ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Αρχείο Εκφωνήσεων ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)
ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Ημερομηνία ανάρτησης:	**Παρασκευή 6 Μαρτίου 2020**
Καταληκτική ημερομηνία υποβολής:	**Τετάρτη 8 Απριλίου 2020**
Ημερομηνία ανάρτησης ενδεικτικών λύσεων:	**Παρασκευή 10 Απριλίου 2020**

Πριν από την εκπόνηση της εργασίας και τη λύση των ασκήσεων συνιστάται η μελέτη των παραδειγμάτων και των λυμένων ασκήσεων στο αντίστοιχο σύγγραμμα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της **4ης** εργασίας αναφέρονται στα:
- **Ενότητα 3** (σειρές **(εν μέρει)**)
- **Ενότητα 8** (ανάπτυγμα Taylor)
- **Ενότητα 9** (το ολοκλήρωμα)
- **Ενότητα 10** (γενικευμένη ολοκλήρωση)
- **Ενότητα 11** (εφαρμογές των ολοκληρωμάτων)
- **Ενότητα 12** (σειρές Fourier)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης συνιστάται να μελετηθεί επίσης το εξής **βοηθητικό υλικό** στο study.eap.gr:
Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό : Λογισμός
- Σειρές **(εν μέρει)**
- Σειρές Taylor
- Ολοκληρώματα 1
- Ολοκληρώματα 2
- Σειρές Fourier

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να βοηθήσει στη μελέτη και κατανόηση των εξής εννοιών:
- Σειρές: κριτήριο λόγου, κριτήριο ρίζας, ανισοτικά και οριακά κριτήρια σύγκρισης σειρών.
- Πολυωνυμική προσέγγιση, αναπτύγματα Taylor, μέθοδοι εύρεσης σειρών Taylor και Maclaurin, σειρές Taylor βασικών συναρτήσεων, δυναμοσειρές, διάστημα σύγκλισης.
- Ολοκληρώματα: ορισμένο ολοκλήρωμα, γενικές ιδιότητες, αόριστο ολοκλήρωμα, βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης, Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού.
- Γενικευμένα ολοκληρώματα: είδη γενικευμένων ολοκληρωμάτων, κριτήρια σύγκλισης.
- Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων: εμβαδά χωρίων, όγκοι στερεών, μήκη επίπεδων καμπυλών, επιφάνειες και στερεά εκ περιστροφής.
- Σειρές Fourier: περιοδικότητα, υπολογισμός συντελεστών Fourier, σύγκλιση σειρών Fourier.

Άσκηση 1 (Μον. 20) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακόλουθες σειρές:

α) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$ β) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sin^2(n)}$ γ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+2n+2}{2n^3+3n+3}$

δ) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n^3}}$

Άσκηση 2 (Μον. 20)

α) (μον. 10) Να βρεθούν όλες οι τιμές της πραγματικής μεταβλητής x για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \sqrt{5n+4}} x^n .$$

β) (μον. 4) Να υπολογιστούν οι τρείς πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \tan(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

γ) (μον. 6) Δίνεται ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x=2$ και αποκλίνει για $x=-3$. Να αποδειχθεί ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x=1$ και αποκλίνει για $x=4$.

Άσκηση 3 (Μον. 20) Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int \sin(x)\cos(x)\cos(\cos(x))\, dx$

β) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2 - 1}\, dx$

γ) $\int \left(\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \arctan(x) \right) dx$

δ) $\int \frac{x+2}{x^3+x}\, dx$

ε) $\int_{-2}^{2} \frac{\sin(x^3)}{x^4+7x^2+29}\, dx$

<u>Υπόδειξη για το ε):</u> Δεν είναι καλή ιδέα να επιχειρηθεί ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος.

Άσκηση 4 (Μον. 20)

α) (μον. 4) Να υπολογιστεί το εμβαδό του κλειστού φραγμένου χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων με τύπους $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = x^4$.

<u>Υπόδειξη:</u> Βρείτε πρώτα τα σημεία τομής και τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f_1 και f_2.

β) (μον. 4) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$.

γ) (μον. 4) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{2-} \frac{x}{\sqrt{12-3x^2}}\, dx$.

δ) (μον. 8) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

i) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^5}\, dx$ ii) $\int_{3+}^{33} \frac{\ln(x)}{(x-3)^5}\, dx$.

Άσκηση 5 (Μον. 20)

α) (μον. 3) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^6}$ στο $(0, +\infty)$. Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της συνάρτησης ημιτόνου, να εκφραστεί η f ως δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο $x_0 = 0$.

β) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

- $f(x) = |\cos(x)|$, για κάθε $x \in [-\pi, \pi)$,
- $f(x + 2\pi) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) (μον. 12) Να υπολογιστεί η σειρά Fourier της f.

<u>Υπόδειξη για το i):</u> Ισχύει η ισότητα $\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

ii) (μον. 5) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier της f, να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.