1 Espaces connexes

Définition 1. *Une partie d'un espace topologique X est dite connexe si et seulement si il n'existe pas de partition de A en deux ouverts non vides.*

De manière équivalente, un espace A est connexe si et seulement si les seuls ouverts fermés de A sont $\emptyset$ et A munis de la topologie associée à X.

Lemme 1. *Un espace topologie X est connexe si et seulement si toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète est constante.*

Proof. Supposons que X est connexe et soit $f : X \to \{0, 1\}$ une application continue. Remarquons que $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts fermés dans la topologie discrète de $\{0, 1\}$. Puisque f est continue, on en déduit que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts fermés de X. Comme X est connexe, on a $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. De plus, $A \cap B = \emptyset$ donc on a $f = 0$ ou $f = 1$, i.e. f est constante.

Supposons que toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante. Soit U une partie ouverte et fermée de X. On pose $f = \mathbb{1}_U$. Remarquons alors que f est continue. En effet,

$$f^{-1}(\{0\}) = U^c, \tag{1}$$

$$f^{-1}(\{1\}) = U \tag{2}$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \tag{3}$$

$$f^{-1}(\{0, 1\}) = X. \tag{4}$$

Par définition, chacun de ces ensembles sont ouverts donc f est continue et, par hypothèse, constante. Ou bien, $f = 0$ et donc $U = \emptyset$, ou bien $f = 1$ et donc $U = X$. On en déduit que les seuls ouverts fermés de X sont $\emptyset$ et X, i.e. X est connexe. $\square$

Exemple 1. *Si X est un espace discret, alors toute partie connexe de X est réduite à un singleton.*

Proposition 1. *L'image d'un espace topologique connexe par une application continue est un espace connexe.*

Proof. Soit $f : X \to Y$ une application continue avec X convexe. On pose $A = f(X)$. Soit U une partie ouverte et fermée de A. On sait que $V = f^{-1}(U)$ est une partie fermée et ouverte de X par continuité. Puisque X est connexe, on a que $V = \emptyset$ ou $V = X$. De plus, $f(V) = f(f^{-1}(U)) = U$. Finalement, soit $U = f(X) = A$ ou bien $U = f(\emptyset) = \emptyset$, on en déduit que A est connexe. $\square$

Corollaire 1. *Tout espace topologique homéomorphe à un espace connexe est connexe.*

Proposition 2. *Soit A une partie connexe d'un espace topologique X, alors l'adhérence de A est connexe.*

On peut utiliser les composantes connexes par arcs pour simplifier certaines preuves. En effet, on définit la relation d'équivalence suivante sur un espace topologique X :

$$x \sim y \iff x \in C(y) \tag{5}$$

où $C(y)$ est une composante connexe de X contenant y. En particulier, on a que X est connexe si et seulement si il n'existe qu'une seule classe d'équivalence de $\sim$. Plus généralement, les composantes connexes forment une partition de X.

Proposition 3. *Soit X, Y deux espaces topologiques connexes, alors $X \times Y$ est aussi connexe munit de la topologie produit.*

Proof. Soient $x, x' \in X$ et $y, y' \in Y$. Remarquons que $X \times \{y\}$ est homéomorphe à X, donc connexe. De plus, il s'agit d'une partie de $X \times Y$ contenant (x, y) et (x', y) donc $C(x, y) = C(x', y)$. On fait la même chose avec $\{x'\} \times Y$ qui est homéomorphe à Y donc connexe. On en déduit qu'il s'agit d'une composante connexe de $X \times Y$ contenant (x', y) et (x', y'), d'où $C(x, y) = C(x', y) = C(x', y')$. Il n'y a qu'une unique classe d'équivalence donc $X \times Y$ est connexe. $\square$