Έντυπο Υποβολής ΓΕ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ12)

ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα "Υποβολή Εργασίας", καταχωρεί τις λύσεις των ασκήσεων στο **παρόν** αρχείο και το υποβάλλει ηλεκτρονικά στον ιστότοπο *study.eap.gr* έχοντας κρατήσει αντίγραφό του. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος παραλαμβάνει από εκεί την ΓΕ και, αφού παραθέσει τα σχόλια και συμπληρώσει την ενότητα "Αξιολόγηση Εργασίας", την υποβάλλει με τη σειρά του στο *study.eap.gr*. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος επίσης πρέπει να κρατήσει αντίγραφα της υποβληθείσας και της διορθωμένης ΓΕ όπως και αντίγραφο του σημειώματος του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.
Κατά την ηλεκτρονική υποβολή του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: για παράδειγμα, το όνομα του αρχείου για τη 1η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να είναι **ioannou_ge1_pli12.doc**.

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία επικοινωνίας φοιτητή (ονοματεπώνυμο, τηλέφωνο, ηλεκτρονική διεύθυνση)	ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΜΠΑΤΣΑΛΗΣ, 6943232609, std119181@ac.eap.gr

Θ.Ε.	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή-Συμβούλου	ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΣΤΑΥΡΟΣ
Τμήμα	ΗΛΕ43	**Καταληκτική ημερομηνία υποβολής** (*ημέρα Τετάρτη*)	13/11/2019, ώρα 23:59
Ακ. Έτος	2019-20	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	13/11/2019
Γ.Ε.	1	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	13/11/2019

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία (*αριθμητικώς, ολογράφως*)	

Υπογραφή **Υπογραφή**

Φοιτητή **Καθηγητή-Συμβούλου**

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Μην συμπεριλάβετε τις εκφωνήσεις των ασκήσεων.

<u>Λύση της 1ης άσκησης</u>
Ερώτημα α)
Υπό-ερώτημα i)

Ο πίνακας Α είναι ένας πίνακας 2x3 διαστάσεων και ο πίνακας Β είναι ένας πίνακας 3x3 διαστάσεων (γραμμή x στήλη). Όπου στις ιδιότητες των πράξεων των πινάκων για την πράξη του πολλαπλασιασμού ώστε να μπορέσει να γίνει η πράξη πρέπει: η στήλη του πίνακα Α να ισούται με τις γραμμές του πίνακα Β. Άρα $M_{2,3} = M_{3,3}$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot(-1+0\cdot 2 & 1\cdot 4+0\cdot 3 \\ (-1)\cdot 1+2\cdot 0 & (-1)\cdot(-1)+2\cdot 2 & (-1)\cdot 4+2\cdot 3 \\ 4\cdot 1+3\cdot 0 & 4\cdot(-1)+3\cdot 2 & 4\cdot 4+3\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+0 & -1+0 & 4+0 \\ -1+0 & 1+4 & -4+6 \\ 4+0 & -4+6 & 16+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

$$B + A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Για να ολοκληρωθεί μια πράξη πρόσθεσης βάση των ιδιοτήτων των πράξεων πινάκων πρέπει οι γραμμές και οι στήλες ενός πίνακα Α να έχουν τις ίδιες διαστάσεις με τον άλλον πίνακα Β. Στην προκειμένη περίπτωση ο Β είναι ένα πίνακας 3x3 και το αποτέλεσμα $A^T \cdot A$ μας επιστρέφει έναν πίνακα 3x3 άρα και είναι δυνατό να γίνει η πράξη της πρόσθεσης.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+2\cdot(-1)+(-2)\cdot 4 & 0\cdot 0+2\cdot 2+(-2)\cdot 3 \\ 2\cdot 1+(-5)\cdot(-1)+1\cdot 4 & 2\cdot 0+(-5)\cdot 2+1\cdot 3 \\ (-2)\cdot 1+1\cdot(-1)+(-25)\cdot 4 & (-2)\cdot 0+1\cdot 2+(-25)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0+(-2)+(-8) & 0+4+(-6) \\ 2+5+4 & 0+(-10)+3 \\ (-2)+(-1)+(-100) & 0+2+(-75) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ 11 & -7 \\ -103 & -73 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -25 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 0+(-1)\cdot 2+4\cdot(-2) & 1\cdot 2+(-1)\cdot(-5)+4\cdot 1 & 1\cdot(-2)+(-1)\cdot 1+4\cdot(-25) \\ 0\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot(-2) & 0\cdot 2+2\cdot(-5)+3\cdot 1 & 0\cdot(-2)+2\cdot 1+3\cdot(-25) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0+(-2)+(-8) & 2+5+4 & (-2)+(-1)+(-100) \\ 0+4+(-6) & 0+(-10)+3 & 0+2+(-75) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 11 & -103 \\ -2 & -7 & -73 \end{pmatrix}$$

