Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική – ΠΛΗ20

Ακαδημαϊκό Έτος 2020-2021

Ε ρ γ α σ ί α 2

Προτασιακή λογική

Σκοπός *της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω* ***εξοικείωση με τις σημαντικότερες μεθόδους και ιδέες της τυπικής λογικής.*** *Η εργασία πρέπει να γραφεί* ***ηλεκτρονικά*** *και να υποβληθεί μέσω του ηλεκτρονικού χώρου εκπαιδευτικής διαδικασίας* study.eap.gr *μέχρι την* **Τετάρτη, 23/12/2020**.

Οδηγίες προς τους φοιτητές:

1. *Προτού υποβάλετε οριστικά την εργασία σας, βεβαιωθείτε ότι έχετε συμπληρώσει το ειδικό έντυπο υποβολής στην πρώτη σελίδα του* ***συνοδευτικού αρχείου απαντήσεων****. Για να συμπληρώστε π.χ. το όνομα κάντε διπλό κλικ στο σκιασμένο πεδίο <Όνομα Φοιτητή> και στη φόρμα που θα εμφανιστεί, στη θέση του προεπιλεγμένου κειμένου, συμπληρώστε το όνομά σας. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για κάθε σκιασμένο πεδίο του πρώτου μέρους της σελίδας που αναφέρεται στην υποβολή της εργασίας.*
2. *Στο* ***συνοδευτικό αρχείο απαντήσεων*** *πρέπει να* ***προσθέσετε*** *τις απαντήσεις σας στο χώρο κάτω από το εκάστοτε ερώτημα εκεί όπου περιέχεται η φράση:*

   <Χώρος Απάντησης *(Ελεύθερος για διαμόρφωση από το φοιτητή)*>

   την οποία μπορείτε να σβήσετε. Μπορείτε να διαμορφώσετε το χώρο όπως επιθυμείτε, δεν υπάρχει περιορισμός στον χώρο που θα καταλάβει η απάντησή σας.
3. *Η εργασία περιλαμβάνει* **5** *βαθμολογούμενα ερωτήματα (1-5), στα οποία πρέπει να απαντήσετε εγκαίρως και όπως περιγράφεται παραπάνω.*
4. ***Υπενθυμίζεται επιπλέον ότι η σωστή και αποτελεσματική μελέτη απαιτεί οπωσδήποτε και την επίλυση και άλλων ασκήσεων από το βοηθητικό υλικό αλλά και από παλαιότερες εξετάσεις****. Σε αυτό μπορούν να σας βοηθήσουν και οι ακόλουθες ασκήσεις από αυτό το υλικό:*

   Προηγούμενες εργασίες: των τελευταίων ετών (2010-2020).

   Προηγούμενα θέματα τελικών εξετάσεων: Ας προηγηθούν στη μελέτη σας οι εξετάσεις των τελευταίων ετών (2010-2020).

Ε ρ ω τ ή μ α τ α

Ερώτημα 1. Σύνταξη προτασιακών τύπων και επαγωγή. (5 + 5 + 10 μονάδες)

Σκοπός του παρόντος ερωτήματος είναι να σας εξοικειώσει με τη «σύνταξη» των προτασιακών τύπων, την εκφραστικότητα της ΠΛ καθώς και με τη χρήση της επαγωγής στην πολυπλοκότητα των τύπων για την απόδειξη ισχυρισμών. Στο υποερώτημα **1.Α** *εξετάζεται η ικανότητα ορθής συντακτικής ανάλυσης προτασιακών τύπων και ταυτόχρονα η κατασκευή του αντίστοιχου δενδροδιαγράμματος, ενώ στο υποερώτημα* **1.Β** *η ικανότητα μετατροπής φράσεων της φυσικής γλώσσας σε τύπους της Προτασιακής Λογικής. Στο υποερώτημα* **1.Γ** *ζητείται η κατάστρωση μιας επαγωγικής απόδειξης στην πολυπλοκότητα των τύπων.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #1, #2, #3, #4, #6.

Α. Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις της ΠΛ είναι συντακτικά ορθοί προτασιακοί τύποι. Για αυτές που είναι προτασιακοί τύποι, να σχεδιαστεί το αντίστοιχο δενδροδιάγραμμα, ενώ για όσες δεν είναι να δοθεί μια σύντομη αιτιολόγηση.

i. $(\neg\neg p \leftrightarrow s) \to (q \land \neg(q \lor r))$
ii. $(p \lor r) \to (r \land s) \to (p \land t)$
iii. $\neg(p \lor r \to q) \to (r \to (\neg s \to p \land \neg t))$

Β. Θεωρώντας τις παρακάτω ερμηνείες για τις προτασιακές μεταβλητές p, q, r:

- p: «ο Γιάννης είναι πλούσιος»,
- q: «ο Γιάννης είναι σοφός»,
- r: «ο Γιάννης είναι υγιής»,

συνθέστε προτασιακούς τύπους που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις δηλώσεις της φυσικής γλώσσας που ακολουθούν:

i. Ο Γιάννης δεν είναι πλούσιος αλλά είναι υγιής και σοφός.
ii. Αν ο Γιάννης είναι υγιής και σοφός, τότε δεν είναι πλούσιος
iii. Ο Γιάννης είναι, είτε πλούσιος και σοφός, είτε υγιής και σοφός, αλλά όχι και τα δύο.
iv. Ο Γιάννης είναι πλούσιος αν και μόνο αν είναι υγιής και σοφός

Γ. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων, δείξτε ότι το πλήθος των διαφορετικών προτασιακών μεταβλητών σε ένα τύπο, είναι μικρότερο από ή ίσο με το πλήθος των συνδέσμων του, συν ένα.

Για παράδειγμα, στον τύπο του ερωτήματος 1.Α.i, το πλήθος των συνδέσμων είναι επτά, ενώ οι προτασιακές μεταβλητές είναι τέσσερις (συγκεκριμένα p, q, r, s).

Ερώτημα 2. Αποτιμήσεις, νόμοι της ΠΛ και κανονικές μορφές. (10 + 10 μονάδες)

Στο ερώτημα αυτό ασχολούμαστε με τις έννοιες της αποτίμησης προτασιακών τύπων, της Κανονικής Συζευκτικής Μορφής (ΚΣΜ) και της ταυτολογικής ισοδυναμίας με ταυτόχρονη εφαρμογή των νόμων της Προτασιακής Λογικής. Στο υποερώτημα **2.Α** *ζητείται η εύρεση της ΚΣΜ ενός δοσμένου τύπου, μέσω του πίνακα αληθείας του, προσαρμόζοντας κατάλληλα την αντίστοιχη γνωστή διαδικασία υπολογισμού της Κανονικής Διαζευκτικής μορφής. Στο υποερώτημα* **2.Β** *ζητείται μία ισοδύναμη ΚΣΜ του τύπου του ερωτήματος 2.Α, με την εφαρμογή κατάλληλων νόμων της Προτασιακής Λογικής με* *στόχο την εξοικείωση στη χρήση των τελευταίων στα πλαίσια της αποφυγής χρήσης μεγάλων πινάκων αληθείας, οι οποίοι είναι ιδιαίτερα δύσχρηστοι.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #7, #8, #9.

Ένας τύπος είναι σε **κανονική συζευκτική μορφή** (**ΚΣΜ**), αν είναι της μορφής $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, όπου τα φ_i, $i = 1,2, \ldots n$ ονομάζονται **φράσεις (clauses)** και είναι της μορφής $\theta_{i1} \vee \theta_{i2} \vee \ldots \theta_{im_i}$, και τα θ_{ij}, $j = 1,2, \ldots m_i$, είναι προτασιακές μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών που ονομάζονται **θετικά ή αρνητικά λεκτικά (literals)**, αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι για κάθε προτασιακό τύπος φ, υπάρχει τύπος φ^* σε ΚΣΜ, τέτοιος ώστε $\varphi \equiv \varphi^*$.

Α. Έστω ο τύπος $\varphi = p \to \big(q \leftrightarrow (r \to s)\big)$

i. Βρείτε τις αποτιμήσεις που καθιστούν τον φ ψευδή.

ii. Προσαρμόζοντας κατάλληλα τη διαδικασία εύρεσης ενός ισοδύναμου τύπου σε κανονική διαζευκτική μορφή, από τον πίνακα αληθείας ενός δοσμένου τύπου (βλέπε Θεώρημα 2.7, Παράδειγμα 2.10, Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης 2.8 & 2.9 και Πόρισμα 2.1, τόμος Γ), περιγράψτε μια αντίστοιχη μεθοδολογία για την εύρεση μιας ισοδύναμης κανονικής συζευκτικής μορφής ενός δοσμένου τύπου, από τον πίνακα αληθείας του.

iii. Εφαρμόστε τη μεθοδολογία που προτείνατε στο ερώτημα 2.Α.ii για την εύρεση μιας ισοδύναμης ΚΣΜ του τύπου φ.

Β. Βρείτε μια ισοδύναμη ΚΣΜ του τύπου φ του προηγούμενου ερωτήματος, μέσα από μια σειρά διαδοχικά ισοδύναμων τύπων, που προκύπτουν ο ένας από τον άλλον, με την εφαρμογή κατάλληλα επιλεγμένων νόμων της ΠΛ (βλέπε Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.6, τόμος Γ).

