1. Cinemática

$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ $a_t = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ $a_m = \frac{v}{t}$

$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ $a_x = v_x\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$ $a_n = \frac{v^2}{R}$

Também válido para y, z

Evitar usar

$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad v = v_0 + at}$

$V_m = \frac{v_1 \Delta t_1 + \ldots + v_n \Delta t_n}{\Delta t_{total}}$

2. Cinemática vetorial

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\,\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ $a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$

$a + b = (a_x + b_x) i + (a_y + b_y) j + (a_z + b_z) k$ $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ $r(t) = x(t) i + y(t) j + z(t) k$

$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right) = x_i + y_j + z_k$ $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ $a = v_x i + v_y j + v_z k = x_i + y_j + z_k$

$\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{v}\,'_O$

$a \cdot dr = v \cdot dv$ $\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}\,\mathrm{d}t$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\,\mathrm{d}t$ $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}\,'_O$ $\vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{a}\,'_O$

$a = \dot{s}\, e_t + s \cdot \frac{d\, e_t}{dt} = \dot{s}\, e_t + s\, \dot{\theta}\, e_n$ $\theta_{ab} = \arccos(a \angle b)$ $\omega = \frac{v_{ab}}{d_{ab}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

3. Movimento curvilíneo

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ $\vec{a}\times b = a\,b\,\sin\theta\,\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

$\vec{v} = \dot{s}\,\hat{e}_t$ $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\,\hat{e}_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_t$

$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}) \times (B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath} + B_z\,\hat{k})$

$= (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{k}$ $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\,\hat{e}_n$ $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{s}\,\hat{e}_t + \dot{s}\,\frac{\mathrm{d}\hat{e}_t}{\mathrm{d}t}$ $\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{e}_t + \dot{s}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_n$ $a_n = \dot{s}\,\dot{\theta}$

$\dot{\theta} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{R\,\Delta t} = \frac{\dot{s}}{R}$ $s = R\theta$ $v = R\omega$ $a_t = R\alpha$ $a_n = R\omega^2 = v\omega$

$\omega = \dot{\theta}$ $\alpha = \dot{\omega}$ $\alpha = \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$ $a_t = R\,\alpha$ $\vec{v} = R\,\omega\,\hat{e}_\theta$ $\vec{a} = R\,\alpha\,\hat{e}_\theta - R\,\omega^2\,\hat{R}$

$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ $|\omega \times r| = R|\omega|$ $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ $\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_{\text{axis}}$

$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

4. Mecânica vetorial

$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ $\vec{p} = m\,\vec{v}$ $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\,\vec{a}$ $\vec{P} = m\,\vec{g}$ $F_e \le \mu_e\,R_n$

$\vec{a} = a_t\,\vec{e}_t + a_n\,\vec{e}_n$ $\vec{F} = F_t\,\vec{e}_t + F_n\,\vec{e}_n$ $F_t = m\,a_t$ e $F_n = m\,a_n$ $F_c = \mu_c\,R_n$

$\vec{F}_c = \begin{cases} \vec{0} & v = 0 \\ -\frac{\mu_c\,R_n}{|v|}\,\vec{v} & v \neq 0 \end{cases}$ $F = \frac{dp}{dt}$ $N_R = r\,v\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$ $F_f = 6\,\pi\,\eta\,r\,v$ $(N_R < 1)$

$F_r = \frac{1}{2}\,C_D\,\rho\,A\,v^2$ $F_f = \frac{\pi}{4}\,\rho\,r^2\,v^2$ $(N_R > 10^3)$

5. Dinâmica dos corpos rígidos

$M_O = F\,b$ $\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}$ $M_z = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$ Ponto onde é aplicada a força F

M>0 -> sentido horário $M_o = F\,r\,\sin\theta$

$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\int\vec{r}\,\mathrm{d}m$ $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m}\int\vec{v}\,\mathrm{d}m$ $\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m}\int\vec{a}\,\mathrm{d}m$ $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\,\vec{a}_{cm}$ $\sum_{i=1}^{n} M_{z,i} = I_z\,\alpha$