Βρήκαμε το $A \cdot B$ και κάνουμε αναστροφή το αποτέλεσμα:

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ 11 & -7 \\ -103 & -73 \end{pmatrix}$$

Άρα ισχύει πως $(A \cdot B)^T = B \cdot A^T$

Ερώτημα α)
Υπό-ερώτημα ii)

Πρώτα θα γίνει η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων $A^T \cdot A$ το αποτέλεσμα θα το πάρω από το προηγούμενο υπό-ερώτημα.

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

Έπειτα θα προσθέσω τον πίνακα B. Η πράξη θα πραγματοποιηθεί διότι ο πίνακας B και το αποτέλεσμα της πράξης των πινάκων $A^T \cdot A$ έχουν τις ίδιες γραμμές και τις ίδιες στήλες.

$$B + A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Για να αποδείξω ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός πρέπει ο πίνακας να είναι ίδιος με τον ανάστροφό του $A = A^T$

$$(B + A^T \cdot A)^T = B + A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας **<u>είναι</u>** συμμετρικός.

<u>Εξετάζεται αν ο πίνακας $B + A^T \cdot A$ είναι αντιστρέψιμος:</u>

$$\det(B + A^T \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) + 0 - 3(1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) =$$

$$-1(-6) + 0 - 3 \cdot (3-2) = -1 \cdot (-6) + 0 - 3 \cdot (1) = 6 + 0 - 3 = 6 - 3 = 3$$

Για να μπορέσει ένας πίνακας να είναι αντιστρέψιμος πρέπει και η ορίζουσα του να είναι $\neq 0$

Άρα: $\det(B + A^T \cdot A) = 3$ είναι $\neq 0$ τότε ο πίνακας **είναι** αντιστρέψιμος

Ερώτημα α)
Υπό-ερώτημα iii)

Από την απάντηση του προηγούμενου υπό-ερωτήματος παίρνω το αποτέλεσμα της πράξης $B+A^T \cdot A$

$$B+A^T \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$tr[5(B+A^T \cdot A)]=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 15 \\ 10 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

tr=ίχνος δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγώνιου

Άρα:
$tr[5(B+A^T \cdot A)] = 5(1+0+0) = 5 \cdot 1 = 5$

Για να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $2(B+A^T \cdot A)^{-1}$ θα πάρω από την απάντηση του προηγούμενου υπό-ερωτήματος τα αποτελέσματα των πράξεων $B+A^T \cdot A$ και $\det(B+A^T \cdot A)=3$

Επίσης από το τυπολόγιο γνωρίζουμε την ιδιότητα $(B+A^T \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{(B+A^T A)}$

Θα υπολογίσω την άσκηση με δύο τρόπους

1ος τρόπος:
Θα χρησιμοποιήσω την ιδιότητα που βρίσκεται στο τυπολόγιο $\det(\lambda \cdot A)=\lambda^n \cdot \det(A)$ όπου για κάθε n είναι η διάσταση του πίνακα $B+A^T \cdot A$ που είναι $M_{3,3}(\mathbb{R})$

