Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

Ε ρ γ α σ ί α 4η

Θεωρία Γραφημάτων Ι

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες έννοιες και μεθόδους της Θεωρίας Γραφημάτων.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί* *μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας* study.eap.gr *μέχρι την* ***Τετάρτη 14/04/2021***.

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού αποστείλετε την εργασία στο Σύμβουλο Καθηγητή σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο* ***συνοδευτικό αρχείο απαντήσεων*** *πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, και δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσο χώρο θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* ***5*** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: *4η και 5η εργασία των ετών 2010-2018 και 4η εργασία των τελευταίων ετών 2019 και 2020.*

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: *Ας προηγηθούν στη μελέτη σας οι εξετάσεις των τελευταίων ετών 2010-2020.*

Ερωτήματα

Ερώτημα 1. (5+3+3+7+7 = 25 μονάδες)

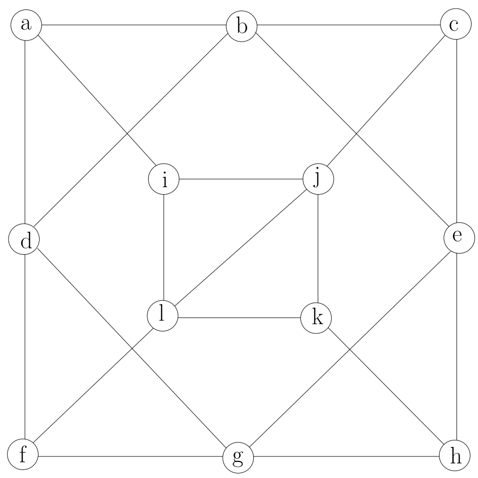
Με το ερώτημα αυτό θα εξασκηθείτε σε στοιχειώδεις έννοιες της θεωρίας γραφημάτων όπως αυτή της μέγιστης κλίκας, του μέγιστου συνόλου ανεξαρτησίας, του χρωματικού αριθμού, της διαδρομής καθώς και στην εφαρμογή της επαγωγής σαν αποδεικτική διαδικασία ιδιοτήτων σχετικών με τις δομές αυτές.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1 #2

(A) Σε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα G συμβολίζουμε με

- $\omega(G)$: την τάξη της μέγιστης κλίκας του G,
- $\alpha(G)$: το μέγεθος του μέγιστου συνόλου ανεξαρτησίας του G,
- $\chi(G)$: το χρωματικό αριθμό του G.

(1) Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\omega(G)$, $\alpha(G)$, $\chi(G)$, στο διπλανό γράφημα G επιδεικνύοντας μία μέγιστη κλίκα, ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο και έναν έγκυρο χρωματισμό των κορυφών με τον μικρότερο αριθμό χρωμάτων.



(2) Να απεικονίσετε

(α) ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνδεδεμένο γράφημα G για το οποίο να ισχύει $\chi(G) > \omega(G) > \alpha(G)$,

(β) ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνδεδεμένο γράφημα G για το οποίο να ισχύει $\alpha(G) > \chi(G) > \omega(G)$.

(B) Μία *διαδρομή* μήκους k είναι μία ακολουθία $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k$ από εναλλασσόμενες κορυφές και ακμές τέτοια ώστε η ακμή $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ για $i = 1, \ldots, k$ (Τόμος Β', Ορισμός 1.18). Μία διαδρομή λέγεται *κλειστή* αν έχει μήκος τουλάχιστον 1 και τα τερματικά της σημεία (οι τερματικές της κορυφές) ταυτίζονται (Τόμος Β', Σελίδα 46). Για παράδειγμα, στο γράφημα του ερωτήματος (Α1) η ακολουθία i, e_1,j, e_2,k, e_3,l, e_4,j, e_5,i, με $e_1 = \{i,j\} = \{j,i\} = e_5$, $e_2 = \{j,k\}$, $e_3 = \{k,l\}$, $e_4 = \{l,j\}$ αποτελεί κλειστή διαδρομή.

Σε ένα απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα G, θεωρούμε μία κλειστή διαδρομή $W =< v_0, e_1, v_1, \dots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_0 >$ με $k \geq 2$ (προσέξτε ότι αναφερόμαστε σε οποιοδήποτε γράφημα, όχι απαραίτητα σε αυτό που απεικονίζεται στο πάνω σχήμα).

(1) Να δείξετε ότι αν μία ακμή $e \in E(W)$ δεν ανήκει σε κύκλο τότε ο αριθμός των εμφανίσεων της στη διαδρομή W είναι άρτιος.