Ερώτημα 3. Τυπικές αποδείξεις (15 + 10 μονάδες)

Σε αυτό το ερώτημα εστιάζουμε στην συντακτική όψη του Προτασιακού Λογισμού – δηλαδή στις τυπικές αποδείξεις. Στο ερώτημα **3.Α** *ζητείται η κατασκευή μιας τυπικής απόδειξης με μοναδικά εργαλεία τα ΑΣ1-3, τον αποδεικτικό κανόνα ΜΡ και ένα γνωστό τυπικό θεώρημα, ενώ στο* **3.Β** *για το ίδιο ζητούμενο επιστρατεύουμε τα «μετα»-θεωρήματα Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής και Απαγωγής σε Άτοπο για τη ζητούμενη απόδειξη.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #5, #6, #10, #11, #12, #13, #14, #15.

Α. Να κατασκευαστεί η τυπική απόδειξη

$$\{\varphi \to \neg\chi, \neg\varphi \to \psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \chi \to \psi$$

Για το σκοπό αυτό, επιτρέπεται να χρησιμοποιηθούν μόνο τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-3, ο αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens και το τυπικό θεώρημα του ΠΛ, $(\varphi \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg\varphi)$ (βλέπε Άσκηση 2.11(β), Τόμος Γ).

Β. Να κατασκευαστεί η τυπική απόδειξη του ερωτήματος 3.Α, χρησιμοποιώντας και πάλι τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-3, τον αποδεικτικό κανόνας Modus Ponens και κάποιο ή κάποια από τα θεωρήματα Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής και Απαγωγής σε Άτοπο του ΠΛ (Θεωρήματα 2.8, 2.9 και 2.10, τόμος Γ). Η επίκληση οποιουδήποτε τυπικού θεωρήματος, δεν επιτρέπεται στο παρόν ερώτημα.

Ερώτημα 4. Αποδεικτικοί κανόνες και λογικές συνεπαγωγές (10 + 5 + 10 μονάδες)

Το ζητούμενο σε αυτό το ερώτημα είναι η εξοικείωση με τους αποδεικτικούς κανόνες που εφαρμόζονται σε κάθε βήμα μιας λογικής απόδειξης και ειδικότερα με την Αρχή της Ανάλυσης, μία διαδικασία που προσφέρεται για την αυτοματοποίηση εξαγωγής συμπερασμάτων στην προτασιακή λογική. Στο υποερώτημα **4.Α** *ζητείται να δειχθεί επαγωγικά η εγκυρότητα (soundness) των τυπικών αποδείξεων μέσω Ανάλυσης, δηλαδή να επιβεβαιωθεί ότι οι τυπικές αποδείξεις μέσω Ανάλυσης παράγουν τύπους που είναι ταυτολογικές συνέπειες του συνόλου υποθέσεων. Ως άμεση συνέπεια του αποτελέσματος του ερωτήματος 4.Α, στο ερώτημα* **4.Β**, *ζητείται να αποδειχθεί ότι οι αποδείξεις μέσω Ανάλυσης που οδηγούν σε αντίφαση προκύπτουν αναγκαστικά από ένα μη ικανοποιήσιμο σύνολο υποθέσεων. Τέλος, στο υποερώτημα* **4.Γ** *ζητείται η εφαρμογή του αποτελέσματος του ερωτήματος 4.Β, για να διαπιστωθεί ότι ένας τύπος είναι ταυτολογία.*

ΣΥΝΟΔΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ: #8, #16.

Η αρχή της **Ανάλυσης** (**Resolution**) είναι ο συντακτικός αποδεικτικός κανόνας,

$$\frac{p \vee \alpha, \neg p \vee \beta}{\alpha \vee \beta}$$

όπου p είναι μια προτασιακή μεταβλητή και οι α, β είναι **φράσεις** (**clauses**), δηλαδή διαζεύξεις **λεκτικών** (**literals**) (βλέπε ερώτημα 2). Σύμφωνα με την αρχή της ανάλυσης, αν δύο φράσεις περιέχουν δύο **συμπληρωματικά λεκτικά** $p, \neg p$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε μια νέα φράση η οποία αποτελείται από την διάζευξη όλων των υπόλοιπων λεκτικών των δύο αρχικών φράσεων, που ονομάζεται **επιλύουσα** (**resolvent**) τους. Για παράδειγμα, από τις φράσεις $p \vee \neg q \vee r$ και $\neg p \vee s \vee \neg t$, μπορούμε, εφαρμόζοντας την αρχή της Ανάλυσης, να συμπεράνουμε τη φράση $\neg q \vee r \vee s \vee \neg t$. Παρατηρήστε ότι ο κανόνας της Ανάλυσης, περιέχει ως ειδική περίπτωση τον κανόνα Modus Ponens, καθώς η εφαρμογή του μεταξύ των φράσεων p και $\neg p \vee q$ που είναι ισοδύναμη της $p \rightarrow q$, δίνει q. Τέλος, η εφαρμογή του κανόνα της Ανάλυσης στο συμπληρωματικό ζεύγος $p, \neg p$, οδηγεί σε **αντίφαση**, η οποία συμβολίζεται με $\perp$.
Δεδομένου ενός συνόλου φράσεων Γ, αν για κάθε φράση στην ακολουθία

