Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

Ε ρ γ α σ ί α 1η

Συνδυαστική

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της συνδυαστικής.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας study.eap.gr μέχρι την* ***Τετάρτη, 18/11/2020****.*

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού υποβάλετε οριστικά την εργασία σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα του* ***συνοδευτικού αρχείου απαντήσεων****. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο* ***συνοδευτικό αρχείο απαντήσεων*** *πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, δεν υπάρχει περιορισμός στον χώρο που θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* ***5*** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: των τελευταίων ετών (2010-2020).

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ας προηγηθούν στη μελέτη σας οι εξετάσεις των τελευταίων ετών (2010-2020).

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1. Βασικές Τεχνικές Συνδυαστικής (μέγιστος βαθμός: 20)

Στο ερώτημα αυτό έχει σημασία να προσδιορίσετε το είδος του κάθε προβλήματος (άθροισμα, γινόμενο, επιλογές μη διατεταγμένων ή διατεταγμένων πλειάδων, διατάξεις, μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων, ρίψη σφαιριδίων σε κουτιά, κ.λ.π.) και στη συνέχεια να εφαρμόσετε τους κατάλληλους συνδυαστικούς τύπους.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #2, #3, #4,#5, #6, #7, #8

(1α) Να υπολογιστεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης PEPPERCORN όταν χρησιμοποιούνται όλα τα γράμματα της λέξης και:

- **(1α1)** Δεν υπάρχει άλλος περιορισμός.
- **(1α2)** Ο αναγραμματισμός αρχίζει με P ή τελειώνει με N.
- **(1α3)** Ο αναγραμματισμός εμφανίζει το PPP.

(1β) Να υπολογιστεί το πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $X + Y + Z = 17$, όταν:

- **(1β1)** Δεν υπάρχει άλλος περιορισμός.
- **(1β2)** $X > 1, Y > 2, Z > 3$.
- **(1β3)** $X < 6, Z > 5$.

Ερώτημα 2. Προβλήματα Συνδυαστικής (μέγιστος βαθμός: 25)

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε περισσότερο στην επιλογή των κατάλληλων τύπων σε προβλήματα συνδυαστικής.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #1, #2, #3, #4, #5, #6, #7, #8

(2α) Ο διαχειριστής ενός συστήματος τηλεδιασκέψεων θέλει να δημιουργήσει συνθηματικά από το αλφάβητο Σ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν για την πρόσβαση σε υπηρεσίες τηλεδιάσκεψης. Το σύστημα αυτό αναγνωρίζει δυο κατηγορίες χρηστών ανά τηλεδιάσκεψη (ανάλογα με το συνθηματικό σύνδεσης που θα δώσουν): είτε με δικαιώματα ακροατηρίου (audience account), είτε με δικαιώματα παρουσιαστών (presenter account). Για τον λόγο αυτό, ο διαχειριστής παρέχει μοναδικά ζεύγη συνθηματικών (A,B), ένα για καθεμιά από τις διαφορετικές τηλεδιασκέψεις, ως εξής: Τα συνθηματικά μπορεί να περιλαμβάνουν από 0 ως 10 ψηφία, <u>δίχως επαναλήψεις</u>. Το συνθηματικό A παρέχει στον χρήστη σύνδεση με δικαιώματα ακροατηρίου, ενώ το συνθηματικό B είναι κάποια <u>επέκταση</u> του A και εξασφαλίζει στον χρήστη δικαιώματα παρουσιαστή. Ο διαχειριστής αμφιταλαντεύεται μεταξύ δυο διαφορετικών τύπων συνθηματικών:

- <u>Συνθηματικά ΤΥΠΟΥ 1:</u> Επιλέγεται (δίχως επανάληψη ψηφίων, ενώ η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία) **υποσύνολο** ψηφίων B από το Σ για το συνθηματικό παρουσιαστή, καθώς και ένα **υποσύνολο** A από το B για το συνθηματικό επισκέπτη. Ένας χρήστης μπορεί να πληκτρολογήσει τα ψηφία του συνθηματικού του με όποια σειρά επιθυμεί, προκειμένου να εισέλθει στην τηλεδιάσκεψη (αρκεί να μην πατήσει κάποιο μη έγκυρο ψηφίο).

