Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

Ε ρ γ α σ ί α 5η

Θεωρία Γραφημάτων ΙΙ

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της Θεωρίας Γραφημάτων.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας* study.eap.gr *μέχρι την* ***Τετάρτη 26/5/2021***.

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα. Για να συμπληρώσετε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο αρχείο αυτό πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* **5** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: 4η, 5η και 6η Εργασία των τελευταίων ετών 2010-2018, 5η Εργασία των ετών 2019. 2020.

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ας προηγηθούν στη μελέτη σας οι εξετάσεις των τελευταίων ετών 2010-2020.

Ερωτήματα

Ερώτημα 1. (μέγιστος βαθμός: 20)

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξάσκηση σε βασικές έννοιες γραφημάτων, και ειδικότερα στους βαθμούς των κορυφών ενός γραφήματος, καθώς και στις ιδιότητες των επίπεδων γραφημάτων.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #6

Α. Δείξτε οτι η ακολουθία $\alpha = (d_1, \ldots, d_n)$ είναι γραφική αν και μονο αν η ακολουθία $\beta = (n - d_1 - 1, \ldots, n - d_n - 1)$ είναι γραφική.

Β. Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό συνεκτικό γράφημα με $2n$ κορυφές, όπου οι $2n - 1$ κορυφές έχουν βαθμούς $d(v_1) = 1, d(v_2) = 2, d(v_3) = 3, \ldots, d(v_{2n-2}) = 2n - 2$, $d(v_{2n-1}) = 2n - 1$. Δείξτε ότι ο βαθμός $d(v_{2n})$ της κορυφής v_{2n} έχει μια μόνο δυνατή τιμή.

Γ. Σχεδιάστε ένα απλό επίπεδο γράφημα και ένα απλό μη επίπεδο γράφημα με ακολουθία βαθμών (4,4,3,3,3,3).

Δ. Έστω G ένα απλό και συνεκτικό επίπεδο γράφημα. Δείξτε ότι αν το G έχει λιγότερες από 30 ακμές, τότε περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή με βαθμό το πολύ 4.

Ερώτημα 2. (μέγιστος βαθμός: 25)

Σε αυτό το ερώτημα καλείστε να εμβαθύνετε στην έννοια της συνεκτικότητας ενός γραφήματος και στις ιδιότητες των επίπεδων γραφημάτων.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #2, #3, #4

Ένα *δισυνεκτικό γράφημα* είναι ένα συνεκτικό γράφημα που δεν έχει σημεία κοπής. Έστω $G = (V, E)$ ενα δισυνεκτικό γράφημα. Δύο κορυφές a και b του G είναι ένα *ζεύγος κοπής* αν το γράφημα $G - \{a\} - \{b\}$ που προκύπτει από το G με τη διαγραφή των κορυφών a και b και των προσκειμενων τους ακμών δεν είναι συνεκτικό.

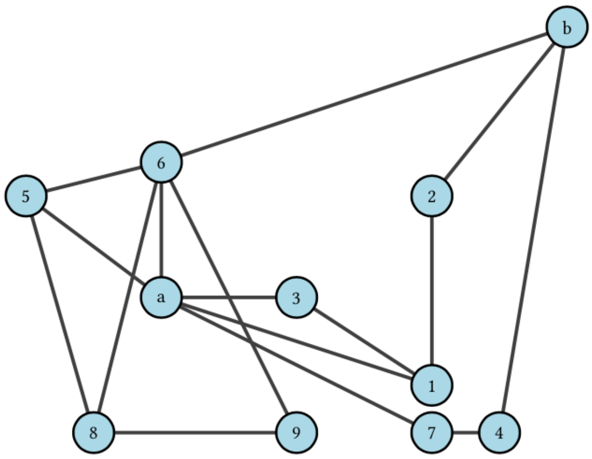
Α.

1. Σχεδιάστε ένα δισυνεκτικό γράφημα με 6 κορυφές και ελάχιστο πλήθος ακμών που να έχει τουλάχιστον 2 ζεύγη κοπής. Σχεδιάστε, επίσης, ένα δισυνεκτικό γράφημα με 6 κορυφές και ελάχιστο πλήθος ακμών που να μην έχει κανένα ζεύγος κοπής.

2. Δείξτε ότι υπάρχει δισυνεκτικό γράφημα με n κορυφές που έχει τουλάχιστον $n(n-3)/2$ ζευγή κοπής.

Β. Έστω $G=(V,E)$ ενα δισυνεκτικό γράφημα και a,b ένα ζεύγος κοπής του G. Έστω $G_i=(V_i,E_i)$, $1\le i\le k$, οι συνεκτικές συνιστώσες του $G-\{a\}-\{b\}$. Για κάθε i ορίζουμε το γράφημα $H_i=(W_i,F_i)$ με $W_i=V_i\cup\{a\}\cup\{b\}$ ως το υπογράφημα του G που επάγεται από το σύνολο κορυφών W_i, στο οποίο προσθέτουμε την ακμή $\{a,b\}$ αν αυτή δεν ανήκει στο E. (Σημειώστε ότι σε κάθε γράφημα H_i οι κορυφές a και b είναι γειτονικές.) Ονομάζουμε τα γραφήματα $H_1,H_2,\ldots,H_k$ ως τη *διάσπαση του G από το ζεύγος κοπής* $\{a,b\}$.

