1 Connexité par arcs de $\mathcal{SL}_n(\mathbb{C}), \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$

Définition 1. *Une partie d'un espace topologique X est dite connexe par arcs si pour tout x, y dans X, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

> **Remarque 1.** *On appelera γ un chemin de x à y dans X. Sur le dessin, cela revient à montrer que l'on peut tracer un chemin continu n'importe quel couple de points.*

On pourra également considérer la relation d'équivalence $\longleftrightarrow$ sur X définir par

$$x \longleftrightarrow y \iff \exists \gamma : [0,1] \to X \text{ telle que } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y. \tag{1}$$

Dire que X est connexe par arcs revient à dire que $\longleftrightarrow$ n'admet qu'une seule classe d'équivalence. Autrement, on pourra dire que $X/\longleftrightarrow$ sera le *nombre* de composantes connexes par arcs de X.

A savoir que la connexité par arcs une propriété un peu plus forte que la connexité. Il existe des espaces connexes non connexes par arcs mais tout espace connexe par arcs est connexe.

Une dernière remarque importante est qu'on se soucie assez peu que γ soit à valeurs dans $[0,1]$. En effet, tant que γ est à valeurs sur un segment, on pourra revenir au segment $[0,1]$.

Lemme 1. $\mathbb{C}^*$ *est connexe par arcs.*

Proof. Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$. Presque tout le temps, on pourra trouver un chemin facilement en prenant $\gamma(t) = (1-t)z + tw$. En fait, γ traversera 0 à la condition que z et w soient d'arguments opposés. Supposons que z et w soient de la forme $re^{i\theta}$ et $r'e^{i(\theta+\pi)}$. On définit γ sur $[0,1/2]$ par $\gamma(t) = (1-t)z + tre^{i(\theta+\pi/2)}$ et sur $[1/2,1]$ par $\gamma(t) = (1-t)re^{i(\theta+\pi/2)} + tw$. □

Proposition 1. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

Proof. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. On sait que A est trigonalisable car χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$. On peut alors écrire $A = PT(a_1, \ldots, a_n)P^{-1}$ avec $T(a_1, \ldots, a_n)$ une matrice triangulaire de diagonale $a_1, \ldots, a_n$. On note γ_{ii} le chemin de a_i vers 1. Pour tous les autres coefficients, on note γ_{ij} le chemin de $T_{i,j}$ à 0. Et finalement, on pose $\Gamma(t) = (\gamma_{i,j}(t))_{i,j}$. Remarquons que $\Gamma(0) = A$ et que $\Gamma(1) = I_n$. De plus, chacune des fonctions composites $\gamma_{i,j}$ est continue donc Γ est continue, à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ car les éléments de la diagonale restent non nuls (via le lemme précédent). On a donc trouvé un chemin de A vers I_n.

Considérons une autre matrice quelconque $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. On a

$$A \longleftrightarrow I_n \longleftrightarrow B. \tag{2}$$

On en déduit que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. □

Lemme 2. *Soit $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, alors A est semblable à* $\mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$.

Proof. Premièrement, on sait qu'une valeur propre λ de U vérifie $|\lambda| = 1$. On considère u l'endomorphisme canoniquement associé à U. On procède par récurrence sur n.

Le cas $n = 1$ est trivial. On considère un espace de dimension $n + 1$. u admet une valeur propre λ et on considère x un vecteur propre unitaire associé. $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ est une droite stable par u donc $D^{\perp}$ est aussi stable par u.

On considère ensuite $v = u_{|D^{\perp}}$ l'endomorphisme induit par stabilité. Par l'unitarité de u, v est aussi unitaire sur un espace de dimension n. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ de diagonalisation de v. On ajoute ensuite e_1 à cette base, ce qui en fait une base de diagonalisation de u.

Retour à la matrice U, il existe donc une matrice unitaire P telle que $P^{-1}UP = \mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}, \lambda)$, car les valeurs propres de U sont de module 1. □

On remarquera bien que

Proposition 2. *$\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

Proof. □