ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ИУ5 - 4 семестр
2015

Лекция 2.

2.1. Кортеж. Декартово произведение

Упорядоченная пара (a, b) на множествах A и B, определяется не только самими элементами $a \in A$ и $b \in B$, но и порядком, в котором они записаны.

Если $A = B$, то говорят об упорядоченной паре на множестве A.

Определение 2.1. Две упорядоченные пары (a, b) и (a', b') на множествах A и B называют **равными**, если $a = a'$ и $b = b'$.

Обобщением понятия упорядоченной пары является **упорядоченный n -набор**, или *кортеж*.

Кортеж $(a_1, \ldots, a_n)$ на множествах $A_1, \ldots, A_n$ характеризуется не только входящими в него элементами $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$, но и порядком, в котором они перечисляются.

Роль порядка в кортеже фиксируется определением равенства кортежей.

Определение 2.2. Два кортежа $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ на множествах $A_1, \ldots, A_n$ равны, если $a_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Число n называется **длиной кортежа** (или **размерностью кортежа**), а элемент a_i — i -й **проекцией** (компонентой) **кортежа**.

Для двух кортежей одинаковой размерности их компоненты с одинаковыми номерами называют **одноименными компонентами**.

Определение 2.3. Множество всех кортежей длины n на множествах $A_1, \ldots, A_n$ называют **декартовым (прямым) произведением множеств** $A_1, \ldots, A_n$ и обозначают $A_1 \times \ldots \times A_n$.

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \colon a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Если все множества A_i, $i = \overline{1, n}$, равны между собой, то указанное декартово произведение называют n-й **декартовой степенью множества** A и обозначают A^n.

При $n = 2$ получаем **декартов квадрат**, при $n = 3$ — **декартов куб** множества A.

Первая декартова степень любого множества A есть само множество A, т.е. $A^1 = A$.

Свойства декартова произведения :

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)\,;$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\,;$
- $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing\,.$

Докажем первое тождество *методом двух включений*.

$$
\begin{aligned}
(x,\, y) \in A\times(B \cup C) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x \in A \wedge (y \in B \cup C)) \\
&\Rightarrow (x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)) \\
&\Rightarrow ((x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)) \\
&\Rightarrow ((x,\, y) \in A \times B \vee (x,\, y) \in A \times C) \\
&\Rightarrow ((x,\, y) \in (A \times B) \cup (A \times C))
\end{aligned}
$$

Следовательно, $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.
Доказательство обратного включения аналогично.

2.2. Соответствия и бинарные отношения

Отображение f из множества A в множество B $(f\colon A \to B)$ считается заданным, если каждому элементу $x \in A$ сопоставлен **единственный** элемент $y \in B$.

Элемент $y \in B$, который отображением f сопоставляется элементу $x \in A$, называют **образом элемента** x **при отображении** f и обозначают $f(x)$.

Каждое отображение **однозначно** определяет множество **упорядоченных пар** $\{(x, y)\colon x \in A,\ y = f(x)\}$, являющееся подмножеством *декартова произведения* $A \times B$ множества A на множество B и называемое **графиком отображения** f.

Обратно, если в декартовом произведении $A \times B$ фиксировано подмножество упорядоченных пар f, такое, что для любых двух пар (x, y) и (x', y') множества f из $x = x'$ следует равенство $y = y'$, то f единственным образом определяет некоторое отображение из A в B.

Отображение f, элементу $x \in A$ сопоставляет такой элемент $y \in B$, что $(x, y) \in f$. Можем отождествить отображения и их графики.

Отображение есть подмножество декартова произведения.
Отображение f множества A в себя называют **тождественным**, если $f(x) = x$ при всех x из A.
В общем случае для отображения $f\colon A \to B$ может существовать несколько различных элементов множества A, образы которых совпадают.
Множество всех элементов $x \in A$, для которых $f(x) = y_0$, называют **прообразом элемента** $y_0 \in B$ **при отображении** f.
Прообраз числа a, $|a| \le 1$, при отображении $y = \sin x$ есть множество всех решений уравнения $\sin x = a$, т.е. множество

$$\{x\colon x = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x\colon x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Прообраз элемента $y_0 \in B$ может быть *пустым множеством*. Например, для числа 2 при отображении $y = \sin x$.

