1 Composantes connexes de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$

Définition 1. *Une partie d'un espace topologique X est dite connexe par arcs si pour tout x, y dans X, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

> **Remarque 1.** *On appelera γ un chemin de x à y dans X. Sur le dessin, cela revient à montrer que l'on peut tracer un chemin continu n'importe quel couple de points.*

On pourra également considérer la relation d'équivalence $\longleftrightarrow$ sur X définie par

$$x \longleftrightarrow y \iff \exists \gamma : [0,1] \to X \text{ telle que } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y. \tag{1}$$

Pour un $x \in X$ donné, on pourra appelé $\mathcal{C}(x)$ la composante connexe par arcs de x. Dire que X est connexe par arcs est équivalent à dire que pour un $x \in X$, $\mathcal{C}(x) = X$.

Lemme 1. *Si f est une application continue de X dans Y, deux espaces topologiques, et que X est connexe par arcs, alors $f(X)$ est connexe par arcs dans Y.*

Proof. Soient $f(x_1), f(x_2) \in f(X)$. X est connexe par arcs donc il existe γ un chemin de x_1 vers x_2. $f \circ \gamma$ est alors un chemin de $f(x_1)$ vers $f(x_2)$. □

Proposition 1. *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.*

Proof. On remarquera que det est une application linéaire surjective et continue de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^*$. Or, $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs. Par contraposée du lemme précédent, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. □

Nous allons en fait montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes par arcs.

Lemme 2. *$\mathcal{O}_n\mathbb{R}$ admet deux composantes connexes par arcs, $\mathcal{O}_n^+$ et $\mathcal{O}_n^-$.*

Evidemment, $\mathcal{O}_n\mathbb{R}$ n'est pas connexe par arcs. Simplement car un espace discret ne peut être connexe par arcs que s'il est réduit à un singleton, ce qui n'est pas le cas de $\det(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Proof. On note $R(\theta)$ une matrice de rotation θ. Soit $A \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{Diag}(I_r, R(\pi), \ldots, R(\pi), R(\theta_1), \ldots, R(\theta_p))$. On considère δ un chemin de πà0. On pose $\Delta(t) = \mathrm{Diag}(I_r, R(\delta(t)), \ldots, R(\delta(t)))$. Ensuite, on considère γ_i un chemin de θ_i à 0 dans $]-\pi, \pi[$.

On finit par poser $\Gamma(t) = P\mathrm{Diag}(\Delta(t), R(\gamma_1(t)), \ldots, R(\gamma_p(t)))P^{-1}$. On a $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma(1) = I_n$. $\theta \mapsto R(\theta)$ est continue, on en déduit que $t \mapsto \Delta(t)$ et

$t \mapsto \Gamma(t)$ sont continues aussi. On conserve la forme de "diagonale de rotation" ce qui permet d'assurer que Γ est à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\det(\Gamma(t)) = \underbrace{\det(\Delta(t))}_{=1 \text{ ou } =(-1)^{2m}=1} \prod_{i=1}^{p} \underbrace{\det(R(\gamma_i(t)))}_{=1} = 1. \tag{2}$$

On a donc trouvé un chemin de A à I_n, ce qui suffit à montrer que $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

La même démonstration se fait en créant un chemin vers $-1, \mathrm{I_{n-1}}$.

Finalement, il ne suffit que de montrer que $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ forment une partition de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, ce qui est trivial. On a donc montré que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes par arcs, $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. □

Lemme 3. *On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies postives. Alors $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.*

Proof. La preuve est plus simple. On considère $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_i > 0$. (Réciproquement, une matrice d'une telle forme est symétrique définie positive).
$\mathbb{R}_+^*$ est connexe par arcs donc il existe un chemin γ_i de λ_i) 1 dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose ensuite $\Gamma(t) = P\mathrm{Diag}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))P^{-1}$. Γ est continue, à valeurs dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Gamma(0) = A$, $\Gamma(1) = I_n$. On a donc trouvé un chemin de A à I_n. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est donc connexe par arcs. □

Lemme 4 (Décomposition(s) polaire(s))**.** *Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que*

$$A = SO. \tag{3}$$

De plus, si $\det(A) > 0$, alors $O \in \sqcup\rceil\S\sqcup\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et si $\det(A) < 0$, alors $O \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Proof. A est inversible donc $A^T A$ est symétrique définie positive.

$$A = AA^T {A^T}^{-1}. \tag{4}$$

AA^T est symétrique définie positive donc il existe S symétrique définie positive telle que $AA^T = S^2$. D'où $A = SS(A^T)^{-1}$. En posant $O = S(A^T)^{-1}$, on a bien $A = SO$.
Il reste à montrer que O est orthogonale. On a

$$O^T O = \left(S(A^T)^{-1}\right)^T S(A^T)^{-1} = A^{-1}SS(A^T)^{-1} = I_n. \tag{5}$$

$$OO^T = S(A^T)^{-1}\left(S(A^T)^{-1}\right)^T = S(A^T)^{-1}A^{-1}S = I_n. \tag{6}$$

Pour la remarque supplémentaire du lemme, on a $\det(A) = \det(S)\det(O)$. Or, $\det(S) > 0$ et $\det(O) = \det(A)$. $\square$

Théorème 1. *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes par arcs, $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Proof. Le théorème est une utilisation de tous ces lemmes. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^+$, on considère sa décomposition polaire S, O, donc $O \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note Θ un chemin de O à I_n dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et Σ un chemin de S à I_n dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $\Gamma(t) = \Theta(t)\Sigma(t)$. Γ est continue, à valeurs dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^+$ et $\Gamma(0) = A$, $\Gamma(1) = I_n$. On a donc trouvé un chemin de A à I_n. On a donc montré que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est connexe par arcs.

On fait la même preuve pour $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^-$ en créant un chemin vers $\mathrm{Diag}(-1, I_{n-1})$.

Puisque $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^+$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^-$ forment une partition de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, on a montré que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes par arcs. $\square$