Έντυπο Υποβολής ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ12)

ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα "Υποβολή Εργασίας", καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο **παρόν** αρχείο και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο study.eap.gr έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα "Αξιολόγηση Εργασίας", την υποβάλλει με τη σειρά του στο study.eap.gr. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφα της υποβληθείσας και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.
Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: για παράδειγμα, το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να είναι **ioannou_ge1_pli12.doc**.

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονοματεπώνυμο, τηλέφωνο, ηλεκτρονική διεύθυνση)	ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΜΠΑΤΣΑΛΗΣ, 6943232609, std119181@ac.eap.gr

Θ.Ε.	ΠΛΗ 12
Τμήμα	ΗΛΕ43
Ακ. Έτος	2019-20
Γ.Ε.	2

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή-Συμβούλου	ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΣΤΑΥΡΟΣ
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής (*ημέρα Τετάρτη*)	18/12/2019, ώρα 23:59
Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	18/12/2019
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικώς, ολογράφως)*	

Υπογραφή **Υπογραφή**

Φοιτητή **Καθηγητή-Συμβούλου**

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Μην συμπεριλάβετε τις εκφωνήσεις των ασκήσεων.

Λύση της 1ης άσκησης
Υπό-ερώτημα α)

Για την εύρεση του πίνακα A αν είναι διαγωνοποιήσιμος θα βρω το πολυώνυμο του A με τον τύπο det(A-λ·I) και μετά θα γίνει εύρεση ιδιοτιμής και ιδιοδυανίσματος ώστε να εξεταστεί η ισότητα μεταξύ αλγεβρικής και γεωμετρικής τους πολλαπλότητας.

$$\det(A-\lambda\cdot I)=\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda\cdot 3-\lambda)-1\cdot(-1)=$$
$$3-\lambda-3\lambda+\lambda^2+1=\lambda^2-3\lambda-\lambda+3+1=\lambda^2-4\lambda+4$$

$\textit{Λύση ως δευτεροβάθμιας εξίσωσης για την εύρεση της ιδιοτιμής}:$

$\lambda 2-4\lambda+4=0 \Leftrightarrow \quad \alpha=1, \beta=-4, \gamma=4$

$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$

$\Delta=0\,\textit{άρα έχει μια λύση η διακρίνουσα}:\dfrac{-\beta}{2\cdot\alpha}$

$\Delta=\dfrac{-\beta}{2\cdot\alpha}=\dfrac{-(-4)}{2\cdot1}=\dfrac{4}{2}=2$

$\Delta=2\,\textit{άρα}\,\boxed{\lambda=2}$

$\textit{Βάση τυπολογίου θεωρείται ότι έχει διπλή λύση. Δηλαδή αλγεβρική πολαπλότητα}=2$

$\textit{Παίρνω το αποτέλεσμα}\ \lambda^2-4\lambda+4=0\ \textit{και το λύσω με κοινούς παράγοντες τότε θα πάρω}\ (\lambda-2)\cdot(\lambda-2)$
$\textit{άρα}\ \boxed{\lambda=2}\ \textit{και}\ \boxed{\lambda=2}$

<u>Για την εύρεση ιδιοδυανίσματος:</u>
$\textit{Για}\ \lambda=2$

$$(\mathrm{A}\cdot\lambda-I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}-1x-1y=0\\ 1x+1y=0\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-x-y=0\\ x+y=0\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}-x=y\Rightarrow\dfrac{-1x}{-1}=\dfrac{y}{-1}\Rightarrow\boxed{x=-y}\\ x+y=0\Rightarrow\boxed{x=-y}\end{matrix}$$

$\textit{επομένως}:$
$(x,y)=(-y,y)=y(-1,1)$
$\textit{Δεν χρειάζεται γραμμική ανεξαρτησία λόγω του ότι είναι ένα και μοναδική συντεταγμένη}$

Άρα:
Ο πίνακας A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος διότι η αλγεβρική πολλαπλότητα που είναι = 2 ≠ με την γεωμετρική πολλαπλότητα που είναι = 1

<u>Λύση της 2ης άσκησης</u>
Υπό-Ερώτημα α)

Για τον υπολογισμό του πολυωνύμου θα χρησιμοποιήσω τον τύπο det(A-λ·I)

$$\det\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\lambda&1&1\\0&-\lambda&0\\2&1&1-\lambda\end{pmatrix}$$