Множество A называют **областью определения отображения** f. Область определения отображения f будем обозначать $D(f)$

Множество всех $y \in B$, таких, что найдется $x \in A$, для которого $y = f(x)$, называют **областью значений отображения** f.

Область значений отображения f будем обозначать $R(f)$.

Отображение $f\colon A \to B$ называют **инъективным** (**инъекцией**), если каждый элемент из области его значений имеет единственный прообраз, т.е. из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.

Отображение $f\colon A \to B$ называют **сюръективным** (**сюръекцией**), если его область значений совпадает со всем множеством B.

Сюръективное отображение из A в B называют также **отображением** множества A **на** множество B.

Отображение $f\colon A \to B$ называют **биективным** (**биекцией**), если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Если отображение $f\colon A \to B$ биективно, то каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B и наоборот. Тогда говорят, что множества A и B находятся между собой во **взаимно однозначном соответствии**.

Пример 2.1.

а. Отображение, заданное равенством $\nu(n) = n + 1$, есть биекция множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на его подмножество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

б. Отображение $\nu(n) = 2n$ есть биекция множества всех натуральных чисел на множество всех четных натуральных чисел.

в. Любая *показательная функция* $y = a^x$, $a > 0$, есть биекция множества $\mathbb{R}$ всех действительных чисел на множество $\mathbb{R}^+$ всех положительных действительных чисел.

г. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ есть биекция множества $\mathbb{R}$ на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$.

Пусть задано отображение $f\colon A \to B$ и $C \subseteq A$ — некоторое множество.
Множество $f(C)$ элементов $y \in B$, таких, что $y = f(x)$, $x \in C$, называют **образом множества** C при отображении f.
Например, при отображении $y = \sin x$ отрезок $[0,\ 1]$ является образом множества (отрезка) $[0,\ \pi]$ (и любого объединения отрезков вида $[2\pi k,\ (2k+1)\pi]$ (для произвольного целого k)).
При $k = 0$ это можно записать следующим образом: $\sin([0,\ \pi]) = [0,\ 1]$.

Для любого отображения $f\colon A \to B$ образ $f(A)$ всего множества A есть область значений данного отображения.

Для произвольного множества $D \subseteq B$ множество всех элементов $x \in A$, таких, что $f(x) \in D$, называют **прообразом множества** D при отображении f.

Например, для любого действительного числа $a \in [0,\, 1)$ множество, которое является объединением всех отрезков вида $[\arcsin a + 2\pi k,\ \pi - \arcsin a + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, есть прообраз отрезка $[a,\, 1]$ при отображении $y = \sin x$.

Прообраз области значений произвольного отображения $f\colon A \to B$ совпадает со всем множеством A.

Множество всех отображений из A в B будем обозначать как B^A.

Понятие отображения можно обобщить.

1.**Частичное отображение**.

Пусть образ определен не для каждого элемента множества A, а для некоторых элементов этого множества (отказ от полной определенности отображения).

Мы пришли к понятию **частичного отображения**.

При этом подмножество всех элементов A, для которых определен образ, называют **областью определения** данного **частичного отображения**.

2.**Соответствие**.

Пусть данному $x \in A$ сопоставлен не один, а несколько образов (множество образов) в множестве B (отказ от однозначности отображения).

В этом случае говорят, что задано **соответствие**

Соответствие ρ из A в B будем обозначать $\rho(x)$ (по аналогии с обозначением $f(x)$ для отображений).

$\rho(x)$ есть элемент **подмножества** B .

График соответствия

Графиком соответствия ρ из множества A в множество B называется множество C_ρ упорядоченных пар (x, y), таких, что $x \in A$, $y \in B$ и элементы x, y связаны соответствием ρ, т.е. $y \in \rho(x)$.

Указанное множество C_ρ упорядоченных пар есть подмножество декартова произведения $A \times B$.