$\det[2(B+A^T \cdot A)^{-1}] = 2^3 \cdot \det(B+A^T \cdot A)^{-1} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{det(B+A^T A)} = 2^3 \cdot \dfrac{1}{2} = 8 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{1} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$

Άρα: $\det[2(B+A^T \cdot A)^{-1}] = \dfrac{8}{3}$

2ος τρόπος:

Θα χρησιμοποιήσω τον τύπο $\dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$, αφού πρώτα υπολογίσω το $adj(B+A^T \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Θα μετονομάσω τις θέσεις του πίνακα ώστε να μπορέσω να υπολογίσω τις πράξεις adj(i,j) όπ[ου για i=γραμμή και j=στήλη.

Άρα: $adj(B+A^T \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} adj_{(1,1)} & adj_{(1,2)} & adj_{(1,3)} \\ adj_{(2,1)} & adj_{(2,2)} & adj_{(2,3)} \\ adj_{(3,1)} & adj_{(3,2)} & adj_{(3,3)} \end{pmatrix}^T$

$adj(1,1) = +|0\cdot 0 - 3\cdot 3| = +|0-9| = -9$

$adj(1,2) = -|1\cdot 0 - 2\cdot 3| = -|0-6| = 6$

$adj(1,3) = +|1\cdot 3 - 2\cdot 0| = +|3-0| = 3$

$adj(2,1) = -|1\cdot 0 - 2\cdot 3| = -|0-6| = 6$

$adj(2,2) = +|1\cdot 0 - 2\cdot 2| = +|0-4| = -4$

$adj(2,3) = -|1\cdot 3 - 2\cdot 1| = -|3-2| = -1$

$adj(3,1) = +|1\cdot 3 - 2\cdot 1| = +|3-0| = 3$

$adj(3,2) = -|1\cdot 3 - 2\cdot 1| = -|3-2| = -1$

$adj(3,3) = +|1\cdot 0 - 1\cdot 1| = +|0-1| = -1$

Έπειτα από την τοποθέτηση των αποτελεσμάτων στις συντεταγμένες του πίνακα που δημιούργησα πήρα το εξής αποτέλεσμα:

$$\text{adj}(\text{B}+\text{A}^{\text{T}}\cdot \text{A}) = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{\text{T}} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

παρατήρηση ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός.

Τώρα μπορώ να υπολογίσω βάση με τον τύπο $\frac{1}{\det(A)}\cdot adj(A)$

$$(\text{B}+\text{A}^{\text{T}}\cdot \text{A})^{-1} = \frac{1}{\det(\text{B}+\text{A}^{\text{T}}\text{A})}\cdot adj(\text{B}+\text{A}^{\text{T}}\text{A}) = \frac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot(-9) & \frac{1}{3}\cdot 6 & \frac{1}{3}\cdot 3 \\ \frac{1}{3}\cdot 6 & \frac{1}{3}\cdot(-4) & \frac{1}{3}\cdot(-1) \\ \frac{1}{3}\cdot 3 & \frac{1}{3}\cdot 1 & \frac{1}{3}\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Έπειτα από το αποτέλεσμα $(\text{B}+\text{A}^{\text{T}}\cdot \text{A})^{-1}$ θα υπολογίσω το

$$2(\text{B}+\text{A}^{\text{T}}\cdot \text{A})^{-1} = 2\cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 4 & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ερώτημα β)
Υπό-ερώτημα i)