υπολογισμός ορίζουσας

$$\det\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&0&0\\2&1&1-\lambda\end{vmatrix}\Rightarrow 0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}+(-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}2-1&1\\2&1-\lambda\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\2&1\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$-\lambda((2-\lambda)\cdot(1-\lambda))-(2\cdot1)=-\lambda(\cancel{2}-2\lambda-\lambda+\lambda^2\cancel{-2}=-\lambda(\lambda^2-3\lambda)=\boxed{-\lambda^3+3\lambda^2}$$

Υπό-Ερώτημα β)

Για τον υπολογισμό της ιδιοτιμής θα πρέπει να λύσω το πολυώνυμο του προηγούμενου υπό-ερωτήματος ως εξίσωση $-\lambda(\lambda^2-3\lambda)=0$ αρα:

$$-\lambda\cdot(\lambda^2-3\lambda)=0 \Leftrightarrow \boxed{-\lambda=0}$$
$$\textit{και θα λύσω το } \lambda^2-3\lambda=0 \textit{ ως δευτεροβάθμια εξίσωση}: \alpha=1, \beta=-3, \gamma=0$$
$$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot0=9-0=9$$
$$\Delta1,\Delta2=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9}}{2}= \begin{matrix} \Delta1=\dfrac{3+3}{2}=3 \Rightarrow \textit{άρα } \boxed{\lambda=3} \\ \Delta2=\dfrac{3-3}{2}=0 \Rightarrow \textit{άρα } \boxed{\lambda=0} \end{matrix}$$

$$\textit{επομένως}:$$
$$\lambda=0 \textit{ και } \lambda=0 \left(\textit{διπλή ιδιοτιμή} = \textit{αλγεβρική πολλαπλότητα}=2\right)$$
$$\lambda=3 (\textit{απλή ιδιοτιμή} = \textit{αλγεβρική πολλαπλότητα}=1)$$

Για τον υπολογισμό του ιδιοδυανίσματος θα πάρω τον τύπο $(A-\lambda\cdot I)\cdot(x,y,z)=0$ θα αντικαταστήσω το λ με τη λύση που βρήκα της ιδιοτιμής και θα λύσω την εξίσωση ως σύστημα.

<u>Ως προς την διπλή ιδιοτιμή λ=0</u>

$$(A-\lambda\cdot I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}-0\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\left.\begin{matrix}2x+1y+1z=0\Rightarrow 2x+y+z=0\\0x+0y+0z=0\Rightarrow 0=0\\2x+1y+1z=0\Rightarrow 2x+y+z=0\end{matrix}\right\} 2x+y+z=0\Rightarrow\boxed{z=-2x-y}$$

$$(x,y,z)=(x,y,-2x-y)=x\cdot(1,0,-2)+y\cdot(0,1,-1) \textit{ με το } x,y\in R$$
$$\textit{άρα}:$$
$$(x,y,z)=span\{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$$

$$\textit{Υπολογισμός γραμμικής ανεξαρτησίας}:$$
$$\lambda1\cdot(1,0,-2)+\lambda2\cdot(0,1,-1)=0\Rightarrow(\lambda1,0,-2\lambda1)+(0,\lambda2,-\lambda2)=0\Rightarrow\lambda1+0,0+\lambda2,-2\lambda1-\lambda2=0\Rightarrow$$
$$\lambda1,\lambda2,-2\lambda1-\lambda2=0$$
$$\textit{άρα}: \lambda1=0 \textit{ και } \lambda2=0$$

$$\textit{μια βάση για την διπλή ιδιοτιμη } \lambda=0 \textit{ είναι}:$$
$$\boxed{\{(1,0,-2),(0,1,-1)\} \textit{ και } \dim=2}$$