Обратно, фиксируя на декартовом произведении $A \times B$ какое-либо подмножество C, мы однозначно определяем некоторое соответствие ρ_C из A в B, а именно $\rho_C(x) = \{y\colon y \in B \wedge (x, y) \in C\}$.

Графиком соответствия ρ_C будет множество C, а соответствием, отвечающим графику C_ρ, будет ρ.

Можно отождествить соответствие с его графиком и считать, что соответствие из множества A в множество B есть некоторое подмножество ρ декартова произведения $A \times B$, т.е. $\rho \subseteq A \times B$.

При $\rho = \varnothing$ получаем **пустое соответствие**.

При ρ, совпадающем со всем указанным декартовым произведением, — **универсальное соответствие**.

$(x,\ y) \in \rho$ –упорядоченные пары, связанных соответствием ρ .

Область определения соответствия $\rho \subseteq A \times B$ из множества A в множество B — это множество всех первых компонент упорядоченных пар из ρ:

$$D(\rho) = \{x\colon (\exists y \in B)(x,\, y) \in \rho\}\,.$$

Область значения соответствия ρ — это множество всех вторых компонент упорядоченных пар из ρ:

$$R(\rho) = \{y\colon (\exists x \in A)(x,\, y) \in \rho\}\,.$$

$D(\rho) \subseteq A\,,\; R(\rho) \subseteq B\,.$

Соответствие из A в B называют **всюду определенным**, если его область определения совпадает с множеством A: $D(\rho) = A\,.$

Сечением соответствия $\rho \subseteq A \times B$ для фиксированного элемента $x \in A$ называют множество $\rho(x) = \{y\colon (x,\ y) \in \rho\}$.
Сечение соответствия $\rho(x)$ есть множество всех „образов“ элемента x при данном соответствии.

Соответствие $\rho \subseteq A \times A$ из множества A в себя, т.е. подмножество множества A^2, называют **бинарным отношением на множестве** A.

Пример 2.2. Отношение нестрогого неравенства на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Здесь каждому $x \in \mathbb{R}$ поставлены в соответствие такие $y \in \mathbb{R}$, для которых справедливо $x \leq y$.

Для произвольного бинарного отношения на некотором множестве часто используют запись $x \,\rho\, y$ вместо $(x, y) \in \rho$, говоря при этом об **элементах, связанных бинарным отношением** ρ.

Например, $x \leq y$, а не $(x, y) \in \leq$.

Бинарное отношение на множестве A, состоящее из всех пар (x, x), т.е. пар с совпадающими компонентами, называют **диагональю** множества A и обозначают id_A.
Диагональ A есть **тождественное отображение** A на себя.

Для наглядного изображения соответствий из A в B будем использовать два способа.

1. **График соответствия**

Соответствие интерпретируется как подмножество декартова произведения и изображается на плоскости как подмножество декартова квадрата числовых множеств.

2.**Граф соответствия**

Для конечных множеств A и B ,применяется построение **графа соответствия**.

Пример 2.3. Множество точек окружности $x^2 + y^2 = 1$ есть график бинарного отношения на множестве действительных чисел, состоящего из всех таких упорядоченных пар (x, y), что $y = \pm\sqrt{(1 - x^2)}$, (компоненты пары удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$.)
Область определения бинарного отношения есть отрезок $[-1, 1]$, область значения — также отрезок $[-1, 1]$.

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называют **функциональным по** второй (первой) **компоненте**, если для любых двух упорядоченных пар $(x, y) \in \rho$ и $(x', y') \in \rho$ из равенства $x = x'$ следует $y = y'$ (и из $y = y'$ следует $x = x'$).

Функциональность соответствия по второй компоненте означает, что, фиксируя в любой упорядоченной паре, принадлежащей данному соответствию, первую компоненту, мы однозначно определяем и вторую компоненту.

Соответствие, **функциональное** по **второй компоненте**, есть **отображение** (возможно, частичное).
Соответствие $f \subseteq A \times B$ является отображением из A в B, если и только если оно всюду определено (т.е. $D(f) = A$) и функционально по второй компоненте.
Отображение из A в B является инъекцией тогда и только тогда, когда оно функционально по первой компоненте.

