二维多阶段矩形剪切排样算法

孔令熠　陈秋莲
（广西大学计算机与电子信息学院　广西 南宁 530004）

摘　要　讨论有需求约束的二维剪切矩形排样问题:将一张板材剪切成一组已知尺寸的毛坯,使排样价值(板材中包含的毛坯总价值)最大,约束条件是排样方式中包含每种毛坯数量都不能超过其需求量。采用普通条带多阶段排样方式,每次剪切都从板材上产生一根水平或者竖直的普通条带,条带中可以包含不同尺寸毛坯。引入分支限界与贪婪策略,以提高算法效率。实验结果表明,该算法可以有效提高排样价值。

关键词　有约束二维剪切　多阶段排样方式　普通条带　分支限界　贪婪策略

中图分类号　TP391　　**文献标识码**　A　　DOI:10.3969/j.issn.1000-386x.2015.05.056

MULTI-STAGE TWO-DIMENSIONAL RECTANGULAR NESTING ALGORITHM WITH CUTTING BY GUILLOTINE

Kong Lingyi　Chen Qiulian
(*College of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004, Guangxi, China*)

Abstract　We discuss two-dimensional cutting rectangular nesting problem with constrained requirement: in which a single plate is cut into a group of roughcast pieces with given sizes and makes the nesting value (total value of pieces contained in the plate) maximised, the constraints are that in the nesting pattern the number of each piece cannot exceed its demand. We adopt general strips and multi-staged nesting pattern, there will produce one horizontal or vertical strip from the plate in every cut, which can contain the pieces of different types. Branch-and-bound and greedy strategy are introduced to enhance the efficiency of the algorithm. Experimental results indicate that the algorithm can effectively improve the value of nesting.

Keywords　Constrained two-dimensional cutting problems　Multi-stage nesting pattern　General strip　Branch-and-bound　Greedy strategy

0　引　言

排样问题广泛应用机械制造、电机、航空航天、木材的分割、皮革的剪裁等领域。经典的排样问题可描述为将板材切割成较小的矩形毛坯,在毛坯不超过其需求量的约束条件下,使板材中包含的毛坯价值之和达到最大。好的排样算法不仅可以极大提高材料的利用率,还能增加经济效益。

对于此类问题,文献[2]提出了一种基于背包问题的两阶段算法,简化了切割流程。文献[4]使用启发式算法解决此类问题,但不能保证解的效率与质量。文献[6]提出了一种同质条带精准算法,此算法减少其运行时间,求解速度快,但价值不高。本文提出普通条带多阶段排样算法,采用分支限界技术提高算法的效率。多组对比实验表明,本文算法在大多数实验测试中表现良好。

1　排样问题的数学模型及相关概念

1.1　排样问题数学模型

本文讨论的问题是有需求约束的二维剪切排样问题(CTDT)[7]:从 $L \times W$ 的板材上切下 m 种毛坯,其中第 i 种毛坯的尺寸和价值分别是 $l_i \times w_i$ 和 c_i,需求量为 d_i。使用冲压机剪裁方式对矩形板材进行切割[8],使板材中包含的价值最大。

假设在某种排样方式中排入板材的第 i 种毛坯的数量为 z_i,N 表示非负整数的集合,可得到 CTDC 的数学模型可用公式表示为:

$$\max\left(\sum_{i=1}^{m} c_i z_i\right) z_i \in N \quad z_i \leqslant d_i \quad 1 \leqslant i \leqslant m \tag{1}$$

1.2　相关概念

1.2.1　多阶段排样方式

多阶段排样方式是指每次对板材剪切时都产生一根水平或者竖直的条带。由于每根条带的产生可能需要多个阶段[9],所以被称为多阶段排样方式。如图 1 所示箭头表示切割的方向,箭头上的数字表示切割的顺序。每次剪切从标号最小的箭头开始,每次都将产生水平或者竖直的条带,然后对这些条带使用冲压机方式剪切生成毛坯。图 1 中使用普通条带(具体定义 1.2.2 节给出)在生产毛坯时还可能需要修剪流程,即去除条带中的

收稿日期:2013－10－29。国家自然科学基金项目(61363026)。**孔令熠**,硕士,主研领域:计算机辅助设计,优化算法。**陈秋莲**,副教授。

阴影部分。

1.2.2 普通条带

普通条带是指同一根条带中可以包含不同尺寸的毛坯。如图 2 所示的水平普通条带,条带中第一个毛坯的宽度为整个毛坯的宽度;同理,竖直条带的长度为第一个排入毛坯的长度。决定条带宽度和长度的毛坯称主毛坯。图 2 中普通条带的主毛坯为标号为 2 的毛坯。

