ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Ткачев С.Б., каф. ФН-12 МГТУ им. Н.Э. Баумана

ИУ5, 4 семестр, 2015 г.

Лекция 4. ТЕОРЕМА "О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ"

4.1. Индуктивное упорядоченное множество

Определение 4.1. Упорядоченное множество $(M, \leq)$ называют **индуктивным**, если:

1) оно содержит наименьший элемент;

2) всякая неубывающая последовательность элементов этого множества имеет точную верхнюю грань.

Пример 4.1. Множество всех подмножеств некоторого множества по отношению включения будет индуктивным.

Наименьший элемент — $\varnothing$.

$$\sup\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Определение 4.2. Пусть $(M_1, \leq)$ и $(M_2, \preccurlyeq)$ — индуктивные упорядоченные множества.

Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ одного индуктивного упорядоченного множества в другое называют **непрерывным**, если для любой неубывающей последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ элементов множества M_1 образ ее точной верхней грани равен точной верхней грани последовательности образов $f(a_1), \ldots, f(a_n), \ldots$, т.е. справедливо равенство

$$f(\sup a_n) = \sup f(a_n).$$

Определение 4.3. Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ упорядоченных множеств $(M_1, \leq)$ и $(M_2, \preccurlyeq)$ называют **монотонным**, если для любых $a, b \in M_1$ из $a \leq b$ следует $f(a) \preccurlyeq f(b)$.

Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет монотонной в смысле определения 4.3 тогда и только тогда, когда она является неубывающей .

Теорема 1. Всякое непрерывное отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое монотонно.

◀ Пусть f — непрерывное отображение индуктивного упорядоченного множества $(M_1, \leq)$ в индуктивное упорядоченное множество $(M_2, \preccurlyeq)$.

Пусть $a, b \in M_1$ и $a \leq b$.
Образуем последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где $x_1 = a$, а $x_n = b$, $n \geq 2$.
Эта последовательность неубывающая.
Для нее $\sup x_n = \sup \{a, b\} = b$.
В силу непрерывности отображения f

$$f(b) = f(\sup x_n) = f(\sup \{a, b\}) = \sup \{f(a), f(b)\},$$

откуда следует, что $f(a) \preccurlyeq f(b)$. ▶

4.2. Теорема о неподвижной точке.

Наиболее важны непрерывные отображения индуктивного упорядоченного множества в себя.

Определение 4.4. Элемент a множества A называют *неподвижной точкой отображения* $f\colon A \to A$, если $f(a) = a$.

Элемент a упорядоченного множества M называют **наименьшей неподвижной точкой отображения** $f\colon M \to M$, если он является наименьшим элементом множества всех неподвижных точек отображения f.

Утверждение 4.1. Если у неубывающей последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$ отбросить любое конечное число начальных членов, то ее точная верхняя грань не изменится.

Теорема 2 (теорема о неподвижной точке). Любое непрерывное отображение f индуктивного упорядоченного множества $(M, \leq)$ в себя имеет наименьшую неподвижную точку.

◀ $\mathbb{O}$ — наименьший элемент множества M.

Полагаем

$$f^0(x) = x,$$

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \quad \text{для любого } n > 0\,.$$

Рассмотрим последовательность элементов M

$$\{f^n(\mathbb{O})\}_{n\geq 0} = \{\mathbb{O},\ f(\mathbb{O}),\ f(f(\mathbb{O})),\ \ldots,\ f^n(\mathbb{O}),\ \ldots\}. \tag{4.1}$$

Докажем, что последовательность (4.1) неубывающая.

Используем метод математической индукции.

Для наименьшего элемента $\mathbb{O}$ множества M имеем

$$\mathbb{O} = f^0(\mathbb{O}) \le f(\mathbb{O}).$$

Пусть для некоторого натурального n верно соотношение

$$f^{n-1}(\mathbb{O}) \le f^n(\mathbb{O}).$$

Отображение f монотонно (теорема 1), поэтому

$$f^n(\mathbb{O}) = f(f^{n-1}(\mathbb{O})) \le f(f^n(\mathbb{O})) = f^{n+1}(\mathbb{O}),$$

т.е. соотношение верно и для номера $n+1$.