Определение 2.4. Произвольное подмножество ρ декартова произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$ называют (**n -арным** или **n -местным**) **отношением** на множествах $A_1, \ldots, A_n$.
В случае если все множества $A_1, \ldots, A_n$ совпадают, т.е. $A_1 = \ldots = A_n = A$, говорят об **n -арном отношении на множестве** A.

Если ρ — n-арное отношение на множествах $A_1, \ldots, A_n$ и $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho$, то говорят об **элементах** $a_1, \ldots, a_n$, **связанных отношением** ρ.
При $n = 2$ получаем **бинарное отношение** на множествах A_1, A_2.
Это соответствие из A_1 в A_2, где множества A_1 и A_2 различны.
При $A_1 = A_2 = A$ получаем введенное ранее бинарное отношение на множестве, т.е. подмножество декартова квадрата A.
В общем случае (при произвольном $n \geq 2$) следует, строго говоря, различать термины „n-арное отношение“ и „n-арное отношение на множестве“.

Пусть n-арное отношение $\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ удовлетворяет условию: для любых двух кортежей $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \rho$ и $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) \in \rho$ из выполнения равенств $x_k = y_k$ для любого $k \neq i$ $(0 \leq k \leq n)$ следует, что и $x_i = y_i$.

Тогда отношение ρ называют **функциональным по** i**-й компоненте** $(1 \leq i \leq n)$.

Функциональность n-местного отношения по i-й $(i \leq n)$ компоненте равносильна условию, что, фиксируя все компоненты, кроме i-й, мы однозначно определяем и i-ю компоненту.

Пример 2.4. Рассмотрим на множестве V_3 геометрических векторов в пространстве тернарное (трехместное) отношение ρ, состоящее из всех упорядоченных троек $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ компланарных векторов.

Это отношение не является функциональным ни по одной компоненте, так как любым двум векторам соответствует бесконечно много векторов, образующих с ними компланарную тройку.

2.3. Операции над соответствиями

Поскольку **соответствия** можно считать множествами, то все операции над множествами (**пересечение, объединение, разность, дополнение** и т.д.) можно применить и к соответствиям.

Говоря о дополнении соответствия из A в B, мы имеем в виду дополнение до **универсального соответствия** из A в B, т.е. до **декартова произведения** $A \times B$.

Равенство соответствий можно трактовать как **равенство множеств**.
На соответствия можно распространить операции, определяемые для отображений.

Композиция соответствий

Композицией (произведением) соответствий $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq B \times C$ называют соответствие

$$\rho \circ \sigma = \{(x,\ y) \colon (\exists z \in B)((x,\ z) \in \rho) \wedge ((z,\ y) \in \sigma)\}\,. \qquad (2.1)$$

Пример 2.5. Соответствие ρ задано следующим образом:
Есть множество программистов $A = \{И, П, С\}$ и множество программ $B = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$.
Соответствие ρ из A в B, связывает программистов и разрабатываемые ими программы:

$$\rho = \{(И, n_1), (И, n_3), (И, n_5), (П, n_2), (П, n_4), (С, n_2), (С, n_5)\}.$$

Соответствие σ зададим как соответствие из множества программ $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ в множество заказчиков ПО $\{З_1, З_2, З_3, З_4\}$.
Пусть

$$\sigma = \{(n_1, З_3), (n_1, З_4), (n_2, З_1), (n_3, З_2), (n_4, З_4), (n_5, З_3)\}.$$

Построим композицию соответствий ρ и σ.

Имеем
$\rho(\mathit{И}) = \{n_1,\ n_3,\ n_5\}$,
$\sigma(n_1) = \{\mathit{З}_3,\ \mathit{З}_4\}$,
$\sigma(n_3) = \{\mathit{З}_2\}$,
$\sigma(n_5) = \{\mathit{З}_3\}$.

Получаем $\sigma(n_1) \cup \sigma(n_3) \cup \sigma(n_5) = \{\mathit{З}_2,\ \mathit{З}_3,\ \mathit{З}_4\}$ сечение композиции по элементу $\mathit{И}$.
Аналогично, получим
$(\rho \circ \sigma)(\mathit{П}) = \{\mathit{З}_1,\ \mathit{З}_4\}$
и $(\rho \circ \sigma)(C) = \{\mathit{З}_1,\ \mathit{З}_3\}$.

