Έντυπο Υποβολής ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ12)

ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα "Υποβολή Εργασίας", καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο **παρόν** αρχείο και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα "Αξιολόγηση Εργασίας", την υποβάλλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφα της υποβληθείσας και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: για παράδειγμα, το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να είναι **ioannou_ge1_pli12.doc**.

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονοματεπώνυμο, τηλέφωνο, ηλεκτρονική διεύθυνση)	

Θ.Ε.	ΠΛΗ 12
Τμήμα	ΗΛΕ43
Ακ. Έτος	2019-20
Γ.Ε.	3

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή-Συμβούλου	ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΣΤΑΥΡΟΣ
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (*ημέρα Τετάρτη*)	04/03/2020, ώρα 23:59
Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	04/03/2020
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικώς, ολογράφως)*	

Υπογραφή **Υπογραφή**

Φοιτητή **Καθηγητή-Συμβούλου**

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Μην συμπεριλάβετε τις εκφωνήσεις των ασκήσεων.

Λύση της 2ης άσκησης
Υπό-ερώτημα α)

Πρώτα θα γίνει υπολογισμός της F'(x) δηλαδή της πρώτης παραγώγου ώστε να μπορέσω να υπολογίσω ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

$$f'(x) = x - 3\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = (x)' = 3$$

$$f'(x) = x - 3\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = (x - 3\sqrt[3]{x})' \Rightarrow$$

- Υπολογισμός βάση παραγώγου: $(x^k) = k \cdot x^{k-1} = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 - 1^0 = 1$
- Υπολογισμός βάση ιδιότητας: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = (x)' - (3\sqrt[3]{x})' = (x)' - 3(\sqrt[3]{x}) = (x)' - 3(x^{\frac{1}{3}})' =$$

- Υπολογισμός βάση παραγώγου: $(x^k)' = k \cdot x^{k-1} \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{1}} = \text{ΕΚΠ}(1,3) = 3 = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} =$ $\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

Άρα: $f'(x) = 1 - \cancel{3} \frac{1}{\cancel{3} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}$

Έπειτα την πρώτη παράγωγο: f'(x)=0

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -1 \xrightarrow{\chi\iota\alpha\sigma\tau\acute{\eta}} \sqrt[3]{x^2} \cdot 1 = 1 \cdot 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x \pm 1^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \pm 1^3 \Rightarrow$$
$$x = \pm 1 \prec^{x=1}_{x=-1}$$

Θα πάρω δύο τυχαίους αριθμούς στα σημεία που μηδενίζει η παράγωγος. Θα πάρω το f'(-5) και το f'(+5) για το διάστημα -∞,1 και +1,+ ∞

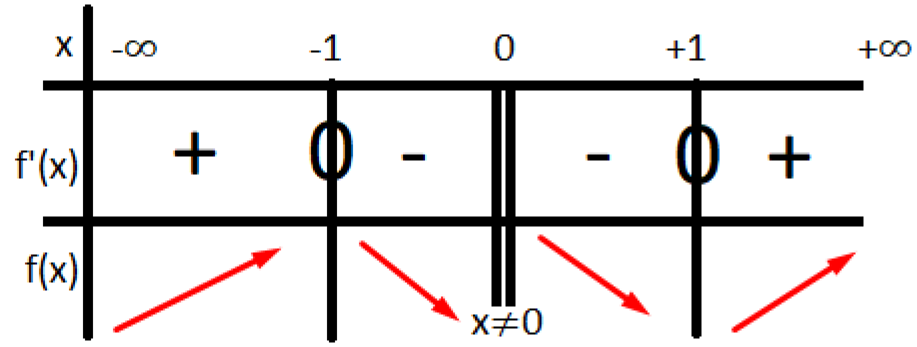
$$f'(-5) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(-5)^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = 1 - \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = 0,658005$$

$$f'(+5) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = 1 - \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = 0,658005$$

Θα πάρω δύο τυχαίους αριθμούς στα σημεία που μηδενίζει η παράγωγος. Θα πάρω το f'(-0,5) για το διάστημα -1,0 και f'(+0,5) για το διάστημα 0,+1

$$f'(0,5) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{0,5^2}} = 1 - \frac{1}{0,5^{\frac{2}{3}}} = -0,587401$$

$$f'(-0,5) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(-0,5)^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{0,5^2}} = 1 - \frac{1}{0,5^{\frac{2}{3}}} = -0,587401$$