Για να υπολογιστεί ο πίνακας C^3-2C^2-C+2I , θα εκτελέσω χωριστά της εξής πράξεις πινάκων: C^3, C^2 , $2C^2$, $2I$, άρα:

$$C^2 = C\cdot C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot1\\ 1\cdot1+0\cdot1+(-1)\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot(-1)(-1)\cdot1\\ 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot(-1)+1\cdot1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1+1+1 & 1+0+0 & 1+(-1)+1\\ 1+0+(-1) & 1+0+0 & 1+0+(-1)\\ 1+0+1 & 1+0+0 & 1+0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 3\cdot1+1\cdot0+1\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot+ & 0\cdot1+1\cdot(-1)+0\cdot1\\ 2\cdot1+1\cdot1+2\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot0+2\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}3+1+1 & 3+0+0 & 3+(-1)+1\\ 0+1+0 & 0+0+0 & 0+(-1)+0\\ 2+1+2 & 2+0+0 & 2+(-1)+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 3 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$2C^2=2\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot3 & 2\cdot1 & 2\cdot1\\ 2\cdot0 & 2\cdot1 & 2\cdot0\\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

I = με μοναδιαίο πίνακα που η κύρια διαγώνιος είναι 1 και όλα τα υπόλοιπα άνω και κάτω της κυρίας διαγώνιου είναι 0

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$2\cdot I=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot1 & 2\cdot0 & 2\cdot0\\ 2\cdot0 & 2\cdot1 & 2\cdot0\\ 2\cdot0 & 2\cdot0 & 2\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$C^3-2C^2-C+2I=\begin{pmatrix}5 & 3 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}5-6 & 3-2 & 3-2\\ 1-0 & 0-2 & -1-0\\ 5-4 & 2-2 & 3-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-1 & 1-1 & 1-1\\ 1-1 & -2-0 & (-1)-(-1)\\ 1-1 & 0-0 & -1-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & -2+2 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα C^3-$2C^2$-C+2I = 0 να ανήκει M3,3 ($\mathbb{R}$)

Ερώτημα β)
Υπό-ερώτημα ii)

Για να αποδειχτεί πως ο C είναι αντιστρέψιμος τότε θα πρέπει να det(c) να είναι ≠ 0

$$\det(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\left|\cdot(-1) - 1\cdot 0\right| - 0\left|1\cdot(-1) - 1\cdot 1\right| + 1\left|1\cdot 0 - 1\cdot 1\right| = +1\cdot(-1-0) - 0 + 1\cdot(0-1) =$$

$$1(-1) - 0 + 1\cdot(-1) = (-1) + (-1) = -2$$

det(c) = -2 είναι ≠ 0 Άρα είναι αντιστρέψιμος

Για να υπολογιστεί ο αντίστροφος πίνακας C^{-1} θα χρησιμοποιήσω τον τύπο $C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot adj(C)$ και για την επίλυση του τύπου πρέπει να βρω το adj(C) όπου και θα πρέπει να υπολογίσω τα αλγεβρικά συμπληρώματα του πίνακα C adj(i,j) όπου i=γραμμή και j=στήλη

$$adj(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} adj(1,1) & adj(1,2) & adj(1,3) \\ adj(2,1) & adj(2,2) & adj(2,3) \\ adj(3,1) & adj(3,2) & adj(3,3) \end{pmatrix}^T$$

$$adj(1,1) = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +0\cdot 1 - (-1)\cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

$$adj(1,2) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1\cdot 1) - 1\cdot(-1) = -1 - (-1) = -2$$

$$adj(1,3) = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +1\cdot 0 - 1\cdot 0 = 0$$

$$adj(2,1) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1\cdot 1) - (1\cdot 0) = -1 - 0 = -1$$

$$adj(2,2) = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1\cdot 1) - (1\cdot 1) = 1 - 1 = 0$$

$$adj(2,3) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1\cdot 0) - (1\cdot 1) = -(0-1) = -(-1) = 1$$

$$adj(3,1) = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +1\cdot(-1) - 0\cdot 1 = -1 - 0 = -1$$

$$adj(3,2) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1) - (1\cdot 1) = -(-1-1) = -(-1) = 2$$

$$adj(3,3) = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +(1\cdot 0) - (1\cdot 1) = 0 - 1 = -1$$

$$adj(C) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot adj(C) = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}\cdot 0 & \frac{-1}{2}\cdot -1 & \frac{-1}{2}\cdot -1 \\ \frac{-1}{2}\cdot -2 & \frac{-1}{2}\cdot 0 & \frac{-1}{2}\cdot 2 \\ \frac{-1}{2}\cdot 0 & \frac{-1}{2}\cdot 1 & \frac{-1}{2}\cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Άρα $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