Операция композиции соответствий $\rho \subseteq A \times B$ и $\sigma \subseteq C \times D$ **не коммутативна**.

В общем случае $\rho \circ \sigma \neq \sigma \circ \rho$, поскольку $\rho \circ \sigma \subseteq A \times D$, а $\sigma \circ \rho \subseteq C \times B$.

Бинарное отношение на множестве является частным случаем соответствия. Для двух бинарных отношений ρ и σ, заданных на множестве A, их композиция $\rho \circ \sigma$ (2.1) как соответствий является бинарным отношением на том же множестве A.

В этом случае говорят о **композиции бинарных отношений на множестве** A.

Композицию $\rho \circ \rho$ бинарного отношения ρ на некотором множестве с самим собой называют **квадратом бинарного отношения** ρ и обозначают ρ^2.

В общем случае для двух бинарных отношений τ и φ также имеет место неравенство

$$\tau \circ \varphi \neq \varphi \circ \tau,$$

хотя обе композиции заданы на одном и том же множестве.

Пример 2.6.

Зададим на множестве $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ бинарные отношения

$\tau = \{(x,\ y)\colon x + 1 < y\}$,

$\varphi = \{(x, y)\colon |x - y| = 2\}$

Найдем композицию $\tau \circ \varphi$.

Имеем $\tau(1) = \{3,\ 4\}$, $\varphi(3) = \{1\}$ и $\varphi(4) = \{2\}$.

Следовательно, $(\tau \circ \varphi)(1) = \varphi(3) \cup \varphi(4) = \{1,\ 2\}$.

Далее $\tau(2) = \{4\}$, $\varphi(4) = \{2\}$ и $(\tau \circ \varphi)(2) = \{2\}$.

Так как $\tau(3) = \tau(4) = \varnothing$, то в итоге получим

$$\tau \circ \varphi = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)\}.$$

Свойства композиции соответствий.

1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$;

2) для любого соответствия ρ имеет место $\rho \circ \varnothing = \varnothing \circ \rho = \varnothing$;

3) $\rho \circ (\sigma \cup \tau) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau)$;

4) для любого бинарного отношения на множестве A имеет место равенство $\rho \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ \rho = \rho$.

5) $\rho \circ (\sigma \cap \tau) \subseteq \rho \circ \sigma \cap \rho \circ \tau$, обратное включение в общем случае не имеет места.

Роль **пустого соответствия** в операции композиции, определенной на множестве всех бинарных отношений на A, аналогична роли нуля при умножении чисел.

Диагональ множества A играет роль, аналогичную роли единицы.

Первые четыре свойства можно доказать *методом двух включений*.

Обратное соответствие

Соответствие, **обратное** к соответствию $\rho \subseteq A \times B$, есть соответствие из B в A, обозначаемое ρ^{-1} и равное, по определению,

$$\rho^{-1} = \{(y,\, x)\colon (x,\, y) \in \rho\}\,.$$

Пример 2.7.
Соответствие ρ, задано следующим образом:
Соответствие ρ из A в B, связывает множество программистов $A = \{\textit{И}, \textit{П}, C\}$ и разрабатываемые ими программы ($B = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$):

$$\rho = \{(\textit{И}, n_1), (\textit{И}, n_3), (\textit{И}, n_5), (\textit{П}, n_2), (\textit{П}, n_4), (C, n_2), (C, n_5)\}.$$

Обратное соответствие

$$\rho^{-1} = \{(n_1, \textit{И}), (n_2, \textit{П}), (n_2, C), (n_3, \textit{И}), (n_4, \textit{П}), (n_5, \textit{И}), (n_5, C)\}.$$

Свойства обратного соответствия

1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
2) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$.

Для бинарного отношения ρ на множестве A обратное соответствие есть бинарное отношение на том же множестве.

В этом случае говорят о **бинарном отношении** ρ^{-1} **на множестве** A , **обратном** к ρ .