1. a_1
2. α_2
   $\vdots$

n. a_n

είναι είτε $a_i \in \Gamma$ (οπότε σημειώνουμε «Υπόθεση»), είτε α_i είναι επιλύουσα δύο προηγούμενων φράσεων α_k, a_l της ακολουθίας (οπότε σημειώνουμε ως αιτιολογία εισαγωγής της α_i στην ακολουθία Res k, l), τότε γράφουμε $\Gamma \vdash_{Res} \alpha_n$ και λέμε ότι η α_n αποδεικνύεται μέσω Ανάλυσης από το σύνολο υποθέσεων Γ.

Α. Αποδείξτε ότι αν $\Gamma = \{\beta_1, \beta_2, \dots . \beta_k\}$ είναι ένα ικανοποιήσιμο σύνολο φράσεων και a μία φράση τέτοια ώστε $\Gamma \vdash_{Res} a$, τότε $\Gamma \vDash \alpha$.
Υπόδειξη: *Χρησιμοποιήστε επαγωγή στο μήκος (πλήθος των βημάτων) της απόδειξης* $\Gamma \vdash_{Res} \alpha$.

Β. Αποδείξτε ότι αν $\Gamma \vdash_{Res} \perp$, τότε το σύνολο Γ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Γ. Βάσει των παραπάνω, δεδομένου ενός τύπου φ, δείξτε ότι αν για τις φράσεις $\varphi_i, i = 1,2, \dots n$, που συνθέτουν μια ΚΣΜ του $\neg\varphi$ της μορφής $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$, ισχύει $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash_{Res} \perp$, τότε ο φ είναι ταυτολογία. Εφαρμόστε την τεχνική αυτή για να δείξετε ότι ο τύπος

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \big((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p\big)$$

είναι ταυτολογία.

Υπόδειξη: *Δίνεται* $\neg\big((\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)\big) \equiv (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg p.$

Ερώτημα 5. Επιλογή Σ/Λ (5 + 5 μονάδες)

Το ερώτημα αυτό έχει σκοπό στο να σας εισάγει στην μορφή της εξέτασης με ερωτήματα πολλαπλών επιλογών. Περιέχει δύο ερωτήματα με τέσσερις απαντήσεις το καθένα από τις οποίες κάθε απάντηση μπορεί να είναι σωστή ή λάθος. Είναι σημαντικό να προσπαθήσετε να δώσετε τις απαντήσεις σας (σωστό η λάθος) σε λιγότερο από 15 λεπτά. Στη συνέχεια, θα πρέπει να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, όπως απαιτεί η εκφώνηση του ερωτήματος.

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις και τα υποερωτήματά τους, βρίσκοντας για κάθε ένα αν είναι *Σωστό (Σ)* ή *Λάθος (Λ)* και **αιτιολογώντας συνοπτικά** σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

Α.

1. **(Σ/Λ)** Ο προτασιακός τύπος $(p_1 \vee p_2 \to p_3) \to (p_1 \wedge p_2 \to p_3)$ είναι ταυτολογία.
2. **(Σ/Λ)** Η ταυτολογική συνεπαγωγή $\neg\varphi \vDash \neg\varphi \to \varphi$ είναι έγκυρη.
3. **(Σ/Λ)** Κάθε τύπος με σ συνδέσμους αναλύεται σε το πολύ $2\sigma + 1$ υποτύπους.
4. **(Σ/Λ)** Αν T είναι ένα ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων και $T \vDash \varphi$, τότε το $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο.

Β.

1. **(Σ/Λ)** Ο τύπος $(\neg\neg\alpha \to \beta) \to \big((\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha\big)$ προκύπτει από μια έγκυρη συντακτική αντικατάσταση στο ΑΣ3.
2. **(Σ/Λ)** Αν το σύνολο $\{\varphi, \psi\}$ είναι αντιφατικό, τότε ο $\varphi \to \neg\psi$ είναι τυπικό θεώρημα.
3. **(Σ/Λ)** Αν $\varphi \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\psi$ και $\neg\varphi \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\psi$, τότε ο $\neg\psi$ είναι τυπικό θεώρημα.
4. **(Σ/Λ)** Αν T είναι ένα συνεπές σύνολο τύπων και $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$, τότε το $T \cup \{\varphi\}$ συνεπές.