Ως προς την απλή ιδιοτιμή λ=3

$$(\mathrm{A}-\lambda \cdot I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1\\0&-3\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}-1x+1y+1z=0\\0x+-3y+0z=0\\2x+1y+-2z=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}-x+y+z=0\\-3y=0\\2x+y-2z=0\end{matrix}\right\}$$

$$\frac{-3y}{-3}=\frac{0}{-3}\Rightarrow\boxed{y=0}$$

$$-x+0+z=0\Rightarrow -x+z=0\Rightarrow -x=-z\Rightarrow\frac{-1x}{-1}=\frac{-1z}{-1}\Rightarrow\boxed{x=z}$$

$$\cancel{2z}+0\cancel{-2z}=0\Rightarrow\boxed{0=0}$$

$\varepsilon\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma:$

$(x,y,z)=(z,0,z)=z\cdot(1,0,1)=(1,0,1)$

δεν χρειάζεται γραμμική ανεξαρτησία διότι είναι μια και μοναδική βάση

άρα : *μια βάση για την απλή ιδιοτιμή* $\lambda=3$

$\{(1,0,1)\}$ *με το* $z\in R$, *και* $\dim=1$

Υπό-ερώτημα γ)

Βάση του τυπολογίου και της διδακτέας ύλης για να είναι διαγωνοποιήσιμος ένα πίνακας πρέπει να εξεταστεί σε κάποιες συνθήκες. Στην συγκεκριμένη περίπτωση για την διπλή ιδιοτιμή λ=0 και την απλή ιδιοτιμή λ=3 η αλγεβρική πολλαπλότητα ισούται με τη γεωμετρική πολλαπλότητα:

λ=0 διπλή λύση ισούται με δύο γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοτιμές = αλγεβρική πολλαπλότητα = γεωμετρική πολλαπλότητα = 2

λ=3 μονύ λύση ισούται με μια γραμμικά ανεξάρτητη ιδιοτιμή = αλγεβρική πολλαπλότητα = γεωμετρική πολλαπλότητα =1

άρα είναι διαγωνοποιήσιμος

Λύση της 3ης άσκησης
Υπό-ερώτημα α)

Για να βρεθεί το $V^{\perp}$ πρέπει πρώτα να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου V και να αποδειχτεί γραμμική ανεξαρτησία και έπειτα θα υπολογίσω $V \cdot V^{\perp}=0$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&-2&2\\3&7&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{array}{c}1x+2y+2z+1w=0\Rightarrow x+2y+2z+w=0\\0x+1y-2z+2w=0\Rightarrow y-2z+2w=0\\3x+7y+4z+5w=0\Rightarrow 3x+7y+4z+5w=0\end{array}$$

επειδή αποτελεί σύνθετη συνάρτηση θα επιλέξω τη μέθοδο Gauss για την απλοποίησή της

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&1&-2&2&0\\3&7&4&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R3\Rightarrow-3\cdot R1+R3}\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&1&-2&2&0\\0&1&-2&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R3\Rightarrow-1\cdot R2+R3}\begin{pmatrix}1&2&2&1&0\\0&1&-2&2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Η *απλοποίηση κλιμακωτής μορφής ολοκληρώθηκε σε αυτό το σημείο*:

$$\left.\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&-2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\begin{array}{c}1x+2y+2z+1w=0\Rightarrow x+2y+2z+w=0\Rightarrow\\0x+1y-2z+2w=0\Rightarrow y-2z+2w=0\Rightarrow \boxed{y=2z-2w}\,\Theta=\\0x+0y+0z+0w=0\Rightarrow\boxed{0=0}\end{array}$$

Θα γίνει αντικατάσταση και θα λύσω ως προς x:

$x=-2(2z-2w)-2z-w\Rightarrow x=-4z+4w-2z-w\Rightarrow\boxed{x=-6z+3w}$

με z και $w\in R$

Δημιουργία span γεννητόρων και αντικατάσταση πάνω στο x, y, z, w:

$(x,y,z,w)=(-6z+3w,2z-2w,z,w)=(-6z,2z,z,0)+(3w,-2w,0,w)=z\cdot(-6,2,1,0)+(3,-2,0,1)$ *με z και* $w\in R$

άρα: $V=span\{(-6,2,1,0),(3,-2,0,1)\}$

Τ*ελείωσα τη διαδικασία εύρεσης γεννοτόρων και εν συνεχεία γινεται έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας*

$\lambda1(-6,2,1,0)+\lambda2(3,-2,0,1)=0\Rightarrow(-6\lambda1,2\lambda1,\lambda1,0)+(3\lambda2,-2\lambda2,0,\lambda2)=0\Rightarrow-6\lambda1+3\lambda2,2\lambda1-2\lambda2,\lambda1,\lambda2=0\Rightarrow$