Соответствия $\rho \circ \rho^{-1}$ и $\rho^{-1} \circ \rho$ в общем случае не совпадают.
Для бинарного отношения ρ на множестве A $\rho \circ \rho^{-1} \neq \rho^{-1} \circ \rho$
$\rho \circ \rho^{-1} \neq \mathrm{id}_A$ и $\rho^{-1} \circ \rho \neq \mathrm{id}_A$.

Ограничение отношения.

Любое бинарное отношение заданное на множестве A задает бинарное отношение на любом подмножестве B множества A.

Это отношение называется **сужением отношения** ρ **на подмножество** C и обозначается обозначаемое $\rho|_B$,

2.4. Специальные свойства бинарных отношений

Бинарное отношение ρ на множестве A называют **рефлексивным**, если *диагональ* множества A *содержится в* ρ: $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$, т.е. $x \rho x$ для любого элемента x множества A.

Если же $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$, то бинарное отношение ρ на множестве A называют **иррефлексивным**.

Указанные свойства бинарных отношений на множестве A называют **рефлексивностью** и **иррефлексивностью**.

Иррефлексивное отношение нерефлексивно, но не всякое нерефлексивное отношение иррефлексивно.

Иррефлексивному отношению на A не принадлежит ни один элемент диагонали id_A, а нерефлексивное отношение может содержать некоторые (но не все!) элементы диагонали.

Примеры рефлексивных бинарных отношений.
Бинарные отношения равенства и подобия на множестве геометрических фигур,все отношения равенства, нестрогого неравенства на множестве действительных чисел, **отношение** $\subseteq$ **включения** множеств.

Примеры иррефлексивных бинарных отношений.
Бинарное отношение на множестве действительных чисел, задаваемое строгим неравенством $x < y$, отношение $\subset$ *строгого включения* множеств.

Бинарное отношение ρ на множестве A называют:
1) **симметричным**, если для любых $x, y \in A$ из $x \rho y$ следует $y \rho x$;

2) **антисимметричным**, если для любых $x, y \in A$ из $x \rho y$ и $y \rho x$ следует, что $x = y$.

Соответствующие свойства бинарных отношений на множестве A называют **симметричностью** и **антисимметричностью**.

График симметричного бинарного отношения на множестве A симметричен относительно диагонали

Теорема 1. Бинарное отношение ρ на множестве A симметрично, если и только если *бинарное отношение на множестве* A, *обратное* к ρ, совпадает с ρ: $\rho^{-1} = \rho$.

Теорема 2. Бинарное отношение ρ на множестве A антисимметрично тогда и только тогда, когда $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$.

Для антисимметричного бинарного отношения на множестве A может иметь место равенство $\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing$.

Все бинарные отношения в геометрии типа равенства или подобия симметричны.

Если треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$, то и второй из этих треугольников подобен первому.

Бинарные отношения включения множеств ($A \subset B$, $A \subseteq B$), как строгие, так и не строгие, антисимметричны.

Бинарное отношение ρ на множестве A называют **транзитивным**, если для любых x, y, $z \in A$ из того, что $x \rho y$ и $y \rho z$, следует $x \rho z$. Соответствующее свойство бинарного отношения называют **транзитивностью**.

Пример 2.8. **а.** Пусть M — некоторое множество населенных пунктов. Зададим на нем бинарное отношение достижимости: из пункта A достижим пункт B, если есть дорога, по которой можно доехать из A в B. Это отношение транзитивно, поскольку если из пункта A можно доехать до пункта B, а из B есть дорога до C, то из A можно проехать в C.

б. Бинарное отношение неравенства на множестве действительных чисел не транзитивно, так как из того, что $x \neq y$ и $y \neq z$, вовсе не следует, что $x \neq z$.

Свойство транзитивного бинарного отношения.

Теорема 3. Бинарное отношение ρ на множестве A транзитивно тогда и только тогда, когда его *квадрат* содержится в нем, т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ($\rho \circ \rho = \rho^2$).

Данное свойство целесообразно использовать для проверки транзитивности бинарного отношения ρ на некотором множестве в тех случаях, когда построение квадрата ρ является более легкой задачей по сравнению с исследованием свойства транзитивности ρ на основе определения.