$I_z = \int R^2\,\mathrm{d}m = I_{cm} + m\,d^2$

$m = \int \mathrm{d}m$ $\mathrm{d}\vec{f} = \vec{a}\,\mathrm{d}m$

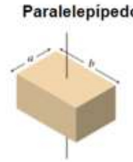
$\int \mathrm{d}\vec{f} = m\,\vec{a}_{cm}$ $\int \vec{g}\,\mathrm{d}m = m\,\vec{a}_{cm}$

$\mathrm{d}\vec{f} = \left(R\,\alpha\,\hat{e}_\theta - R\,\omega^2\,\hat{R}\right)\mathrm{d}m$

$\mathrm{d}\vec{M}_z = (R\,\hat{R})\times\mathrm{d}\vec{f} = R^2\,\alpha\,\hat{k}\,\mathrm{d}m$

$\int \mathrm{d}M_z = \alpha\int R^2\,\mathrm{d}m$

$F_1\,b_1 = F_2\,b_2$ $M_o = r \times df$

Esfera	Cilindro	Paralelepípedo
		
	Eixo 1: $\frac{1}{2}\,m\,R^2$	
$\frac{2}{5}\,m\,R^2$	Eixo 2: $\frac{1}{12}\,m\,(3\,R^2 + L^2)$	$\frac{1}{12}\,m\,(a^2 + b^2)$

6. Trabalho e energia

$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_t\,\mathrm{d}s$ $W_{12} = E_c(2) - E_c(1)$ $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\,I_{cm}\,\omega^2$ $U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$W_{12} = U(1) - U(2)$ $U_g = m\,g\,z$ $U_e = \frac{1}{2}\,k\,s^2$ $E_m = E_c + U$ $\int_s^{s_2} F_t^{nc}\,\mathrm{d}s = E_m(2) - E_m(1)$

$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\,\pi\,f$ $s = A\,\sin(\Omega\,t + \phi_0)$ $E_m = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,s^2$ $\int_{s_1}^{s_2} F_t\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2$

$\vec{F}\cdot(\mathrm{d}s\,\vec{e}_t) = m\,\vec{a}\cdot(\mathrm{d}s\,\vec{e}_t) \implies F_t\,\mathrm{d}s = m\,a_t\,\mathrm{d}s$ $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$ $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\hat{\imath} + \mathrm{d}y\,\hat{\jmath} + \mathrm{d}z\,\hat{k}$

$|F_e| = k\,s$ $\vec{F}_e\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -k\,s\,\hat{e}_s\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -k\,s\,\mathrm{d}s$ $\vec{F}_c = f(r)\,\hat{r}$ $U_c = -\int_\infty^r f(r)\,\mathrm{d}r$

$\int_{s_1}^{s_2} F_t^c\,\mathrm{d}s = U(s_1) - U(s_2)$ $F_t^c = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}$ $E_m = \frac{1}{2}\,k\,A^2$ $a_t = -\frac{k}{m}\,s$ $v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\,(A^2 - s^2)}$

$E_c = \frac{1}{2}\int v^2\,\mathrm{d}m$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial v_x}\right) = F_x$

- força que só depende de r chama-se conservativa se integral linha dá o mesmo resultado para qualquer percurso;

$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$

$W_{Fc}a,b$ = *dimunuição de U*

$W_{Fnc}a,b$ = *aumento de* E_m

$W_{Fa} = \Delta E_m$ $I = \int_{t1}^{t2} F\,dt$ $W_{Fconst} = F.\Delta s = F^*\Delta s^*\cos(\alpha)$

- trabalho força resultante = aumento energia cinética;
- no ponto de equilíbrio força conservativa=0
- força perpendicular à trajetória não realiza trabalho;