$-6\lambda1+3\lambda2=0$

$2\lambda1-2\lambda2=0$

$\lambda1=0$

$\lambda2=0$

άρα $\boxed{\lambda1=0}$ *και* $\boxed{\lambda2=0}$

Μ*ια βάση του V είναι* $V=\{(-6,2,1,0),(3,-2,0,1)\}$ *και διάσταση* $\dim=2$

$V1=(-6,2,1,0)$

$V2=(3,-2,0,1)$

$V\cdot V^{\perp}=V\cdot V1=0\Rightarrow(x,y,z,w)\cdot(-6,2,1,0)=0\Rightarrow-6x+2y+z=0$ *με το* $(x,y,z,w)\in R$

$V\cdot V^{\perp}=V\cdot V2=0\Rightarrow(x,y,z,w)\cdot(3,-2,0,1)=0\Rightarrow 3x-2y+w=0$ *με το* $(x,y,z,w)\in R$

Για να βρεθεί μια βάση για το V⊥ θα απλοποιήσω την εξίσωση με τη μέθοδο Gauss και έπειτα θα γίνει και έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \Leftrightarrow R2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \Rightarrow 2\cdot R1+R2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha:$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$3x-2y+0z+1w=0 \Rightarrow 3x-2y+w=0$

$0x-2y+1z+2w=0 \Rightarrow -2y+z+2w=0$

Θα λύσω ως προς τις πιο απλοιμένες εξισώσεις, την πρώτη ως προς w και μετά θα γίνει αντικατάσταση

$3x-2y+w=0 \Rightarrow \boxed{w=-3x+2y}$

$-2y+z+2w=0 \Rightarrow -2y+z+2(-3x+2y)=0 \Rightarrow -2y+z-6x+4y=0 \Rightarrow 2y+z-6x=0 \Rightarrow z=\boxed{-2y+6x}$

Δημιουργία γεννήτορων:

$(x,y,z,w)=(x,y,-2y+6x,-3x+2y)=x(x,0,6x,-3x)+y(0,y,-2y,2y) \Rightarrow (1,0,6,-3),(0,1,-2,2)\ \mu\varepsilon\ x,y \in R$

$\acute{\alpha}\rho\alpha: V^{\perp}=span\{(1,0,6,-3),(0,1,-2,2)\}$

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας:

$\lambda1(1,0,6,-3)+\lambda2(0,1,-2,2)=0 \Rightarrow (\lambda1,0,6\lambda1,-3\lambda1)+(0,\lambda2,-2\lambda2+2\lambda2)=0 \Rightarrow \lambda1,\lambda2,6\lambda1-2\lambda2,-3\lambda1,2\lambda2=0$

$6\lambda1-2\lambda2=0 \Rightarrow 6\cdot0+2\cdot0=0$

$-3\lambda1+2\lambda2=0 \Rightarrow (-3)\cdot0+2\cdot0=0$

$\acute{\alpha}\rho\alpha\ \lambda1=0\ \kappa\alpha\iota\ \lambda2=0$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα*

$\boxed{\text{Μια βάση } V^{\perp}=\{(1,0,6,-3),(0,1,-2,2)\} \text{ και διάσταση } V^{\perp}=2}$

Υπό-ερώτημα β)
Για την εύρεση της ορθοκανονικής βάσης του $V^{\perp}$ θα πρέπει πρώτα να βρω μια βάση για το $V^{\perp}$ έπειτα να βρω την ορθογώνια βάση και τέλος την ορθοκανονική. Για την βάση $V^{\perp}$ θα πάρω το αποτέλεσμα της πράξης του προηγούμενου υπό-ερωτήματος. Για την ορθογώνια και ορθόκανονική βάση θα χρησιμοποιήσω τη μέθοδο Grand-Schmidt του τυπολογίου και της διδακτέας ύλης.