(2) Με επαγωγή στον αριθμό των ακμών k, να δείξετε ότι αν η διαδρομή W δεν περιέχει κύκλο τότε υπάρχει μία ακμή που εμφανίζεται διαδοχικά στη διαδρομή αυτή.

Ερώτημα 2. (5 + 5 + 10 = 20 μονάδες)

Στόχος του ερωτήματος αυτού είναι η εξάσκηση στις βασικές έννοιες της γειτονιάς μίας κορυφής, της διαγραφής κορυφών, των επαγόμενων υπογραφημάτων και του χρωματισμού των κορυφών.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #3 #7

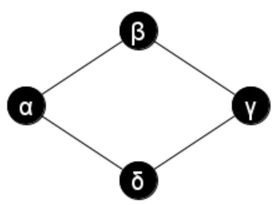
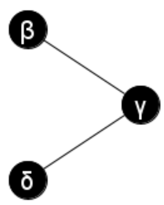
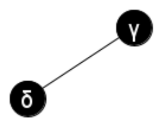
Για μια κορυφή v ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος, συμβολίζουμε με $N(v)$ τη γειτονιά της v, δηλαδή το σύνολο των κορυφών που ενώνονται με ακμή με τη v. Μια κορυφή x καλείται *κατάλληλη* αν ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

(a) $|N(x)| = 1$ (δηλαδή, ο βαθμός της x είναι 1)

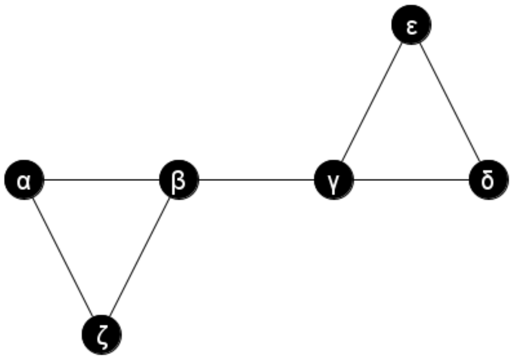
(b) Υπάρχει κορυφή y: $N(x) = N(y)$

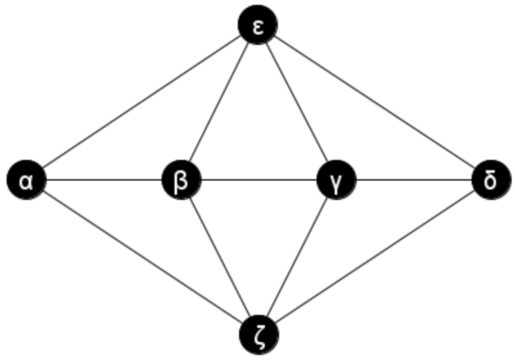
(c) Υπάρχει κορυφή y: $N(x) \cup \{x\} = N(y) \cup \{y\}$

Σημειώστε ότι στη περίπτωση (b) οι κορυφές x και y δεν είναι γειτονικές, ενώ στη περίπτωση (c) είναι γειτονικές. Ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές ονομάζεται *ακολουθιακό* αν καταλήγει σε μια κορυφή διαγράφοντας επαναληπτικά $n-1$ κατάλληλες κορυφές. Για παράδειγμα, ο απλός κύκλος με 4 κορυφές είναι ακολουθιακό γράφημα καθώς μπορεί να καταλήξει σε μια κορυφή διαγράφοντας κατάλληλες κορυφές των περιπτώσεων (b), (a) και (a).

				
κορυφή	$x = \alpha$	$x = \beta$	$x = \delta$	
περίπτωση	(b) $y = \gamma$	(a) $\lvert N(\beta)\rvert = 1$	(a) $\lvert N(\delta)\rvert = 1$	$n = 1$

1) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γραφήματα είναι ακολουθιακά, δικαιολογώντας την απάντησή σας.





2) Σε ένα ακολουθιακό γράφημα μπορεί να αντιστοιχούν διαφορετικές ακολουθίες κατάλληλων κορυφών. Για παράδειγμα, στον απλό κύκλο 4 κορυφών αντιστοιχούν δύο διαφορετικές ακολουθίες κατάλληλων κορυφών: (b), (a), (a) και (b), (b), (c). Βρείτε ένα ακολουθιακό γράφημα με 6 κορυφές στο οποίο αντιστοιχούν τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ακολουθίες από διαγραφές 5 κατάλληλων κορυφών χρησιμοποιώντας και τις τρεις περιπτώσεις (a), (b), (c).
3) Δείξτε ότι κάθε ακολουθιακό γράφημα στο οποίο αντιστοιχούν κατάλληλες κορυφές μόνο των περιπτώσεων (a) και (b) είναι 2-χρωματίσιμο.
   Υπόδειξη: Προτείνεται να χρησιμοποιήσετε επαγωγική απόδειξη ως προς το πλήθος των κορυφών.