<u>Λύση της 2ης άσκησης</u>
Ερώτημα α)

$$A = adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} adjA(1,1) & adjA(1,2) & adjA(1,3) \\ adjA(2,1) & adjA(2,2) & adjA(2,3) \\ adjA(3,1) & adjA(3,2) & adjA(2,3) \end{pmatrix}^T$$

$$adjA(1,1) = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = +(-1\cdot 13) - 1\cdot 0 = -13 - 0 = -13$$

$$adjA(1,2) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = -(0\cdot 13) - (1\cdot 2) = -(0-2) = 2$$

$$adjA(1,3) = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +0 - (-1)\cdot 2 = 0 - (-2) = 0 + 2 = 2$$

$$adjA(2,1) = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = -(2\cdot 13) - (4\cdot 0) = -26 - 0 = -26$$

$$adjA(2,2) = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = +1\cdot 13 - 4\cdot 2 = 13 - 8 = 5$$

$$adjA(2,3) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(1\cdot 0) - (2\cdot 2) = -(0-4) = -(-4) = 4$$

$$adjA(3,1) = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +\ (2\cdot 1) - [4\cdot(-1)] = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6$$

$$adjA(3,2) = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1\cdot 1) - (4\cdot 0) = -1 - 0 = -1$$

$$adjA(3,3) = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +1\cdot(-1) - 0\cdot 2 = -1 - 0 = -1$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha:$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 13 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -13 & -26 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ερώτημα β)

Θα ξεκινήσω την απαλοιφή του πίνακα με τον αλγόριθμο Gauss:

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&0&3&1&1\\1&0&8&3&2\\3&0&6&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to-3R_1+R4]{R_3\to-1R_1+R_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&0&3&1&1\\0&0&9&3&3\\0&0&9&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to-3R_2+R_4]{R_3\to-3R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&0&3&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Σε αυτό το σημείο η κλιμακωτή μας μορφή ολοκληρώθηκε. Για την ανοιγμένη κλιμακωτή ο πρώτος κανόνας αναφέρει ότι οι μη μηδενικές γραμμές να είναι πάνω από τις μηδενικές γραμμές ισχύει.
Επιπλέον για την ανοιγμένη κλιμακωτή θα συνεχίσω με τον αλγόριθμο Gauss όπου και θα γίνουν πράξεις για να επιτευχθεί πως ο πρώτος αριθμός της μη μηδενικής γραμμής να είναι το 1 και αντιστοίχως τα υπόλοιπα της στήλης να είναι 0

Επομένως:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&0&3&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{2}\cdot R2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to1\cdot R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-1\\0&0&3&1&1\\1&0&8&3&2\\3&0&6&3&0\end{pmatrix}=\mathrm{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&0&0&0\\-1&3&8&6\\0&1&3&3\\-1&1&2&0\end{pmatrix}$$

$$spanB^{T}=\{(1,0,1,3),(0,0,0,0),(-1,3,8,6),(0,1,3,3),(-1,1,2,0)\}$$

Επειδή οι γραμμές του B^{T} είναι $\mathrm{spanB}^{\mathrm{T}}$ δηλαδή γεννήτορες θα χρησιμοποιήσω τη μέθοδο απαλοιφής κλιμακωτής μορφής Gauss ώστε να βρω μια βάση.

