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}$ των συμβόλων $', \oplus, \odot, 0$ της γλώσσας $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ στη δομή των φυσικών αριθμών $\mathcal{N} = (N, 0, succ, +, \times)$, με $succ(n) = n + 1$ τη συνήθη συνάρτηση του επόμενου φυσικού αριθμού.

Δίνονται οι παρακάτω ορισμοί (ως συντμήσεις) στη γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$.

$$\underline{k} \equiv (0' \oplus 0') \odot (0')'$$
$$D(x,y) \equiv \exists z(y \approx x \odot z)$$
$$P(x) \equiv x \neq 0 \wedge x \neq 0' \wedge \forall y(D(y,x) \rightarrow y \approx 0' \vee y \approx x)$$

Α.1) Να υπολογιστούν οι τιμές $\underline{k}^{\mathcal{E}}, \underline{k}^{\mathcal{N}}$ που προκύπτουν στις δυο διαφορετικές ερμηνείες της σταθεράς $\underline{k}$.

Α.2) Να δώσετε μια ερμηνεία σε φυσική γλώσσα του νοήματος των κατηγορημάτων D, P (σκεφθείτε τη συνήθη ερμηνεία της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ στη δομή των φυσικών αριθμών).

Να δώσετε τουλάχιστον δύο παραδείγματα αριθμών που επαληθεύουν τα κατηγορήματα D και P, για καθεμιά από τις δυο ερμηνείες $\mathcal{E}$ και $\mathcal{N}$.

Α.3) Να εξετάσετε αν η πρόταση $\exists y \forall x(y \odot x \approx x)$ αληθεύει σε μία, σε καμία ή και στις δύο δομές $\mathcal{N}$ και $\mathcal{E}$.

Β) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω ο τύπος

$$\varphi \equiv \forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \big(P(x,y) \rightarrow \forall z(P(x,z) \vee P(z,y))\big) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y).$$

Β.1) Να δώσετε μια ερμηνεία του P σε άπειρο σύμπαν για την οποία ο φ δεν αληθεύει, αποδεικνύοντας έτσι ότι ο φ δεν είναι λογικά έγκυρος.

Β.2) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι ο φ είναι αληθής για κάθε ερμηνεία του P σε πεπερασμένο (μη κενό) σύμπαν.

Ερώτημα 4. Σημασιολογική Συνέπεια (4 x 5 = 20 μονάδες)

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι η εξοικείωση με την έννοια της σημασιολογικής συνέπειας στην Κατηγορηματική Λογική (ΚΛ).

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #5, #9, #10

Να διερευνήσετε ποιες από τις παρακάτω λογικές συνεπαγωγές αληθεύουν και ποιες όχι.

Α) $\forall x(\varphi \wedge \theta) \rightarrow \psi \vDash \exists x\big(\varphi \rightarrow (\forall x\theta \rightarrow \psi)\big)$, όπου φ, θ, ψ αυθαίρετα επιλεγμένοι πρωτοβάθμιοι τύποι και η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο ψ.

Β) $\forall x(Q(x) \leftrightarrow f(x) \approx x) \vDash \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x(f(x) \approx x)$, όπου Q μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο και f μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο.

Γ) $\forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x(f(x) \approx x) \vDash \forall x(Q(x) \leftrightarrow f(x) \approx x)$, όπου Q μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο και f μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο.

Δ) $\forall x(P(x) \vee Q(y) \rightarrow R(x,y)) \vDash \forall x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x R(x,y)$, όπου P, Q μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα και R διμελές κατηγορηματικό σύμβολο.

<u>Υπόδειξη:</u> Θεωρήστε πρωτοβάθμια δομή $\mathfrak{D} = (D, P^D, Q^D, R^D)$ για την οποία ισχύει ότι $\mathfrak{D} \vDash \forall x\big(P(x) \vee Q(y) \rightarrow R(x,y)\big)[v]$, όπου v τυχούσα ερμηνεία ατομικών μεταβλητών. Για να δείξετε ότι $\mathfrak{D} \vDash (\forall x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x R(x,y))[v]$, έστω $v(y) = a \in D$, οπότε $v = v(y|a)$. Εξετάστε περιπτώσεις ανάλογα αν $a \in Q^D$ ή όχι.

Ερώτημα 5. Επιλογή Σωστό / Λάθος (2 x 5 = 10 μονάδες)

Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα, με τέσσερις απαντήσεις το καθένα, από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό ή λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια, θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #12, #13, #14

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους, βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Α.

1. (Σ/Λ) Ο τύπος $\neg\forall x \forall y (P(x,y) \leftrightarrow \neg P(y,x))$ είναι λογικά έγκυρος.

2. (Σ/Λ) Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P στο σύμπαν των φυσικών αριθμών ώστε να αληθεύουν ταυτόχρονα οι τύποι
$\varphi \equiv \forall x \forall y \big(x \neq y \rightarrow (P(x,y) \leftrightarrow P(y,x))\big)$ και
$\psi \equiv \forall x \forall y \big(x \neq y \rightarrow (P(x,y) \leftrightarrow \neg P(y,x))\big)$.

3. (Σ/Λ) Ο τύπος $P(c) \rightarrow \exists x P(x)$, όπου c σύμβολο σταθεράς, είναι λογικά έγκυρος.

4. (Σ/Λ) Ένας τύπος $\varphi(x,y)$, με ελεύθερες μεταβλητές x και y, είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν ο τύπος $\forall x \forall y \varphi(x,y)$ είναι λογικά έγκυρος.

Β. Ερμηνεύουμε την πρωτοβάθμια γλώσσα στους φυσικούς αριθμούς με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ να δηλώνει ότι «*το x είναι μικρότερο του y*».

1. (Σ/Λ) Ο τύπος $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(x,y))$ αληθεύει σε αυτή την ερμηνεία.

2. (Σ/Λ) Ο τύπος $\neg\forall x \exists y (x \neq y \wedge \neg P(y,x))$ αληθεύει σε αυτή την ερμηνεία.

3. (Σ/Λ) Ο τύπος $\neg\exists y \forall x (x \neq y \rightarrow \neg P(y,x))$ αληθεύει σε αυτή την ερμηνεία.

4. (Σ/Λ) Ο τύπος $\forall x \forall y (\neg P(x,y) \rightarrow P(y,x))$ αληθεύει σε αυτή την ερμηνεία.