1. Κατασκευάστε τη διάσπαση παρακάτω γραφήματος από το ζεύγος κοπής $\{a,b\}$. Ποιά από τα γραφήματα H_i της διάσπασης είναι επίπεδα; Είναι το αρχικό γράφημα G επίπεδο;



Τα επόμενα δύο ερωτήματα αναφέρονται σε ***οποιοδήποτε*** δισυνεκτικό γράφημα $G=(V,E)$ με ζεύγο κοπής $\{a,b\}$ (και όχι μόνο στο συγκεκριμένο γράφημα του παραπάνω σχήματος).

2. Δείξτε ότι σε κάθε γράφημα H_i υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των κορυφών a και b το οποίο δεν περιέχει την ακμή $\{a,b\}$.

3. Χρησιμοποιήστε το Β2 για να δείξετε ότι αν ένα δισυνεκτικό γράφημα G με ζεύγος κοπής $\{a,b\}$ είναι επίπεδο, τότε όλα τα γραφήματα $H_1,H_2,\ldots,H_k$ που προκύπτουν με τη διάσπαση του G από το ζεύγος κοπής $\{a,b\}$ είναι επίπεδα.

Ερώτημα 3. (μέγιστος βαθμός: 25)

Το ζητούμενο στο ερώτημα αυτό είναι η εξοικείωση με βασικές έννοιες σε δένδρα, τους αναδρομικούς αλγορίθμους και τις επαγωγικές αποδείξεις.

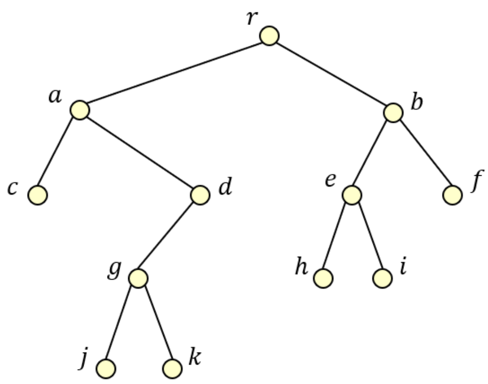
Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #8, #10

A. Η αναδρομική διαδικασία `traverse` εκτελεί μια διάσχιση ενός δένδρου T με ρίζα r και αποθηκεύει τη σειρά *πρώτης επίσκεψης* και τη σειρά *τελευταίας επίσκεψης* κάθε κορυφής v στις ετικέτες $pre(v)$ και $post(v)$, αντίστοιχα. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιεί τις καθολικές μεταβλητές k και l, οι οποίες έχουν αρχικά την τιμή $k = l = 1$.

```
procedure traverse(v)
// πρώτη επίσκεψη της κορυφής v
θέσε pre(v) = k και k = k + 1
if (η v δεν είναι φύλλο) then {
   // επίσκεψη των παιδιών της v
   for (κάθε παιδί w της v) do {
      traverse(w)
   }
}
// τελευταία επίσκεψη της κορυφής v
θέσε post(v) = l και l = l + 1
```

1. Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα τις ετικέτες $pre(v)$ και $post(v)$ που υπολογίζονται για κάθε κορυφή v του T κατά την εκτέλεση της διαδικασίας `traverse`(r).

	r	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
pre												
$post$												



T

2. Έστω ότι εκτελούμε τη διαδικασία `traverse`(r) σε (αυθαίρετο) δυαδικό δένδρο T με ρίζα r. Δείξτε ότι για οποιεσδήποτε δύο κορυφές x και y του δένδρου T, η x είναι πρόγονος της y αν και μόνο αν $pre(x) \leq pre(y)$ και $post(x) \geq post(y)$.

Β. Θεωρήστε την παρακάτω εναλλακτική υλοποίηση της διαδικασίας `traverse`(v):

```
procedure traverse(v)
// επίσκεψη της κορυφής v
θέσε pre(v) = k, size(v) = 1 και k = k + 1
if (η v δεν είναι φύλλο) then {
   // επίσκεψη των παιδιών της v
   for (κάθε παιδί w της v) do {
      n = traverse(w)
      size(v) = size(v) + n
   }
}
return size(v)
```

1. Δείξτε με επαγωγή στο πλήθος N των κορυφών του δένδρου T, ότι μετά την εκτέλεση της `traverse`(r), για κάθε κορυφή v του T, η τιμή $size(v)$ ισούται με το πλήθος των απογόνων της κορυφής v στο T.
2. Περιγράψτε μια συνθήκη ελέγχου για το αν μια κορυφή x είναι πρόγονος μια κορυφής y στο δένδρο T, ισοδύναμη με τη συνθήκη του **Α2**, χρησιμοποιώντας τις τιμές $pre(\cdot)$ και $size(\cdot)$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ερώτημα 4. (μέγιστος βαθμός: 20)