Материал для самостоятельного изучения

Построение композиции .

1. Композиция двух отображений (частный случай соответствий).

Пусть заданы отображения : f из A в B и g из B в C .

Композиция $f \circ g$ определяется как отображение из A в C , задаваемое формулой $y = g(f(x))$.

Тем самым задается **график отображения** $f \circ g$, т.е. множество **упорядоченных пар** (x, y) , таких, что $y = g(f(x))$.

При этом упорядоченная пара (x, y) будет принадлежать графику отображения $f \circ g$,

если и только если найдется элемент $z \in B$, такой, что $z = f(x)$ и $y = g(z)$.

График композиции отображений f и g есть

$$f \circ g = \{(x, y)\colon (\exists z)(z = f(x) \text{ и } y = g(z))\} = \\ = \{(x, y)\colon y = g(f(x))\} . \quad (2.2)$$

При построении композиции отображений обычно предполагается, что пересечение области значений отображения f и области определения отображения не пусто ($R(f) \cap D(g) \neq \varnothing$), поскольку в противном случае композиция была бы пуста.
Для отображений, не являющихся частичными, $R(f) \subseteq D(g)$, так как $D(g) = B$. Поэтому в данном случае пересечение $R(f) \cap D(g)$ всегда не пусто.
Если f и g — биекции, то и композиция их тоже будет биекцией.

2.Композиция двух соответствий $\rho \circ \sigma$.
Возьмем произвольный элемент $x \in D(\rho)$. (область определения $D(\rho)$ соответствия ρ не пуста)
Пусть **сечение** $\rho(x) \subseteq B$ соответствия ρ не пусто и найдется такой элемент $z \in \rho(x)$, что сечение $\sigma(z) \subseteq C$ также не пусто.
Тогда непустое множество $\{(x, t): t \in \sigma(z)\}$ будет подмножеством сечения соответствия $\rho \circ \sigma$ в точке x.
Сечением соответствия $\rho \circ \sigma$ в точке x будет непустое множество всех упорядоченных пар $(x, t) \in A \times C$ таких, что $x \in D(\rho)$, а $t \in \sigma(z)$ для некоторого $z \in \rho(x)$.
Нужно перебрать все элементы z из сечения $\rho(x)$.
Различие в построении композиции соответствий и композиции отображений заключается в том, что „промежуточный“ элемент z в общем случае не единственный и каждому такому элементу также ставится в соответствие не единственный элемент $y \in C$.

Обратное соответствие (дополнение).

Если $f\colon A \to B$ — отображение, то оно является соответствием. Обратное к f соответствие из B в A в общем случае не является отображением.

Соответствие f^{-1}, обратное к f, состоит из всех упорядоченных пар вида $(f(x), x)$, $x \in A$.

В общем случае могут найтись такие два различных элемента x и x', что $f(x) = f(x')$, то соответствие f^{-1} случае не будет *функционально по второй компоненте* и поэтому не будет отображением.

Если *отображение* f *инъективно*, то обратное соответствие есть *частичное отображение* из B в A.

Если **отображение** f **биективно**, то обратное соответствие является отображением из B в A, причем имеют место равенства

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_B \,.$$

Отображение f^{-1} в этом случае называют **отображением, обратным** к f.

ТЕОРЕМА 1 . Бинарное отношение ρ на множестве A симметрично, если и только если *бинарное отношение на множестве* A, *обратное* к ρ, совпадает с ρ: $\rho^{-1} = \rho$.

◀ Пусть бинарное отношение ρ на множестве A симметрично
Докажем, что $\rho^{-1} = \rho$.

$$(x,\,y) \in \rho^{-1} \Rightarrow (y,\,x) \in \rho \Rightarrow$$
$$\big(\text{в силу симметричности } \rho : (x,\,y) \in \rho \Rightarrow (y,\,x) \in \rho\big)$$
$$\Rightarrow (x,\,y) \in \rho \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq \rho$$

Аналогично доказывается включение $\rho \subseteq \rho^{-1}$.