Ερώτημα 3. (10 x 2 = 20 μονάδες)

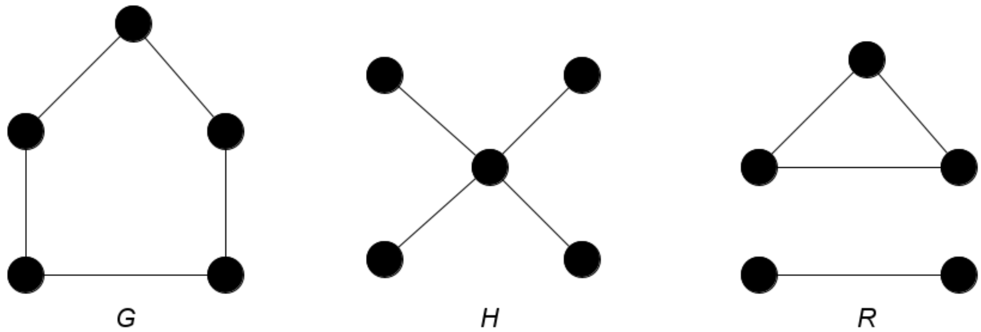
Στόχος του ερωτήματος αυτού αποτελεί η εξάσκηση στον τυπικό ορισμό απλών γραφοθεωρητικών ιδιοτήτων με τη χρήση της πρωτοβάθμιας γλώσσας και στην ερμηνεία προτάσεων της πρωτοβάθμιας γλώσσας σε γραφήματα.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #4 #5 #6

Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει δύο κατηγορηματικά σύμβολα E και P. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως κορυφές των γραφημάτων, το σύμβολο E ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) τα οποία συνδέονται με ακμή (ειδικότερα, το ζευγάρι (a, a) δεν ανήκει ποτέ στη σχέση E) και το σύμβολο P ως η διμελής σχέση που περιλαμβάνει όλα τα ζευγάρια κορυφών (a, b) για τα οποία υπάρχει μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές a και b

(ειδικότερα, το ζευγάρι (a, a) ανήκει πάντα στη σχέση καθώς η κορυφή a συνδέεται με τον εαυτό της με το κενό μονοπάτι).

(Α) Θεωρούμε τα ακόλουθα τρία γραφήματα G, H, R.



Βρείτε ποιοι από τους ακόλουθους τύπους αληθεύουν σε κάθε ένα από τα τρία γραφήματα.

1) $\forall x \forall y \Big((x = y) \vee E(x, y) \vee \exists z\big(E(x, z) \wedge E(z, y)\big)\Big)$
2) $\exists x \exists y \Big(\neg P(x, y) \wedge \forall w\big(P(w, x) \vee P(w, y)\big)\Big)$
3) $\exists x \forall y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \Big(E(x, y) \wedge \forall z\big(E(x, z) \rightarrow (z = y)\big)\Big)$

(Β) Δώστε τύπους της κατηγορηματικής λογικής που να εκφράζουν κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) Υπάρχουν δύο κορυφές x, y τέτοιες ώστε $N(x) = N(y)$.
2) Το γράφημα είναι συνεκτικό και δεν περιέχει τρίγωνο.
3) Κάθε κορυφή έχει βαθμό $n - 2$, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Ερώτημα 4. (10 + 3 + 4 + 4 + 4 = 25 μονάδες)

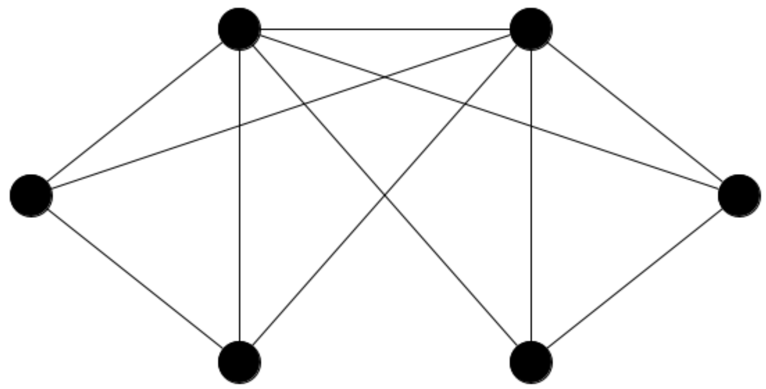
Στο ερώτημα αυτό θα εξασκηθείτε στην κατασκευή γραφημάτων που προκύπτουν από υφιστάμενα γραφήματα με την προσθήκη ακμών και στην διαδικασία απόδειξης της ύπαρξης του κύκλου του Hamilton σαν γραφική ιδιότητα που συνδέει τα δεύτερα με τα πρώτα.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #7 #8