$V^{\perp}$={(1,0,6,-3),(0,1,-2,2)}, ξ1=

$V^{\perp}=\{(1,0,6,-3),(0,1,-2,2)\}, \mu\varepsilon\, \xi 1=(1,0,6,-3)\, \kappa\alpha\iota\, \xi 2=(0,1,-2,2)$

$\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\, \tau\upsilon\pi o\lambda o\gamma\acute{\iota}o\upsilon\, \kappa\alpha\iota\, \mu\varepsilon\theta\acute{o}\delta o\upsilon\, Grand-Schmidt$

$n1=\xi 1\, \kappa\alpha\iota\, n2=\xi 2-\frac{\xi 2\cdot n1}{n1\cdot n1}\cdot n1, \acute{\alpha}\rho\alpha:$

$\boxed{n1=\xi 1=(1,0,6,-3)}$

$$n2=\xi 2-\frac{\xi 2\cdot n1}{n1\cdot n1}\cdot n1=(0,1,-2,2)\frac{(0,1,-2,2)\cdot(1,0,6,-3)}{(1,0,6,-3)\cdot(1,0,6,-3)}\cdot(1,0,6,-3)=$$

$$(0,1,-2,2)-\frac{(0+0-12-6)}{1+0+36+9}\cdot(1,0,6,-3)=(0,1,-2,2)-\frac{-18}{46}\cdot(1,0,6,-3)=(0,1,-2,2)+\frac{18}{46}\cdot(1,0,6,-3)=$$

$$(0,1,-2,2)+(\frac{18}{46}\cdot 1,\frac{18}{46}\cdot 0,\frac{18}{46}\cdot 6,\frac{18}{46}\cdot(-3))=(0,1,-2,2)+(\frac{18}{46},0,\frac{108}{46},\frac{-54}{46}\cdot)=(0+\frac{18}{46},1+0,-2+\frac{108}{46},2-\frac{54}{46})=$$

$$(0+\frac{18}{46},1+0,\frac{-2}{1}+\frac{108}{46},\frac{2}{1}-\frac{54}{46}\cdot)\Rightarrow \text{ΕΚΠ}(1,46)=46\Rightarrow(\frac{18}{46},1,\frac{-92}{46}+\frac{108}{46},\frac{92}{46}-\frac{54}{46})=(\frac{18}{46},1,\frac{16}{46},\frac{38}{46})=$$

$$(\frac{9}{23},1,\frac{8}{23},\frac{19}{23})\Rightarrow\boxed{n2=\xi 2=(\frac{9}{23},1,\frac{8}{23},\frac{19}{23})}$$

$$\boxed{o\rho\theta o\gamma\acute{\omega}\nu\iota\alpha\ \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\, V^{\perp}=\{(1,0,6,-3),(\frac{9}{23},1,\frac{8}{23},\frac{19}{23})\}\ \mu\varepsilon\, n1=(1,0,6,-3)\, \kappa\alpha\iota\, n2=(\frac{9}{23},1,\frac{8}{23},\frac{19}{23})}$$

Υπολογισμός ορθόκανονικής βάση με τη μέθοδο του τυπολογίου Grand-Schmidt $u1=\dfrac{n1}{\|n2\|}$

$$u1=\frac{n1}{\|n1\|}=\frac{(1,0,6,-3)}{\sqrt{1^2+0^2+6^2+(-3)^2}}=\frac{1,0,6,-3}{\sqrt{1+0+36+9}}=\frac{1,0,6,-3}{\sqrt{46}}=\left(\frac{1}{\sqrt{46}},\frac{0}{\sqrt{46}},\frac{6}{\sqrt{46}},\frac{-3}{\sqrt{46}}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{46}}\cdot\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{46}}\cdot,\frac{0}{\sqrt{46}}\cdot\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{46}},\frac{6}{\sqrt{46}}\cdot\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{46}},\frac{-3}{\sqrt{46}}\cdot\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{46}}\right)=\left(\frac{\sqrt{46}}{46},0,\frac{6\sqrt{46}}{46},\frac{-3\sqrt{46}}{46}\right)$$

$$u2=\frac{n2}{\|n2\|}=\left(\frac{\frac{9}{23},1,\frac{8}{23},\frac{19}{23}}{\sqrt{\left(\frac{9}{23}\right)^2+1^2+\left(\frac{8}{23}\right)^2+\left(\frac{19}{23}\right)^2}}\right)=\left(\frac{\frac{9}{23},1,\frac{8}{23},\frac{19}{23}}{\sqrt{\frac{81+529+64+361}{23^2}}}\right)=\left(\frac{\frac{9}{23},1,\frac{8}{23},\frac{19}{23}}{\sqrt{\frac{1035}{23^2}}}\right)=$$

$$\left(\frac{\frac{9}{23},1,\frac{8}{23},\frac{19}{23}}{\frac{\sqrt{1035}}{23}}\right)=\left(\frac{\frac{9}{23}}{\frac{\sqrt{1035}}{23}},\frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{1035}}{23}},\frac{\frac{8}{23}}{\frac{\sqrt{1035}}{23}},\frac{\frac{19}{23}}{\frac{\sqrt{1035}}{23}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha:$

$$\boxed{u1=\left(\frac{\sqrt{46}}{46},0,\frac{6\sqrt{46}}{46},\frac{-3\sqrt{46}}{46}\right)}$$

$$\boxed{u2=\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)}$$

Υπό-ερώτημα γ)

