

1 Matrices stochastiques

Définition 1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle vérifie les conditions suivantes

1. $M_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
2. $\sum_{j=1}^n M_{ij} = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Remarque 1. Les matrices stochastiques sont souvent utilisées pour modéliser des chaînes de Markov en probabilités.

En particulier, on peut définir une relation d'équivalence sur les états possibles de la chaîne de Markov associée à une matrice stochastique.

Définition 2. Soit M une matrice stochastique, on définit la relation d'équivalence \longleftrightarrow sur $\{1, \dots, n\}$ par

$$i \leftrightarrow j \iff \exists k, k' \in \mathbb{N}, (e_i M^k)_j > 0 \text{ et } (e_j M^{k'})_i > 0. \quad (1)$$

On dit alors que i et j communiquent.

Remarque 2. Si on considère un vecteur de probabilité ν_k qui représente la loi des états de la chaîne à un étape k , alors $\nu_{k+1} = \nu_k M$. On en déduit que $\nu_k = \nu_0 M^k$. Si $\nu_0 = e_i$, alors on étudie la chaîne qui part de l'état i , idem pour j . Si $i \longleftrightarrow j$, alors il est possible de passer de i à j en un nombre fini d'étapes, et réciproquement.

Définition 3. Soit M une matrice stochastique, elle est dite irréductible s'il n'existe qu'une unique classe d'équivalence pour la relation \longleftrightarrow .

Remarque 3. On peut montrer que si M est irréductible, alors pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(e_i M^k)_j > 0$. C'est une conséquence directe de la définition d'irréductibilité. On retrouve la définition classique de l'irréductibilité.

En particulier, une propriété intéressante pour l'étude des chaînes de Markov est l'invariance de la mesure de probabilité. Dans le cas fini, comme nous l'étudions, cela revient le "bon" vecteur de probabilité initial qui assure la stabilité de la mesure.

$$\nu M = \nu. \quad (2)$$

Le problème de trouver une telle distribution initiale est finalement une recherche de vecteur propre associé à la valeur propre 1. Nous allons montrer par le théorème de Perron-Frobenius qu'une chaîne de Markov irréductible admet un tel vecteur propre, unique à une constante près.

Théorème 1 (Perron-Frobenius). *Soit M une matrice stochastique irréductible, alors*

- 1. 1 est valeur propre de M .*
- 2. Il existe un unique vecteur propre à coefficients positifs de M associé à la valeur propre 1 à une constante près.*
- 3. Toutes les valeurs propres de M sont de module strictement inférieur à 1.*

Proof.

□