Έντυπο Υποβολής ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ12)

ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα "Υποβολή Εργασίας", καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο **παρόν** αρχείο και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα "Αξιολόγηση Εργασίας", την υποβάλλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφα της υποβληθείσας και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.
Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: για παράδειγμα, το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να είναι **ioannou_ge1_pli12.doc**.

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονοματεπώνυμο, τηλέφωνο, ηλεκτρονική διεύθυνση)	

Θ.Ε.	ΠΛΗ 12
Τμήμα	ΗΛΕ43
Ακ. Έτος	2019-20
Γ.Ε.	4

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή-Συμβούλου	ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΣΤΑΥΡΟΣ
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (*ημέρα Τετάρτη*)	08/04/2020, ώρα 23:59
Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	08/04/2020
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (*αριθμητικώς, ολογράφως*)	

Υπογραφή **Υπογραφή**

Φοιτητή **Καθηγητή-Συμβούλου**

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Μην συμπεριλάβετε τις εκφωνήσεις των ασκήσεων.

Λύση της 1ης άσκησης

Υπό-ερώτημα α)

Έγινε πρώτα δοκιμή με το αναγκαίο κριτήριο και έπειτα από επάλληλες δοκιμές λόγω απροσδιοριστίας $\frac{+\infty}{+\infty}$ με χρήση του κανόνα De l' hospital παρουσίασε απροσδιοριστία. Έγινε δοκιμή και επιτυχής προσπάθεια επίλυσης με χρήση το κριτήριο D 'alembert και η λύση είναι ως εξής:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}\xrightarrow{D'Alembert}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+2}}}{\frac{n^5}{5^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^5\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^5\cdot \cancel{5^n}}{\cancel{5^n}\cdot n^5\cdot 5}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^5}{n^5\cdot 5}=\frac{1}{5}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^5}{n^5}=\frac{1}{5}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})^5}{\cancel{n}}\right]^5=\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\;\tau\upsilon\pi o\lambda o\gamma\acute{\iota}o\upsilon\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0=$$

$$\frac{1}{5}\cdot\lim_{n\to+\infty}(1+0)^5=\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5}=\boxed{0,2}$$

Άρα **συγκλίνει** διότι, λ=0,2 όπου βάση τυπολογίου και κριτήριου D'alembert λ<1 τότε συγκλίνει

Λύση της 1ης άσκησης

Υπό-ερώτημα β)

Λόγω του ότι στον παρονομαστή υπάρχει τριγωνομετρικός αριθμός ξεκίνησα όπου και έγινε επιτυχής δοκιμή με το απλό κριτήριο σύγκρισης όπου και το αποτέλεσμα είναι ως εξής:

Επίσης επέλεξα την γεωμετρική σειρά αντί την p-σειρά επειδή το n είναι στον εκθέτη

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+\sin^2(n)} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} \xrightarrow[\text{με χρήση χιαστής}]{\text{θα γίνει επαλήθευση}} \frac{1}{2^n+\sin^2(n)} \le \frac{1}{2^n}$$

$$2^n \le 2^n+\sin^2(n) \Rightarrow \cancel{2^n}-\cancel{2^n} \le \sin^2(n) \Rightarrow 0 \le \sin^2(n) \Rightarrow$$

$$\sin^2(n) \ge 0$$

Άρα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = |r| = \left|\frac{1}{2}\right| = 0,5$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha : |r| < 1$$

Οπότε και συγκλίνει

Λύση της 1ης άσκησης

Υπό-ερώτημα γ)

- Το αναγκαίο κριτήριο δεν το επέλεξα διότι $\lim\limits_{n\to 0}\frac{3n^2+2n+2}{2n^3+3n+3}=0$
- Το κριτήριο του λόγου δεν το επέλεξα λόγω του ότι δημιουργούνται σύνθετες πράξεις και τέλος πήρο το αποτέλεσμα λ=1
- Το κριτήριο ρίζας δεν το επέλεξα διότι δημιουργούνται υπερβολικά σύνθετες πράξεις
- Λόγω του ότι το κλάσμα είναι κλάσμα πολυωνύμου θα αποφανθώ στο γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης. Άρα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{3n^2+2n+2}{2n^3+3n+3}\,\textit{και}\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{1}{n^p},\textit{όπου}\; p=3-2=1\,\textit{άρα}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^1}$$

