ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ИУ5, 3 семестр, 2015 г.

Лекция 3. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ПОРЯДКА

3.1. Отношения эквивалентности

Пусть A — произвольное множество.
Семейство $(B_i)_{i\in I}$ **непустых** и попарно **не пересекающихся** множеств называют **разбиением** множества A, если
объединение множеств семейства $(B_i)_{i\in I}$ равно A, т.е. $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = A$.

Сами множества B_i называют **элементами разбиения** $(B_i)_{i\in I}$.

Пример. Рассмотрим множество точек плоскости. Семейство параллельных прямых образует разбиение плоскости.
Элементом разбиения является множество точек каждой прямой.

Пусть ρ — *эквивалентность* на множестве A и $x \in A$.

Классом эквивалентности по отношению ρ называют множество всех элементов A, *эквивалентных* x, т.е. множество $\{y\colon y\,\rho\,x\}$.

Класс эквивалентности обозначают $[x]_\rho$.

Для любого элемента $x \in A$ класс эквивалентности не пуст в силу рефлексивности , так как $x \in [x]_\rho$.

Фактор-множеством множества A по отношению ρ называют множество всех классов эквивалентности по данному отношению эквивалентности ρ на множестве A и обозначают A/ρ.

Утверждение 3.1. Любые два класса эквивалентности по отношению ρ либо не пересекаются, либо совпадают.

◀ Пусть два класса эквивалентности $[x]_\rho$ и $[y]_\rho$ имеют общий элемент $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$.

Тогда $z \,\rho\, x$ и $z \,\rho\, y$.

В силу *симметричности* отношения ρ : $x \,\rho\, z$, тогда $x \,\rho\, z$ и $z \,\rho\, y$.

В силу *транзитивности* отношения ρ получим $x \,\rho\, y$.

Пусть

$$h \in [x]_\rho \Rightarrow (h \,\rho\, x \wedge x \,\rho\, y) \Rightarrow h \,\rho\, y \Rightarrow h \in [y]_\rho.$$

Это верно для любого элемента $h \in [x]_\rho$.

Обратно,
если

$$h \in [y]_\rho \Rightarrow (h\,\rho\,y) \wedge (x\,\rho\,y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\text{ то в силу симметричности}\rho)\ (h\,\rho\,y) \wedge (y\,\rho\,x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\text{в силу транзитивности})\ h\,\rho\,x \Rightarrow h \in [x]_\rho \Rightarrow [x]_\rho = [y]_\rho.$$

►

Теорема 1. Для любого *отношения эквивалентности* на множестве A множество классов эквивалентности образует разбиение множества A. Обратно, любое разбиение множества A задает на нем отношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности совпадают с элементами разбиения.

◀ Отношение эквивалентности ρ на множестве A определяет некоторое разбиение этого множества.
Каждый элемент множества A принадлежит некоторому классу эквивалентности по отношению ρ т.к. для любого $x \in A$ справедливо $x \in [x]_\rho$ ($x \rho x$).
Множество всех классов эквивалентности по отношению ρ образует разбиение исходного множества A.

Т.о., любое отношение эквивалентности однозначно определяет некоторое разбиение.

Пусть $(B_i)_{i\in I}$ — некоторое разбиение множества A.
Рассмотрим отношение ρ, такое, что

$$x\,\rho\,y \Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in B_i) \wedge (y \in B_i).$$

Введенное отношение ρ рефлексивно и симметрично.
Если для любых x, y и z имеет место $x\,\rho\,y$ и $y\,\rho\,z$,то x, y и z в силу определения отношения ρ принадлежат одному и тому же элементу B_i разбиения.
Следовательно, $x\,\rho\,z$ и отношение ρ транзитивно.
Таким образом, ρ — эквивалентность на A. ▶

Любая эквивалентность определяет единственное разбиение и наоборот.

Пример 3.1. На множестве **целых чисел** $\mathbb{Z}$ определим отношение $\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}$ **отношение равенства по модулю** k , где $k \in \mathbb{N}$:
$x \equiv_{(\mathrm{mod\,k})} y$, если и только если $x - y$ делится на k .

$\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}$ — это отношение эквивалентности.