- Τοπικό μέγιστο για x=-1 με μέγιστη τιμή το 2: $f(-1) = x - 3\sqrt[3]{x} = -1 - 3\sqrt[3]{-1} = -1 - 3(-1)^{\frac{1}{3}} = 2$
- Τοπικό ελάχιστο για x=1 με μέγιστη τιμή το -2: $f(1) = x - 3\sqrt[3]{x} = 1 - 3\sqrt[3]{1} = -1 - 3 = -2$

Λύση της 2ης άσκησης
Υπό-ερώτημα β)

Για την επίλυση της άσκησης και για την απλοποίησή παραγώγου θα χρησιμοποιήσω από τις ιδιότητες:

- $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
- $\chi^{-\alpha} = \dfrac{1}{\chi^{\alpha}}$
- $(\chi^{\kappa})' = \kappa \cdot \chi^{\kappa-1}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f''(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = (1)' - (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})' = 0 - (\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}})' = 0 - (1 \cdot x^{-\frac{2}{3}})' = 0 - (x^{-\frac{2}{3}})' =$$

$$0 - (-\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}-\frac{1}{1}}) = \text{ΕΚΠ}(1,3) = 3 \Rightarrow 0 - (-\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}) = 0 - (-\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}) = 0 - (-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}) = 0 - (-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}) =$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

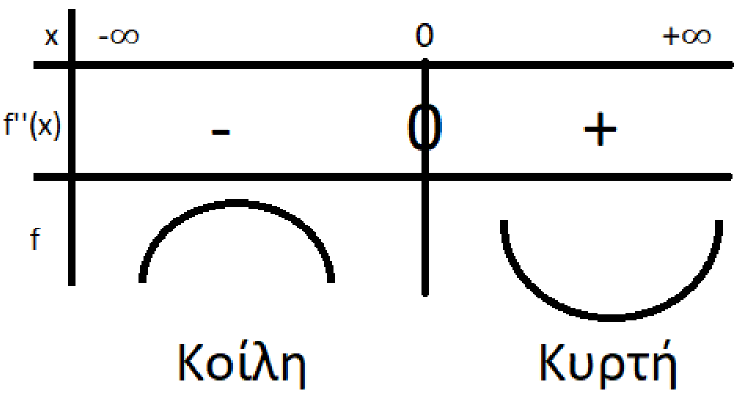
Αφού βρήκα τη δεύτερη παράγωγο προτού υπολογίσω το σημείο καμπής ως προς τα διαστήματα της f. θα υπολογίσω την f’’(x)=0

Θα διαλέξω τυχαίους αριθμούς που θα υπολογίσω με τη δεύτερη παράγωγος $f''(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$ στα διαστήματα (-∞,0) και (0,+ ∞) θα χρησιμοποιήσω το -1 για το διάστημα (-∞,0) και το 1 για το διάστημα (0,+ ∞)

$$f''(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \Rightarrow f''(-1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(-1)^5}} = -\frac{2}{3} = -0,666667$$

$$f''(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{1^5}} = \frac{2}{3} = 0,666667$$

Άρα στο διάστημα (-∞,0) η f’’(x) είναι κοίλη
στο διάστημα (0,+∞)η f’’(x) είναι κυρτή



$$f''(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = \frac{0}{1} \xrightarrow{\chi\iota\alpha\sigma\tau\acute{\eta}} 2 \cdot 1 = 3\sqrt[3]{x^5} \cdot 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ άρα: είναι αδύνατη}$$

Λύση της 2ης άσκησης
Υπό-ερώτημα γ)

Βάση τυπολογίου ΕΑΠ, πρώτα θα εξεταστεί κατακόρυφη της γραφικής παράσταση της f

Κατακόρυφη: για την $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$ με το $x\in\mathbb{R}$ δεν υπάρχει τιμή που να μπορεί να πάρει το χ ώστε να μην ορίζεται. Άρα είναι συνεχής

Πλάγια: πρώτα θα υπολογιστεί η οριζόντια γραφική παράσταση της f. βάση τύπου y=a*x+b

Για $\alpha=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-\alpha(x))$ και θα υπολογιστεί και για το +∞ και το -∞ άρα:

Για (+∞):

$$\alpha=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1-\lim_{x\to+\infty}3x^{\frac{1}{3}-1}=1-\lim_{x\to+\infty}3x^{-\frac{2}{3}}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}=1-0=\boxed{1}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to+\infty}x-3\sqrt[3]{x}-1x=\lim_{x\to+\infty}\cancel{x}-3\sqrt[3]{x}-\cancel{x}=\lim_{x\to+\infty}3\sqrt[3]{x}=\lim_{x\to+\infty}3x^{\frac{1}{3}}=\lim_{x\to+\infty}-3\cdot(+\infty)=\boxed{-\infty}$$