Βάση του κανόνα της p-σειράς $p\le 1$ τότε αποκλίνει όταν $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0$ θα αποκλίνουν ταυτόχρονα. Απόδειξη:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{3n^2+2n+2}{2n^3+3n+3}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(3n^2+2n+2)}{1(2n^3+3n+3)}=\textit{επιμεριστική ιδιότητα}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+2n^2+2n}{2n^3+3n+3}=$$

Έκανα χρήση του μεγιστοβάθμιου όρου διότι παρουσιάζει απροσδιοριστία $\frac{\infty}{\infty}$ και όταν έκανα χρήση του κανόνα De l ‘Hospital χρειάστηκε 3 φορές να τον επικαλεστώ.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+2n^2+2n}{2n^3+3n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(3+\dfrac{2n^2}{n^3}+\dfrac{2n}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\dfrac{3n}{n^3}+\dfrac{3}{n^3}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\dfrac{2n^2}{n}+\dfrac{2n}{n^2}}{2+\dfrac{3n}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}=$$

$$\textit{αντικατάσταση}\; n\to+\infty\;\textit{λόγω του}\;\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3+0+0}{2+0+0}=\frac{3}{2}=\boxed{1,5}$$

Άρα λόγω του ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0$ **ταυτόχρονα δε συγκλίνει**

<u>Άρα δεν συγκλίνει</u>

Λύση της 1ης άσκησης

Υπό-ερώτημα δ)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{Del'Hospital}$$

Λόγω απροσδιοριστίας $\frac{0}{0}$ διότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \tan 0 \Rightarrow \kappa\alpha\iota \tan = \frac{cin}{\cos} \kappa\alpha\iota\, \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\, \tau\upsilon\pi o\lambda o\gamma\acute{\iota}o\upsilon \sin(0) = 0\ \kappa\alpha\iota \cos(0) = 0\, \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$\tan(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1\cdot x'}{x^2} = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = \frac{0-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \cancel{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\cos^2(0)} = \frac{1}{\cos^2(0)} \xrightarrow[\cos(0)=1]{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\, \tau\upsilon\pi o\lambda o\gamma\acute{\iota}o\upsilon} \frac{1}{2^2} = 1$$

Χρησιμοποίησα το αναγκαίο κριτήριο σύγκρισης σειρών. Άρα:

$\lim_{n\to\infty} a \neq 0$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ <u>**δεν συγκλίνει**</u>

Λύση της 1ης άσκησης

Υπό-ερώτημα ε)

Επειδή διέκρινα τριγωνομετρικούς αριθμούς ξεκίνησα από το απλό κριτήριο σύγκρισης.

Επειδή $-1 \leq \cos \leq 1$ και βάση ιδιότητας δυνάμεων θα επιλέξω την p-σειρά ώστε να αποφανθώ ως προς τη σύγκλιση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ όπου } p = \frac{3}{2} = \boxed{1{,}5}$$

Διάλεξα τη p-σειρά διότι:

$$\frac{\cos(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Βάση κανόνα σύγκλισης p-σειράς p > 1 άρα **<u>Συγκλίνει</u>**

Λύση της 2ης άσκησης

Υπό-ερώτημα α)

Είναι δυναμοσειρά και θα χρησιμοποιήσω το κριτήριο του λόγου ώστε να βρω αν συγκλίνει και τις τιμές που συγκλίνει. Στο τέλος θα εξετάσω τη σύγκλιση ως προς τα ακρότατα.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{5(n+1)+4}}\cdot x^{n+1}}{\frac{2^n}{3^n\sqrt{5n+4}}\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^n\cdot 2\cdot x^n\cdot x}{3^n\cdot 3\sqrt{5n+5+4}}}{\frac{2^n\cdot x^n}{3^n\sqrt{5n+4}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^n\cdot 2\cdot x^n\cdot x}{3^n\cdot 3\sqrt{5n+9}}}{\frac{2^n\cdot x^n}{3^n\sqrt{5n+4}}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot \cancel{x^n}\cdot x\cdot \cancel{3^n}\sqrt{5n+4}}{\cancel{3^n}\cdot 3\sqrt{5n+9}\cdot \cancel{2^n}\cdot \cancel{x^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{5n+4}}{3\sqrt{5n+9}}\right| = \frac{2}{3}\cdot|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{5n+4}}{\sqrt{5n+9}} = \frac{2}{3}\cdot|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n(5+\frac{4}{n})}}{\sqrt{n(5+\frac{9}{n})}} =$$