7. Sistemas dinâmicos

$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ $\vec{u} = f_1(x_1, x_2)\,\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\hat{e}_2$ $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ $y = \dot{x}$

$\vec{u} = y\,\hat{\imath} + f(x, y)\,\hat{\jmath}$ $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$ $f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}$ $f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$ $H(s, v) = \frac{E_c(v) + U(s)}{m}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 0$

- equilíbrio estável: se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, sistema regressa ao estado inicial; (zeros de positivo para negativo)
- equilíbrio instável: se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, sistema afasta se do estado inicial;
- duas curvas de evolução nunca se podem cruzar em nenhum ponto do domínio das funções f1 e f2;

Ponto de equilíbrio: $\vec{u} = \vec{0}$ (estável ou instável) (nos pontos de interseção das curvas) (origem do espaço fase é sempre ponto de equilíbrio)

Ciclo: curva fechada no espaço de fase.(corresponde a uma oscilação periódica)

Órbita homoclínica: começa e termina no mesmo ponto de equilíbrio instável. (corresponde a uma oscilação não periódica)

Órbita heteroclínica: liga vários pontos de equilíbrio instável.(formada por n curvas de evolução e n pontos de equilíbrio)

Nulcliana: curva onde derivada temporal de x1 ou x2 é nula

Equilíbrio estático: força resultante em x e velocidade são nulas (objeto em repouso)

Sistema autónomo: sempre regido pelas mesmas leis físicas

Velocidade de fase: deslocamento do estado do sistema no espaço fase

Campo de direções: gráfico que mostra a direção da velocidade de fase em vários pontos do sistema de fase

Retrato de fase: gráfico mostrando várias curvas de evolução

-num sistema mecânico conservativo, os pontos de equilíbrio estável são todos os mínimos locais de energia Potencial e os pontos de equilíbrio instável são todos os máximos locais de energia potencial

8. Mecânica lagrangiana

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j$ num sistema conservativo, Q=0 $Q_j = \sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j$ $\lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j}$ = força de ligação$_j$

11. Ciclos limite e dinâmica populacional

Ciclo limite: Ciclo isolado no espaço de fase.

Sistemas de duas espécies: $\dot{x} = f(x, y)$ $\dot{y} = g(x, y)$ $\lim_{x\to 0} f(x, y) = 0$ $\lim_{y\to 0} g(x, y) = 0$

$\ddot{x} + 2\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$

$\dot{y} = -x - 2\varepsilon(x^2 - 1)y$

$\dot{x} = x\,(a - b\,x)$ $x(t) = x_0\,e^{a\,t}$

$\frac{\dot{x}}{x} = T_n - T_m + T_i - T_e$

$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$

se ambas >0, sistemas em cooperação
se ambas<0, sistemas em competição
se têm sinais opostos, sistema predador-presa

9. Sistemas lineares

$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\,\vec{r}$ $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

Valores próprios: $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Estabilidade
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio repulsivo	instável
1 real, negativo	nó impróprio atrativo	estável

T = 2pi / part_i

$a_t = C_1\,s + C_2\,v$

$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$

Máxima

```
integrate(expressão,d?,min,max) ratsimp(%)
diff(expressão,variável)
solve(expressão)
solve([eq1,..eqn],[var1,…varn])
float(%)                 subst(valor, expressão)
eigenvectors(matrix([ ],[ ]))  (devolve valores propios, multiplicidade, vetores propios)
batchfiles, gistfile1.matlab(copier e colar
*exp(expoente)    %pi    cos   sin   tan
plotdf([f1,f2],[x,y],[x,x1,x2],[y,y1,y2])
plot2d([expressão],[x,min,max],[y,min,max])
EquilPoints([dx,dy],[x,y])
```

expand([eq1,eq2]) plotdf(... [trajectory_at, x, y],[direction,foward])

coefmatrix([eq1,eq2],[T1,T2])]) gradef(v2,t,a2) (derivada de v2 em t é a2)

jacobian([eq1,eq2],[x1,x2])