$$\mathrm{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&0&0&0\\-1&3&8&6\\0&1&3&3\\-1&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5\to-1R_1+R_5]{R_3\to-1R_1+R_3}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&0&0&0\\0&3&9&9\\0&1&3&3\\0&1&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\to R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&3&3\\0&3&9&9\\0&1&3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to-1R_2+R_4]{R_3\to-3R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&3&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Άρα μια βάση B^{T} είναι οι μη μηδενικές γραμμές του πίνακα: B^{T}={(1,0,1,3),(0,1,3,3)}

Λύση της 3ης άσκησης
Ερώτημα α)

Θα λύσω τη γραμμική εξίσωση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss

(x,y,z,w)=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & -12 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -5R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -32 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{8}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε το απλοποιημένο αποτέλεσμα:

$$1x + 0y + -2z + 4w = 1 \Rightarrow x - 2z + 4w = 1$$
$$0x + 1y + 0z - 1w = 2 \Rightarrow y - 1w = 2$$
$$0x + 0x + 1z - 4w = 1 \Rightarrow z - 4w = 1$$

Λύνω ως προς y μιας και είναι η πιο απλοποιημένη:
y = 2+1w $\Rightarrow$ y = 2+w

Λύνω ως προς z:
z = 1+4w

Λύνω ως προς x:
x-2(1+4w)+4w=1 $\Rightarrow$ x-2-8w+4w=1 $\Rightarrow$ x=1+2+8w-4w $\Rightarrow$ x=3+4w

άρα:
x=3+4w
y=2+4w
z=1+4w

επομένως:

$$(x, y, z, w) \in R^4 = (3 + 4w, 2 + w, 1 + 4w, w) = (3, 2, 1, 0) + (4w, w, 4w, w) = (3, 2, 1, 0) + w(4, 1, 4, 1)$$

$\acute{o}\pi o\upsilon\, w \in \sigma\tau o\, R$

Ερώτημα β)

Θα λύσω τη γραμμική εξίσωση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss

$$(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&2&-1\\3&-2&2&8\\1&10&-10&80\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to -1R_1+R_4]{R_3\to -3R_1+R_3}\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&2&-1\\3&-8&8&8\\0&8&-8&80\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to 1R_3+R_4}\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&2&-1\\0&0&0&88\\0&8&-8&80\end{pmatrix}\xleftrightarrow{R_3\to R_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&2&-1\\0&8&-8&80\\0&0&0&88\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to -8R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&2&-1\\0&0&-8&88\\0&0&0&88\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to \frac{1}{8}R_4]{R_3\to \frac{1}{8}R_3}\begin{pmatrix}1&2&-2&0\\0&1&2&-1\\0&0&-1&11\\0&0&0&11\end{pmatrix}$$

επομένως :

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\11\\11\end{pmatrix}$$

Έχουμε το απλοποιημένο αποτέλεσμα:

$x+2y-2z=0$

$y+2z=-1$

$-1z=11$

$0=11$

Άρα (x,y,z) $\in$ R^3 είναι αδύνατο διότι x+10y-10z = 80 είναι 0 = 11

Ερώτημα γ)

Για την εύρεση τιμών της γραμμικής σταθεράς θα χρησιμοποιήσω τη μέθοδο απαλοιφής Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 3a+9 \\ 3 & 1 & -2 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -1R_1+R_3]{R_2 \to -1R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a+1 & 3a+9 \\ 0 & 1 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a+3 \\ 0 & 2 & a+1 & 3a+9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -2R_2+R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a+3 \\ 0 & 0 & a-1 & a+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+3 \\ a+3 \end{pmatrix}$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha$:

$1x+0y-1z=0 \qquad \Rightarrow x-z=0$

$0x+1y+1z=a+3 \qquad \Rightarrow y+z=a+3$

$0x+0y+(a-1)z=a+3 \quad \Rightarrow (a-1)z=a+3$

Αν α-1=0 τότε $0 \cdot$ z = 0 άρα θα είναι αδύνατο

Αν a-1 $\neq 0$ τότε α $\neq 1$

$$(\alpha-1)\cdot z = a+3 \Rightarrow \frac{\cancel{(\alpha-1)}}{\cancel{(\alpha-1)}} \cdot z = \frac{a+3}{a-1} \Rightarrow z = \frac{a+3}{a-1}$$