$$\frac{2}{3}\cdot|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\cancel{n}(5+\cancel{\frac{4}{n}})}}{\sqrt{\cancel{n}(5+\cancel{\frac{9}{n}})}} = \frac{2}{3}\cdot|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{5+0}}{\sqrt{5+0}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$\frac{2}{3}\cdot|\chi|<1$ Το κριτήριο του λόγου λ<1 τότε συγκλίνει. Άρα έπειτα από χιαστή στην ανίσωση:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{1}<\frac{1}{1}\Rightarrow\frac{2|x|}{3}<\frac{1}{1}\Rightarrow 2|x|<3\Rightarrow\frac{\cancel{2}|x|}{\cancel{2}}<\frac{3}{2}\Rightarrow\boxed{|x|<\frac{3}{2}}$$

Λόγω των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής: $\boxed{-\frac{3}{2}<|x|<\frac{3}{2}}$

Συνεχίζω με τον έλεγχο των τιμώ στα ακρότατα:

- **Για** $x=-\frac{3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\sqrt{5n+4}}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\sqrt{5n+4}}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\sqrt{5n+4}}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{3^n}\sqrt{5n+4}}\cdot(-1)^n\cdot\left(\frac{\cancel{3^n}}{\cancel{2^n}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{5n+4}}$$

Θα χρησιμοποιήσω το κριτήριο του Leibniz λόγω του $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ώστε να δω αν συγκλίνει κατά τα αριστερά ακρότατα.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ όπου $\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{5n+4}}$

- α_n=μη αρνητική $\Rightarrow \alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{5n+4}} > 0\, για\ κάθε\ n \geq 0$
- α_n να είναι φθίνουσα, όσο μεγαλώνει ο παρονομαστής μικραίνει και το αποτέλεσμα του κλάσματος

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5(n+1)+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{5n+4}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5n+5+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{5n+4}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5n+9}} \leq \frac{1}{\sqrt{5n+4}} \xrightarrow{χιαστή}$$

$$\boxed{\sqrt{5n+4} \leq \sqrt{5n+9}}\, για\ κάθε\ n \geq 0$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5n+4}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

<u>Έπειτα από την επαλήθευση των τριών κριτήριων του Liebniz για χ = $-\dfrac{3}{2}$ η σειρά συγκλίνει</u>

- **Για** $x = \dfrac{3}{2}$

θα γίνει έλεγχος σύγκλισης μέσω p-σειράς:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n\sqrt{5n+4}} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n\sqrt{5n+4}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{3^n}\sqrt{5n+4}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n+4}}$$

Για τον έλεγχο της p-σειράς θα δοκιμάσω να κρατήσω το $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{5n}}$ και n=1 διότι είναι κλάσμα και ο παρονομαστής δεν μπορεί να είναι 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow p = \frac{1}{2} = 0,5 \leq 1\, άρα\ αποκλίνει$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\boxed{-\frac{3}{2} \leq |x| < \frac{3}{2}}$$

Λύση της 2ης άσκησης

Υπό-ερώτημα β)

Από το τυπολόγιο γνωρίζουμε πως $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και από ορισμό τριγωνομετρικών συναρτήσεων γνωρίζουμε $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Οι τρεις πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor ορίζονται ως εξής:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n \Rightarrow f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2$$

0!=1
1!=1
2!=1*2=2

$$f(x)=\tan(x)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$$f'(x)=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{0,5}=\boxed{2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)'=\frac{(1)'\cdot\cos^2 x-1\cdot\left(\cos^2 x\right)'}{\left(\cos^2 x\right)^2}=\frac{\cancel{0\cdot\cos^2 x}-1\cdot 2\cdot\cos^{2-1}x\cdot\left(\cos x\right)'}{\cos^4 x}=\frac{-1\cdot 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}=$$

$$\frac{-2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}=\boxed{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cancel{3}\,2}}=\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}^{\cancel{2}}}{2^2}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{2}{4}}=\frac{8}{2}=\boxed{4}$$

Άρα f(x)=1≠0 και f’(x)=2≠0 και f’’(x)=4≠0 είναι μη μηδενικές

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2\Rightarrow$$

$$1+\frac{2}{1}\cdot\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{2}\cdot\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)^2=\boxed{1+2\cdot\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)+2\cdot\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

