מבני נתונים 1 - 234218 - חורף 2022/23

גיליון יבש 1 – מעודכן לתאריך 04/04/2023

מתרגל ממונה על התרגיל תומר אדר, tomer-adar@campus.technion.ac.il
תאריך ושעת הגשה 30.04.2023 בשעה 23:55
אופן ההגשה **בזוגות**

הנחיות לפתרון

- שאלות לגבי תרגיל הבית נא לשאול ב-Piazza של הקורס, מידע נוסף נמצא באתר.
- בפורום הפיאצה ינוהל FAQ ובמידת הצורך יועלו תיקונים כ**הודעות נעוצות** (Pinned Notes). תיקונים אלו **מחייבים**.
- הגישו פתרון מוקלד. הגשה בכתב יד היא באישור המתרגל האחראי על התרגיל בלבד.
- הגשת התרגיל היא אלקטרונית בלבד, באתר הקורס, בקובץ PDF בלבד.
- בקשות להגשה מאוחרת יש לשלוח למתרגלת האחראית על הקורס – סאלי טורוטוב.
- הקפידו לכתוב את פתרונותיכם באופן מסודר ומובנה. התחילו מפתיח המתאר את תשובתכם בקצרה (עד 3 שורות) ולאחריו כתבו פירוט מלא של הפתרון. אי עמידה בכלל זה תגרור הורדת ניקוד.
- הקפידו לצרף את כל השאלות והסעיפים לפי הסדר! אי עמידה בכלל זה תגרור הורדת ניקוד.
- אין צורך לפרט דברים שנלמדו בהרצאות או בתרגולים. מספיק לצטט או להפנות לחומר הלימוד. עם זאת, יש להוכיח כל טענה שלא נלמדה בהרצאה או בתרגול.
- הניחו שאם הארגומנט לפונקציה $f(n)$ אינו שלם, נלקח ערך תחתון עבור n, כלומר $f(\lfloor n \rfloor)$.
- בשאלות בהן נתונה נוסחה רקורסיבית $T(n)$ הניחו (אם לא צוין אחרת) כי $T(1)=1$ והנוסחה הרקורסיבית עצמה מתייחסת למקרים שבהם $n>1$.
- הניחו $0 \notin \mathbb{N}$.

שימו לב לתיקונים שהתבצעו מאז פרסום התרגיל!

תיקון בהבהרה בשאלה 2, סעיף ד' בלבד. בסיס השאלה (ללא ההבהרה) לא השתנה.

שאלה 1 (27 נקודות)

לפניכם 16 פונקציות. בחרו 10 מתוכן וסדרו אותן לפי סדר אסימפטוטי מהקטנה לגדולה. אם יש פונקציות עוקבות שעבורן מתקיים $f = \Theta(g)$, יש לציין ולהוכיח זאת.

$f_1(n) = \binom{n}{n/2}$	$f_2(n) = (n+1)^3 - n^3$	$f_3(n) = 2^{\sqrt{n}}$
$f_4(n) = \log(n^n \cdot n!)$	$f_5(n) = \dfrac{27^n + n^2 + 1}{9^n + 2^n + 2}$	$f_6(n) = n^{\frac{\log\log n}{\log n}}$
$f_7(n) = \log(2^n \cdot n)$	$f_8(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-i+1} (j-1)$	$f_9(n) = (\log\log n)^{\log n}$
$f_{10}(n) = n \cdot \log n$	$f_{11}(n) = 9^{10^n}$	$f_{12}(n) = \prod_{i=2}^{n} \log i$
$f_{13}(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$	$f_{14}(n) = \log(n^{100} - n^{99})$	$f_{15}(n) = \sqrt{\log(n^2)}$
$f_{16}(n) = (\log n - \lfloor \log n \rfloor)^n$		

בשאלה זו:

כל הלוגריתמים הם בבסיס 2.

יש להתייחס ל-$\log n$ כפונקציה ממשיך (כלומר מקבלת את הערך המדויק, שהוא לא בהכרח שלם).

סיכום התשובות ייכתב בשורה הראשונה (לפני כל ההוכחות) כסדרה של מספרי הפונקציות והאם היחס בין פונקציות עוקבות הוא o או Θ. במקרה שבין שתי פונקציות יש יחס של Θ, זו עם האינדקס הנמוך יותר תופיע קודם.

ניתן להגיש פתרון עם יותר מ-10 פונקציות (ו-9 הוכחות), במקרה כזה יש לסמן בבירור את 9 ההוכחות שלפיהן הציון ייקבע. לא יינתן בונוס.

שאלה 2 (16 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

סעיף א. יהיו $f(n), g(n)$ פונקציות שמקיימות $f(n), g(n) \geq 1$ לכל n.

אז $f(n) + g(n) = O\big(f(n) \cdot g(n)\big)$.