$\varepsilon\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma$:

$$x-z=0 \Rightarrow x-\frac{a+3}{a-1} \Rightarrow x=\frac{a+3}{a-1}$$

$$y+z=a+3 \Rightarrow y=-z+a+3=-\left(\frac{a+3}{a-1}\right)+a+3=\frac{-a-3}{a-1}+\frac{a+3}{1} \Rightarrow \frac{-a-3}{a-1}+\frac{(a-1)\cdot(a+3)}{a-1}=$$

$$\frac{-a-3+a^2+3a-a-3}{a-1}=\frac{a^2+a-6}{a-1} \Rightarrow y=\frac{a^2+a-6}{a-1}$$

$$z=\frac{a+3}{a-1}$$

Λύση της 4ης άσκησης
Ερώτημα β)
Υπό-ερώτημα i)

<u>Υπολογισμός μιας βάσης του V:</u>

$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}$

$x = y - z + w$

$\acute{\alpha}\rho\alpha : (x, y, z, w) = (y - z + w, y, z, w) = (y, y, 0, 0) + (-z, 0, z, 0) + (w, 0, 0, w) = (1,1,0,0) + (-1,0,1,0) + (1,0,0,1)$

$\acute{o}\pi o\upsilon\, x, y, z \in \mathbb{R}$

$\beta\rho\acute{\varepsilon}\theta\eta\kappa\alpha\nu\, o\iota\, \gamma\varepsilon\nu\nu\eta\tau\acute{o}\rho o\iota\, \kappa\alpha\iota\, \varepsilon\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma\, \theta\alpha\, \kappa\acute{\alpha}\nu\omega\, \acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\gamma\chi o\, \gamma\iota\alpha\, \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\eta}\, \alpha\nu\varepsilon\xi\alpha\rho\tau\eta\sigma\acute{\iota}\alpha :$

$\lambda 1 \cdot (1,1,0,0) + \lambda 2 \cdot (-1,0,1,0) + \lambda 3 \cdot (1,0,0,1) = 0 \Rightarrow$

$(\lambda 1, \lambda 1, 0, 0) + (-\lambda 2, 0, \lambda 2, 0) + (\lambda 3, 0, 0, \lambda 3) = 0 \Rightarrow$

$(\lambda 1 - \lambda 2 + \lambda 3, \lambda 1, \lambda 2, \lambda 3) = 0$

$\varepsilon\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma :$

$\lambda 1 = 0$

$\lambda 2 = 0$

$\lambda 3 = 0$

$\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\, \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\alpha}\, \alpha\nu\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\tau\alpha$

$\acute{\alpha}\rho\alpha\, \mu\acute{\iota}\alpha\, \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\, \tau o\upsilon\, V = \{(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1)\}$

<u>Υπολογισμός μιας βάσης του W:</u>

$w = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - 2z - w = 0\}$

$\acute{\alpha}\rho\alpha (x, y, z, w) = (x + 2y - 2z - w = 0) \Rightarrow x = -2y + 2z + w = (-2y, 0, 0) + (0, 2z, 0) + (0, 0, w) = (-2, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0,$

$\tau o\upsilon\, x, y, z \in \mathbb{R}$

$\beta\rho\acute{\varepsilon}\theta\eta\kappa\alpha\nu\, o\iota\, \gamma\varepsilon\nu\nu\eta\tau\acute{o}\rho o\iota\, \varepsilon\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma\, \theta\alpha\, \gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\, \acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\gamma\chi o\varsigma\, \gamma\iota\alpha\, \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\eta}\, \alpha\nu\varepsilon\xi\alpha\rho\tau\eta\sigma\acute{\iota}\alpha\, \theta\alpha\, \chi\rho\eta\sigma\iota\mu o\pi o\iota\acute{\eta}\sigma\omega\, \tau\alpha\, \lambda 1, \lambda 2,$