Λύση της 2ης άσκησης

Υπό-ερώτημα γ)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ με κέντρο το σημείο $\boxed{x_0 = 0}$

Γνωρίζουμε ότι στη θεωρία σύγκλισης δυναμοσειρών για χ1 όταν συγκλίνει τότε συγκλίνει και το y1 για οποιαδήποτε τιμή όταν: $|y_1 - x_0| < |x_1 - x_0|$

Γνωρίζουμε ότι στη θεωρία απόκλισης δυναμοσειρών για χ2 όταν συγκλίνει τότε συγκλίνει και το y2 για οποιαδήποτε τιμή όταν: $|y_2 - x_0| > |x_2 - x_0|$

Για απόδειξη χ=χ1=2 σύγκλισης χ=y1=1
$|y_1 - x_0| < |x_1 - x_0| \Rightarrow |1-0| < |2-0| \Rightarrow |1| < |2|$
Είναι αληθής άρα συγκλίνει και το χ=1

Για απόδειξη χ=χ1=-3 απόκλισης χ=y1=4
$|y_2 - x_0| > |x_2 - x_0| \Rightarrow |4-0| > |-3-0| \Rightarrow |4| > |-3| \Rightarrow |4| > |3|$
Είναι αληθής άρα αποκλίνει και το χ=4

Λύση της 3ης άσκησης
Υπό-ερώτημα α)

Θα επιλύσω το ολοκλήρωμα μέσω της μεθόδου αντικατάστασης

- Κάνω u=cos(u) Για τον λόγο που το cos επαναλαμβάνεται
- παράγωγο: $(u)'\cdot du = [\cos(x)]'\cdot dx \Rightarrow 1\cdot du = [-\sin(x)]\cdot dx \Rightarrow \boxed{-du = \sin(x)\cdot dx}$

$$\int (-du)\cdot u\cdot \cos\left(u\right) = -\int u\cdot \cos\left(u\right)\cdot du$$

Λόγω γινομένων θα κάνω παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x)\cdot \int f'(x)\cdot g(x)\cdot dx$$

$$\boxed{\int \cos(u)\cdot du = \sin(u)}$$

Άρα :

$$-\int u\cdot [\sin(u)]'\cdot du = -[u\cdot \sin(u) - \int (u)'\cdot \sin(u)\cdot du] =$$
$$-u\cdot \sin(u) + \int 1\cdot \sin(u)\cdot du =$$
$$-u\cdot \sin(u) + \int \sin(u)\cdot du =$$
$$-u\cdot \sin(u) + [-\cos(u)] + c =$$
$$-u\cdot \sin(u) - \cos(u) + c =$$
$$\boxed{-\cos(x)\cdot \sin[\cos(x)] - \cos[\cos(x)] + c}$$

Λύση της 3ης άσκησης
Υπό-ερώτημα β)

Θα επιλύσω το ολοκλήρωμα με τη μέθοδο αντικατάσταση και το επέλεξα αντί της ρητής διότι δεν είναι κλάσμα πολυωνύμου

- κάνω $u=e^x+e^{-x}$
- παράγωγος: $(u)'\cdot dx=(e^x+e^{-x})'\cdot dx \Rightarrow 1\cdot du=e^x+e^{-x}\cdot(-x)'\Rightarrow [e^x+(-e^{-x})]\cdot dx \Rightarrow$ $\boxed{du=(e^x-e^{-x})\cdot dx}$

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-1}\cdot dx=\int\frac{du}{u^2-1}=\boxed{\int\frac{1}{u^2-1}\cdot\frac{du}{1}}$$

Θα γίνει ανάλυση κλάσματος λόγω του ότι ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή.

Αναφορά χρήσιμων ταυτοτήτων του τυπολογίου:
$(u^2-1)\Rightarrow a^2-b^2=(a+b)(a-b)=u^2-1^2=(u+1)(u-1)$

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$$

Χρησιμοποίησα σταθερές διότι δεν είναι $1^{ου}$ βαθμού αλλά μηδενικού. Συνεχίζω με ΕΚΠ

ΕΚΠ(u-1,u+1)=(u-1)(u+1)

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\cancel{(u-1)}\cdot(u+1)\cdot\frac{A}{\cancel{u-1}}+(u-1)\cdot\cancel{(u+1)}\cdot\frac{B}{\cancel{u+1}}\Rightarrow\boxed{1=(u+1)\cdot A+(u-1)\cdot B}$$