Σύνοψη: $y=a\cdot x+\beta\ \ \mu\varepsilon\ \ \alpha\in\mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\,\beta\in\mathbb{R}$, α=1 και β=-∞

ΔΕΝ ορίζεται για το +∞

Για (-∞):

$$\alpha=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}3x^{\frac{1}{3}-1}=1-\lim_{x\to-\infty}3x^{-\frac{2}{3}}=1-\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}=1-0=\boxed{1}$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}x-3\sqrt[3]{x}-1x=\lim_{x\to-\infty}\cancel{x}-3\sqrt[3]{x}-\cancel{x}=\lim_{x\to-\infty}3\sqrt[3]{x}=\lim_{x\to-\infty}3x^{\frac{1}{3}}=\lim_{x\to-\infty}-3\cdot(-\infty)=\boxed{+\infty}$$

Σύνοψη: $y=a\cdot x+\beta\ \ \mu\varepsilon\ \ \alpha\in\mathbb{R}\ \ \kappa\alpha\iota\,\beta\in\mathbb{R}$, α=1 και β=+∞

<u>Άρα ΔΕΝ ορίζεται η πλάγια ασύμπτωτη</u>

Οριζόντια ασύμπτωτη ΔΕΝ ορίζεται για $y=b\ \ \mu\varepsilon\,\tau o\,b\in\mathbb{R}\,\delta\iota\acute{o}\tau\iota\,\alpha\neq0$

Λύση της 4ης άσκησης
Υπό-ερώτημα α)

Πρώτα θα χρησιμοποιήσω τη μεθοδολογία του κοινού παράγοντα ώστε να επιτευχθεί η απλοποίηση του ορίου:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5+x+1}{\sqrt{4x^{10}+5x^3+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5(3+\frac{x}{x^5}+\frac{1}{x^5})}{\sqrt{x^{10}(4+\frac{5x^3}{x^{10}}+\frac{2}{x^{10}})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5(3+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5})}{\sqrt{x^{10}(4+\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5(3+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5})}{\sqrt{x^{10}}\cdot\sqrt{(4+\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}})}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5(3+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5})}{x^{\frac{10}{2}}\cdot\sqrt{(4+\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5(3+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5})}{x^5\cdot\sqrt{(4+\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^5}(3+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5})}{\cancel{x^5}\cdot\sqrt{4+\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\sqrt{4+\frac{5}{x^7}+\frac{2}{x^{10}}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+0+0}{\sqrt{4+0+0}}=\frac{3}{\sqrt{4}}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Λύση της 4ης άσκησης
Υπό-ερώτημα β)
Λόγω της απόλυτης τιμής και των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής, θα υπολογίσω το όριο σαν πλευρικό όριο $x \to 4^+ \quad και \quad x \to 4^-$ ώστε να μπορώ να υπολογίσω το όριο χωρίς την παράγωγο. Επίσης γνωρίζουμε πως e=2,718282

x-4 > 0 => x > 4

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^2}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{e^{\sqrt{4}} - e^2}{4-4} = απροσδιοριστία \frac{0}{0}$$

- Θα χρησιμοποιήσω τον κανόνα De l’ Hospital:

Άρα Πλευρικό Α:

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}} - e^2\right)'}{\left(x-4\right)'} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}}\right)' - \left(e^2\right)'}{\left(x\right)' - \left(4\right)'} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right) - 0}{1-0} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt[2]{x}}\right)}{1} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt[2]{4}}\right)}{1} = \frac{e^2 \cdot \frac{1}{2\cdot 2}}{1} =$$
$$\frac{e^2}{4} = \boxed{1,847264}$$

Άρα Πλευρικό Β:

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}} - e^2\right)'}{-\left(x-4\right)'} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}}\right)' - \left(e^2\right)'}{-\left(x\right)' - \left(4\right)'} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right) - 0}{-1-0} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt[2]{x}}\right)}{-1} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(e^{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt[2]{4}}\right)}{-1} = \frac{e^2 \cdot \frac{1}{2\cdot 2}}{-1} =$$
$$\frac{e^2}{-4} = \boxed{-1,847264}$$

Άρα το: $\lim_{x\to 4^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^2}{x-4} \neq \lim_{x\to 4^-} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^2}{-\left(x-4\right)}$