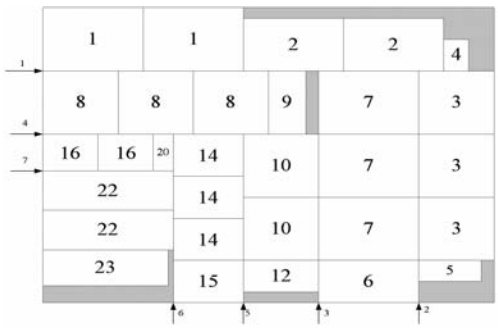

图 1 多阶段排样方式

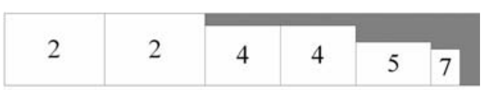

图 2 水平普通条带

2 实现算法

排样过程可看作是一系列条带的拼接过程[10],每次排样沿子板材的水平边拼接一根水平条带或垂直条带,直到达到板材边沿,形成整张板材的排样方式。本文算法的基本思想是:每次需判断水平条带或垂直条带拼接后子板的价值是否更高。判断的依据是将排入条带所产生的排样方式的价值上界与之前的最优排样方式进行比较,价值更大,则实施本次排入。尝试的顺序是先水平条带再垂直条带。若当前毛坯的水平条带和垂直条带都被排除,则考虑下一种毛坯产生的条带,直到剩余长度和宽度无法排入条带为止。

图 3(a)是水平条带拼接的尝试。子板材 $x \times y$ 的排样方式可看作是由水平条带 $x \times w_i$ 拼接到子板 $x \times (y - w_i)$ 的上方而得,设子板 $x \times (y - w_i)$ 的价值上界是 $F(x, y - w_i)$,水平条带 $x \times w_i$ 的价值是 $HV(i, x, w_i)$,则当前子板 $x \times y$ 的价值可用 $F(x, y - w_i) + HV(i, x, w_i)$ 来估计。若估计值大于当前最优解 VCB,则排入水平条带 $x \times w_i$。否则尝试该主毛坯竖直条带的拼接(如图 3(b))。设 $VV(i, l_i, y)$ 为竖直条带 $l_i \times y$ 的价值,则垂直条带拼接后子板 $x \times y$ 的估计值为 $F(x - l_i, y) + VV(i, l_i, y)$,该估计值若比 VCB 大,则排入竖直条带 $l_i \times y$;否则 $i = i + 1$,继续下一主毛坯两种不同条带的拼接尝试。算法的终止条件是子板的长度小于毛坯中最小的长度或者宽度小于毛坯中最小宽度。

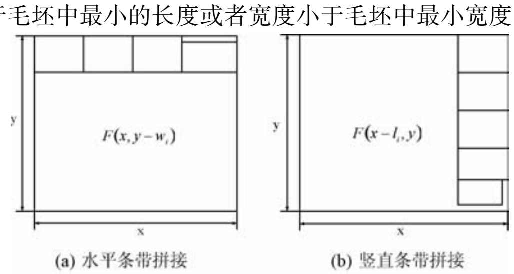

图 3 条带拼接成的排样方式

$HV(i, x, w_i)$,$VV(i, l_i, y)$ 的求解方法将在 2.1 节给出。$F(x, y - w_i)$ 是未进行剪裁板材的价值上界值,实际是不考虑毛坯需求约束对板材进行排样的价值,可以由以下公式求得:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 \quad x=0 \quad y=0 \text{ or } x<l_{\min} \text{ or } y<w_{\min} \\ \max\begin{cases}\max\limits_{1\le i\le m}(\_H(i,x,w_i)+F(x,y-w_i)) & w_i\le y \\ \max\limits_{1\le i\le m}(\_V(i,l_i,y)+F(x-l_i,y)) & l_i\le x\end{cases}\end{cases} \quad (2)$$