- Συνθηματικά ΤΥΠΟΥ 2: Επιλέγεται (δίχως επανάληψη ψηφίων, η σειρά επιλογής έχει σημασία) **συμβολοσειρά** (string) ψηφίων Β από το αλφάβητο Σ για το συνθηματικό παρουσιαστή, και συμβολοσειρά-πρόθεμα (prefix-substring) Α της συμβολοσειράς Β για το συνθηματικό επισκέπτη. Για παράδειγμα, αν το Β είναι η συμβολοσειρά 0123, τότε το Α θα μπορούσε να είναι η κενή συμβολοσειρά, ή το 0, ή το 01, ή το 012, ή το 0123. Ένας χρήστης πρέπει να πληκτρολογήσει τα ψηφία του συνθηματικού με τη συγκεκριμένη σειρά που υποδεικνύει η συμβολοσειρά.

Να υπολογιστούν τα διαφορετικά ζεύγη συνθηματικών (Α,Β) που μπορεί να δημιουργήσει ο διαχειριστής για τις διαφορετικές τηλεδιασκέψεις, όταν:

(2α1) Τα συνθηματικά Α και Β είναι ΤΥΠΟΥ 1, το Β περιλαμβάνει $k = 5$ ψηφία και το Α περιλαμβάνει από 0 έως 5 ψηφία.

(2α2) Τα συνθηματικά Α και Β είναι ΤΥΠΟΥ 1, δίχως περιορισμό ως προς το μήκος τους.

(2α3) Τα συνθηματικά Α και Β είναι ΤΥΠΟΥ 2, το Β περιλαμβάνει $k = 5$ ψηφία και το Α περιλαμβάνει από 0 έως 5 ψηφία.

(2α4) Τα συνθηματικά Α και Β είναι ΤΥΠΟΥ 2, δίχως περιορισμό ως προς το μήκος τους.

(2β) Η Αγγελική είναι η δασκάλα της Α' τάξης ενός δημοτικού σχολείου. Σήμερα το πρωί έφερε στο σχολείο 40 διαφορετικά βιβλία, 20 εκ των οποίων είναι μυθοπλασίες επιστημονικής φαντασίας (ΕΦ), ενώ τα υπόλοιπα 20 είναι ιστορικά βιβλία (ΙΣΤ).

(2β1) Η Αγγελική επιλέγει διαδοχικά και εντελώς τυχαία 10 από αυτά τα βιβλία, τα οποία δίνει στον Βασίλη ως επιβράβευση της προσπάθειάς του στο διαγώνισμα των μαθηματικών της προηγούμενης ημέρας. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο Βασίλης να πάρει τουλάχιστον ένα βιβλίο από την κατηγορία ΕΦ και τουλάχιστον ένα βιβλίο από την κατηγορία ΙΣΤ.

(2β2) Η Αγγελική αποφασίζει να μοιράσει τα 40 βιβλία στους 20 μαθητές της τάξης. Κάθε βιβλίο δίνεται εντελώς τυχαία σε κάποιον μαθητή ή κάποια μαθήτρια, και ανεξάρτητα από την ανάθεση των υπολοίπων βιβλίων. Προφανώς, ορισμένοι μαθητές/τριες θα πάρουν περισσότερα βιβλία, άλλοι/ες θα πάρουν λιγότερα (ενδεχομένως και κανένα). Να υπολογιστεί η πιθανότητα και η Γεωργία και ο Δημήτρης να μείνουν δίχως κανένα βιβλίο.

Ερώτημα 3. Γεννήτριες Συναρτήσεις (μέγιστος βαθμός: 20)

Το ερώτημα θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην ανάπτυξη γεννητριών συναρτήσεων. Θα πρέπει να εξετάσετε αν πρέπει να γίνει χρήση απλής ή εκθετικής γεννήτριας συνάρτησης, και να αναγνωρίσετε τον συντελεστή του κατάλληλου όρου που δίνει το σωστό αποτέλεσμα. Εξαιρετικά χρήσιμη σε αυτές της ασκήσεις είναι η ικανότητα μετασχηματισμού σε ισοδύναμα προβλήματα (π.χ. κατανομή μπαλών σε υποδοχές).