Το όριο: $\lim_{x\to 4^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^2}{x-4}$ <u>**δεν ορίζεται**</u>

Λύση της 4ης άσκησης
Υπό-ερώτημα γ)

- Λόγω απροσδιοριστίας $\frac{0}{0}$ Θα χρησιμοποιήσω τον κανόνα De l’ Hospital:

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)\Rightarrow \text{ΕΚΠ}(\chi-1,\ln x)=(x-1)\cdot\ln x\Rightarrow \lim_{x\to 1+}\left(\frac{\ln x}{(x-1)\ln x}-\frac{x-1}{(x-1)\ln x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}\right)=\frac{0}{0}\xrightarrow{Del'Hospital}\lim_{x\to 1+}\left(\frac{(\ln x-(x-1))'}{((x-1)\ln x)'}\right)=\lim_{x\to 1+}\frac{(\ln x)'-(x)'-(1)'}{(\ln x)'\cdot(x-1)'}=$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}-1-0}{(\ln x)'\cdot(x-1)+(\ln x)\cdot(x-1)'}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x\cdot(1-0)}=$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{1}-1}{1-\frac{1}{1}+\ln 1}=\frac{1-1}{1-1+\ln 1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Del'Hospital}$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)';}{\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}+\ln x\right)'}=\lim_{x\to 1+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'-(1)'}{\left(\frac{x}{x}\right)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+(\ln x)'}=\lim_{x\to 1+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'-(1)'}{(1)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+(\ln x)'}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{-1}{x^2}-0}{0-\left(\frac{-1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{-1}{1^2}}{\frac{-1}{1^2}+\frac{1}{1}}=\lim_{x\to 1+}\frac{-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}=\boxed{-0,5}$$

Λύση της 4ης άσκησης
Υπό-ερώτημα ε)

Θα χρησιμοποιήσω επίσης τη μεθοδολογία του κοινού παράγοντα για το όριο ακολουθίας μέσα στη παρένθεση μέχρι να γίνει η απλοποίηση και να συνεχίσω τις πράξεις με το συνημίτονο

$$\lim_{x\to\infty}\tan\left(\frac{1+3n+n^2\cdot\pi}{5+4n^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\tan\left[\frac{n^2\cdot\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\pi\right)}{n^2\cdot\left(\frac{5}{n^2}+4\right)}\right]=\lim_{x\to\infty}\tan\left[\frac{\cancel{n^2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+\pi\right)}{\cancel{n^2}\cdot\left(\frac{5}{n^2}+4\right)}\right]=\lim_{x\to\infty}\tan\left(\frac{0+0+\pi}{0+4}\right)=\lim_{x\to\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

επειδή: $\tan\theta\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ βάση τυπολογίου: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=1$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha:$

$$\lim_{x\to\infty}\tan\left(\frac{1+3n+n^2\cdot\pi}{5+4n^2}\right)=\boxed{1}$$

Λύση της 4ης άσκησης
Υπό-ερώτημα στ)

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{4n+1})^{8n+2} =$$

- Επειδή είναι όριο ακολουθιών που $n\to\infty$ και με δύναμη εις την ν-αδική θα επιτευχθεί απλοποίηση βάση τυπολογίου με βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων.

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{n} = e^{x}$$

- Πρώτα θα χωρίσω το όριο χρησιμοποιώντας: $\alpha^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ (\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\cdot\mu}$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{4n+1})^{8n}\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{4n+1})^{2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{4n+1}\right)^{8}\right]^{n}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4n+1}\right)^{2} =$$

Ως προς:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{4n+1}\right)^{2} = 1+\frac{3}{4\cdot\infty+1} = 1+\frac{3}{\infty} = 1+0 = \boxed{1}$$

Ως προς:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{4n+1}\right)^{8}\right]^{n} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n\left(4+\cancel{\frac{1}{n}}\right)}\right)^{8}\right]^{n} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n\cdot 4}\right)^{8}\right]^{n} = \varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\,\frac{3}{4n} = \frac{\frac{3}{4}}{n}\,\acute{\alpha}\rho\alpha:$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\frac{3}{4}}{n}\right)^{8}\right]^{n} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\frac{3}{4}}{n}\right)^{n}\right]^{8}\cdot 1 = e^{\frac{3}{4}}\cdot 1 = e^{\frac{3}{4}} = \frac{e^{3}}{4} = \frac{20.085541}{4} = \boxed{5.021385}$$

Λύση της 5ης άσκησης
Υπό-ερώτημα α)