2.1 普通条带生成

根据 1.2.2 节对普通带的定义[11],对普通条带的求解可以转化为背包问题进行求解[3]。但是使用背包问题求解将会消耗大量的时间,因此本文采用贪婪策略生成普通条带。按照单位价值 $c_i/l_i \times w_i$ 递减的顺序排序,然后根据式(3)可得到水平普通条带 $x \times w_i$ 的价值 $HV(i, x, w_i)$[12]。对其进行修改去掉需求约束条件 $\sum_{i \in I_i} z_i \leqslant d_i$,可以得到 $\_HV(i, x, w_i)$。

$$V_i = \max\Big(\sum_{I_i} c_i \times z_i\Big)$$

$$\text{subject to}\begin{cases} I_i = \{j \mid w_j \leqslant w_i\} \\ \sum\limits_{i \in I_i} z_i \leqslant d_i \\ \sum\limits_{i \in I_i} l_i \times z_i \leqslant x \end{cases} \quad (3)$$

同理可得到竖直条带 $l_i \times y$ 的 $VV(i, l_i, y)$ 与 $\_VV(i, l_i, y)$。

2.2 求解 CTDC 问题

假设 VCB 是目前所取得的最优解;V 是待切割板材 $x \times y$($0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant W$)的价值[13](如图 3(a)中下方空白或者(b)中左边的空白);V_l 是已经排入板材的普通条带的价值总和。那么计算矩形 $x \times y$ 的递归函数 $UFP(x, y, Demand, V_l)$ 步骤如下:

Step1 设 $V = 0$,如果板材中不能再排入毛坯,跳转 Step6;否则 $i = 0$;

Step2 令 $i = i + 1$,如果 $i > m$,则跳转 Step5;

Step3 检验毛坯 i 能否放置在矩形 $x \times y$,若不能则跳转 Step2;

Step4 考虑水平的切割,令 $y_1 = y - w_i$,$TempL = HV(i, x, w_i)$;

Step4.1 $U = TempL + V_l + F(x, y_1)$,若 $U < VCB$ 跳转 Step5;

Step4.2 对 $Demand$ 更新(减去普通条带 $x \times w_i$ 的每种毛坯使用量),$V_1 = UFP(x, y_1 Demand, V_l + TempL)$,$VX = TempL + V_1$,保存毛坯的需求数组(回溯过程),$V = \max(VX, V)$,如果 $V + V_l \leqslant VCB$ 跳转 Step5,否则 $VCB = V + V_l$;

Step5 考虑垂直方向的切割,步骤与水平方向的过程类似;

Step6 返回 V 的值。

3 实验结果

3.1 第一组实验结果

实验数据取自于文献[3]的基准实例,共有 38 组。在表 1 中列出的 38 组对比实验中,V_{2stg} 为采用两阶段的板材下料算法[3] 的排样价值,V_G 为采用本文算法的排样价值。实验结果显示,在 38 组实验结果中,有 33 组 V_G 优于 V_{2stg},1 组 V_G 于 V_{2stg} 相等,4 组 V_{2stg} 优于 V_G。

表 1 38 组对比实验

ID	V_{2stg}	V_G	*ID*	V_{2stg}	V_G
HH	10 689	12 381	STS4s	9481	9552
2	2535	3445	OF1	2713	2948
3	1740	1740	OF2	2522	2673
A1	1820	2000	W	2623	2997
A2	2315	2445	CHL1s	13 036	14 923
STS2	4620	4490	CHL2s	3198	3289
STS4	9468	9582	A3	5403	5618
CHL1	8360	9868	A4	5905	6844
CHL2	2235	2429	A5	12 553	14 923
CW1	6402	6433	CHL5	363	366
CW2	5354	5618	CHL6	165 723	18 639
CW3	5689	4748	CHL7	16 728	17 207
Hch12	9630	9717	CU1	12 312	15 672
Hch19	5100	5410	CU2	26 100	30 078
2s	2450	3331	Hch13s	11 961	14 548
3s	2623	2721	Hch14s	11 408	12 423
A1s	2950	3201	Hch16s	60 170	60 051
A2s	3451	3872	Hch1s	62 845	63 205
STS2s	4625	4813	Hch18s	791	702

3.2 第二组实验结果

实验数据选取文献[6]中的第三组。毛坯的种类 $m \in [100,200]$,板材的长度 $L \in [2000,4000]$,板材宽度 $W \in [2000,4000]$,毛坯长度 $l_i \in [0.05L,0.5L]$,毛坯宽度 $w_i \in [0.05W,0.5W]$,毛坯价值 $c = pl_iw_i, p \in [0.25,0.75]$。表 2 是关于本文的算法以及文献[6]中算法的对比实验,其中 V_1 是本文算法的排样价值,V_2 是文献[6]中的算法的排样价值。