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #7, #8, #9, #10

Έστω ότι μας ενδιαφέρει να μετρήσουμ ε τους τρόπους να κολλήσουμε σε μια ευθεία τα απαραίτητα γραμματόσημα σε μια ταχυδρομική επιστολή, πριν την αποστολή της. Έχουμε στη διάθεσή μας γραμματόσημα των 3 λεπτών, των 4 λεπτών, και των 20 λεπτών του ευρώ. Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκει τους τρόπους επιλογής και τοποθέτησης επάνω στον φάκελο των απαραίτητων γραμματοσήμων και να προσδιοριστεί ο κατάλληλος όρος ο συντελεστής του οποίου δίνει τη ζητούμενη απάντηση, όταν:

(3α) Απαιτείται να κολλήσουμε ακριβώς k γραμματόσημα, με την προϋπόθεση να χρησιμοποιήσουμε άρτιο πλήθος από 3-λεπτα γραμματόσημα. Έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα γραμματόσημα στον φάκελο. Για παράδειγμα, η τοποθέτηση [3][3][4][3][4][20][3] θεωρείται διαφορετική από την τοποθέτηση [3][4][3][3][3][4][20].

(3β) Απαιτείται να κολλήσουμε γραμματόσημα συνολικής αξίας n λεπτών. Η σειρά με την οποία τοποθετούμε τα γραμματόσημα στον φάκελο δεν έχει σημασία. Για παράδειγμα, για $n = 40$, η τοποθέτηση [3][3][4][3][4][20][3] δε θεωρείται διαφορετική από την τοποθέτηση [3][4][3][3][3][4][20].

(3γ) Απαιτείται να κολλήσουμε γραμματόσημα συνολικής αξίας n λεπτών. Έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα γραμματόσημα στον φάκελο. Για παράδειγμα, για $n = 40$, η τοποθέτηση [3][3][4][3][4][20][3] θεωρείται διαφορετική από την τοποθέτηση [3][4][3][3][3][4][20].

Υπόδειξη: Αντιμετωπίστε κάθε θέση για γραμματόσημο ως μια υποδοχή που «γεμίζει» με βάση την αξία του γραμματόσημου που τοποθετείται σε αυτή. Πώς θα λύνατε το πρόβλημα αν ξέρατε ότι θα χρησιμοποιηθούν ακριβώς m γραμματόσημα (δηλαδή, m υποδοχές)? Τι γίνεται τώρα που δεν είστε βέβαιοι για το πλήθος των γραμματοσήμων που θα χρησιμοποιηθούν?

Ερώτημα 4. Αναδρομή & Επαγωγή (μέγιστος βαθμός: 25)

Το ερώτημα αυτό θα σας δώσει την ευκαιρία να εξασκηθείτε στην επίλυση αναδρομικών σχέσεων μέσω μαθηματικής επαγωγής και μέσω γεννητριών συναρτήσεων.

Συνοδευτικές ασκήσεις παλαιοτέρων ετών: #11, #12, #13, #14

(4α) Έστω ότι ζητείται να υπολογίσουμε το πλήθος των n-ψήφιων δυαδικών συμβολοσειρών που περιλαμβάνουν ως υποσυμβολοσειρά τους το «00».

(4α1) Να βρείτε τα πλήθη των ζητούμενων συμβολοσειρών, για μήκη 0, 1, 2, 3 και 4 ψηφίων.

(4α2) Να βρείτε (τεκμηριώνοντας με συνδυαστικό επιχείρημα την ορθότητά της) μια αναδρομική σχέση, η οποία υπολογίζει το πλήθος των n-ψήφιων δυαδικών συμβολοσειρών που περιλαμβάνουν ως συμβολοσειρά το «00», για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.
Υπόδειξη: Εξετάστε τις αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις που προκύπτουν, ανάλογα με την κατάληξη της συμβολοσειράς (δηλαδή, αν τελειώνει σε 1, σε 10, ή 00).

(4α3) Αξιοποιώντας τις γεννήτριες συναρτήσεις, να βρείτε κλειστό τύπο (λύση) για την αναδρομική σχέση που περιγράψατε στο (4α2), με τις αρχικές συνθήκες που υπολογίσατε στο (4α1).

(4β) Να δειχθεί ότι, για θετικό ακέραιο αριθμό $n \geq 1$, και σύνολο n στοιχείων Σ, το πλήθος των υποσυνόλων του Σ με άρτιο πλήθος στοιχείων ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων του Σ με περιττό πλήθος στοιχείων. Για παράδειγμα, για το $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$ υπάρχουν δύο υποσύνολα με άρτιο πληθάριθμο, το $\emptyset$ (κενό σύνολο) και το $\{\alpha, \beta\}$, ενώ υπάρχουν και δύο υποσύνολα με περιττό πληθάριθμο, τα $\{\alpha\}$ και $\{\beta\}$.
Υπόδειξη: Προτείνεται να εφαρμοστεί μαθηματική επαγωγή.