Για την ορθή προβολή θα χρησιμοποιήσω τον τύπο του τυπολογίου $p=\sum_{y=1}^{k}\frac{x\cdot y1}{y1\cdot y1}\cdot y1$ επίσης από το προηγούμενο υποερώτημα θα χρησιμοποιήσω το αποτέλεσμα u1 και u2

$$p=\frac{u\cdot u1}{u1\cdot u1}\cdot u1+\frac{u\cdot u2}{u2\cdot u2}\cdot u2=\frac{(a,b,c,d)\cdot\left(\frac{\sqrt{46}}{46},0,\frac{6\sqrt{46}}{46},\frac{-3\sqrt{46}}{46}\right)}{\left(\frac{\sqrt{46}}{46},0,\frac{6\sqrt{46}}{46},\frac{-3\sqrt{46}}{46}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{46}}{46},0,\frac{6\sqrt{46}}{46},\frac{-3\sqrt{46}}{46}\right)}\cdot\left(\frac{\sqrt{46}}{46},0,\frac{6\sqrt{46}}{46},\frac{-3\sqrt{46}}{46}\right)+$$

$$\frac{(a,b,c,d)\cdot\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)}{\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)}\cdot\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)=$$

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{46}}{46}\cdot a+0\cdot b+\frac{6\sqrt{46}}{46}\cdot c-\frac{3\sqrt{46}}{46}\cdot d\right)}{\frac{46+0+36\cdot 46+9\cdot 46}{46^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{46}}{46},0,\frac{6\sqrt{46}}{46},\frac{-3\sqrt{46}}{46}\right)+\frac{\left(\frac{3\sqrt{115}}{115}\cdot a+\frac{\sqrt{115}}{15}\cdot b+\frac{8\sqrt{115}}{345}\cdot c+\frac{19\sqrt{115}}{345}\cdot d\right)}{\left(\frac{9\cdot 115}{115^2}+\frac{115}{15^2}+\frac{64\cdot 115}{345^2}+\frac{361\cdot 115}{345^2}\right)}\cdot$$

$$\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)\Rightarrow \text{ΕΚΠ}(15,115,345)=345\Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\sqrt{46}}{46}\cdot a+\frac{6\sqrt{46}}{46}\cdot c-\frac{3\sqrt{46}}{46}\cdot d}{1}\cdot\left(\frac{\sqrt{46}}{46},0,\frac{6\sqrt{46}}{46},\frac{-3\sqrt{46}}{46}\right)+\frac{\left(\frac{3\sqrt{115}}{115}\cdot a+\frac{\sqrt{115}}{15}\cdot b+\frac{8\sqrt{115}}{345}\cdot c+\frac{19\sqrt{115}}{345}\cdot d\right)}{1}\cdot$$

$$\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)=\frac{1}{46}\cdot\left(\sqrt{46}\cdot a+6\sqrt{46}\cdot c-3\sqrt{46}\cdot d\right)\cdot\frac{1}{46}\cdot\left(\sqrt{46},0,6\sqrt{46},-3\sqrt{46}\right)+$$

$$\left(\frac{3\sqrt{115}}{115}\cdot a+\frac{\sqrt{115}}{15}\cdot b+\frac{8\sqrt{115}}{345}\cdot c+\frac{19\sqrt{115}}{345}\cdot d\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{115}}{115},\frac{\sqrt{115}}{15},\frac{8\sqrt{115}}{345},\frac{19\sqrt{115}}{345}\right)=$$