Равенство чисел m и n по модулю k означает, что при делении на k эти числа дают одинаковые остатки.

Различных остатков может быть ровно $k : 0\,,\ 1\,, \ldots,\ k-1$.

Получаем ровно k попарно различных классов эквивалентности:
$[0]_{\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}}$, $[1]_{\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}}$, $\ldots$, $[k-1]_{\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}}$,
где класс $[r]_{\equiv_{(\mathrm{mod\,k})}}$ состоит из всех целых чисел, дающих при делении на k остаток r .

3.2. Упорядоченные множества.

Множество вместе с заданным на нем *отношением порядка* называют **упорядоченным множеством**.

Отношение порядка будем обозначать $\leq$ (или значками $\preccurlyeq$, $\sqsubseteq$ и т.п., похожими на $\leq$).
Множество M с заданным на нем отношением порядка $\leq$ будем записывать как пару $(M, \leq)$.

Каждому отношению порядка $\leq$ на множестве M можно сопоставить следующие отношения.

1. Отношение $<$, получается из исходного отношения порядка $\leq$ выбрасыванием всех элементов диагонали id_M.

$$(x < y)\,\forall\, x, y \in M \Leftrightarrow ((x \leq y) \wedge (x \neq y))$$

"Элемент x строго меньше элемента y."

Бинарное отношение $<$ на множестве M —*отношение строгого порядка*. Оно *иррефлексивное*, *антисимметричное* и *транзитивное*.

2. **Двойственный порядок**. Это бинарное отношение на множестве M, обратное к отношению $\leq$.

Обозначение $\geq$.

Тогда для любых x, y условие $x \geq y$ равносильно тому, что $y \leq x$. Отношение $\geq$ тоже является отношением порядка. Отношение строгого порядка,ассоциированное с $\geq$, обозначим $>$.

3. Отношение доминирования $x \lhd y$.

Для двух элементов x и y, по определению, $x \lhd y$ тогда и только тогда, когда x строго меньше y и не существует такого элемента z, что $x < z < y$.

Отношение $x \lhd y$ называют **отношением доминирования** (или просто **доминированием**), ассоциированным с отношением порядка $\leq$.

"Элемент y доминирует над элементом x".

Отношение доминирования иррефлексивно, антисимметрично, но не транзитивно.

Пример 3.2. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ задано отношение делимости

По отношению делимости 15 доминирует над 3 и 5, но 20 не доминирует над 5, так как существует „промежуточный“ элемент — 10, делитель 20, который делится на 5, но не равен ни 20, ни 5.

3.3. Упорядоченные множества

Рассмотрим упорядоченное множество $(M, \leq)$.

Элементы x и y упорядоченного множества $(M, \leq)$ называют **сравнимыми** по отношению порядка $\leq$, если $x \leq y$ или $y \leq x$.

В противном случае элементы x и y называются **несравнимыми**.

Упорядоченное множество, все элементы которого попарно сравнимы, называют **линейно упорядоченным**, а соответствующее отношение — **отношением линейного порядка** (или просто **линейным порядком**).

Линейно упорядоченное подмножество называют **цепью**.

Любое подмножество попарно не сравнимых элементов данного упорядоченного множества называют **антицепью**.

Пример 3.3. **а.** Отношение естественного числового порядка на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел является отношением линейного порядка, поскольку для любых двух чисел a, b имеет место или неравенство $a \leq b$, или неравенство $b \leq a$.

б. Отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$ не является линейным порядком. #

Пусть $(A, \leq)$ — упорядоченное множество.

Элемент $a \in A$ называют **наибольшим элементом** множества A, если для всех $x \in A$ выполняется неравенство $x \leq a$.

Элемент b называют **максимальным элементом** множества A, если для всякого $x \in A$ имеет место одно из двух: или $x \leq b$, или x и b не сравнимы.

Наименьший элемент упорядоченного множества A — это такой его элемент a, что $a \leq x$ для каждого $x \in A$.

Минимальный элемент — это такой элемент $b \in A$, что для любого $x \in A$ элементы b и x не сравнимы или $b \leq x$.

Утверждение 3.2. Наибольший (наименьший) элемент множества, если он существует, является единственным.