$\lambda 1(-2, 0, 0) + \lambda 2(0, 2, 0) + \lambda 3(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow$

$(-2\lambda 1, 0, 0) + (0, 2\lambda 2, 0) + (0, 0, \lambda 3) = 0 \Rightarrow$

$-2\lambda 1, 2\lambda 2, \lambda 3$

$\acute{\alpha}\rho\alpha :$

$\lambda 1 = 0$

$\lambda 2 = 0$

$\lambda 3 = 0$

$\mu\acute{\iota}\alpha\, \beta\acute{\alpha}\sigma\eta\, \tau o\upsilon\, w = \{(-2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)\}$

Ερώτημα β)
Υπό-ερώτημα ii)

Για την επίλυση της τομής $V \cap W$ θα γίνει επίλυση του συστήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss

$$(x,y,z,w)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to -1R_1+R_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha:$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$$

$$1x-1y+1z-1w=0 \Rightarrow x-y+z-w=0$$
$$0x+3y-3z+0z=0 \Rightarrow 3y-3z=0$$

$$3y=\frac{3z}{3}\Rightarrow \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}y=\frac{3z}{3}\Rightarrow y=z$$

$$x\cancel{-z}\cancel{+z}-w=0\Rightarrow x-w\Rightarrow x=w$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{\varepsilon}\varsigma\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota:$

$$(x,y,z,w)=(w,z,z,w)=(0,z,z,0)+(w,0,0,w)=z(0,1,1,0)+w(1,0,0,1)$$

$$V\cap W=span\{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$$

$\Theta\alpha\ \gamma\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\ \acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\gamma\chi o\varsigma\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\eta}\varsigma\ \alpha\nu\varepsilon\xi\alpha\rho\tau\eta\sigma\acute{\iota}\alpha\varsigma:$

$$\lambda 1\cdot(0,1,1,0)+\lambda 2(1,0,0,1)\Rightarrow(0,\lambda 1,\lambda 1,0)+(\lambda 2,0,0,\lambda 2)=(\lambda 2,\lambda 1,\lambda 1,\lambda 2)$$

$$\lambda 1=0$$
$$\lambda 2=0$$

$\mathrm{T}\alpha\ \lambda 1\ \kappa\alpha\iota\ \lambda 2\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\alpha}\ \alpha\nu\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\tau\alpha$

Επομένως dim $V\cap W$ **= 2**

Επειδή έχουμε βρει το αποτέλεσμα $V \cap W$ και τις διαστάσεις του V και W (dimV και DimW) θα επιλέξω την ιδιότητα του τυπολόγιου: $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Από προηγούμενο ερώτημα θα χρησιμοποιήσω τις διαστάσεις του υποχώρου V και W dimV=3, dimW=3 και της τομής $V \cap W$ =2

Άρα:

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) =$$

$$3+3-\dim(V \cap W) = 6-2 = 4$$

$$\Gamma\nu\omega\rho\acute{\iota}\zeta o\nu\tau\alpha\varsigma\ \acute{o}\tau\iota\ \tau o\ \mathbb{R}^4 = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$\dim(V+W) = 4$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\alpha\mu\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota : V+W = \mathbb{R}^4 = 4$$

Λύση της 5ης άσκησης
Ερώτημα α)

Γεννήτορες

$V = span\{(1,7,10),(2,3,-1),(7,60,91),(8,12,-4)\}$

Θα χρησιμοποιήσω την κλιμακωτή μέθοδο απαλοιφής Gauss για να βρω τη βάση του V

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 60 & 91 \\ 8 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to -8R_1 + R_4]{\substack{R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -7R_1 + R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -21 \\ 0 & 11 & 21 \\ 0 & -44 & -84 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to -4R_2 + R_4]{R_3 \to 1R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 0 & -11 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha\, V = span\{(1,7,10),(0,-11,-21)\}$