(Α) Έστω ένα απλό μη-κατευθυνόμενο συνδεδεμένο γράφημα G τάξης n και έστω δύο κορυφές $v, u \in V(G)$ που δεν συνδέονται με ακμή τέτοιες ώστε $d(v) + d(u) \geq n$. Δημιουργούμε το γράφημα G' προσθέτοντας στο G την ακμή $\{v, u\}$. Να δείξετε ότι το γράφημα G περιέχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα G' περιέχει κύκλο Hamilton.

(Β) Η *κλειστότητα* ενός απλού μη-κατευθυνόμενου συνδεδεμένου γραφήματος G τάξης n, συμβολικά $c(G)$, είναι το γράφημα που προκύπτει από το G αν επαναληπτικά προσθέτουμε ακμές ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι μη-γειτονικών κορυφών που συνδέονται με μονοπάτι και το άθροισμα των βαθμών τους είναι μεγαλύτερο-ίσο του n.

(i) Να σχεδιάσετε την κλειστότητα του γραφήματος που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



(ii) Να δείξετε ότι, για κάθε απλό μη-κατευθυνόμενο συνδεδεμένο γράφημα G τάξης n,

(1) το γράφημα G έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το γράφημα $c(G)$ έχει κύκλο του Hamilton,

(2) αν το γράφημα $c(G)$ είναι πλήρες τότε το γράφημα G έχει κύκλο του Hamilton,

(3) η συνθήκη που περιγράφεται στο **(2)** δεν είναι αναγκαία.

Ερώτημα 5. (5 + 5 = 10 μονάδες)

Το ερώτημα αυτό έχει ως σκοπό να σας εξοικειώσει με τη μορφή εξέτασης που χρησιμοποιεί ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα, από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι Σωστή (υπάρχει τέτοιο γράφημα) ή Λάθος (δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα). Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #9 #10

Απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

A) Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι το G είναι απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

1. (Σ/Λ) Υπάρχει γράφημα Euler άρτιας τάξης και περιττού μεγέθους.

2. (Σ/Λ) Δεν υπάρχει γράφημα Euler περιττής τάξης και άρτιου μεγέθους.

3. (Σ/Λ) Υπάρχει συνδεδεμένο γράφημα G με $V' \subset V(G)$ τέτοιο ώστε το υπογράφημα $G[V']$ να είναι μη-συνδεδεμένο και το μέγεθος του $G[V']$ να είναι ίσο με την τάξη του G.

4. (Σ/Λ) Αν το G είναι γράφημα Euler και e_1, e_2 δύο ακμές του που προσπίπτουν στην ίδια κορυφή τότε υπάρχει στο G ένα κύκλωμα Euler όπου οι ακμές αυτές εμφανίζονται διαδοχικά (δηλαδή, η μία μετά την άλλη).

B) Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι το γράφημα G είναι απλό μη-κατευθυνόμενο με πίνακα γειτνίασης A.

1. (Σ/Λ) Αν το πλήθος των μη-μηδενικών στοιχείων σε κάθε γραμμή του πίνακα A είναι ίσο με δύο τότε το γράφημα G είναι ένας απλός κύκλος.

2. (Σ/Λ) Μηδενίζοντας στοιχεία που βρίσκονται σε αντιδιαμετρικές θέσεις στον πίνακα A, κατασκευάζουμε τον πίνακα γειτνίασης ενός υπογραφήματος του G.

3. (Σ/Λ) Σβήνοντας οποιαδήποτε γραμμή και οποιαδήποτε στήλη από τον πίνακα A, κατασκευάζουμε τον πίνακα γειτνίασης ενός υπογραφήματος του G.

4. (Σ/Λ) Μηδενίζοντας περιττό πλήθος μη-μηδενικών στοιχείων του πίνακα A, κατασκευάζουμε τον πίνακα γειτνίασης ενός υπογραφήματος του G.