◀ Пусть a и a' — наибольшие элементы A по отношению порядка $\leq$.
Для всякого $x \in A$ выполняется $x \leq a$ и $x \leq a'$.
В частности, $a' \leq a$ и $a \leq a'$. Следовательно, $a = a'$ (антисимметричность отношения порядка). ▶

Единственность наименьшего элемента доказывается аналогично.
Максимальных (минимальных) элементов может быть сколько угодно.

Пример 3.4.

Отношение порядка на множестве точек плоскости с фиксированной системой координат:

$(a,\ b) \leq (c, d)$, если и только если $a \leq c$ и $b \leq d$.

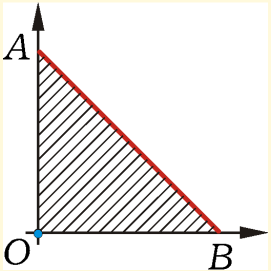

Рис. 1

Рассмотрим множество точек треугольника **OAB** . Точка с координатами $(0,\ 0)$ является наименьшим элементом этого множества.

Максимальными элементами являются все точки, лежащие на стороне AB . Наибольшего элемента нет. #

Пусть $(A, \leq)$ — упорядоченное множество и $B \subseteq A$.
Элемент $a \in A$ называется **верхней** (соответственно **нижней**) **гранью множества** B , если для всех элементов $x \in B$ имеет место $(x \leq a)$ (соответственно $(x \geq a)$).

Точной верхней гранью B называют наименьший элемент множества всех верхних граней множества B и обозначают $\sup B$
Точной нижней гранью B называют наибольший элемент множества всех нижних граней и обозначают($\inf B$).

Элементы $\sup B$ и $\inf B$ могут не принадлежать множеству B .
(наибольший и наименьший элементы множества B всегда принадлежат множеству B)
Точная верхняя (нижняя) грань множества существует не всегда.

Пример 3.5.

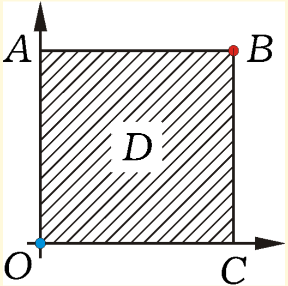

Рис. 2

Рассмотрим множество D точек прямоугольника **OABC** с отношением порядка $(a,\ b) \leq (c, d)$, если и только если $a \leq c$ и $b \leq d$.
Точка O является точной нижней гранью, а точка B — точной верхней гранью этого множества. Обе точки принадлежат множеству.

Пример 3.6.

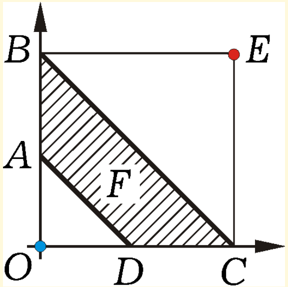

Рис. 3

Рассмотрим множество **F** с тем же отношением порядка.
Точная нижняя грань (точка O) и точная верхняя грань (точка E) множества F существуют, но не принадлежат множеству.

Индуктивное упорядоченное множество

Последовательность $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ элементов упорядоченного **множества** называют **неубывающей**, если для каждого $i \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_i \le x_{i+1}$.

Элемент a упорядоченного множества $(M, \le)$ называют **точной верхней гранью последовательности** $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, если он есть точная верхняя грань множества всех членов последовательности.

Определение 3.1. Упорядоченное множество $(M, \leq)$ называют **индуктивным**, если:

1) оно содержит наименьший элемент;

2) всякая неубывающая последовательность элементов этого множества имеет точную верхнюю грань.

Пример 3.7. Множество всех подмножеств некоторого множества по отношению включения будет индуктивным.

Наименьший элемент — $\varnothing$.

$$\sup\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Материал для самостоятельного изучения

Отношение эквивалентности

Пример 3.8. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел зададим отношение $a \equiv_{(\mathrm{mod}\,1)} b$, полагая, что числа a и b равны по модулю 1 тогда и только тогда, когда число $a - b$ является целым.

Из определения следует, что каждое число по модулю 1 равно своей дробной части

Так как отношение $\equiv_{(\mathrm{mod}\,1)}$ определено через равенство, все свойства отношения эквивалентности для него выполняются.