Στόχος αυτού του ερωτήματος είναι να εξοικειωθείτε με την έννοια των ελάχιστων συνδετικών δένδρων σε γραφήματα και τον αλγόριθμο Prim.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #7, #9

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δίκτυο παραγωγής και μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας σε σύμπλεγμα n νησιών. Για το σκοπό αυτό, έχουμε υπολογίσει ένα κόστος $p(x)$ για την (εν δυνάμει) κατασκευή σταθμού παραγωγής στο νησί x, καθώς και ένα κόστος κατασκευής $c(x,y)$ μιας γραμμής μεταφοράς ενέργειας μεταξύ δύο νησιών x και y. Ένα νησί είναι συνδεδεμένο στο δίκτυο αν έχει κτιστεί σε αυτό ένας σταθμός παραγωγής ή αν υπάρχει ένα μονοπάτι γραμμών μεταφοράς ενέργειας που το συνδέει με ένα νησί που διαθέτει σταθμό παραγωγής.

Ο σκοπός μας είναι να συνδέσουμε όλα τα n νησιά στο δίκτυο, ελαχιστοποιώντας το συνολικό κόστος κατασκευής του δικτύου. Υποθέτουμε ότι αρχικά κανένα νησί δε διαθέτει σταθμό παραγωγής, επομένως χρειάζεται να κατασκευάσουμε τουλάχιστον ένα σταθμό παραγωγής σε κάποια από τα νησιά.

A. Περιγράψτε πως μπορούμε να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Prim σε γράφημα που έχουμε ορίσει κατάλληλα.

Υπόδειξη: Σκεφτείτε την εισαγωγή μιας βοηθητικής κορυφής s η οποία συνδέεται με ακμές με όλους τους κόμβους-νησιά του δικτύου.

B. Θεωρήστε το ακόλουθο στιγμιότυπο του παραπάνω προβλήματος, όπου έχουμε $n = 6$ νησιά $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα κόστη $p(x_i)$ κατασκευής των σταθμών παραγωγής (τιμές στη διαγώνιο του πίνακα), καθώς και των γραμμών μεταφοράς ενέργειας $c(x_i, x_j)$ (υπόλοιπες τιμές του πίνακα).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	200	4	16	4	8	18
x_2	4	200	8	24	11	22
x_3	16	8	150	2	10	9
x_4	4	24	2	300	7	6
x_5	8	11	10	7	250	2
x_6	18	22	9	6	2	200

Για παράδειγμα, έχουμε κόστος $p(x_1) = 200$ για την κατασκευή σταθμού παραγωγής στο νησί x_1, και κόστος $c(x_1, x_2) = c(x_2, x_1) = 4$ για την κατασκευή γραμμής μεταφοράς ενέργειας μεταξύ των νησιών x_1 και x_2.

Εφαρμόστε τη μέθοδο που σχεδιάσατε στο Ερώτημα 4Α για να υπολογίσετε το βέλτιστο τρόπο να συνδέσουμε τα 6 στο δίκτυο με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Ερώτημα 5. (μέγιστος βαθμός: 10)

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας σε λιγότερο από 15 λεπτά.

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Α) Έστω G ένα απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές, m ακμές και f όψεις, και έστω δ ο ελάχιστος βαθμός κορυφών στο G.

1. (Σ / Λ) Αν το G έχει n κορυφές, m ακμές, f όψεις και k συνεκτικές συνιστώσες τότε $n - m + f = k + 1$.

2. (Σ / Λ) Το G δεν μπορεί να περιέχει ως υπογράφημα το $K_{2,n-2}$.

3. (Σ / Λ) Αν $\delta > 2$, τότε $f \geq \frac{n}{2} + 2$.

4. (Σ / Λ) Αν $n < 12$, τότε $\delta \leq 4$.

Β) Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό συνεκτικό γράφημα με μη αρνητικά βάρη $w(e)$ στις ακμές $e \in E$. Συμβολίζουμε με T_s ένα δένδρο συντομότερων διαδρομών με αφετηρία μια κορυφή $s \in V$. Επίσης, συμβολίζουμε με $d(v)$ το βάρος του συντομότερου μονοπατιού στο G από την αφετηριακή κορυφή s προς κάποια κορυφή v. Έστω $e = \{x, y\}$ μια ακμή του G τέτοια ώστε $d(x) \geq d(y)$.

1. (Σ / Λ) Έχουμε $d(x) \leq d(y) + w(e)$.

2. (Σ / Λ) Ισχύει $d(x) = d(y) + w(x, y)$ αν και μόνο αν η e είναι ακμή του δένδρου T_s.

3. (Σ / Λ) Ισχύει $d(x) = d(y) + w(x, y)$ αν και μόνο αν η e είναι ακμή κάποιου συντομότερου μονοπατιού με αφετηρία την s.

4. (Σ / Λ) Αν το T_s είναι το μοναδικό δένδρο συντομότερων διαδρομών του G με αφετηρία την s και $e \notin T_s$, τότε $d(x) < d(y) + w(e)$.