Ερώτημα 5. Επιλογή Σ/Λ (μέγιστος βαθμός: 10)

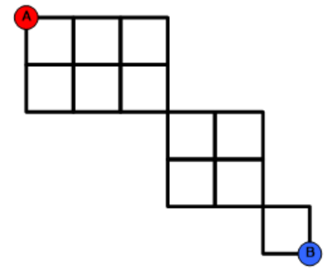
Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό στο να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια όμως θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους, βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(5α)

1. (Σ / Λ) Μια παρέα 10 παιδιών πρόκειται να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι προκειμένου να παίξουν ένα παιχνίδι με τράπουλα. Κατά την εξέλιξη του παιχνιδιού, κάθε παίκτης / παίκτρια λαμβάνει ένα φύλλο από τον προηγούμενό του παίκτη, και στη συνέχεια δίνει ένα φύλλο στον επόμενό του παίκτη, κατά τη δεξιόστροφη φορά του τραπεζιού. Η Αλίκη έχει μαλώσει με τον Βύρωνα, και γι’ αυτό δε θέλει να αλληλεπιδρά μαζί του κατά το παιχνίδι (ούτε να του δίνει αλλά ούτε και να παίρνει χαρτιά από αυτόν). Οι διαφορετικές τοποθετήσεις των παιδιών στο τραπέζι είναι $7 \cdot 8!$.

2. (Σ / Λ) Στο διπλανό σχήμα, το πλήθος των διαφορετικών μονοπατιών για να μετακινηθούμε από το Α στο Β, όταν επιτρέπεται σε κάθε βήμα μόνο κίνηση προς τα δεξιά ή κίνηση προς τα κάτω, είναι 60.



3. (Σ / Λ) Η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 6 κατά τη ρίψη δυο «τίμιων» ζαριών, ενός κόκκινου και ενός πράσινου, είναι 5/36.

4. (Σ / Λ) Η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 6 κατά τη ρίψη δυο «τίμιων» (πανομοιότυπων) άσπρων ζαριών είναι 5/36.

(5β) Ένα φορτίο αποτελείται από τρία διαφορετικά είδη κιβωτίων, 20 από το κιβώτιο τύπου Α (με βάρος 100 κιλά), 10 από το κιβώτιο τύπου Β (με βάρος 500 κιλά) και 14 από το κιβώτιο τύπου Γ (με βάρος 1000 κιλά).

1. (Σ / Λ) Οι τρόποι να φορτωθούν ακριβώς 10 από αυτά τα κιβώτια σε ένα φορτηγό, αν υπάρχει περιορισμός να φορτωθούν τουλάχιστον 4 κιβώτια τύπου Α, το πολύ 3 τύπου Β, και το πολύ 2 τύπου Γ, δίνεται από τον συντελεστή του x^{10} στη γεννήτρια συνάρτηση:

$$\frac{x^4 \cdot (1 - x^4) \cdot (1 - x^3)}{(1 - x)^3}$$

2. (Σ / Λ) Οι τρόποι να φορτωθεί ένα φορτηγό με κιβώτια συνολικού φορτίου 2 τόνων δίνεται από τον συντελεστή του όρου x^{20} στη γεννήτρια συνάρτηση:

$$(1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \cdots) \cdot (1 + x^{10} + x^{20} + \cdots)$$

3. (Σ / Λ) Οι τρόποι να φορτωθεί ένα φορτηγό με κιβώτια συνολικού φορτίου 5 τόνων δίνεται από τον συντελεστή του όρου x^{50} στη γεννήτρια συνάρτηση:

$$(1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \cdots) \cdot (1 + x^{10} + x^{20} + \cdots)$$

4. (Σ / Λ) Οι τρόποι να μοιραστούν και τα 44 κιβώτια σε δύο φορτηγά, έτσι ώστε καθένα από αυτά να πάρει τουλάχιστον 5 κιβώτια από κάθε είδος και ακριβώς τα μισά (22) κιβώτια συνολικά, δίνονται από τον συντελεστή του όρου x^7 στη γεννήτρια συνάρτηση:

$$(1 + x + \cdots + x^{10}) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$$