סעיף ב. יהיו $f(n), g(n)$ פונקציות חיוביות. אם $f(n) = O\big(g(n)\big)$ אז $\sqrt{f(n)} = O\big(\sqrt{g(n)}\big)$.

סעיף ג. כל פונקציה שמקיימת $f(n) \geq 1$ לכל n ובנוסף $f(n) = \omega\Big(f\big(f(n)\big)\Big)$, מקיימת גם $f(n) = O(1)$.

סעיף ד. קיימת פונקציה $f(n)$ כך ש-$f(n-k) \neq \Theta\big(f(n)\big)$ כאשר $k \geq 1$ הוא קבוע חיובי.

הבהרות לוגיות לסעיף ד:

אם הטענה נכונה, יש להראות שקיימת פונקציה מסוימת $f(n)$ כך שלכל קבוע טבעי חיובי $k \geq 1$ מתקיים $f(n-k) \neq \Theta\big(f(n)\big)$.

אם הטענה אינה נכונה, יש להראות שלכל פונקציה $f(n)$ קיים קבוע טבעי חיובי $k \geq 1$ (יתכן שעבור f-ים שונים יהיו k-ים שונים) שעבורו $f(n-k) = \Theta\big(f(n)\big)$.

שאלה 3 (24 נקודות)

מצאו חסמים אסימפטוטיים הדוקים פשוטים (כלומר ללא שימוש בסכימה, סימן עצרת וכו׳, אלא רק חיבור, חיסור, כפל, חילוק, לוגריתמים וחזקות) עבור $T(n)$ בכל אחת מנוסחאות הנסיגה שלהלן, והוכיחו את תשובותיכם.

סעיף א. $T(n) = 16n^4T(\sqrt{n}) + 2n^8(\log n)^4$.

סעיף ב. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{6}\right) + n$, כאשר $T(n) = 1$ עבור $n < 10$.

סעיף ג. $T(n) = 3T\left(n^{2/5}\right) + 5^n$.

סעיף ד. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{8}{\log n}$.

בשאלה זו:

הלוגריתמים הם בבסיס 2.

בכל אחד מהסעיפים בנפרד: ניתן להניח שכל הלוגריתמים מעוגלים למטה, או להניח שכל הלוגריתמים מקבלים ערך מדויק (בלי עיגול).

שאלה 4 (33 נקודות)
בהרצאות ובתרגולים הוצגו שני מבני נתונים:

מערך: אפשר לגשת לאינדקס נתון בזמן קבוע, אבל המחיר של הוספת איבר חדש הוא לינארי.

רשימה מקושרת: אפשר להוסיף איבר חדש בזמן קבוע, אבל המחיר של גישה לאינדקס נתון הוא לינארי.

בשאלה זו נדון במבנה נתונים שבו גם המחיר של גישה לאינדקס נתון וגם המחיר של הוספת איבר חדש הם תת-לינארים.

בכל סעיפי השאלה ניתן להניח שהקלט חוקי: אם קוראים/כותבים/מוחקים באינדקס i אז קיים איבר עם אינדקס כזה. אם מוסיפים איבר באינדקס i אז או שקיים אינדקס כזה או שהוא "אחד אחרי האחרון", כלומר הוספה בסוף.

סעיף א (10 נקודות).
הציגו מבנה נתונים שתומך בפעולות הבאות:

Init()	אתחול סדרה ריקה.	$O(1)$
Get(i)	החזרת האיבר ה-i בסדרה.	$O(\sqrt{n})$
Set(i,x)	כתיבת המידע x באיבר ה-i.	$O(\sqrt{n})$
AddLast(x)	הוספת "איבר אחרון" בסדרה.	$O(\sqrt{n})$

הדרכה: היעזרו באי-שוויון $\frac{1}{3}n^2 \leq \sum_{k=1}^{n} k \leq n^2$ לכל $n \geq 0$.

סעיף ב (11 נקודות).
יש להוסיף תמיכה במחיקת איבר כלשהו (לאו דווקא האחרון), באמצעות הפעולה הבאה:

Delete(i)	מחיקת האיבר ה-i בסדרה.	$O(\sqrt{n})$

אין לשנות את הפעולות הקודמות (למעט Init). **יש להוכיח** שהסיבוכיות של הפעולות הקודמות לא נפגעה.

סעיף ג (12 נקודות).
המבנה מסעיף ב' מאפשר למחוק איבר באינדקס נתון, אבל להוסיף איבר רק בסוף הרשימה. נתקן את זה. יש לתמוך בפעולה הבאה:

Insert(i,x)	הוספת איבר x במיקום ה-i בסדרה.	$O(\sqrt{n})$

אין לשנות את הפעולות הקודמות (למעט Init). **יש להוכיח** שהסיבוכיות של הפעולות הקודמות לא נפגעה.

ניתן להגיש את כל הסעיפים "ביחד" כדי להוכיח את סיבוכיות הפעולות רק פעם אחת.