表 2 大规模数据对比

ID	V_1	V_2	$\frac{V_1}{V_2}$
1	3 030 903	2 796 341	108.4%
2	8 289 937	7 554 016	109.7%
3	7 134 023	7 188 298	99.2%
4	7 831 738	6 112 431	128.1%
5	5 566 234	5 458 824	102.0%
6	6 060 351	5 435 976	111.5%
7	8 766 480	8 738 743	100.3%
8	8 750 975	7 439 056	117.5%
9	6 930 434	5 639 688	122.9%
10	7 210 145	5 840 237	123.5%
11	3 651 184	3 352 666	108.9%
12	11 272 996	10 228 716	110.2%
13	9 517 782	8 534 757	111.5%
14	4 293 076	3 559 167	120.6%
15	5 489 557	5 143 242	106.7%
16	7 882 487	7 003 575	112.5%
17	7 121 436	6 111 319	116.5%
18	8 309 483	7 314 404	113.5%
19	9 370 255	8 735 265	107.3%
20	6 727 163	6 135 242	109.6%
平均值	7 160 332	6 416 098	112.0%

在 20 组实验对比中,有 18 组 V_1 优于 V_2,平均有 12% 的提高,由此证明本文算法能够提高板材的利用价值。

4 结 语

本文提出了一种多阶段矩形板材排样算法。算法使用普通条带,引入贪婪策略与分支限界技术提高算法效率。实验结果显示,运用本文算法解决毛坯种类较多、板材价值较高的剪裁问题能得到较好收益。未来研究是进一步降低切割复杂度[14]。

参 考 文 献

[1] 崔耀东. 计算机排样及应用[M]. 北京:机械工业出版社,2004.

[2] Mhand Hifi, Roucairol C. Approximate and Exact Algorithms for constrained (un) weighted Two-dimensional Two-staged cutting stock Problems[J]. Journal of Combinatorial optimization, 2001, 20: 212-221.

[3] Mhand Hifi, Rym M'Hallah. Strip generation algorithm for constrained two-dimensional two-staged cutting problems[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 172: 515-527.

[4] Cui Yaodong, Huang Baixiong. Heuristic for constrained T-shape cutting patterns of rectangular pieces[J]. Computers & Operational Research, 2012, 39: 3031-3029.

[5] Andreas Boetfeldt. A genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular pieces[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 172: 814-837.

[6] Cui Yaodong, Zhao Xinfang, Yang Ying, et al. Uniform Block Patterns for Constrained Guillotine Cutting of Rectangular Items[J]. International Journal of Information and Management Sciences, 2009, 20: 89-101.

[7] 罗丹,崔耀东,李秋荣. 生成匀质块排样方式的递推算法[J]. 计算机工程与设计,2013,34(3):1112-1115.

[8] 孟朝霞,杨玉丽,崔耀东. 改进的矩形毛坯三块排样方式及其算法[J]. 计算机应用与软件,2009,26(7):26-27.

[9] 黄少丽,杨剑,侯桂玉,等. 解决二维下料问题的顺序启发式算法[J]. 计算机工程与应用,2011,47(13):234-237.

[10] ALine M Del Valle, Thiago A de Queiroz. Heuritics for two-dimensional knapsack and cutting stock problems with items of irregular shape[J]. Expert System with Applications, 2012, 39: 12589-12598.

[11] Yaodong Cui, Yuli Yang. A recursive branch-and-bound algorithm for constrained homogenous T-shape cutting patterns[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54: 1320-1333.

[12] Yaodong Cui. A new dynamic programming procedure for three-staged cutting patterns[J]. J Glob Optim, 2013(55): 349-357.

[13] Francois Clautiaux, Antoine Jouglet. A New Graph-Theoretical Model for the Guillotine-Cutting Problem[J]. Journal for Computing, 2013, 25(1): 72-86.

[14] 李秋荣,崔耀东,罗丹. 考虑切割的 T 形排样算法[J]. 计算机应用与软件,2013,30(3):28-32.

(上接第 219 页)

[17] 张利彪,周春光,刘小华,等. 粒子群算法在求解优化问题中的应用[J]. 吉林大学学报:信息科学版,2005,23(4):385-389.

[18] Shao Liangshan, Bai Yuan, Qiu Yunfei, et al. Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Semantic Relations and Its Engineering Applications Systems[J]. Engineering Procedia, 2012(5): 222-227.

[19] 杨维,李歧强. 粒子群优化算法综述[J]. 中国工程科学,2004,6(5):87-94.