Пусть $\rho = \rho^{-1}$.
Докажем, что бинарное отношение ρ на множестве A симметрично.

$$(x,\, y) \in \rho \Rightarrow (x,\, y) \in \rho^{-1} \Rightarrow$$

(по определению обратного отношения)

$$\Rightarrow (y,\, x) \in \rho.$$

Следовательно, ρ — симметричное бинарное отношение. ►

ТЕОРЕМА 2. Бинарное отношение ρ на множестве A антисимметрично тогда и только тогда, когда $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$.

◀ Пусть отношение ρ на множестве A антисимметрично,
т.е. $\forall (x,\, y) \in A : (x,\, y) \in \rho \wedge (y,\, x) \in \rho \Rightarrow x = y$
Докажем, что $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$.

$$\begin{aligned}(x,\, y) \in \rho \cap \rho^{-1} &\Rightarrow (x,\, y) \in \rho \wedge (x,\, y) \in \rho^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x,\, y) \in \rho \wedge (y,\, x) \in \rho \Rightarrow\end{aligned}$$

(по определению антисимметричности) $\Rightarrow x = y \Rightarrow (x,\, y) \in \mathrm{id}_A$

Пусть $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$.
Докажем, что отношение ρ на множестве A антисимметрично.
От противного: пусть отношение ρ на множестве A не антисимметрично,т.е. $\exists (x, y) : ((x, y) \in \rho) \wedge ((y, x) \in \rho) \wedge x \neq y$.

$$\begin{aligned} &((x,\ y) \in \rho \wedge (y,\ x) \in \rho^{-1}) \wedge x \neq y \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow ((x,\ y) \in (\rho \cap \rho^{-1})) \wedge (\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A)(\text{по условию}) \wedge \\ &\qquad \wedge (x,\ y) \notin \mathrm{id}_A(\text{т.к. условию} x \neq y) \end{aligned}$$

Получаем противоречие: $(x,\ y) \in \mathrm{id}_A$ и $(x,\ y) \notin \mathrm{id}_A$ одновременно.
▶

ТЕОРЕМА 3 . Бинарное отношение ρ на множестве A транзитивно тогда и только тогда, когда его *квадрат* содержится в нем, т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ($\rho \circ \rho = \rho^2$).

◀ Пусть бинарное отношение ρ на множестве A транзитивно, т.е. $\forall x, y, z \in A : (x,\ y) \in \rho \wedge (y,\ z) \in \rho \Rightarrow (x,\ z) \in \rho$.
Докажем, что: $\rho^2 \subseteq \rho$.

$$(x,\ z) \in \rho^2 \Rightarrow \exists y : (x,\ y) \in \rho \wedge (y,\ z) \in \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{(по определению транзитивности)}(x,\ z) \in \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho^2 \subseteq \rho$$

Пусть $\rho^2 \subseteq \rho$.
Докажем, что: бинарное отношение ρ транзитивно ($(x,\,y) \in \rho \wedge (y,\,z) \in \rho \Rightarrow (x,\,z) \in \rho$)

$$(x,\,y) \in \rho \wedge (y,\,z) \in \rho$$

(по определению композиции бинарных отношений)$(x,\,z) \in \rho^2$

$\Rightarrow$ (т.к.$\rho^2 \subseteq \rho$) $\qquad (x,\,z) \in \rho$

►

Бинарное отношение ρ на множестве A называется **плотным**, если для любых $x, y \in A$, отличных друг от друга и таких, что $(x,\ y) \in \rho$, найдется z, отличный и от x и от y, такой, что $(x,\ z) \in \rho$ и $(y,\ z) \in \rho$.
Пусть ρ — плотное бинарное отношение на множестве A.
Тогда

$$\forall x, y \in A : (x,\ y) \in \rho$$
$$\exists z \in A : x \neq z \wedge y \neq z : (x,\ z) \in \rho \wedge (z,\ y) \in \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{по определению композиции} (x,\ y) \in \rho^2$$

Если ρ плотно, то оно содержится в своем квадрате.

Для транзитивного бинарного отношения $\rho^2 \subseteq \rho$.

Если бинарное отношение ρ плотно и транзитивно одновременно, то $\rho = \rho^2$.