επιμεριστηκή ιδιότητα :

$$\frac{1}{46^2}\cdot(46\cdot\alpha+6\cdot 46\cdot c-3\cdot 46\cdot d,0,6\cdot 46\cdot a+36\cdot 46\cdot c-18\cdot 46\cdot d,-3\cdot 46\cdot a-18\cdot 46\cdot c+9\cdot 46\cdot d)+$$

$$\frac{9\cdot 115}{115\cdot 115}\cdot a+\frac{3\cdot 115}{15\cdot 115}\cdot b+\frac{3\cdot 8\cdot 115}{115\cdot 345}\cdot c+\frac{3\cdot 19\cdot 115}{115\cdot 345}\cdot d,\frac{3\cdot 115}{15\cdot 115}\cdot a+\frac{115}{15\cdot 15}\cdot b+\frac{8\cdot 115}{15\cdot 345}\cdot c+\frac{19\cdot 115}{15\cdot 345}\cdot d,$$

$$\frac{3\cdot 8\cdot 115}{115\cdot 345}\cdot a+\frac{8\cdot 115}{15\cdot 345}\cdot b+\frac{8\cdot 8\cdot 115}{345\cdot 345}\cdot c+\frac{19\cdot 8\cdot 115}{345\cdot 345}\cdot d,\frac{19\cdot 3\cdot 115}{115\cdot 345}\cdot a+\frac{19\cdot 115}{15\cdot 345}\cdot b+\frac{19\cdot 8\cdot 115}{345\cdot 345}\cdot c+\frac{19\cdot 19\cdot 115}{345\cdot 345}\cdot d$$

$$p=\left(\frac{a+6c-3d}{46}+\frac{9a+8c+19d}{115}+\frac{b}{5},\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{8c+19d}{45},\frac{6a+36c-18d}{46}+\frac{8a}{115}+\frac{8b}{45}+\frac{64c+152d}{1035},\right.$$
$$\left.\frac{-3a-18c+9d}{46}+\frac{16a}{115}+\frac{19b}{45}+\frac{152c+361d}{1035}\right)$$

Υπό-ερώτημα δ)

Επειδή το διάνυσμα V είναι ⊥ με το διάνυσμα W δηλαδή $V \perp W \Rightarrow V \cdot W = 0$
Θα χρησιμοποιήσω τον τύπο του τυπολογίου:
$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \|V+W\|^2 = (V+W)\cdot(V+W) = V \cdot V + V \cdot W + W \cdot V + W \cdot W = V^2 + 2\,\cancel{(V \cdot W)} + W^2 = \|V\|^2 + 2 \cdot 0 + \|W\|^2 =$
$\|V\|^2 + 0 + \|W\|^2 = \|V\|^2 + \|W\|^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

$\|V+W\|^2 = 169$

$\acute{\alpha}\rho\alpha : \boxed{\|V+W\| = \sqrt{169} = 13}$

Λύση της 4ης άσκησης
Υπό-ερώτημα α) i)

Για να είναι γραμμική η πρέπει να ισχύουν δύο καταστάσεις η απεικόνιση T:V→W διανυσματικοί χώροι V και W

$$x=(x,y,z)\in R^3\ και\ y=(x,y,z)\in R^3\ τότε:$$
$$T(x+y)=T(x)+T(y)$$
$$και$$
$$T(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot \mathrm{T}(\chi)\ με\ το\ \lambda\in R$$

$$f(x+y)=f(x1+x2,y1+y2,z1+z2)\ όπου\ x=(x1+x2)\ και\ y=(y1+y2)\ και\ z=(z1+z2)=$$

$$Θα\ γίνει\ αντικατάσταση\ το\ z\ με\ τον\ τύπο\ της\ εκφώνησης:$$
$$(x1+x2+y1+y2-(z1-z2),2(x1+x2)-(z1+z2),x1+x2-(y1+y2),5(x1+x2)+3(y1+y2)-4(z1+z2))=$$
$$(x1+x2+y1+y2-z1-z2,2x1+2x2-z1-z2,x1+x2-y1-y2,5x1+5x2+3y1+3y2-4z1-4z2)=$$
$$f(x1,y1,z1)=(x1+y1-z1,2x1-z1,z1-y1,5x1+3y1-4z1)$$
$$f(xx2,y2,z2)=(x2+y2-z2,2x2-z2,x2-y2,5x2+3y2-4z2)$$