Каждый класс эквивалентности будет содержать числа с равными дробными частями.

Каждый класс эквивалентности по данному отношению однозначно определяет некоторое число из полуинтервала $[0,\ 1)$.

Наоборот, каждому числу $\gamma \in [0,\ 1)$ однозначно сопоставляется класс эквивалентности, состоящий из всех действительных чисел, дробная часть которых равна γ .

Таким образом, фактор-множество $\mathbb{R}/\equiv_{(\mathrm{mod}\,1)}$ и полуинтервал $[0,\ 1)$ на числовой прямой находятся во взаимно однозначном соответствии.

Связь между понятиями эквивалентности и отображения.

Для любого отношения эквивалентности ρ на множестве A можно определить отображение $f_\rho\colon A \to A/\rho$, сопоставив каждому $x \in A$ содержащий его класс эквивалентности.
$f_\rho(x) = [x]_\rho$
Это *отображение сюръективно*, так как каждый элемент множества A принадлежит некоторому классу эквивалентности, т.е. для каждого $[x]_\rho \in A/\rho$ справедливо $[x]_\rho = f_\rho(x)$.

Отображение f_ρ, определенное таким образом, называют **канонической сюръекцией** множества A.

Любое отображение однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности.

Теорема 2. Пусть $f\colon A \to B$ — произвольное отображение.На множестве A определим отношение ρ_f : $(x, y) \in \rho_f$, если и только если $f(x) = f(y)$. Это отношение ρ_f является отношением эквивалентности, причем существует биекция фактор-множества A/ρ_f на множество $f(A)$.

◀ Рефлексивность : $f(x) = f(x)$;
Симметричность : $f(x) = f(y)$ и $f(y) = f(x)$;
Транзитивность : $f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$;
т.е. ρ_f — эквивалентность.

$\varphi\colon A/\rho_f \to f(A)\ \varphi([x]_{\rho_f}) = f(x)$.

Каждому классу эквивалентности поставлен в соответствие единственный элемент $y \in f(A)$ (отображение определено корректно).
φ — биекция (инъекция и сюръекция одновременно).
Пусть классы эквивалентности $[x]_{\rho_f}$ и $[y]_{\rho_f}$ не совпадают.
В силу теоремы 1 они не пересекаются, т.е. x не эквивалентно y.
Из определения отношения ρ_f следует, что $f(x) \neq f(y)$.
Таким образом, φ — инъекция.
Если элемент $u \in f(A)$, то найдется такой элемент $x \in A$, что $u = f(x) = \varphi([x]_{\rho_f})$, т.е. φ — сюръекция.
Итак, φ — биекция. ▶

Следовательно, в силу доказанных теорем 1 и 2 существует связь между тремя понятиями — отображением множества, отношением эквивалентности на множестве и разбиением множества.

Но **неверно**, что существует взаимно однозначное соответствие между отображениями и отношениями эквивалентности.
Два разных отображения могут определять одно и то же разбиение отображаемого множества, тем самым задавая на нем одно и то же отношение эквивалентности.

Пример 3.9.
a. Любое биективное отображение $f\colon A \to B$ задает на A одно и то же разбиение — тривиальное разбиение на одноэлементные множества.
b. Тождественное отображение множества целых чисел и отображение, сопоставляющее каждому целому n число $n+1$, задают одинаковые разбиения множества целых чисел.

Отношение порядка

Пример 3.10. Рассмотрим множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественным числовым порядком.

Пусть $a < c$.
Для любых a и c найдется такое b, что $a < b < c$.
Отношение порядка на множестве действительных чисел является плотным.
Поэтому отношение доминирования будет пустым.

Пустым будет и отношение доминирования, ассоциированное с естественным числовым порядком на множестве рациональных чисел.

На множестве целых чисел с естественным числовым порядком отношение доминирования не пусто.
$1 \lhd 2$, $-5 \lhd -4$;
между 1 и 2 не существует „промежуточный“ элемент.
Записывать $1 \lhd 3$ **неверно**, что, поскольку между единицей и тройкой существует „промежуточный“ элемент — двойка.