Για να αποδείξω ότι είναι γνησίως αύξουσα τότε πρέπει να

$\alpha_{n+1} > a_n$

$a_n = e^n - n$
$a_{n+1} = e^{n+1} - (n+1)$

Άρα:
$e^{n+1} - (n+1) > e^n \cdot n \Rightarrow e^n \cdot e^1 - n + 1 > e^n \Rightarrow e^n \cdot e \cancel{-n} - 1 - e^n \cancel{+n} > 0 \Rightarrow e^n (e-1) - 1 > 0 \Rightarrow$
$e^n (e-1) > 1 \Rightarrow e^n \cdot 1,718282 > 1$
<u>**Άρα είναι γνησίως αύξουσα**</u>

Για να είναι και αποκλίνουσα πρέπει $\alpha_n = e^n - n \Rightarrow an = \pm\infty$ στη συγκεκριμένη ακολουθία επειδή παρουσιάζει απροσδιοριστία θα χρησιμοποιήσω κοινό παράγοντα και θα το υπολογίσω σαν όριο:

$$\lim_{n\to+\infty} e^n - n = \lim_{n\to+\infty} e^n \left(1 - \frac{n}{e^n}\right)$$

Επειδή συνεχίζει να παρουσιάζει απροσδιοριστία θα σπάσω το όριο $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{n}{e^n}$ και επειδή παρουσιάζει $\frac{+\infty}{+\infty}$ θα χρησιμοποιήσω τον κανόνα De l' Hospital αφού πρώτα μετατρέψω την ακολουθία σε συνάρτηση για λόγους απλοϊκότητας:

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{n}{e^n} = \xrightarrow{Del'Hospital} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{e^x} = \xrightarrow{Del'Hospital} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

Άρα:
$$\lim_{n\to\infty} e^n \cdot \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{n}{e^n} = +\infty \cdot (1-0) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Η ακολουθία $\alpha_n = e^n - n$ είναι και γνησίως αύξουσα και αποκλίνουσα

Λύση της 5ης άσκησης
Υπό-ερώτημα β)

Για να μπορέσω να αποδείξω την ακολουθία φραγμένη θα υπολογίσω με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας ως προς τις απλοποιήσεις των πράξεων και τέλος θα αποδείξω $a_n \; να \, είναι \; -1 \le \alpha_n \le 1 \; δηλαδή: \; |a_n| \le 1$

$$|b_n| = \frac{(-3)^n + 4}{5+3^n} = \frac{\left|(-3)^n + 4\right|}{\left|5+3^n\right|} = \frac{\left|(-3)^n\right| + |4|}{5+3^n} = \frac{\left|(-3)^n\right| + 4}{5+3^n} = \frac{3^n + 4}{5+3^n} = \frac{3^n \cdot 3^n}{3^n} = \frac{3^n \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^n} \cdot 1} = 2$$

Άρα:

$|b_n| \le 2 \;\; είναι \, φραγμένη$

$-2 \le b_n \le 2 \;\; είναι \, φραγμένη$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-3)^n + 4}{5+3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(-1+\frac{4}{3^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{5}{3^n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+\frac{4}{3^n}}{1+\frac{5}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+\frac{4}{+\infty}}{1+\frac{5}{+\infty}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1+0}{1+0} = \frac{-1}{1} = -1$$

Λύση της 5ης άσκησης
Υπό-ερώτημα δ)

Για να εξετάσω αν συγκλίνει η σειρά βάση τυπολογίου θα χρησιμοποιήσω p-σειρά

$$\zeta(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$

$$\theta\alpha\ \chi\omega\rho\acute{\iota}\sigma\omega\ \tau\iota\varsigma\ \sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\varepsilon}\varsigma\ \omega\varsigma:$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\ \kappa\alpha\iota\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7}{\sqrt{n^3}}$$

Και θα κάνω απαλοιφή της ρίζας βάση ιδιότητας: $a^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ ώστε να μπορέσω να υπολογίσω το p:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}=n^p=n^{\frac{2}{3}}=0,6\Rightarrow\ p=0,6\le 1\ \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \alpha\pi o\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7}{n^{\frac{3}{2}}}=n^p=n^{\frac{3}{2}}=1,5\Rightarrow\ p=1,5>1\ \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota$$

Επειδή έστω και η μία από τις δύο σειρές δεν συγκλίνει τότε:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\frac{7}{\sqrt{n^3}}\right)=\Delta\varepsilon\nu\ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\,(\alpha\pi o\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota)$$