$$άρα\ ισχύει\ ότι:$$
$$f(x+y)=f(x)+f(y)\ δηλαδή\ f(x1)+f(y1)$$

$$\mathrm{H}\ σχέση:$$
$$f(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot f(x)\ με\ το\ \lambda\in\mathbb{R}$$
$$\lambda\cdot\chi=\lambda\cdot(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=$$
$$(\lambda x+\lambda y+\lambda z,2\cdot\lambda x-\lambda z,\lambda x-\lambda y,5\lambda x+3\lambda y-4\lambda z)=$$

$$κοινός\ παράγοντας\ το\ \lambda:$$
$$\lambda(x+y+z,2x-z,x-y,5x+3y-4z)=$$
$$άρα\ ισχύει\ ότι\ είναι\ \lambda\cdot f(x,y,z)=\lambda f(x)\ ισούται\ με\ f(\lambda\cdot x)$$

$$έλεγχος\ μηδενικού\ στοιχείου:$$
$$f(x,y,z)=(0,0,0)=(0+0-0,2\cdot 0-0,0-0,5\cdot 0+3\cdot 0-4\cdot 0)=(0,0,0,0)$$

$$\boxed{άρα: η\ απεικόνιση\ είναι\ γραμμική}$$

Υπό-ερώτημα α) ii)

Για να βρω τον πυρήνα θα πάρω τον τύπο συνάρτηση F της εκφώνησης ίσον με το μηδέν και το σύστημα θα το λύσω η με Gauss ή με απλό σύστημα ανάλογα τη δυσκολία του και έπειτα το span που θα δημιουργηθεί ως αποτέλεσμα θα αποδείξω γραμμική ναεξαρτησία ώστε να δημιουργηθεί μια βάση για τον F και η διάστασή του.

$$F\left(x,y,z\right)=0 \Rightarrow (x+y-z,2x-z,x-y,5x+3y-4z)=0 \Rightarrow$$

$$x+y-z=0 \Rightarrow y+y-2y=0 \Rightarrow \boxed{0=0}$$
$$2x-z=0 \Rightarrow -z=-2y \Rightarrow \boxed{z=2y}$$
$$x-y=0 \Rightarrow \boxed{x=y}$$
$$5x+3y-4z=0 \Rightarrow 5y+3y-4\cdot 2y=0 \Rightarrow 8y-8y=0 \Rightarrow \boxed{0=0}$$

$$x=y\, και\, z=2y\, με\, x,y\in R$$

$$\ker f=(x,y,z) \Rightarrow (y,y,2y) \Rightarrow y(1,1,2)\, άρα:$$
$$\ker f=span\{(1,1,2)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα μιας και αποτελεί μια και μοναδική βάση του πυρήνα kerf

διάσταση Kerf = 1

Για την εύρεση της εικόνας θα πάρω τον τύπο συνάρτηση της F της εκφώνησης και θα το λύσω ως προς την συνήθη βάση:

$$F\left(x,y,z\right)=\left(x+y-z,\ 2x-z,x-y,5x+3y-4z\right)$$
$$F(συνήθης\ βάση)=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$$
$$F(1,0,0)=(1+0-0,2\cdot 1-0,1-0,5\cdot 1+3\cdot 0-4\cdot 0)=(1,2,1,5)$$
$$F(0,1,0)=(0+1-0,2\cdot 0-0,0-1,5\cdot 0+3\cdot 1-4\cdot 0)=(1,0,-1,3)$$
$$F(0,0,1)=(0+0-1,2\cdot 0-1,0-0,5\cdot 0+3\cdot 0-4\cdot 1)=(-1,-1,0,-4)$$

$$Άρα\ \operatorname{Im} F=span\{(1,2,1,5),(1,0,-1,3),(-1,-1,0,-4)\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&5\\1&0&-1&3\\-1&-1&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[R3\Rightarrow 1\cdot R1+R2]{R2\Rightarrow -1\cdot R1+R2}\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&-2&-2&-2\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R2\Rightarrow R3}\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&1&1&1\\0&-2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R3\Rightarrow 2\cdot R2+R3}\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$Η\ απλοποίηση\ μέσω\ κλιμακωτής\ μορφής\ με\ τη\ μέθοδο\ Gauss\ ολοκληρώθηκε$$

$$άρα:$$
$$Εικόνα(InF)=\left\{(1,2,1,5),(0,1,1,1)\right\}$$
$$διάσταση: \dim InF=2$$

Λύση της 5ης άσκησης