Согласно методу математической индукции,

$$f^n(\mathbb{O}) \leq f^{n+1}(\mathbb{O}) \text{ для любого } n \in \mathbb{N},$$

т.е. последовательность (4.1) неубывающая.

Следовательно, по определению индуктивного упорядоченного множества, она имеет точную верхнюю грань

$$a = \sup_{n \geq 0} f^n(\mathbb{O}). \tag{4.2}$$

В силу непрерывности f получаем

$$f(a) = f\left(\sup_{n \geq 0} f^n(\mathbb{O})\right) = \sup_{n \geq 0} f(f^n(\mathbb{O})) = \sup_{n \geq 0} f^{n+1}(\mathbb{O}).$$

Но

$$\sup_{n \geq 0} f^{n+1}(\mathbb{O}) = \sup\{f^1(\mathbb{O}),\ f^2(\mathbb{O}),\ \ldots\} = \sup_{n \geq 1} f^n(\mathbb{O}) = a.$$

Следовательно, a является неподвижной точкой отображения f .

Докажем, что найденная неподвижная точка является наименьшей.

Пусть для некоторого $y \in M$ $f(y) = y$, т.е. y — другая неподвижная точка.

$\mathbb{O} \leq y$ (поскольку $\mathbb{O}$ — *наименьший элемент множества* M.)

Отображение f непрерывно и монотонно.
Следовательно, $f(\mathbb{O}) \leq f(y) = y$, $f(f(\mathbb{O})) \leq f(f(y)) = y$ и т.д.

То есть, для любого $n \geq 0$ $f^n(\mathbb{O}) \leq y$.

Элемент y есть верхняя грань последовательности $\{f^n(\mathbb{O})\}_{n \geq 0}$.

Элемент a — точная верхняя грань (наименьший элемент на множестве всех верхних граней этой последовательности), поэтому $y \geq a$.

Показано, что произвольная неподвижная точка отображения f не меньше элемента a — неподвижной точки отображения f. Следовательно, a — наименьшая неподвижная точка отображения f.

►

Поиск неподвижной точки отображения $f\colon M \to M$ можно рассматривать как задачу поиска наименьшего решения уравнения

$$x = f(x).$$

Доказательство теоремы о неподвижной точке конструктивное: оно дает метод получения неподвижной точки.

Для ее нахождения надо построить последовательность

$$\{\mathbb{O},\ f(\mathbb{O}),\ \ldots,\ f^n(\mathbb{O}),\ \ldots\}$$

и найти ее точную верхнюю грань.

Пример 4.2. Вычисление наименьшей неподвижной точки.

Отрезок $[0,\ 1]$ с естественным числовым порядком $\leq$ - это индуктивное упорядоченное множество.

Зададим на этом множестве отображение $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ и рассмотрим уравнение $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Для индуктивного упорядоченного множества $([0,\ 1], \leq)$ монотонная функция $f\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ — непрерывна.

Для любой неубывающей последовательности $\{x_n\}$ на множестве $[0,\ 1]$ справедливо равенство $\sup\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

В силу непрерывности функции f *в смысле определения математического анализа* имеем

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Так как функция f монотонна, то $\{f(x_n)\}_{n\geq 0}$ — неубывающая последовательность .

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(x_n)$$

В итоге получаем

$$f(\sup x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(x_n).$$

Следовательно, правая часть данного уравнения непрерывна.

Наименьшим элементом рассматриваемого множества является число 0.

Вычисляем:

$$f^0(0) = 0,$$
$$f^1(0) = 1/4,$$
$$f^2(0) = (1/2) \cdot (1/4) + 1/4 = 3/8,$$
$$f^3(0) = (1/2) \cdot (3/8) + 1/4 = 7/16,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

получая последовательность приближений к наименьшей неподвижной точке.

Можно проверить с помощью метода математической индукции, что

$$f^n(0) = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}, n \in \mathbb{N}.$$

Предел этой последовательности равен $1/2$.

