Funciones

Definiciones y operaciones
Función lineal y cuadrática
Funciones inversas

TEC Tecnológico de Costa Rica

Definiciones

Una función f de A en B es una relación de A en B tal que:

- $D_f = A$, el dominio es el conjunto emisor.
- Si (a, b) y (a, c) pertenecen al gráfico de f, entonces $b = c$, es decir cada elemento de A se relaciona con un único elemento de B.
- El conjunto de llegada B se le llama codominio.
- Si (a, b) pertenece al gráfico de f, se dice que b es la imagen de a y se escribe $b = f(a)$

Definición

Sea f una función de A en B, si existe un elemento $k \in B$, tal que $\forall x \in A$, se tiene que $f(x) = k$, entonces se dice que f es la función constante de valor k.

Definición

La función de A en A denotada por id, tal que $id(x) = x, \forall x \in A$ se llama función identidad de A.

Definiciones

Sea f una función de A en B, se define

- Ámbito o imagen de f

$f[A] = \{b \in B \ / \ \exists a \in A \text{ tal que } b = f(a)\}$

Sean $E \subseteq A$ y $F \subseteq B$

- Imagen directa de E por f

  $f(E) = \{b \in B \ / \ \exists a \in E \text{ tal que } b = f(a)\}$

- Imagen inversa de F por f

$f^{-1}(F) = \{a \in A \ / \ \exists b \in F \text{ tal que } b = f(a)\}$

Funciones especiales

- Función factorial $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

- Función parte piso (función parte entera)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$$

es el entero más grande que sea menor o igual a x

- Función techo

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil$$

es el entero más pequeño que sea mayor o igual a x

- Función característica Sea E un conjunto y $A \subseteq E$.

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Clasificación de funciones

Sea $f: A \longrightarrow B$

- Función inyectiva si y solo si

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

- Función sobreyectiva si y solo si

$$f(A) = B$$

- Función biyectiva si y solo si

  f es inyectiva y sobreyectiva.

Ejercicios

1. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyo criterio es $f(x) = 5x - 4$. Pruebe que f es biyectiva.

2. Considere la función $f\colon \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{5\}$ cuyo criterio es $f(x) = \frac{5x-2}{x-4}$. Prueba que f es biyectiva.

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Definiciones

Sea f una función real de variable real, se dice que f es:

- Una función par si satisface que $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio.
- Una función impar si satisface que $f(-x) = -f(x)$ para todo x en su dominio.

Ejercicio

- Verifique que la función $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x + 4x^5}$ es par.

Función lineal

- Sea $D \subseteq \mathbb{R}, f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal si existen $m, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = mx + b$.
- El valor m se llama pendiente.
- Si los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen al gráfico de la función lineal, su pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Dos o más rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.
- Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.

Función cuadrática

- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cuadrática si existen constantes a, b y $c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Su gráfica es una curva llamada parábola.
- Si $a < 0$ la parábola es cóncava (hacia abajo)
- Si $a > 0$ la parábola es convexa (cóncava hacia arriba)
- Su eje de simetría lo representa la recta $x = \frac{-b}{2a}$
- El vértice corresponde con el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$
- Donde $\Delta = b^2 - 4ac$, se conoce como discriminante.

Operaciones

Dadas dos funciones, $f: A \longrightarrow D$ y $g: B \longrightarrow C$ con A, B, C y D son subconjuntos de $\mathbb{R}$, se define:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ siempre que } g(x) \neq 0$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejercicios

1. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface
$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$$
Determine el criterio de $f(x)$.

2. Considere la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = 8x^3 - 5$. Además sea $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ otra función que cumple $(f \circ g)(x) = 35 - 8x$. Determine el criterio de $g(x)$.

Función inversa

Si f es una función de A en B, se dice que f es invertible o que f tiene función inversa si y solo si su relación f^{-1} también es función. Además, esto sucederá si y solo si f es biyectiva.

Ejercicios

1. Sea $f: [1, +\infty[\longrightarrow [2, +\infty[$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

a. Pruebe que f es una función biyectiva.

b. Determine el criterio de su inversa $f^{-1}(x)$.

2. Sea $f: \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x+3}{x-3}$.

Pruebe que f es inyectiva pero no sobreyectiva.