

1 Nombres de Bell

Abstract

On note b_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On montre que

$$b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \quad (1)$$

Par convention, on pose $b_0 = 1$. On pourrait débattre philosophiquement du nombre de partitions du vide mais tout est plus simple avec $b_0 = 1$.

Le dénombrement de ces partitions se fera principalement par une étude de fonctions génératrices.

Définition 1. Soit a une suite. On appelle fonction génératrice exponentielle de a la série formelle

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n. \quad (2)$$

Les fonctions génératrices sont des outils puissants. En particulier, elles caractérisent complètement une suite, i.e.

$$A = C \iff \forall n, a_n = c_n. \quad (3)$$

Lemme 1. Soit u, v deux suites et U, V leur FGE. On a

$$U(x)V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k v_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}. \quad (4)$$

Proof.

$$U(x)V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} \frac{v_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n \quad (5)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n-k)!k!} u_k v_{n-k} \right) x^n \quad (6)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k v_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} \quad (7)$$

□

Dans ce genre de dénombrement, on exhibe une relation de récurrence pour exprimer différemment la fonction génératrice.

Proposition 1.

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k. \quad (8)$$

Proof. On considère $\{1, \dots, n+1\}$. Sans perte de généralité, on suppose que $n+1$ est dans une partition non-vidé P . On fixe ensuite $k+1$ la taille de P . Il y a k éléments à choisir parmi n pour former P . Il reste $n-k$ éléments à partitionner. On a donc b_{n-k} façons de le faire par définition. On somme sur k pour obtenir le résultat.

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}. \quad (9)$$

Il suffit de renverser la somme et d'utiliser la symétrie du binôme pour conclure. \square

Proposition 2. On a

$$B'(x) = B(x)e^x. \quad (10)$$

Proof.

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} x^n \quad (11)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k x^n \quad (12)$$

$$(13)$$

Cela peut être vu comme une convolution de b avec la suite constante égale à 1.

$$B'(x) = B(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = B(x)e^x. \quad (14)$$

\square

Théorème 1. On a

$$b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \quad (15)$$

Proof. Il suffit de résoudre l'équation différentielle:

$$B'(x) = B(x)e^x, \quad B(0) = 1. \quad (16)$$

La solution est unique et est donnée par

$$B(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}. \quad (17)$$

On peut ensuite écrire le terme de droite sous la forme d'une série exponentielle :

$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^x)^n \quad (18)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xn)^k}{k!} \quad (19)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!n!} x^k \quad (20)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^k. \quad (21)$$

Donc e^{e^x} est la série exponentielle de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$. On a donc, par égalité des fonctions génératrices,

$$b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \quad (22)$$

□

La présence d'une somme infinie dans la formule peut être considérée comme moralement gênante. On peut cependant exprimer b_n à l'aide d'une somme finie. D'ailleurs, une première manière de le faire est de calculer une approximation (pas trop mauvaise) de la somme puis de prendre la partie entière. Avec l'inconvénient que l'on ne sait pas jusqu'où calculer. On montre dans la prochaine proposition qu'il suffit de le faire jusqu'à $2n - 1$.

Proposition 3. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On a

$$b_n = \left\lfloor \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{k^n}{n!} \right\rfloor + 1. \quad (23)$$

Proof. On commence par montrer le lemme suivant.

Lemme 2. Soit $n \geq 1$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2n + 1. \quad (24)$$

du lemme. Pour $n = 1, 2 < 3$. On considère le résultat vrai pour n , $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n <$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2n + 1$. On a

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \quad (25)$$

$$< (2n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \quad (26)$$

$$= 2n+1 + \frac{2n+1}{n+1} \quad (27)$$

$$= 2n+1 + 2 - \frac{1}{n+1} \quad (28)$$

$$< 2(n+1) + 1. \quad (29)$$

□

Remarquons ensuite que $(2n)^n \leq (2n)!$. En effet, on a

$$\frac{(2n)^n}{(2n)!} = \underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{\leq 2} \underbrace{\frac{n^n}{(n+1) \dots 2n}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq 1. \quad (30)$$

On remarquera ensuite que $\left(\frac{K^n}{K!}\right)_{K \geq 2n}$ est décroissante et donc que

$$\forall K \geq 2n, \frac{K^n}{K!} \leq \frac{(2n)^n}{(2n)!} \leq 1. \quad (31)$$

On considère maintenant $K \geq 2n$. On a pour $j \geq 0$,

$$\frac{(K+j)^n}{(K+j)!} \leq \frac{1}{j!} \frac{K^n}{K!}. \quad (32)$$

En effet, remarquons que

$$\frac{(K+j)!}{K!j!} = \frac{1}{K!} (K+j) \dots (j+1) \quad (33)$$

$$= \left(\frac{K}{K} + \frac{j}{K}\right) \dots \left(\frac{1}{1} + \frac{j}{1}\right) \quad (34)$$

$$= \left(1 + \frac{j}{K}\right) \dots (1+j) \quad (35)$$

$$\geq \left(1 + \frac{j}{K}\right)^K \quad (36)$$

$$\geq \left(1 + \frac{j}{K}\right)^n \quad (37)$$

On arrange alors

$$\frac{(K+j)^n}{K^n} \leq \frac{(K+j)!}{j!K!}. \quad (38)$$

Et finalement l'inégalité souhaitée. On déduit de nos résultats précédents :

$$\frac{(K+j)^n}{(K+j)!} \leq \frac{1}{j!} \frac{K^n}{K!} \leq \frac{1}{j!} \quad (39)$$

On peut alors conclure notre résultat :

$$b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \quad (40)$$

$$= \frac{1}{e} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{k^n}{k!} + \sum_{k=K}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \quad (41)$$

$$= \frac{1}{e} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \frac{k^n}{k!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(K+j)^n}{(K+j)!} \right) \quad (42)$$

$$(43)$$

On a alors

$$0 < b_n - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^K \frac{k^n}{k!} \leq 1. \quad (44)$$

D'où

$$b_n = \left\lfloor \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{k^n}{k!} \right\rfloor + 1. \quad (45)$$

En particulier, on peut prendre $K = 2n - 1$.

□