Таким образом, наименьшая неподвижная точка отображения f, определяемого правой частью уравнения, равна $1/2$.

Это единственная в данном случае неподвижная точка отображения f.

Материал для самостоятельного изучения. Упорядоченные множества

Пример. На числовой прямой с „выколотой“ точкой b для полуинтервала $[a,\ b)$ множество верхних граней есть $(b,\ +\infty)$, но точной верхней грани нет.

Упорядоченное множество $(M,\ \leq)$ называют **вполне упорядоченным**, если его любое непустое подмножество имеет наименьший элемент.
Множество натуральных чисел с отношением естественного числового порядка вполне упорядоченное.
Множество целых чисел не вполне упорядоченное, поскольку оно не имеет наименьшего элемента.
Аналогично множества рациональных и действительных чисел не являются вполне упорядоченными.

Для **упорядоченных множеств** справедлив принцип двойственности. Пусть $(M, \leq)$ — произвольное упорядоченное множество.

Тогда любое утверждение, доказанное для порядка $\leq$, останется справедливым для двойственного порядка $\geq$, если в нем:

1) порядок $\leq$ заменить на порядок $\geq$ и наоборот;
2) наименьший (минимальный) элемент заменить наибольшим (максимальным) элементом и наоборот;
3) $\inf$ заменить на $\sup$ и наоборот.

Например, если для некоторого $a \in M$ и для $B \subseteq M$ мы доказали, что $a = \sup B$ при заданном отношении порядка, то для двойственного порядка $a = \inf B$.

Взаимно двойственные определения: если в любом определении, связанном с упорядоченным множеством, произвести взаимные замены согласно принципу двойственности, то получится новое определение, называемое двойственным к исходному. ∎

Определение наибольшего (максимального) элемента множества двойственно к определению наименьшего (минимального) элемента, и наоборот.

Наглядное представление упорядоченных множеств.

Упорядоченное множество можно графически изобразить в виде **диаграммы Хассе**.

Диаграммы Хассе для упорядоченных множеств делителей чисел 2, 6, 30 по отношению делимости.

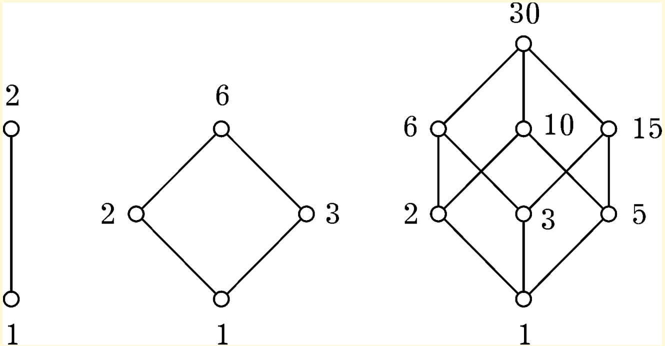

Рис. 1

Утверждение 4.1

Если у неубывающей последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$ отбросить любое конечное число начальных членов, то ее точная верхняя грань не изменится.

◀ $a = \sup_{n\geq 0} x_n \Rightarrow \forall n\; a \geq x_n\; n \geq 0$.

Зафиксируем произвольное $k > 0$.

$\forall n \geq k\; a \geq x_n$

т.е. a будет верхней гранью подпоследовательности

Докажем, что a является **точной** верхней гранью этой подпоследовательности.

Пусть b — другая верхняя грань , $\forall n \geq k \; b \geq x_n$.

Последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *неубывающая*, следовательно, $x_p \leq x_k$ для каждого $p = \overline{0,\, k-1}$.

$x_k \leq b \Rightarrow x_p \leq b$ (транзитивность отношения порядка)

$\Rightarrow \forall n \geq 0 \; b \geq x_n$ т.е. b есть верхняя грань всей последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$.

Поскольку $a = \sup\limits_{n\geq 0} x_n$, то $a \leq b$ и $a = \sup\limits_{n\geq k>0} x_n$.

Следовательно, a — **точная** верхняя грань подпоследовательности $\{x_n\}_{n\geq k}$. ▶