1 Nombre de Catalan

Abstract

On note c_n le nombre de parenthésages bien formés de longueur $2n$, on parle aussi de chemins de Dyck. Ce nombre est appelé le n-ième nombre de Catalan. On montre que $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Proposition 1. *On a*

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \tag{1}$$

Proof. On considère un parenthésage bien formé w de longueur $2(n+1)$. On peut le décomposer en deux sous-parenthésages x et y de longueurs respectives $2k$ et $2(n-k)$ pour un certain k.

$$w = (x)y \tag{2}$$

Ainsi, pour k fixé, il y a c_k façons de choisir x et c_{n-k} façons de choisir y. On a donc $c_k c_{n-k}$ façons de choisir x et y. En sommant sur k, on obtient le résultat :

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \tag{3}$$

□

On considère $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Proposition 2.

$$C(x) = 1 + xC(x)^2 \tag{4}$$

Proof.

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n && (5)\\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n && (6)\\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} x^n && (7)\\ &= 1 + xC(x)^2 && (8) \end{aligned}$$

□

Cela donne une equation du second degré pour $C(x)$, on a

$$C(x) = \frac{1 + \epsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{9}$$

Remarquons que ϵ n'est pas constante a priori. Cependant, ϵ est continue et $C(0) = -1$. Les seules valeurs de ϵ sont 1 et -1, le théorème des valeurs intermédiaires implique que ϵ est constante. On en déduit

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{10}$$

Il suffit ensuite d'exprimer le terme de droite en série entière.

Proposition 3.

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{11}$$

Proof. On a

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} && (12)\\ &= -\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n && (13)\\ & && (14) \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} &= \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!} && (15)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\dots 1}{2^n n!} && (16)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} && (17)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2n-2}{n-1} && (18) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} C(x) &= -\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2n-2}{n-1}(-4x)^n && (19)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n}\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n 2^{2n}x^{n-1} && (20)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1} && (21)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n && (22) \end{aligned}$$

Par unicité de la série entière, on a $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. □

Corollaire 1.

$$c_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}} \tag{23}$$

Proof. On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{24}$$

On a alors

$$\begin{align} c_n &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{25}\\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} \tag{26}\\ &\sim \frac{1}{n+1}\frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{2\pi n n e^{-2n}} \tag{27}\\ &\sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}. \tag{28}\end{align}$$

□